UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

TESI DI LAUREA

ESTER TORNAVACCA

Terí 02.51

Università degli Studi di Torino

Facoltà di Scienze M. F. N.
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

"Matematica, visione e patologie visive"

RELATORE:
Prof. ***Giorgio Ferrarese***

CANDIDATO:
Ester Tornavacca
Ester Tornavacca

ANNO ACCADEMICO 2001/2002

A tutte le persone che mi hanno aiutata a raggiungere l'esame di laurea.

Ringrazio:

- i Docenti del corso di laurea in Matematica ed in particolare i professori Giorgio Ferrarese e Hisao Fujita;

- gli enti che mi hanno dato fiducia sovvenzionando il mio percorso universitario ed in particolare la Provincia e l'Università degli studi di Torino;

- la dott.ssa Stefania Serre per l'aiuto umano e professionale riservatomi durante tutti gli anni di studio;

- i "borsisti – lettori" per avermi offerto la loro vista;

inoltre, per la specifica assistenza nell'elaborazione della tesi di laurea,

- la dott.ssa Lucia Bello, specialista in neuropsichiatria dell'età evolutiva e i dottori Stefano Barbero, Silvia Farronato e Francesca Ferrara.

Grazie a chi crede e collabora affinché l'handicap non impedisca ad una persona di crescere e realizzarsi.

INDICE

Introduzione

Le pagine seguenti nascono dall'esperienza diretta di chi scrive. Ho voluto indagare e riportare come lo studio della matematica ed in particolare della geometria, mi sia stato d'aiuto per acquisire una migliore percezione del mondo esterno, percezione che a livello personale è esigua a causa della malformazione visiva da cui sono affetta.

L'approfondimento universitario di tale disciplina mi ha confermato che la conoscenza teorica di determinati argomenti favorisce l'interazione con il mondo esterno e conseguentemente la comunicazione con gli altri individui.

Ho cominciato a considerare la matematica, non solo da un punto di vista didattico, ma anche pedagogico.

Non è possibile a un cieco o a un ipovedente cogliere tutte le meraviglie del mondo circostante: potergli fornire una forma - mentis con la quale esplorare il mondo stesso e conseguentemente agire e comunicare, significa sicuramente migliorare la sua socializzazione.

Tutte le persone utilizzano nella loro quotidianità, in forma più o meno conscia, concetti matematici. Se essi vengono padroneggiati anche da persone minorate visive, permettono di estrinsecare uno strumento di analisi e di linguaggio utile sia nel percepire la realtà, sia nel rapportarsi con le persone.

Quali concetti matematici possono essere considerati impliciti nella visione?

Quali di essi si mantengono tali anche per soggetti patologici?

Qual è il percorso didattico più proficuo per l'apprendimento dei concetti in questione da parte di persone ipovedenti?

È indispensabile sintetizzare cosa significa "vedere" sotto il profilo neurologico (capitolo primo): presentando l'occhio e la sua anatomia, il cervello, i suoi neuroni e le sue "ipotesi visive".

In particolare ci si sofferma su quel delicatissimo passaggio, di cui la stessa medicina conosce ancora poco, secondo cui "i nostri occhi ricevono energia e vedono immagini" (R.L.Gregory)

La relazione tra visione e geometria è illustrata nel capitolo secondo: dapprima viene proposta una descrizione intuitiva della geometria proiettiva, poi, attraverso una forma rigorosa essa viene presentata insieme alle geometrie: euclidea, iperbolica ed ellittica.

Evidenziati i concetti fondamentali delle geometrie stesse, se ne ricerca l'intervento nella nostra visione.

In realtà non ci si prefigge di rispondere alla domanda "qual è la geometria della visione?", anche se si riportano alcuni tentativi in proposito. Vengono proposte, piuttosto, alcune considerazioni, che mettono in luce come certe nostre abitudini visive e comportamentali possano essere descritte matematicamente.

La matematica, però, riguarda solo i nostri occhi, o il nostro cervello la utilizza più di quanto ci aspetteremmo? Il capitolo si conclude con una congettura in proposito: "concetti matematici impliciti nella visione".

Questo paragrafo sarà di fondamentale importanza per il problema, di cui si è accennato in precedenza, sulla comunicazione tra soggetti normodotati e patologici.

Chi è, pertanto, un minorato visivo, cioè un "ambliope"? Il terzo capitolo si apre con una introduzione sulle patologie visive e sulle conseguenze che da esse possono derivare.

Segue poi la mia esperienza diretta: viene presentata la mia anamnesi e le difficoltà visive che la minorazione comporta.

Una delle principali è quella per cui "...vedo solo ciò che conosco...": è proprio per arginare questo problema che ho pensato di utilizzare la matematica come mezzo di soccorso/linguaggio.

Nel momento in cui il soggetto è consapevole dell'esistenza di leggi immutabili, di regolarità rispettate o no, di un metodo di categorizzazione comodo secondo la circostanza, padroneggia oggetti geometrici come punti, rette, piani, ecc... allora egli, pur non vedendo ciò che ha di fronte, è pronto per esplorare la realtà circostante con profitto e con il minor dispendio di fatica possibile.

Questo concetto è meglio spiegato attraverso la descrizione di due ambienti distinti: il primo è Palazzo Campana, luogo da me ben conosciuto (sede del Corso di Laurea in Matematica), il secondo è un ambiente totalmente nuovo (ufficio dell' "Azienda Turistica Locale – A.T.L. – Sestriere"). Nel primo caso l'esperienza, con i suoi suggerimenti, è ampiamente intervenuta, nel secondo essa non ha potuto dare alcun apporto, non è rimasto che affidarsi alla "percezione matematica".

Quali "concetti matematici impliciti nella visione", discussi nel capitolo precedente, rimangono tali nel caso di un soggetto ipovedente? Alcune considerazioni mettono in luce che essi non differiscono da quelli dei soggetti normodotati né per la quantità, né per la qualità, anche se si discostano da essi per alcuni aspetti fondamentali.

Ciò implica, ovviamente, la presenza di alcune incongruenze linguistiche, nonché alcuni disagi nella comunicazione, legati ad errori di percezione da parte dell'ipovedente.

È dunque necessario porre molta attenzione alla didattica da utilizzare in presenza di ragazzi ipovedenti o ciechi. Essa, infatti, può diventare il mezzo attraverso cui superare i suddetti disagi.

Il capitolo si conclude con alcune unità didattiche consequenziali, dirette a ragazzi ciechi, atte a creare in loro una coerente concezione spaziale.

CAPITOLO PRIMO

Aspetti neurologici della visione: vedere e immaginare l'oggetto

Introduzione

L'occhio viene spesso paragonato ad una macchina fotografica, ma le sue funzioni percettive non hanno nulla in comune con tale apparecchio, che si limita a trasformare gli oggetti in immagini.

Non si deve, dunque, cedere alla tentazione di dire che gli occhi impressionano il cervello con le riproduzioni fotografiche degli oggetti. Se così fosse, per vedere queste fotografie bisognerebbe ammettere l'esistenza di un occhio interno, il quale, producendo altre fotografie, non potrebbe prescindere a sua volta da un terzo occhio, capace di fotografare e di essere fotografato e così di seguito in un'interminabile successione di occhi e di immagini.

Il compito dell'occhio è quello di inviare messaggi visivi al cervello mediante un codice di segnali nervosi; ciò avviene attraverso una serie di impulsi elettrici interpretati dai centri cerebrali e tradotti nella rappresentazione degli oggetti.

Per analogia possiamo riferirci a quanto avviene per il linguaggio scritto: alle lettere e alle parole stampate viene attribuito un particolare significato, che è chiaro a chi conosce la lingua, sebbene ogni simbolo grafico, di per sé, non sia l'immagine della cosa che evoca nella mente del lettore. Qualcosa di simile avviene quando noi guardiamo un oggetto: il nostro cervello ricava dagli impulsi nervosi (non dalla copia fotografica) gli elementi necessari per ricostruire l'immagine; tale rielaborazione avviene secondo gli schemi dell'attività mentale.

Tuttavia anche ai seguaci della "teoria della copia" non sono sfuggiti aspetti importanti del problema percettivo, né, tanto meno, la difficoltà di spiegare come dal mosaico della stimolazione retinica si generi la percezione degli oggetti da parte del cervello. In particolare tale teoria ha sottolineato la tendenza del sistema percettivo a raggruppare i singoli elementi in unità semplici.

Un esempio di ciò avviene quando il soggetto vedente osserva la figura 1:

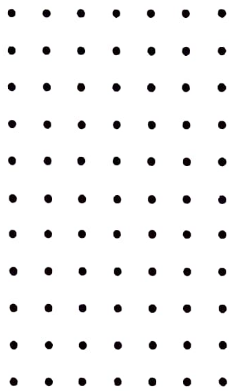


Figura 1

egli tenderà a vedere i singoli punti raggruppati per linee e per colonne. Questo fenomeno costituisce il fondamento del processo percettivo: il cervello è sempre alla ricerca di oggetti che possano riassumere in sé i dati sensoriali ricavati e trasmessi dagli organi periferici, che sono in diretto rapporto con il mondo esterno.

Se così non fosse lo stile di quei disegnatori che schizzano poche linee per riprodurre gli oggetti risulterebbe incomprensibile, mentre in pratica proprio quelle poche linee bastano a farci vedere un volto umano completo nei suoi lineamenti ed espressioni. Pochi tratti di matita rappresentano ciò che è necessario all'occhio per la sua esperienza sensoriale; il cervello, perseguendo il suo programma di identificazione degli oggetti, fa il resto.

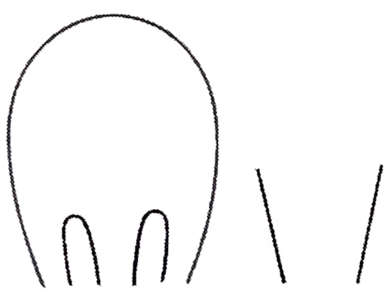


Figura 2

La visione degli oggetti implica il concorso di varie fonti di informazione, oltre a quella rappresentata dagli occhi. Generalmente si dimostra necessaria la conoscenza previamente acquisita dell'oggetto sia attraverso la vista, sia attraverso l'intervento di altri organi di senso (udito, tatto, ecc...). Gli oggetti, infatti, rappresentano molto più di una sorgente di stimoli: essi hanno un passato e un futuro. Quando noi conosciamo il loro passato e possiamo immaginare il loro futuro, diventano per noi delle entità che trascendono l'esperienza sensoriale e concretizzano, in sé, la somma di conoscenze. La comprensione preliminare delle funzioni più elementari del processo sensoriale può avviarci alla conoscenza dei più complessi fenomeni percettivi. Numerosi sono gli esempi di figure cosiddette "ambivalenti", che servono a dimostrare chiaramente come una serie di stimoli, agendo sull'occhio, possa dare origine a percezioni diverse e come, quindi, il processo percettivo vada oltre lo stimolo che lo provoca. Nella fig. 3 le "figure ambivalenti" possono essere individuate in quanto sullo sfondo bianco prevalgono due facce nere, mentre, altre volte, è lo sfondo che prevale delineando un oggetto ben definito: un vaso bianco.

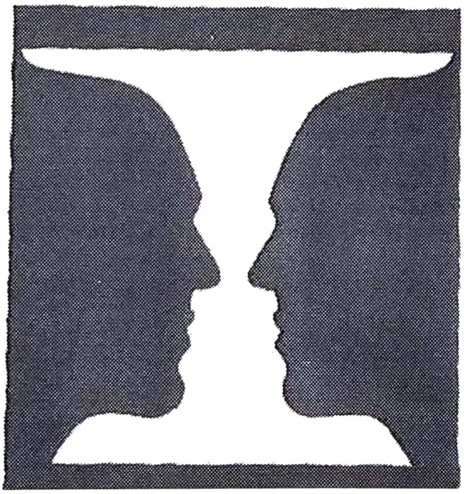


Figura 3: vaso/coppia di volti.

E' quindi il sistema percettivo a "decidere" quale debba essere considerata la figura-disegno e quale lo sfondo. Tale processo è simile alla distinzione che un tecnico del suono deve fare tra un segnale e un rumore di fondo. La percezione, pertanto, non è mai condizionata esclusivamente dagli stimoli sensoriali, ma rappresenta il risultato di un dinamico processo di ricerca, che tende ad offrire l'interpretazione più soddisfacente dei dati disponibili, cioè l'esperienza sensoriale delle nozioni acquisite per altre vie sul conto dell'oggetto (fig. 4).

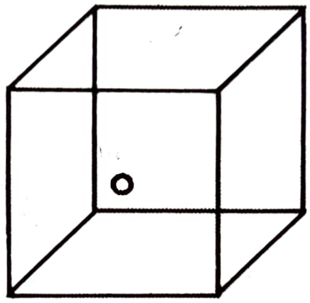


Figura 4: cubo di Necker

Questa figura genera un'ambivalenza nello spazio: la faccia del cubo contrassegnata con un circoletto risulta talvolta quella frontale, talvolta quella posteriore. I due diversi modi di collocare il circoletto possono essere considerati come "ipotesi del sistema percettivo": esso, infatti, le prende in considerazione alternativamente senza mai giungere ad una conclusione. E' difficile stabilire in quale misura l'esperienza influenzi il processo percettivo; è chiaro, però, che la percezione supera l'evidenza immediata dei sensi e poggia su altri elementi, in base ai quali noi interpretiamo l'oggetto. Concludendo i sensi non ci forniscono un'immagine fotografica del mondo esterno, ma ci permettono di avanzare ipotesi. Tuttavia l'occhio e il cervello possono arrivare a conclusioni erronee, come accade negli individui che vanno soggetti a fenomeni di illusione e allucinazione (miraggi e punti di fuga). Tutti noi, comunque, siamo soggetti spesso a fenomeni di "illusione" indispensabili alla rappresentazione prospettica della realtà. La percezione dell'oggetto è, dunque, un'ipotesi, che viene suggerita dai sensi e rielaborata dal cervello, che la definisce secondo attributi convenzionali.

Vedere

La funzione visiva è tra le modalità sensoriali la più evoluta. Il nervo ottico e la retina originano dalla vescicola cerebrale prosencefalica primitiva e vengono considerati come strutture direttamente derivate dall'encefalo. La percezione visiva ha inizio con la formazione dell'immagine sulla parte fotorecettiva della retina, la quale codifica l'informazione visiva trasformandola in impulsi; i neuroni, poi, con i loro prolungamenti li trasmettono al cervello tramite il nervo ottico. Metà delle fibre di quest'ultimo si decussa (incrocia) nel "chiasma ottico" e raggiunge il "nucleo genicolato laterale del talamo". I neuroni talamo-corticali a loro volta inviano prolungamenti all'area visiva primaria della corteccia, nel lobo occipitale, a livello della quale ha luogo la percezione visiva vera e propria.

La stimolazione di alcune cellule dell'area visiva ha permesso di scoprire che esiste una loro specializzazione: alcune reagiscono solo se il raggio luminoso arriva secondo un determinato angolo, altre solo se l'oggetto è in movimento.

E' dimostrata, pertanto, l'esistenza di meccanismi cerebrali che funzionano selezionando le diverse caratteristiche degli oggetti. Nel nostro cervello si formano "immagini mentali" degli oggetti, anche se questo non significa che vengono riprodotti fotograficamente. Sono iniziati gli studi per decifrare il codice con cui gli stimoli sensoriali vengono rappresentati nel cervello.

Ogni parte dell'occhio rappresenta una struttura estremamente specializzata: i suoi tessuti sono altamente differenziati per rispondere a precise esigenze. Il bulbo oculare è di forma sferoidale ed in vicinanza del suo polo posteriore emerge il nervo ottico. Si può affermare schematicamente che esso è costituito da tre "tuniche tessutali" sovrapposte, la più esterna delle quali, fibrosa e resistente, svolge un ruolo protettivo. Per la maggior parte della sua superficie esterna il bulbo oculare è rivestito da una lamina opaca di colore biancastro la "sclera" sulla quale si inseriscono i muscoli oculomotori.

Cornea

A livello del polo anteriore dell'occhio la sclera si continua con una formazione trasparente, la "cornea", attraverso la quale i raggi luminosi penetrano nel bulbo. Essa è caratterizzata dalla totale mancanza di vasi sanguigni, cosa che la rende praticamente indipendente dal resto dell'organismo, caratteristica, però, non esclusiva, perché anche la lente dell'occhio è priva di vasi. Tale mancanza evita che la funzione visiva sia disturbata dalla circolazione sanguigna: il sangue, per sua natura, è soggetto a tutte le caratteristiche fisiche del moto dei fluidi.

In prossimità del margine anteriore della sclera, due anelli costituiti da muscolo "liscio" protrudono all'interno del bulbo oculare.

Iride

Il più anteriore di questi anelli è l'iride che ha un foro centrale, la "pupilla", attraverso cui i raggi luminosi raggiungono la parte posteriore dell'occhio. Parte delle fibre muscolari dell'iride sono orientate in senso circolare, parte in senso radiale. Esse sono tutte controllate dal sistema nervoso "autonomo" e lavorano nel modo seguente: le prime riducono il diametro pupillare "miosi", diminuendo così la quantità di luce che raggiunge la retina, le seconde, contraendosi, fanno dilatare la pupilla "midriasi". Posteriormente all'iride si trova il "corpo ciliare" che contiene il "muscolo ciliare".

Il pigmento presente nell'iride ci offre una vasta gamma di colori (colore degli occhi), ma non è importante questo o quel pigmento in quanto il suo unico scopo è rendere opaca l'iride, in modo da limitare l'apertura della lente.

Cristallino

L'apertura centrale delimitata dall'anello costituito dal corpo ciliare è occupata dal "cristallino" o "lente". Si tratta di una lente biconvessa trasparente, che consente di mettere a fuoco i raggi sulla retina. Il cristallino viene mantenuto in sito da un legamento che si va a inserire sul corpo ciliare: la contrazione del muscolo ciliare modifica la forma e quindi il potere diottrico (lunghezza focale) del cristallino; questo fenomeno è noto come "accomodazione". Il cristallino e il legamento sospensore dividono la cavità del bulbo oculare in una parte anteriore e in una posteriore.

Possiamo notare come nel caso dell'occhio umano la capacità di messa a fuoco del cristallino è meno precisa di quanto lo sia per altri animali, infatti la massima deviazione dei raggi luminosi necessari a formare l'immagine avviene nell'uomo a livello della cornea. Tale deviazione, infatti, dipende dall'indice di rifrazione dei mezzi con cui la cornea è a contatto: aria anteriormente e umor acqueo posteriormente.

La parte anteriore del bulbo oculare è chiamata "camera anteriore" e contiene un liquido noto come "umor acqueo", che viene secreto in continuazione ad opera del corpo ciliare. Questo liquido viene riassorbito dal corpo ciliare stesso e raccolto all'interno di esso in un piccolo dotto, che lo convoglia nella circolazione venosa. La parte posteriore del bulbo oculare si chiama "camera posteriore" e contiene un materiale gelatinoso denominato "corpo vitreo". Posteriormente al corpo ciliare la superficie interna della sclera è rivestita dalla "coroide" le cui cellule contengono un pigmento scuro fotoassorbente, che riduce i fenomeni di riflessione all'interno dell'occhio. Il rivestimento della superficie interna della coroide è costituito dalla retina, struttura fotosensibile.

I raggi luminosi provenienti dagli oggetti posti nel campo visivo, entrano nel bulbo oculare attraverso il foro pupillare e formano l'immagine sulla retina. Un oggetto posto nel campo visivo e su cui si concentra l'attenzione, forma un'immagine centrata in prossimità del polo posteriore del bulbo oculare, lungo la linea dell'asse visivo.

In questo *punto,* denominato "fovea" e nella zona ad essa circostante per il raggio di circa 1cm chiamata "macula", la retina presenta un aspetto particolare adatto alla massima acuità visiva: "potere di risoluzione". Le proprietà ottiche fondamentali dell'occhio, che possono essere paragonate a quelle di una macchina fotografica, con un diaframma dall'apertura molto ridotta, fanno sì che l'immagine, formatasi sulla retina, sia rovesciata rispetto ad ogni direzione: destra-sinistra, alto-basso. C'è, inoltre, un'altra inversione: gli oggetti che si trovano nella metà sinistra del campo visivo formano un'immagine sulla metà nasale destra della retina sinistra e viceversa. Medialmente alla macula si trova una regione in cui gli assoni retinici si riuniscono per uscire dal bulbo oculare e formare il nervo ottico, la cosiddetta "papilla ottica" (è chiamata anche "macchia cieca" perché non contiene fotorecettori).

Retina

Il nome deriva dal fitto intreccio dei suoi vasi sanguigni, che ricorda appunto l'aspetto di una rete.

Ciascuna della due retine risulta divisa in due metà, secondo un piano verticale che passa per il loro centro.

La retina è costituita da una parte non nervosa e da una parte nervosa. La parte non nervosa è costituita da cellule pigmentate, disposte in singoli strati, che assorbono i raggi luminosi e sono adiacenti alla coroide. La parte nervosa, invece, contiene fotorecettori, neuroni, cellule gangliari e una ricca rete capillare. Le cellule "fotorecettrici" sono situate nello strato più profondo della retina e si interdigitano con "l'epitelio pigmentato". I raggi luminosi che penetrano nel bulbo oculare, passano attraverso questo epitelio e vengono in parte riflessi e in parte assorbiti da questi elementi addizionali, prima di raggiungere i recettori. Per mezzo di una serie di reazioni fotochimiche e di processi fotochimici i fotorecettori trasducono l'energia luminosa in energia elettrica, attraverso la modificazione del "potenziale di membrana"; essi sono di due tipi: bastoncelli e coni. I bastoncelli sono 20 volte più numerosi dei coni e sono molto importanti per la visione crepuscolare; i coni invece sono responsabili della visione a colori e le loro connessioni neuronali permettono di controllare l'acuità visiva. I bastoncelli e i coni sono distribuiti in maniera non uniforme nella retina; i primi, in particolare, predominano perifericamente in essa e decrescono man mano che si va verso la macula, dove invece abbondano i coni. Nella fovea sono presenti solo coni; inoltre i neuroni e i capillari ivi collocati, attraverso i quali i raggi devono passare per raggiungere i fotorecettori, sono distribuiti in modo da consentire un'esposizione diretta dei coni alla luce: è questa disposizione a consentire la massima acuità visiva. Oltre alle cellule fotorecettive la retina contiene i neuroni di primo e secondo ordine delle vie visive: i neuroni di primo ordine, detti "cellule bipolari", sono situati interamente a livello della retina, mentre l'assone del neurone di secondo ordine, "cellula multipolare", denominata anche gangliare, va a costituire il nervo ottico. Le informazioni vengono così trasferite dai fotorecettori alle cellule bipolari e da qui alle cellule multipolari; notiamo che la maggior convergenza è effettuata dai bastoncelli, non dai coni.

Ai bastoncelli, inoltre, è affidata la percezione chiaro-scurale e l'intensità luminosa non è indispensabile. Come dice Tonino Casula: "Questo spiega perché, quando c'è pochissima luce, tutte le vacche sono grigie: per vederle, infatti , mettiamo al lavoro i bastoncelli che i colori non sanno neppure cosa siano….

Al crepuscolo non solo tutte le vacche sono grigie, ma un cane che attraversa la strada è più difficile che venga visto da un automobilista".

In presenza di poca luminosità la retina deve trovarsi in un grado maggiore di sensibilità; esso le viene fornito da un processo di modificazioni fitochimiche, che, probabilmente, costituiscono una specie di integrazione di energia. Questo stesso

processo, però, provoca anche un dispendio di energia, che diminuisce l'acuità visiva (capacità di distinguere due punti ravvicinati posti ad una certa distanza) e rallenta i tempi di trasmissione dei segnali dalla retina al cervello.
La retina contiene anche interneuroni di due tipi: "cellule orizzontali", che modulano la trasmissione tra fotorecettori e cellule bipolari, e "cellule amacrine" deputate alla trasmissione tra cellule bipolari e multipolari.

I movimenti dell'occhio

Come detto in precedenza ogni occhio viene azionato da sei muscoli. Gli occhi compiono continuamente movimenti di vario genere; quando si spostano alla ricerca di un oggetto, il movimento si manifesta sotto forma di piccole scosse brusche dei globi oculari, definite "movimenti di saccade". Tali movimenti sono essenziali per la visione: la fissazione delle immagini sulla retina permette che queste, pur seguendo i movimenti dei globi oculari, rimangano ferme rispetto alla retina stessa. Quando l'immagine è stabilizzata svanisce dopo pochi secondi; è compito specifico dei movimenti saccadici spazzare via l'immagine dai fotorecettori, perché non le si adattino e cessino di segnalarne la presenza al cervello.
A questo proposito si prospetta un problema curioso. Quando si guarda un foglio di carta bianca, i contorni dell'immagine si muovono sulla retina e i movimenti dell'occhio riescono a rimuovere l'immagine. Se però fissiamo solo il centro del foglio questi movimenti risultano inefficaci, perché lo stimolo, che proviene da una zona di una data luminosità, viene sostituito da un altro stimolo, che ha esattamente la stessa intensità luminosa e pertanto l'immagine del centro del foglio, in questo caso, non svanisce.
Questo ci fa pensare che i contorni degli oggetti debbono avere una parte molto importante nel processo percettivo, mentre meno significativi sono gli stimoli che provengono da vaste zone di uniforme luminosità. Ricordiamo che il sistema visivo, quando dispone dei contorni di un oggetto, provvede per proprio conto a completarne l'immagine.
I movimenti oculari sono di vario genere; approfondiamo i principali.

La fissazione

La fissazione è quel processo mediante il quale lo sguardo coglie le informazioni necessarie ad individuare le caratteristiche dell'oggetto che sta direttamente osservando e sul quale ha puntato la macula (fovea). Spesso nei bambini con deficit visivo e/o pluri handicap la fissazione può risultare instabile e lo sguardo apparire caotico.

L'inseguimento

L'inseguimento, che si verifica solo dopo aver individuato uno stimolo in movimento, consiste nel mantenere il punto di fissazione attraverso la rotazione del capo e/o lo spostamento dei bulbi oculari. Prima di poter inseguire uno stimolo visivo, deve essere, tuttavia, presente almeno un minimo di fissazione.

L'arrampicamento

L'arrampicamento è quel movimento dello sguardo che consiste nello spostare la fissazione da un oggetto all'altro, quando gli stimoli visivi si trovano così vicini tra loro da attivare il riflesso chiamato "maculo-maculare".

Esplorazione visiva

L'esplorazione visiva è la somma di fissazioni operate su oggetti grandi o su situazioni complesse al fine di unificare le singole informazioni ricevute in un completo e significativo insieme.

Vie visive e cervello

Il cervello è un complicato ingranaggio formato da una moltitudine di cellule e può essere paragonato a una calcolatrice elettronica in cui arrivano input esterni, in rapporto ai quali vengono "prese decisioni". Le aree deputate al riconoscimento di parte di tali input e all'elaborazione della risposta sono collocate sulla corteccia cerebrale così come per l'attività degli organi di senso.

Alla base del funzionamento del cervello c'è la "cellula nervosa", dotata di un corpo da cui si dipartono un prolungamento detto "cilindrasse", che conduce l'impulso nervoso in via centrifuga, e dei filamenti più corti e sottili, detti "dendriti", che conducono gli impulsi nervosi per via centripeta.

Le cellule nervose (con i dendriti, che si anastomizzano tra loro, e con il cilindrasse) in certe zone sembrano disposte a caso, in altre, come nella regione visiva, si allineano in file ordinate. I segnali nervosi vengono trasmessi sotto forma di impulsi elettrici, che si generano dalla variazione della permeabilità ionica della membrana cellulare.

Allo stato di riposo la parte centrale della fibra diventa positiva e dà origine a un flusso di corrente che si propaga come un'onda lungo il nervo. Gli impulsi elettrici viaggiano con una velocità inferiore a quella della corrente elettrica lungo un filo metallico; essa raggiunge circa i 100 m/s nelle fibre più grosse e meno di 1 m/s in quelle più sottili.

Le fibre più grosse presentano un rivestimento di sostanze grasse detto "mielina" che isola ogni fibra dalle vicine e ne aumenta la velocità di conduzione.

Gli assoni delle cellule multipolari della retina confluiscono nella papilla ottica costituendo il nervo ottico, che entra nella cavità cranica attraverso il "canale ottico"; i due nervi ottici convergono formando il "chiasma ottico", posto alla base del cranio. A livello del chiasma le fibre nervose, che provengono dalla metà nasale delle due retine, si incrociano e passano nel "tratto ottico controlaterale", mentre le fibre provenienti dalla metà temporale della retina restano omolaterali. I tratti ottici si allontanano dal chiasma e le fibre in essi contenute terminano quasi tutte a livello del nucleo genicolato laterale nel corpo genicolato laterale del talamo. Un contingente esiguo di fibre abbandona il tratto ottico prima di raggiungere il nucleo genicolato laterale e termina nell'area "pretettale": queste fibre formano la base anatomica del riflesso pupillare. Dal nucleo genicolato laterale esse decorrono formando le radiazioni ottiche, che terminano a livello dell'area visiva primaria della corteccia del lobo occipitale.

L'area visiva primaria è situata prevalentemente al livello della superficie mediale degli emisferi, nella regione posta sopra e sotto la "scissura calcarina". La regione corticale del lobo occipitale, che circonda questa area, costituisce "l'area visiva associativa", deputata all'elaborazione delle immagini visive, al loro riconoscimento, alla percezione della profondità e alla visione dei colori.

Ciascun nervo ottico conduce stimoli provenienti da entrambe le metà del campo visivo; tuttavia all'incrocio delle fibre, provenienti dalle metà nasali della retina, ciascun tratto ottico, ciascun nucleo genicolato laterale e la corteccia visiva dello stesso lato ricevono informazioni relative solo alla metà controlaterale del campo visivo. Questa combinazione di immagini, provenienti da entrambi i bulbi oculari, è necessaria per la visione stereoscopica (percezione della profondità).

L'assorbimento della luce e la sua trasformazione in segnali elettrici è opera dei fotorecettori. L'informazione viene trasmessa dai recettori alle cellule gangliari attraverso le cellule bipolari. Le cellule gangliari, a loro volta, inviano le informazioni ricevute ai centri cerebrali superiori, attraverso i propri assoni, formanti il nervo ottico. Le cellule orizzontali e le cellule amacrine sono deputate a trasmettere le informazioni alle cellule bipolari e alle cellule gangliari; trasmissione che avviene non in senso verticale ma in senso laterale.

L'organizzazione sinaptica della retina ha le caratteristiche proprie delle strutture nervose e ha fra i principali neurotrasmettitori il glutammato e altri amminoacidi.

I segmenti esterni dei bastoncelli e dei coni, "fotopigmenti", sono addetti al rilevamento della luce, in quanto posseggono un'alta concentrazione di "pigmenti visivi", capaci di assorbire l'intensità luminosa. Riassumendo avviene quanto segue: la luce attiva le molecole di pigmento dei fotorecettori ed esse, una volta stimolate, modificano metabolicamente la concentrazione cellulare di un nucleotide (catena di amminoacidi) chiamato "G.M.P. c." (abbreviato con "G.M.P.") .

In questa serie di reazioni a cascata il G.M.P. attiva una proteina chiamata "proteina G o transducina" dalla cui reazione finale si viene a determinare una diminuzione di concentrazione del G.M.P. stesso; è proprio questo suo nuovo livello che, attraverso un'opera di polarizzazione, fa ripartire la funzione del segmento esterno dei fotorecettori.

L'adattamento alla luce dei fotorecettori dipende dalle variazioni della concentrazione cellulare del calcio. Nei campi recettivi delle cellule gangliari retiniche il centro e la periferia rispondono alla luce in maniera antagonista: mentre l'informazione visiva viene trasferita dai fotorecettori alle cellule gangliari, essa viene anche separata in due vie parallele, dette rispettivamente "via centro on" e "via centro off". Le cellule gangliari centro on vengono eccitate quando la luce stimola il centro dei loro campi recettivi e inibite, al contrario, quando viene stimolata la periferia; le cellule gangliari centro off hanno risposte opposte. Queste trasformazioni dell'informazione visiva rendono i centri superiori capaci di mettere in evidenza piccolissime differenze e rapide variazioni della luminosità. Esistono poi altre cellule gangliari specializzate nell'elaborazione di altre caratteristiche delle immagini visive: alcune sono deputate all'informazione dei profili, delle caratteristiche generali dell'oggetto e del suo movimento, altre mettono in rilievo i dettagli e il colore degli oggetti presenti nello scenario visivo.

Anche le cellule bipolari, come le cellule gangliari, si possono distinguere in bipolari centro on e in bipolari centro off. Il neurotrasmettitore liberato dai coni eccita le cellule bipolari di un tipo, mentre inibisce quelle dell'altro. Ciascun cono ha contatti sinaptici con cellule bipolari di entrambi i tipi. I coni localizzati nel centro del campo recettivo di una cellula gangliare formano sinapsi con le cellule bipolari, che entrano in contatto diretto con la cellula gangliare stessa. Gli stimoli provenienti dai coni localizzati alla periferia dei campi recettivi vengono invece convogliati lungo vie collaterali, che passano attraverso le cellule orizzontali e le cellule amacrine.

La separazione delle diverse caratteristiche degli stimoli visivi in vie distinte, poste in parallelo, e la modificazione delle risposte, mediante connessioni inibitorie laterali, sono principi cardine di tutto l'apparato visivo, perciò vengono mantenuti e sviluppati ad ogni suo livello.

La complessità del sistema visivo è indicata dal numero delle sue fibre: il nervo acustico contiene all'incirca 30 mila fibre, il nervo ottico 1 milione (più di tutte le fibre delle radici dorsali che entrano nel midollo spinale).

Rielaborazione cerebrale della visione

L'informazione necessaria per la percezione visiva passa, come si è detto, dalla retina al corpo genicolato laterale. In entrambe queste strutture le cellule rispondono a piccoli stimoli luminosi di forma circolare (le cellule gangliari, infatti, hanno campi recettivi concentrici, organizzati sulla base di un antagonismo tra centro e periferia: queste cellule misurano la discrepanza di intensità luminosa che intercorre proprio tra il loro centro e la periferia).

Una parte della corteccia visiva primaria (area 17 di Brodmann) modifica questi campi recettivi circolari in segmenti e contorni rettilinei. I modi di trasformazione sono tre:

1. nelle colonne cellulari di primo "orientamento" (deputate alle immagini che provengono dall'intero arco di 360°) ogni parte del campo visivo viene

decomposta in brevi segmenti lineari di direzione diversa. Si ritiene che questo primo passaggio sia necessario per la discriminazione delle forme e del movimento;

2. le informazioni relative ai colori vengono rielaborate in particolari formazioni cellulari, distinte proprio secondo il colore; esse sono chiamate "blob" e non hanno selettività per l'orientamento;
3. le afferenze provenienti dai due occhi vengono riunite nelle "colonne di dominanza oculare" (sono colonne cellulari che analizzano le immagini a seconda della provenienza dall'occhio destro o da quello sinistro; sono importanti per le interazioni binoculari). Si ritiene che questo passaggio sia il primo di una serie di trasformazioni necessarie per la fusione delle immagini e per la percezione della profondità.

Ogni strato della corteccia svolge un compito particolare, la posizione di ogni cellula all'interno dello strato determina le sue proprietà funzionali.

Per realizzare questa serie di analisi in parallelo, le connessioni centrali del sistema visivo devono essere altamente specifiche. Le singole zone della retina proiettano informazioni al corpo genicolato laterale del talamo in modo tale che in ciascun nucleo vi sia una rappresentazione completa del campo visivo di ogni occhio. Inoltre per assicurare questa alta specificità le singole zone della retina posseggono tipi di cellule gangliari differenti, che proiettano a diversi centri del tronco dell'encefalo: alcune cellule proiettano al talamo, altre al mesencefalo, altre ancora a entrambe queste formazioni.

Nel dettaglio le rielaborazioni affidate al mesencefalo stesso sono suddivise tra il "collicolo superiore" e il corpo genicolato laterale. Il primo controlla i movimenti saccadici e coordina le informazioni visive, somatiche e uditive, orientando i movimenti del capo e degli occhi verso la sorgente dello stimolo. Il secondo elabora le informazioni visive.

Le cellule della corteccia visiva danno origine ai circuiti caratteristici dei diversi strati e sono organizzate funzionalmente in sistemi colonnari: colonne specifiche per l'orientamento, colonne di dominanza oculare e le cellule blob. Tutte queste colonne sono collegate tra loro da connessioni orizzontali. Le informazioni, pertanto, viaggiano tra uno strato e l'altro sia perpendicolarmente alla superficie cerebrale sia orizzontalmente ad essa, attraverso ciascuno strato. Ogni unità colonnare sembra essere in grado di funzionare come un modulo elementare di analisi: ogni modulo riceve afferenze diverse, le trasforma e invia le proprie efferenze a regioni cerebrali differenti.

L'elaborazione dell'informazione visiva, però, non avviene solo nell'area " 17 di Brodman " e " 6 " dei lobi occipitali, ma anche in aree vicine ai lobi temporali e parietali.

Riassumendo: nella corteccia visiva primaria (occipitale) 400 milioni di neuroni sono raggruppati, secondo specificità simili, in un mosaico di colonne ed è proprio questo tipo di organizzazione, che può essere visto come il primo stadio della ricostruzione dell'immagine retinica. La mappa dell'orientamento dello stimolo, inoltre, è sovrapposta alla mappa corrispondente ai campi retinici, dove ciascuna regione è costituita da colonne che rappresentano globalmente tutte le direzioni degli stimoli ad essa giunti.

La complessità della risposta visiva si avvale anche dei neuroni dell'area 7, in cui alcuni di essi sono sensibili al movimento e allo spazio visivo, mentre altri segnalano la direzione del movimento e la sua relazione con lo spazio circostante. Le risposte dei neuroni dell'area 7 agli stimoli visivi e al movimento forniscono indicazioni sullo spazio circostante: pazienti con lesioni a questa area non localizzano oggetti posti nella metà controlaterale dello spazio, pur vedendoli correttamente.

Nella parte superiore dell'area "4" sono rappresentate le cosiddette cellule semplici, che sono strettamente monoculari e rispondono a linee o a bordi orientati, rispettivamente, orizzontalmente, verticalmente o obliquamente.

Nelle aree visive secondarie e terziarie, invece, (18 e 19 del lobo occipitale) si trovano neuroni sensibili soprattutto alla lunghezza e allo spessore di linee sia luminose sia scure, al loro orientamento nello spazio e persino all'angolo formato da due linee che si intersecano. Questi neuroni sono chiamati "complessi e ipercomplessi" inquanto costituiscono un ulteriore stadio nella ricostruzione dell'immagine.

La specializzazione dei neuroni è ancora più significativa nella zona temporale, in cui le cellule presentano capacità specifiche, che le qualificano per il riconoscimento esclusivo di quadrati, rettangoli, triangoli e stelle. Altri neuroni, sempre del lobo occipitale, sono invece deputati al riconoscimento di facce, mani o parti di esse.

Percezione del movimento, del senso della profondità e delle forme: il "che cosa" e il "dove"

La domanda a cui oggi si rivolgono le ricerche non è più quella sulle componenti elementari della percezione, ma su quali trasformazioni nervose determinano la comparsa di una certa percezione. La risposta a questa domanda mette in luce la complessità delle operazioni neuro-biologiche.

Come già detto, l'elaborazione delle immagini viene operata attraverso una serie di vie disposte in parallelo, che prendono origine fin dalla retina, vanno al corpo genicolato laterale e di qui si portano alla corteccia striata, da cui proseguono verso le altre zone della corteccia.

Secondo Marr la visione è il processo mediante il quale si scopre, a partire da immagini, sia cosa è presente nel mondo visivo, sia dove l'oggetto dello sguardo si trova. Questi due compiti, il "che cosa" e il "dove", vengono svolti da due vie anatomiche distinte: la prima è il sistema "parvicellulare-interblob", che convoglia le informazioni relative alle forme; il secondo, il sistema "parvicellulare-blob", invece, contiene le informazioni relative ai colori.

I neuroni deputati all'analisi delle forme hanno la caratteristica di adattarsi molto lentamente e di possedere un grande potere risolutivo. Questa caratteristica è, con ogni probabilità, molto importante per l'osservazione dei particolari degli oggetti immobili. In definitiva questo sistema, essendo deputato a vedere il "cosa", ha il compito di fare un'analisi del contorno dell'oggetto. Il "dove" è invece la meta dei neuroni del sistema magnocellulare, specializzato nell'analisi del movimento, delle relazioni spaziali fra gli oggetti e di una parte della visione stereoscopica (basata però soprattutto sulla disparità retinica). I neuroni di questo sistema danno risposte rapide e transitorie, sono praticamente insensibili ai colori e rispondono debolmente alle sagome e ai margini degli oggetti, che individuano solo sulla base del contrasto.

Queste due vie vanno a terminare nella corteccia infero-temporale, che è l'area riservata al riconoscimento delle forme; la localizzazione degli oggetti nello spazio, invece, è compito del sistema "magno-cellulare", che sfocia nella corteccia parietale posteriore, sede dell'organizzazione spaziale.

In realtà la rappresentazione della visione del movimento ha un struttura molto più articolata. Il movimento viene rappresentato in molte altre aree cerebrali in maniera molto più complessa. Facciamo un esempio: in un disegno di una griglia con righe in tre direzioni diverse è stato osservato che esistono neuroni chiamati selettivi per le componenti della direzione al movimento. Queste cellule sono in grado di rispondere solo ad un movimento perpendicolare all'asse preferenziale d'orientamento. Pertanto non rispondono al movimento dell'intera struttura e della sua direzione. Per la globalità del movimento, infatti, esistono altre popolazioni di neuroni chiamati "neuroni selettivi per la direzione globale".

Per quanto riguarda i neuroni selettivi per l'orientamento, invece, sappiamo che essi danno informazioni sulla sagoma delle forme, mentre i neuroni selettivi per la disparità retinica delle immagini colgono la natura tridimensionale degli oggetti solidi.

Entrambi questi ultimi due tipi di neuroni selettivi hanno importanza per dirci "cosa percepiamo", mentre quelli riservati alla direzione del movimento ci dicono "dove" sono situati gli oggetti nello spazio. In generale noi ci muoviamo attraverso il nostro mondo percettivo e, perché il nostro comportamento sia coerente, ci è indispensabile ricevere informazioni sul movimento degli oggetti che stanno intorno a noi. Osserviamo, però, che, anche se gli oggetti che attirano il nostro interesse non si muovono, le loro immagini, proiettate sulla retina, si muovono ugualmente, perché né gli occhi né il campo visivo sono mai perfettamente fermi (fig. 5).

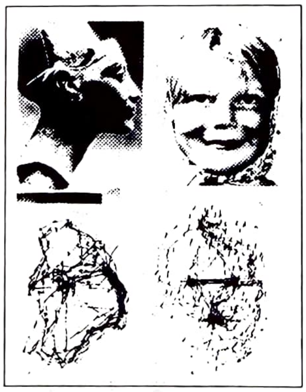


Figura 5: fanciulla sul Volga.

Il sistema visivo ha due modi per riconoscere il movimento: uno è in relazione al movimento delle immagini, l'altro è in rapporto al movimento degli occhi e del campo visivo. Il riconoscimento del moto delle immagini è fondamentale per il comportamento adattivo degli animali, ma è così strutturalmente complesso che solo nell'uomo e nei primati più evoluti il sistema visivo è in grado di interagire con oggetti che non si muovono. Anche noi risentiamo di tale complessità, infatti essa induce una limitazione profonda nella parte periferica della retina umana, che coglie solo gli oggetti in movimento.

Solo recentemente si è potuto chiarire che l'analisi visiva comporta la presenza di diverse vie in "parallelo", piuttosto che una successione di stazioni in serie; le tre vie principali poste in parallelo sono: una via magnocellulare per il movimento e due vie parvicellulari, una specifica per i colori e una per le forme. La visione stereoscopica sembra invece essere mediata non solo da entrambe le vie parvicellulari, ma anche dalla disparità retinica; essa a sua volta si basa su elementi visivi di colore, di contorno, di movimento, mediati dalla via magnocellulare. Questa importante scoperta ha introdotto un nuovo problema nello studio della percezione visiva. Tale problema riguarda l'interazione tra le cellule deputate alla visione durante gli scambi di informazioni. In una via posta in serie l'integrazione avviene, infatti, in modo "progressivo", mano a mano che le informazioni si trasformano, passando da una stazione alla successiva. In un sistema di vie in parallelo, ciascuna delle quali con una funzione diversa, l'integrazione può essere raggiunta solo in modo "interattivo". Dunque il problema è: come e dove ha luogo questa interazione nel sistema visivo? D. Van Essen et al.(1988) mettono in rilievo il fatto che fra le vie principali vi sono collegamenti estesi che interessano quasi tutti i livelli corticali. Ogni elemento visivo viene trattato, seppure in modi alquanto diversi, da più di una via. Le argomentazioni di Treisman et al (1988)., inoltre, fanno ritenere che sia necessario prendere in considerazione anche le afferenze (input) delle aree visive provenienti dai centri cerebrali, che influenzano il livello di attenzione (corteccia prefrontale, pulvinar, claustro). Questi sistemi sembrano permettere ai meccanismi dell'attenzione di collegare i diversi processi visivi ed è assai probabile che una buona parte dell'analisi visiva sia essenziale per il controllo del movimento e la guida volontaria di esso. Anche il solo fatto di spostarci nel mondo esterno, richiede un'analisi complessa degli stimoli visivi, che riguardano almeno il riconoscimento delle diverse figure sul loro sfondo e la valutazione delle distanze. La maggior parte delle informazioni sensoriali ricevute dai nostri recettori periferici viene filtrata; alla fine è eliminata dal sistema nervoso allo stesso modo con cui, quando vogliamo concentrarci su un immagine, ne trascuriamo lo sfondo.

Di conseguenza, sebbene il sistema visivo contenga vie in parallelo, capaci di elaborare informazioni di natura diversa, in pratica la nostra capacità di analizzare simultaneamente più di un'informazione è sorprendentemente limitata dal meccanismo dell'attenzione selettiva.

"Vedere per credere"o "Credere per vedere"?

La semplice osservazione del mondo esterno, il vedere un viso o l'ammirare un panorama, comporta una capacità di analisi molto maggiore di quella necessaria per risolvere problemi di logica o per giocare a scacchi.

Come si realizza questa analisi?

La nostra capacità di mantenere invariata la percezione delle dimensioni o dei colori, nonostante spesso le variazioni dell'intensità della luce cambino anche di mille volte, ci illustra bene quanto versatile ed eccezionale sia il nostro sistema visivo. Esso, infatti, trasforma gli stimoli luminosi transitori, che cadono sulla retina, nella rappresentazione mentale stabile di un mondo a tre dimensioni. Le capacità di suddetta trasformazione sono state valutate nelle loro reali proporzioni solo in questi ultimi anni.

Fino agli inizi del secolo la percezione era considerata un processo di semplice sintesi additiva, nel quale le singole sensazioni venivano sovrapposte l'una all'altra (Locke, Berkeley). Con i tedeschi Wertheimer, Koffka, Kohlt, i quali fondarono la "scuola" Gestalt-psychology (1927), emerge una nuova concezione, secondo la quale la percezione non è atomistica ma olistica. Questo comporta un processo attivo e creativo, che va molto al di là delle semplici informazioni fornite dalla retina. Il termine Gestalt significa configurazione o immagine; pertanto l'idea che sta alla base di questa teoria è che l'atto percettivo crei una figura o una forma (Gestalt) che non è proprietà dell'oggetto osservato, ma è in qualche modo l'espressione con cui le sensazioni vengono "organizzate" a livello cerebrale. I tre studiosi ritenevano che il sistema nervoso fosse in grado di creare esperienze tridimensionali a partire da immagini bidimensionali, organizzando le singole sensazioni in forme stabili o percezioni costanti.

Supponiamo pertanto che il sistema nervoso realizzi questa organizzazione seguendo alcune "regole" relative alla forma, al colore, alla distanza e al movimento degli oggetti. Con ciò intendiamo che le strutture cerebrali partono da alcune assunzioni sull'aspetto degli oggetti del mondo esterno e non da una sua fotografia. Queste supposizioni sembrano derivare in buona parte dall'esperienza, ma dipendono anche dalla natura dei circuiti "precablati", che caratterizzano il nostro sistema visivo.

I ricercatori della Gestalt mettevano in luce i meccanismi cerebrali, considerando, ad esempio, il fenomeno delle illusioni ottiche e di alcune costanze percettive. Se esaminiamo i punti presenti nella fig. 6 essi sono posti a distanze uguali l'uno dall'altro, eppure il nostro sistema nervoso li organizza per righe o per colonne; tali processi di organizzazione sono evidenti anche nell'esempio della figura del danese Rubin (vaso/coppia di volti).

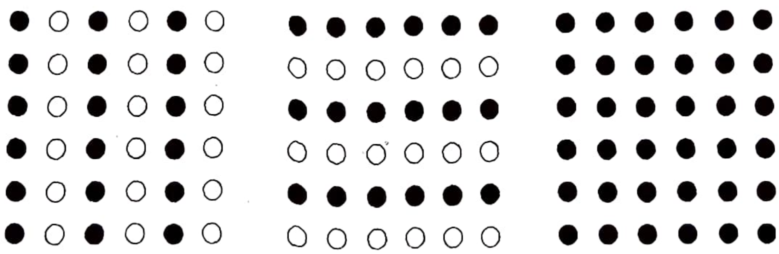


Figura 6

Il cervello voluminoso dei mammiferi, particolarmente quello dell'uomo, si avvale dell'esperienza del passato e delle previsioni sul futuro per potenziare i dati sensoriali, cosicché la percezione del mondo esterno non deriva, volta per volta, dalle informazioni dei sensi, ma queste servono piuttosto a comprovare la validità delle ipotesi prospettate. Il processo percettivo, pertanto, si compie attraverso la formulazione e il controllo delle ipotesi, come chiaramente ci dimostra il cubo di Necker; esso ci dà delle informazioni sensoriali costanti, mentre la percezione che ne abbiamo cambia continuamente in rapporto al mutare delle ipotesi che sottoponiamo al controllo delle esperienze. Ciascuna delle ipotesi, infatti, viene presa in considerazione, ma non viene accettata definitivamente, perché non sappiamo riconoscerla più valida delle altre.

Questa capacità rielaborativa è stata in seguito largamente sfruttata da artisti come Moser, Kandinsky, Escher; quest'ultimo, in particolare, scrive: "Il nostro sguardo è abituato a fissare singoli oggetti ma nel momento stesso in cui noi fissiamo un oggetto tutto ciò che gli sta attorno viene ridotto al rango di uno sfondo... L'occhio e la mente umana non riescono a occuparsi contemporaneamente di due cose diverse; essi devono saltare continuamente e in fretta da una cosa all'altra".

La dicotomia tra figura e sfondo mette in luce uno dei principi su cui si basa la percezione visiva: essa sembra seguire la strategia del "chi vince acchiappa tutto"; l'attenzione può mettere a fuoco solo una parte delle immagini e tutto il resto rimane sfumato nello sfondo.

I principi organizzativi su cui si basa la visione, la selezione, la distorsione, il completamento, l'omissione di immagini, sono ottimamente esemplificati dall'analisi delle illusioni ottiche.

Le illusioni dimostrano che la percezione è una costruzione immaginaria, basata su congetture inconsce che dipendono da una serie di assunzioni fatte dal sistema nervoso, nel tentativo di dare un significato alle informazioni visive.

Nella classica illusione ottica delle frecce di Muller-Lyer (fig. 7) due segmenti di uguale lunghezza appaiono disuguali: com'è caratteristico di molte illusioni, infatti l'esperienza non ci impedisce di ricadere in questa illusione, perché essa ci insegna a usare la forma degli oggetti come "indice" della dimensione dei segmenti.

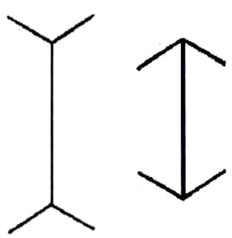


Figura 7: frecce di Muller.

Oltre alla conoscenza pregressa, anche il contesto, cioè il rapporto che intercorre tra un oggetto e il suo sfondo, aiuta a interpretare il significato delle immagini.
La nostra valutazione delle dimensioni viene spesso formulata sulla base del confronto fra un oggetto e l'altro e tra gli oggetti e il loro sfondo.
Oltre al meccanismo fin qui descritto ve ne sono altri importanti usati dal sistema visivo: questi sono rappresentati da circuiti precablati nel sistema nervoso, che vengono attivati da processi genetici o comunque legati a codici dello sviluppo. Quando il sistema nervoso non ha un'informazione esatta sulla localizzazione della sorgente di luce, la forma esatta degli oggetti diventa ambigua; avviene così, attraverso uno sforzo cosciente, che il sistema nervoso aiuta a prefigurarsi un elemento noto (= n.d.A.). Un esempio di questo concetto è dato dallo studio dello psicofisico Vilyanur Ramahandran, il quale ha preso in esame il modo con cui percepiamo le forme sulla base delle ombre da esse proiettate.
Si tratta di un fenomeno secondo il quale una forma rotondeggiante, quando viene illuminata dall'alto appare convessa, come la superficie esterna di una sfera, mentre quando viene illuminata dal basso appare concava, come l'interno di una scodella.
Possiamo sperimentarlo di persona osservando la fig. 8:

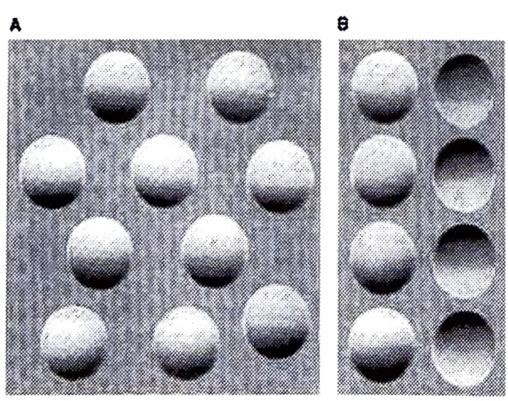


Figura 8

ci riveleremo tutti prevenuti, perché, una volta giudicata la forma di uno degli oggetti, tutti gli altri del gruppo, essendo simili, ci appariranno di forma uguale al primo, cioè rotondeggianti. Anche in questo non sappiamo dire se il fatto che tutti gli oggetti di un gruppo ci appaiono concavi o convessi dipenda dall'assunzione che tutti gli oggetti di un gruppo debbano essere identici, oppure dall'assunzione che la sorgente di luce debba essere unica. Per risolvere questo problema il ricercatore ricorse a una rappresentazione nella quale gli oggetti di una colonna erano immagini speculari di quelli dell'altra (fig. 8B). Anche in questo caso il sistema nervoso sembra assumere che tutta l'immagine visiva sia illuminata da una sola sorgente di luce, mentre accetta di mettere in dubbio l'ipotesi che tutti gli oggetti abbiano la stessa direzione. L'autore ritiene che l'assunzione di un'unica sorgente luminosa derivi dal fatto che l'uomo si è evoluto in un ambiente naturale nel quale l'unica sorgente di luce esistente era quella solare. Di conseguenza il nostro sistema nervoso assume che ogni sorgente di luce debba venire sempre dall'alto. Non sappiamo se questa spiegazione sia giusta, ma è certo che le esperienze sono a favore dell'affermazione degli psicologi della Gestalt, per i quali l'inferenza della forma dell'ombreggiatura non è un processo locale limitato a singole parti dell'immagine, ma un meccanismo globale, che coinvolge una gran parte se non tutto il campo visivo.

La percezione di un oggetto in tutta la sua estensione dipende dal fatto che il nostro sguardo ne esplora più volte la superficie; questa esplorazione viene eseguita saltando ripetutamente con lo sguardo da un punto all'altro dell'oggetto, soprattutto nei punti che risvegliano il nostro maggiore interesse. Consideriamo un esempio di ciò dalla figura della "fanciulla sul Volga".

Quando si osserva un volto sono gli occhi e la bocca che vengono fissati più spesso e di solito è la metà destra di esso che viene ispezionata con una frequenza doppia della sinistra. Quindi il sistema oculomotore non è regolato soltanto dagli attributi strutturali formali dello stimolo, ma anche dal significato del segnale visivo attribuito dall'osservatore.

La percezione del movimento nasce in seguito a una successione di sensazioni visive ciascuna delle quali è dovuta a una diversa posizione dell'immagine sulla retina; ciò può essere paragonato alla sensazione che si prova quando si tenta di mantenere con le dita il contatto con un oggetto in movimento.

Il moto apparente può essere ancora più convincente di quello vero ed è la base percettiva sulla quale si fondano le proiezioni cinematografiche. Per esempio, se al buio si accendono e spengono alternativamente due luci ad intervalli opportuni, la nostra percezione è quella di una sola luce che si muove fra i due punti. Questa illusione percettiva non può venire spiegata come una semplice conseguenza dell'aver analizzato informazioni provenienti da punti diversi e successivi della retina; al contrario essa costituisce la prova dell'esistenza di un particolare sistema, deputato al riconoscimento del movimento (fig. 9)

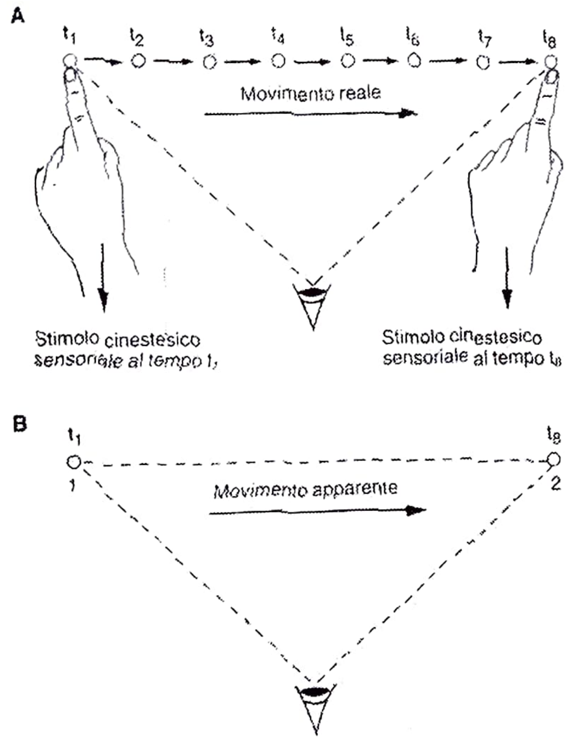


Figura 9

Esso, legato agli strati magnocellulari, viene rappresentato nell'area mediotemporale inferiore e superiore.

La visione tridimensionale

Nel corpo umano molti organi sono presenti in coppia, ma gli occhi presentano la particolarità di lavorare in stretta collaborazione, comunicandosi e confrontando le informazioni che ricevono dal mondo esterno. Le immagini che si formano negli occhi giacciono sulla superficie ricurva della retina e non sbagliamo a considerarle bidimensionali, nonostante la curvatura di tale superficie. Il sistema visivo riesce con notevole abilità a sintetizzare le due immagini differenti nella percezione unica di due oggetti reali, situati nello spazio a tre dimensioni.

Gli occhi nell'uomo sono disposti frontalmente ed hanno in comune lo stesso campo visivo, cosa che raramente si riscontra nei vertebrati, i cui occhi sono situati lateralmente. Il graduale spostamento degli occhi, da una zona più laterale del capo a quella frontale, si verificò con l'acuirsi della necessità di avere un preciso criterio per giudicare le distanze, quando i mammiferi svilupparono gli arti anteriori, capaci di manovrare gli oggetti e afferrare i rami per arrampicarsi sugli alberi.

Gli occhi convergono sull'oggetto per portare l'immagine sulle fovee (fig 10).

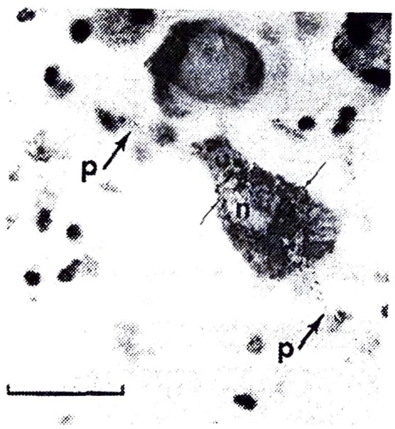


Figura 10

Attraverso l'angolo di convergenza la sua distanza viene segnalata al cervello, che la misura come un telemetro. Questo strumento, però, può indicare la distanza di un solo oggetto per volta, mentre l'apparato visivo, con sistemi differenti, individua contemporaneamente molteplici allocazioni.

Per avere la percezione della profondità spaziale gli occhi attuano un meccanismo in base al quale ciascuno di essi vede le cose in maniera differente. Tale differenza, definita "disuguaglianza", permette la percezione della profondità spaziale, mediante la così detta "visione stereoscopica".

Questo meccanismo funziona, però, esclusivamente per oggetti vicini, sotto i 30 m. di distanza; oltre tale misura la visione è monoculare. Non si conoscono i meccanismi con cui il cervello riesce a convertire la disuguaglianza in percezione di profondità spaziale.

In che rapporto stanno la misura della distanza (data dall'angolo di convergenza) e la misura della profondità spaziale (data dalla disuguaglianza)?

L'angolo di convergenza controlla il sistema della disuguaglianza, regolandone la gradualità. Quando, infatti, l'occhio mette a fuoco un oggetto lontano, qualsiasi disuguaglianza tra le due immagini viene interpretata come espressione di differenze più rilevanti di quelle che vengono apprezzate dagli occhi quando convergono nella visione prossima. Se così non fosse gli oggetti lontani risulterebbero nello spazio molto più ravvicinati tra di loro degli oggetti prossimi, separati da una stessa distanza, poiché la disuguaglianza che deriva da una determinata differenza è tanto maggiore quanto più vicini sono gli oggetti.

Uno dei principali compiti del sistema visivo è quello di conferire alle immagini retiniche bidimensionali, una valenza tridimensionale.

Come viene ottenuta questa trasformazione? Su che base riusciamo a valutare la distanza che separa un oggetto dall'altro?

In che modo riusciamo a stimare l'estensione in profondità di un oggetto presente nel campo visivo?

Gli studi indicano che il passaggio dalla visione in due dimensioni a quella tridimensionale si basa su due tipi di elementi di valutazione: elementi monoculari, relativi alla profondità di campo, ed elementi stereoscopici, basati sulla disparità binoculare. Esaminiamoli.

Per distanze maggiori di 30 m le immagini retiniche dei due occhi sono praticamente identiche, di modo che a una certa distanza noi siamo essenzialmente monoculi. È possibile tuttavia renderci conto delle distanze con un occhio solo, utilizzando una serie di elementi monoculari di valutazione della profondità di campo.

Questi elementi sono almeno 5; i primi 4, già noti agli artisti dell'antichità, furono riscoperti durante il Rinascimento e codificati da Leonardo Da Vinci (fig. 11):

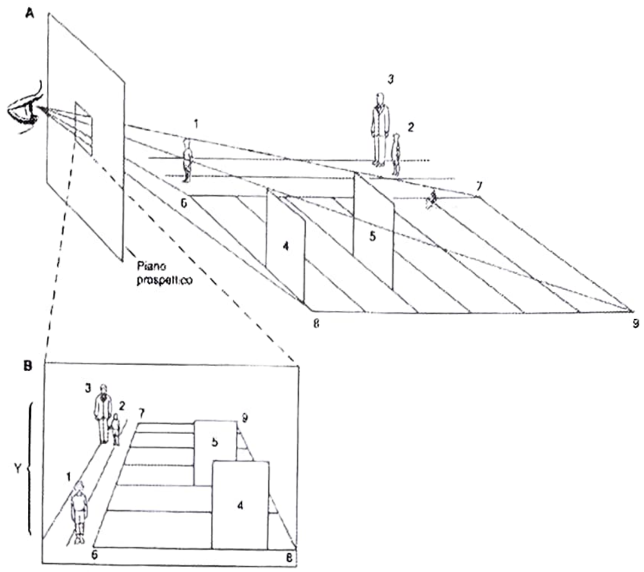


Figura 11

1. la familiarità con l'oggetto: se già conosciamo per esempio la taglia di una persona possiamo valutarne la distanza da noi;
2. l'interposizione: se l'immagine di un individuo è nascosta in parte da quella di un'altra persona, noi concludiamo che la persona che sta davanti sia la più vicina;
3. la prospettiva lineare o dimensionale: linee parallele come quelle dei binari della ferrovia tendono a convergere con la distanza; la sensazione di distanza diviene sempre maggiore quanto maggiore è questa convergenza: infatti noi sappiamo che le linee parallele in realtà non convergono, il sistema visivo interpreta la convergenza come elemento di valutazione della profondità del campo;
4. la distribuzione delle ombre e dell'illuminazione: la distribuzione della luce e delle zone d'ombra contribuisce a dare l'impressione della profondità; per esempio, le macchie di colore più luminose tendono ad essere viste come più vicine (il "chiaroscuro" dei pittori);
5. movimento o movimento monoculare di parallasse: quest'elemento, che è forse il più importante di tutti, non è di tipo pittorico. Se muoviamo la testa da una parte all'altra le immagini proiettate dagli oggetti, presenti nel campo visivo, si muovono sulla retina. Gli oggetti più vicini appaiono muoversi più rapidamente e

in senso inverso ai nostri movimenti, i più lontani sembrano muoversi con maggior lentezza.

Gli elementi monoculari di valutazione sono molto importanti, da una certa distanza in poi, per la percezione della profondità di campo; per gli oggetti che distano meno di 30m, infatti, il senso della profondità si basa anche sulla visione "stereoscopica" e questa, a sua volta, si fonda sul confronto delle immagini retiniche dei due occhi.

Quando noi osserviamo un oggetto la convergenza oculare fa sì che il punto di fissazione vada a cadere nelle zone corrispondenti della parte centrale delle due retine; il punto focale è detto "punto di fissazione", mentre il piano parallelo (verticale), in cui esso giace, prende il nome di "piano di fissazione". La distanza dell'immagine dal centro dei due occhi permette al sistema visivo di calcolare la distanza dell'oggetto dal punto di fissazione. Ogni punto di un oggetto, che sia più vicino o più lontano rispetto al punto di fissazione, proietta la propria immagine a una certa distanza dal centro della retina. Le parti di esso più vicine a noi proiettano la propria immagine su punti della retina più distanti orizzontalmente, le parti dell'oggetto più lontane vanno su punti della retina più vicini.

Siccome gli occhi distano l'uno dall'altro circa 6 cm, ciascun occhio vede il mondo esterno da un punto di vista un po' diverso, perciò gli oggetti tridimensionali producono immagini che differiscono alquanto da una retina all'altra. E' facile assicurarsi di ciò chiudendo alternativamente gli occhi, perché si osserverà che, mentre la visione passa da un occhio all'altro, gli oggetti vicini sembrano spostarsi lateralmente. Noi compensiamo la lieve disparità oculare con la "fusione sensoriale". Fissando un solo punto con entrambi gli occhi e indirizzando ciascun occhio, in modo che le immagini vadano a cadere in punti corrispondenti delle due retine, noi vediamo un unico oggetto. Quando, però, fissiamo lo sguardo su un elemento tridimensionale la fusione delle immagini non è perfetta, perché, a livello retinico, esse non vanno a cadere su posizioni esattamente corrispondenti. Questa differenza di posizione, detta anche "disparità retinica", dipende dalla distanza dell'oggetto dal piano di fissazione: i punti di un oggetto tridimensionale che stanno appena al di fuori del piano di fissazione, stimolano punti diversi di ciascun occhio e sono proprio queste disparità multiple a fornire gli elementi necessari alla visione stereoscopica, o percezione degli oggetti solidi.

È sorprendente come nessuno dei grandi studiosi di ottica del passato, da Euclide ad Archimede, Leonardo da Vinci, Newton o Goethe, abbiano avuto nozione della visione stereoscopica, anche se ciascuno di loro avrebbe potuto scoprirla con i metodi allora disponibili. La visione stereoscopica non fu scoperta fino al 1838, quando il fisico Charles Wheatsone inventò lo stereoscopio. Si prendano due fotografie di una scena scattate da 60-65 mm di distanza l'una dall'altra, vale a dire scattate dal punto di osservazione di ciascuno dei due occhi. Si mettano le due foto su di un supporto binoculare in modo tale che l'occhio destro veda soltanto l'immagine presa da una delle due posizioni e l'occhio sinistro solo l'altra immagine. Le due fotografie così osservate, producono la sensazione di un'immagine tridimensionale.

Come viene ottenuta la visione stereoscopica? Con ogni verosimiglianza il nostro sistema nervoso deve essere in grado di calcolare in qualche modo la disparità fra le immagini viste dai due occhi e di valutare di conseguenza la loro distanza in base a semplici considerazioni geometriche. Ma è necessario anzitutto che l'oggetto venga riconosciuto prima che le strutture cerebrali possano confrontare i punti corrispondenti dell'oggetto che cadono nei due occhi? Fino al 1960 si pensava generalmente che le cose fossero così, e perciò la visione stereoscopica veniva ritenuta uno degli stadi finali dell'elaborazione visiva.

Nel 1960 Bela Julesz dimostrò che questo modo di vedere era errato e fornì le prove che la fusione stereoscopica delle immagini e la percezione del senso della profondità non richiedono il riconoscimento monoculare delle forme. L'unico elemento necessario per la visione stereoscopica è la *disparità retinica*. Per dimostrare ciò, Julesz impiegò una struttura composta di punti disposti a caso, in mezzo alla quale alcuni dei punti sono distribuiti in modo da formare un quadrato. La presenza del quadrato è visibile soltanto quando si osservano in uno stereoscopio due copie identiche dell'intera struttura. Se si sposta lateralmente il quadrato di una delle due copie, esso appare, in visione binoculare, come se stesse davanti al resto della struttura e distaccato dal fondo.

Se il quadrato viene invece spostato in direzione opposta, esso sembra star dietro al resto della struttura (fig. 12):

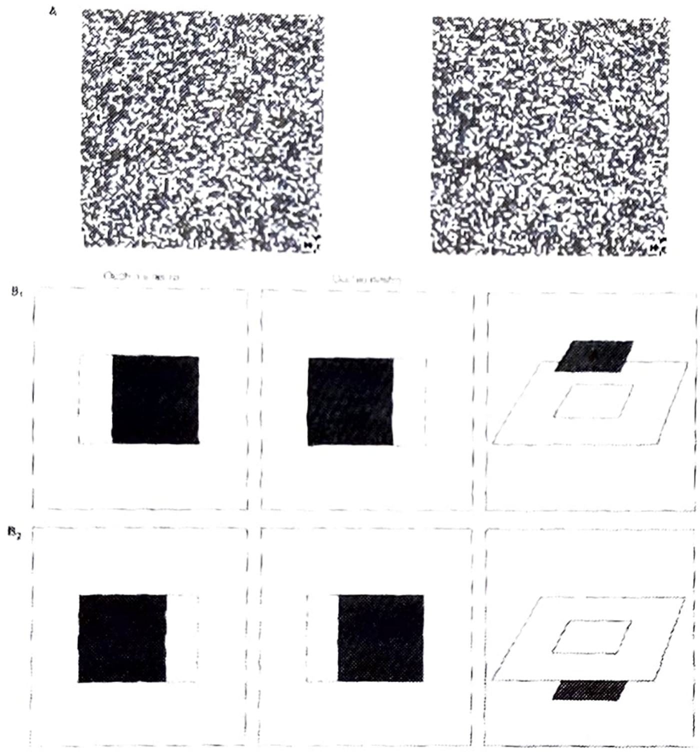


Figura 12

Ciascuna struttura, vista isolatamente, non permette di scorgere alcun elemento particolare. Il quadrato che sta in mezzo alla figura si mette in rilievo soltanto in visione stereoscopica. Con questo metodo Julesz dimostrò che l'Uomo è in grado di rilevare l'esistenza di forme e il loro movimento in profondità a partire da stereogrammi formati esclusivamente di elementi disposti a caso. Siccome tutti i punti della figura sono identici, è di particolare rilievo il fatto che il sistema visivo sia in grado di scoprire quali siano i punti corrispondenti nelle due figure. All'inizio si pensò che questo *problema della corrispondenza* venisse risolto grazie alla cooperazione di molti sensori, ciascuno dei quali corrispondeva a un punto dello stereogramma. Sembra ora più probabile che i puntini formino gruppi di microstrutture e che tali gruppi permettano di risolvere il problema della

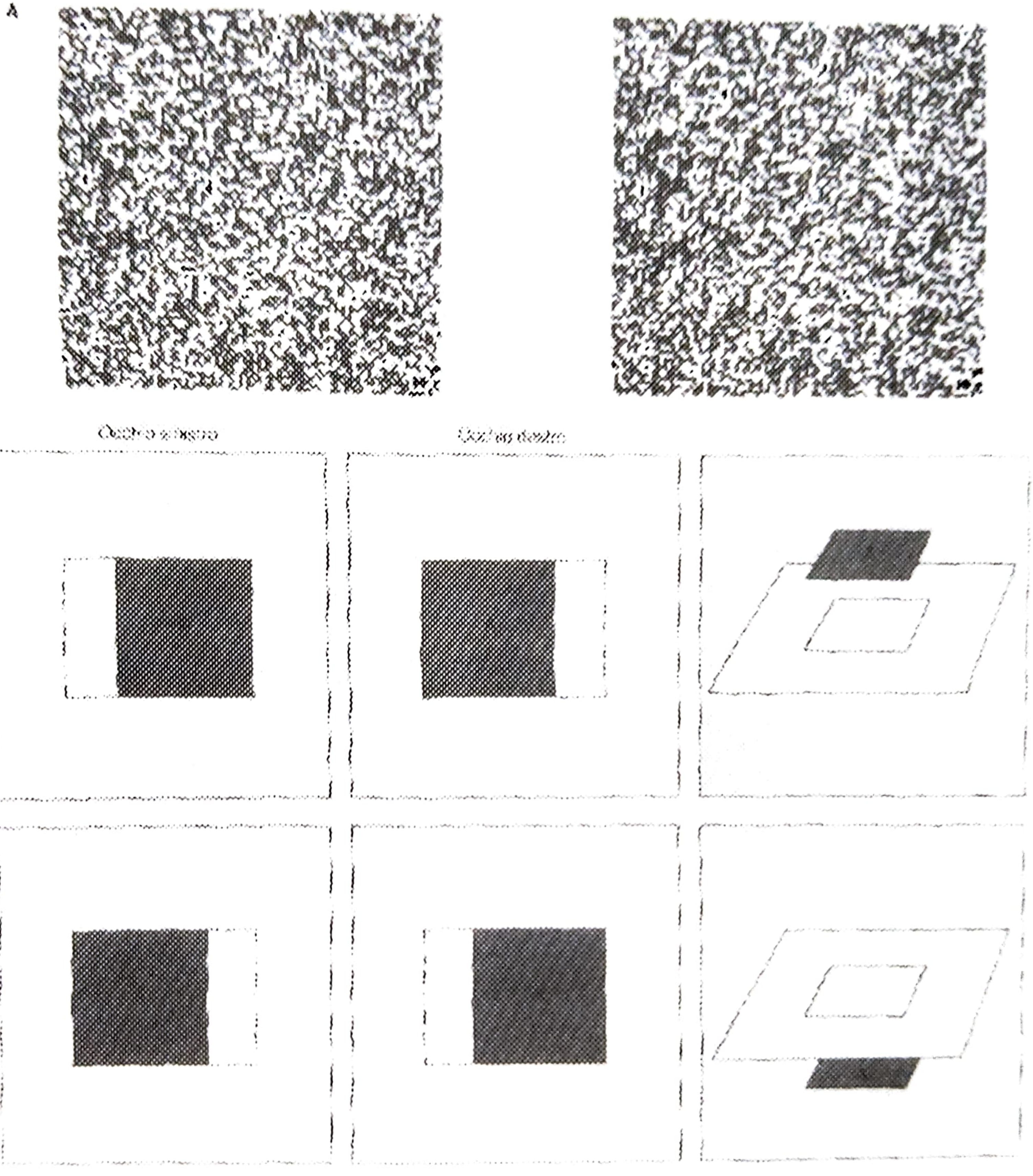


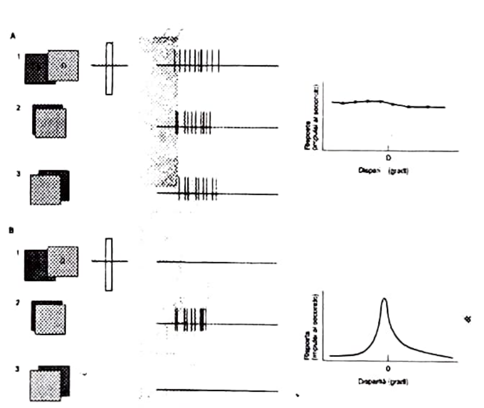
Figura 12

corrispondenza confrontando soltanto alcune di queste microstrutture nelle afferenze provenienti dai due occhi.

L'esperimento di Julesz dimostra anche che la visione stereoscopica non prende origine nella retina o nel corpo genicolato laterale, ma che si forma a livello della corteccia striata o a livelli ancora più elevati, dove vengono combinati i segnali provenienti dai due occhi. Perciò, questo tipo di percezione è stato chiamato da Julesz *percezione ciclopica* dal ricordo mitologico dei Ciclopi che avevano un solo occhio in mezzo alla fronte. Nessuno dei due occhi isolatamente riesce a vedere forme o contorni coerenti nella figura: ogni occhio vede soltanto un gruppo di puntini senza senso. Dove avviene allora la fusione delle immagini?

La corteccia visiva primaria è la prima sede in cui le informazioni provenienti dai due occhi vengono analizzate congiuntamente.

Hubel e Wiesel (1988) dimostrarono che la prima possibilità di fusione delle immagini, provenienti dai due occhi, ha luogo in V1 (una delle zone della corteccia visiva primaria). E' qui che, per la prima volta, singole cellule del sistema visivo ricevono afferenze dai due occhi. Per avere una visione stereoscopica, tuttavia, è necessario che le afferenze dei due occhi siano leggermente diverse, cioè ci deve essere disparità orizzontale fra le due immagini retiniche. Horace Barlow, Colin Blakemore, Peter Bishop e Jack Pettigrew, nel 1968, fecero l'importante osservazione che alcuni neuroni rispondono in maniera selettiva alla disparità orizzontale delle afferenze dei due occhi (fig. 13).



L'esistenza di neuroni selettivi per la disparità retinica è stata oggi messa in evidenza un po' in tutta la via magnocellulare.

Che importanza rivestono per la visione stereoscopica questi neuroni sensibili alla disparità retinica? Inoltre, questi neuroni rispondono anche a stereogrammi che non contengono altro elemento di profondità eccetto la disparità retinica delle immagini?

Per risolvere questo interrogativo Gian Poggio (1984) localizzava inizialmente le cellule sensibili usando una sbarretta solida (tridimensionale) come stimolo;

sostituiva quindi la sbarretta solida con uno stereogramma composto soltanto di puntini a caso. Molte delle cellule complesse che corrispondevano alla figura solida rispondevano anche allo stereogramma fatto di puntini a caso (grafico fig. precedente).

Queste ricerche spingono a pensare che le cellule rispondono a una struttura composta di puntini a caso perché gruppi di questi formano microstrutture capaci di stimolarle efficacemente. Quando due di tali microstrutture hanno una disparità retinica vicina a quella ottimale della cellula, il neurone fornisce la propria risposta massimale. Queste cellule, pertanto, rispondono agli elementi osservati da ciascun occhio e la convergenza delle afferenze dei due occhi determina la sommazione che rende massima la risposta.

Profondità spaziale e illusioni ottiche

Le figure illusorie per i loro caratteri prospettici sono viste in profondità e l'effetto illusorio è tanto più grande quanto più numerosi sono, nel disegno, gli elementi che contribuiscono a dare il senso della profondità.

Si stabilisce così il rapporto tra illusioni ottiche e profondità spaziale, come osserviamo in vari esempi nella realtà.

Un popolo che vive in un ambiente privo di elementi prospettici è quello degli Zulù; il loro mondo viene descritto come "civiltà circolare": tonde sono le capanne, tonde le porte, tondi i solchi nei campi. Prevale l'assenza quasi totale di linee ed angoli. Questa civiltà non va soggetta alle illusioni ottiche, come invece i popoli occidentali, abituati alla "civiltà rettangolare", evoluta sui concetti di retta e di angolo.

Sembra, dunque, che le abitudini di vita influiscano in modo determinante sul sistema che controlla la visione degli oggetti distanti.

Le illusioni ottiche, invece di rappresentare dei banali effetti, potrebbero diventare degli utili mezzi di indagine per studiare i meccanismi fondamentali che controllano la visione del mondo esterno. Esiste un processo percettivo che può facilmente produrre delle distorsioni ed è quello della "costanza delle dimensioni", che interviene a compensare i cambiamenti dell'immagine retinica, in rapporto alla distanza. L'idea di stabilire un rapporto tra la costanza delle percezioni e le illusioni ottiche è piuttosto originale e dopo aver discusso dei meccanismi del processo della distanza, descriveremo gli esperimenti che possono confermare l'esistenza di questo rapporto.

L'immagine di un oggetto raddoppia di grandezza quando la distanza dell'oggetto stesso diventa la metà, ciò avviene secondo un elementare principio di ottica geometrica, che si applica sia a un apparecchio fotografico sia all'occhio umano. Quel che pare strano e che richiede qualche spiegazione, è il fatto di vedere gli oggetti sempre all'incirca della stessa grandezza, benché la loro immagine divenga effettivamente più grande via via che si avvicina.

Facciamo conto di essere a teatro: i volti degli spettatori ci appariranno tutti più o meno della stessa grandezza, sebbene le immagini dei volti più vicini siano logicamente più grandi di quelle dei volti più lontani. Osservate ora le vostre mani, tenendole una alla distanza del braccio teso e l'altra a mezza distanza rispetto agli occhi: esse vi appariranno uguali, mentre l'immagine della mano più distante dovrebbe apparire metà dell'altra; se poi provate a portare la mano più vicina sopra quella lontana, esse vi sembreranno di grandezza diversa.

Quella che noi definiamo "costanza della grandezza" era già stata descritta da Cartesio così: "*...Non devo dire nulla di speciale sul modo in cui vediamo la grandezza e la forma degli oggetti: entrambe sono determinate dalla percezione della distanza e della posizione degli oggetti nello spazio. Di conseguenza il giudizio sulla grandezza degli oggetti è legato alla loro effettiva e ipotetica distanza e alla dimensione dell'immagine che essi proiettano sulla parte posteriore dell'occhio. Non sono però le reali dimensioni dell'immagine a influenzare questa valutazione; è evidente infatti che se gli oggetti sono vicini producono un immagine cento volte più grande di quando gli oggetti si trovano a una distanza dieci volte maggiore, mentre le loro dimensioni si mantengono quasi invariate, almeno finché la distanza non è eccessiva*".

Cartesio ci dà anche un'esatta descrizione di quella che è stata definita in seguito la costanza della forma:

"*...Anche il nostro giudizio sulla forma degli oggetti dipende dalla conoscenza reale e ipotetica del rapporto delle varie parti dell'oggetto e non dalle immagini che si formano sui nostri occhi che rappresentano ovali e rombi, mentre noi guardiamo circoli e quadrati ...*".

La capacità del sistema percettivo di compensare le modificazioni prodotte dalla distanza è stata oggetto di numerose ricerche, soprattutto dell'inglese Thouless. Egli ha misurato il valore della costanza, sia di grandezza che di forma, in condizioni variabili in individui diversi usando degli strumenti di ricerca molto semplici, cioè delle righe e dei pezzi di cartone.

Con degli esperimenti, Thouless riscontrò che la costanza era perfettamente rispettata per gli oggetti relativamente vicini, ma non lo era più nel caso di oggetti tanto lontani da apparire piccoli come dei giocattoli. Negli individui dotati di elevati poteri critici la costanza era minore e altrettanto avveniva per gli artisti, esercitati a valutare la grandezza degli oggetti. Come Cartesio aveva affermato trecento anni prima, il sistema percettivo dimostrava di provvedere con metodo proporzionale a ridimensionare gli oggetti posti a differenti distanze, così egli affermò: "*... le loro (degli oggetti) dimensioni si mantengono quasi invariate finché la distanza non è eccessiva*". Thouless era riuscito a dimostrare anche che la costanza della forma era abbastanza buona ma non perfetta, suscettibile di notevoli variazioni in rapporto a criteri soggettivi di valutazione; anche in questo caso individui ipercritici e artisti rivelavano una minore costanza della forma, mentre alcuni osservatori riuscivano a modificarne volontariamente il valore.

Il rapporto che si stabilisce tra grandezza e distanza è noto come *Legge di Emmert*, che possiamo esprimere in formula:

$$G_P = k\, G_R\, D_P$$

dove:

G_P è la grandezza percepita, cioè la grandezza che l'osservatore attribuisce all'oggetto osservato;

k è una costante;

G_R è la grandezza retinale dell'oggetto osservato nell'occhio dell'osservatore;

D_P è la distanza percepita, cioè la distanza che l'osservatore attribuisce all'oggetto osservato.

L'ingrandirsi dell'immagine postuma (posteriore) con l'aumentare della distanza, verificata da Gregory, è dovuto al sistema della costanza che di norma compensa la tendenza dell'immagine a ridursi via via che si allontana. In tale esperimento l'immagine postuma non solo non si riduce ma si ingrandisce per il processo della costanza graduale, essendo l'immagine fissata sulla retina.

Se il sistema della costanza viene tratto in errore da particolari caratteristiche prospettiche della figura, esso produce quelle distorsioni che osserviamo nelle figure illusorie. Questa teoria è molto logica poiché poggia su principi dimostrati e fenomeni noti: essa asserisce che le distorsioni sono la conseguenza di un'erronea applicazione del sistema scalare della costanza. Finché le figure illusorie giacciono davvero sul piano, noi possiamo constatare facilmente come, per le loro caratteristiche prospettiche, esse sollecitino l'intervento del sistema della costanza, che si rivela in pratica inopportuno e fa risultare più grandi quelle parti della figura che, secondo le indicazioni prospettiche, sono più distanti. La grave difficoltà che insorge nel dimostrare quanto detto, deriva proprio dal fatto che le figure illusorie ci appaiono generalmente piane; è quindi necessario spiegare due concetti: *in primo luogo perché esse risultino appunto piane nonostante le caratteristiche prospettiche e in secondo luogo come la costanza possa funzionare, giacché le figure giacciono sul piano, mentre la legge di Emmert ci dice che la costanza della grandezza è funzione della distanza reale o ipotetica degli oggetti.*

Il primo problema non offre delle gravi difficoltà: quando guardiamo dei disegni noi non vediamo solo dei segni, ma anche la carta sulla quale sono tracciati; quindi quelle figure ci appaiono piane perché posano su una superficie piana. Cosa succede se consideriamo soltanto le figure escludendo il foglio?

Possiamo facilmente ottenere tale condizione costruendo, con del filo metallico, i modelli delle figure e dipingendoli con una vernice luminescente, che le faccia risplendere nell'oscurità. Osservando al buio queste figure luminose e guardandole soltanto con un occhio, per evitare la visione stereoscopica, che ci potrebbe ragguagliare sulla presenza o sulla mancanza del rilievo, scopriamo che esse sono tridimensionali.

Con una accortezza analoga, anche le frecce di Muller non ci sembrano più piane, ma angolate secondo le indicazioni prospettiche; la freccia con estremità ad angolo ottuso ci appare come un angolo interno, quella con estremità ad angolo acuto come un angolo esterno. Questi angoli appaiono identici ai modelli degli angoli realmente tridimensionali costruiti in filo metallico. Capiamo così perché la figura disegnata ci

appare di solito piana: la struttura della carta produce infatti un effetto di contrasto sui caratteri prospettici e tende ad annullarli, minimizzando l'effetto tridimensionale.
Il secondo problema, relativo al funzionamento del sistema della costanza secondo la legge di Emmert, si presenta più scabroso. Ittelson, citando a conferma cinque autorevoli psicologi, dice che: "la costanza secondo quanto universalmente riconosciuto, dipende in ogni caso da una appropriata valutazione della distanza." "Tuttavia - obietta Gregory - io discuterò questo assunto, non solo perché lo ritengo inesatto ma anche perché gli attribuisco la colpa di aver ostacolato lo sviluppo di una giusta teoria".
Le figure illusorie, come abbiamo già detto più volte, appaiono generalmente piane, ma se è vero che, per la legge di Emmert, la costanza è in rapporto alla distanza, ciò non significa che esse siano biunivocamente vincolate. Non si può neppure escludere, inoltre, che, in certi casi, la costanza venga ingannata dai caratteri prospettici, anche se contrastati, come nel caso delle figure illusorie disegnate sulla carta. Se riusciremo a dimostrare la validità di queste obiezioni, avremo chiarito il meccanismo delle illusioni ottiche e avremo anche imparato qualcosa di nuovo sul sistema della costanza.
Dobbiamo perciò procurarci delle prove per dimostrare come la costanza indotta in errore produca le distorsioni della figura. Si tratta di una questione puramente tecnica di non facile soluzione, ma già disponiamo di prove abbastanza valide dedotte con criteri logici.
Prendiamo in esame quelle figure che risultano ambivalenti quanto a profondità. Tali figure, come il cubo di Necker, danno origine a due diverse percezioni spaziali, benché la loro immagine sulla retina e la proiezione dell'immagine nel cervello rimangano invariate. Se noi osserviamo bene il cubo di Necker vediamo che, nonostante la posizione delle facce si alterni nello spazio, le loro dimensioni non cambiano. Questo fatto ci rivela subito che la costanza è stata chiamata in causa dal senso di profondità spaziale, suggerito dall'aspetto delle linee tracciate sulla carta. Se costruiamo un cubo luminoso (fabbricando un cubo in filo metallico dipinto con vernice luminescente, che lo faccia risplendere nell'oscurità in modo da eliminare l'elemento di sfondo della carta) il risultato cambia notevolmente. Il nostro cubo luminoso alternando la posizione cambia davvero anche di forma e la faccia che

risulta più distante appare più grande della faccia che sembra più vicina, sebbene entrambe abbiano in realtà le stesse dimensioni.
Vediamo ora come si comporta la legge di Emmert nel caso delle figure ambivalenti. Costruiamo, pertanto, un perfetto cubo tridimensionale: l'alternanza spaziale delle facce, accompagnandosi al cambiamento della loro grandezza, ci fa vedere una piramide tronca anziché un cubo; ciò avviene poiché la faccia più vicina è apparentemente più piccola di quella che sembra più lontana.
Il sistema della costanza, in questo caso, funziona in accordo con la distanza apparente, non con quella reale e produce la distorsione della figura quando la percezione della profondità si inverte.
Questo comportamento potrebbe indurci a ritenere che la percezione della profondità sia indispensabile per il sistema della costanza; ma prima di pronunciarci facciamo un altro esempio.
Disegniamo un cubo su un foglio e aggiungiamoci una linea (fig. 14).

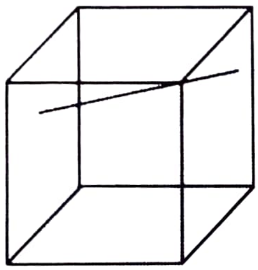


Figura 14

Questa linea, in realtà retta, appare curva in corrispondenza dell'angolo che essa forma con il cubo. Osservando attentamente la stessa linea, quando il cubo sia immaginato nella sua profondità, vedremo che essa non cambia e sembrerà curva come prima. Le osservazioni sono diverse quando si costruisca tridimensionalmente lo stesso oggetto "cubo con linea" in materiale fluorescente: la linea, anche ora, appare curva per la costanza, ma la direzione della sua inclinazione cambia col mutare dell'apparente posizione spaziale del cubo. Nella figura disegnata, la curvatura della retta, in prossimità dell'angolo del cubo, è determinata non dal fatto che l'angolo appare esterno od interno a seconda della posizione del cubo, ma dal fatto che esso sta a rappresentare un tipico angolo esterno od interno. Questo fenomeno è importante perché ci fa ritenere che l'illusoria curvatura della retta non sia prodotta dalla costanza in rapporto alla profondità apparente, ma sia direttamente legata alle caratteristiche prospettiche della figura, per quanto esse siano contrastate dall'elemento carta, che tende a far apparire piano il cubo. Nella figura tridimensionale luminosa, la curvatura della linea cambia di direzione a seconda dell'orientamento apparente del cubo nello spazio e così la legge di Emmert non viene rispettata.

La curvatura illusoria non è, dunque, una conseguenza della profondità spaziale apparente. Nel caso invece di un cubo luminoso la curvatura, con l'apparente alternarsi delle facce, si manifesta in direzioni diverse.

Si può misurare in maniera obiettiva la profondità apparente, che deriva dalla prospettiva o da altri caratteri di rilievo spaziale; si stabilisce così un rapporto diretto tra essa e le illusioni ottiche. È abbastanza facile misurare le entità di un'illusione del tipo fin ora considerato, che provoca cioè distorsione della grandezza o della forma. È sufficiente, a questo scopo, sottoporre all'osservatore una serie di linee o forme di confronto e domandargli quale gli sembra più somigliante alla figura illusoria. Naturalmente questi termini di confronto debbono essere presentati in modo che non risultino essi stessi distorti. In pratica risulta utile confrontarli con un processo di approssimazione graduale da parte dell'osservatore; un sistema di paragone è riportato nella fig. 15.

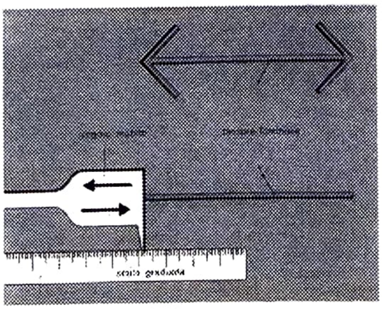


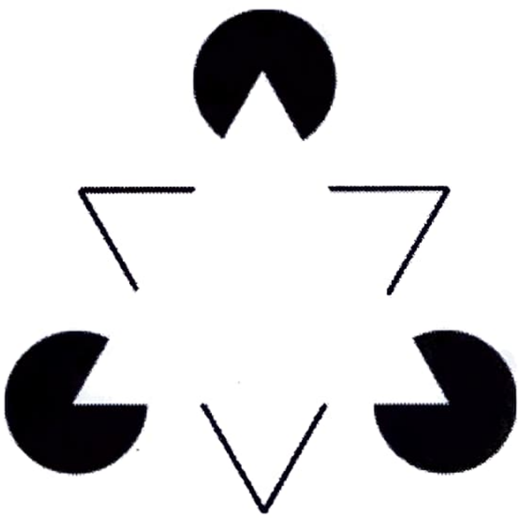
Figura 15

Molto più difficile, invece, è misurare la profondità apparente; un disegno, illuminato dalla parte posteriore per evitare l'effetto prodotto dalla carta, viene osservato attraverso un sottile polaroide, mentre un secondo polaroide, verticale rispetto al primo, è posto sull'occhio dell'osservatore, in modo che la luce, proveniente dalla figura, non possa stimolarlo. Tra gli occhi dell'osservatore e la figura viene interposto uno specchio semiargentato attraverso il quale è possibile vedere la figura, ma che al tempo stesso riflette la luce di una o più sorgenti luminose, disposte su un apposito supporto. Si ha così l'impressione che queste sorgenti si trovino direttamente sulla figura e questo giudizio può ritenersi esatto da un punto di vista ottico, purché la distanza tra gli occhi dell'osservatore e la figura sia uguale a quella che separa gli occhi dell'osservatore dalle sorgenti luminose. Mentre però la figura, per la presenza del polaroide incrociato, viene vista con un occhio solo, le sorgenti di luce sono viste da entrambi gli occhi. Con opportuni spostamenti delle luci sul supporto si può fare in modo che esse vengano a trovarsi alla stessa distanza della figura rispetto all'occhio; se, tuttavia, la figura presenta caratteri prospettici, od altri elementi che le danno rilievo, le luci verranno collocate dall'osservatore non alla reale distanza della figura, ma alla distanza apparente di quella parte di essa a cui egli cerca di uguagliare la distanza della luce.

Per le persone provviste di una normale visione monoculare l'esperimento risulta semplice e permette di valutare la profondità in modo soddisfacente. Da questa dimostrazione, inoltre, risulta evidente che le figure illusorie, per i loro caratteri prospettici, sono viste in profondità e che, viceversa, tanto più essa è accentuata dagli elementi del disegno, tanto più è grande l'effetto illusorio. Abbiamo così stabilito l'esistenza di un rapporto tra illusioni ottiche e profondità spaziale.

CAPITOLO SECONDO

Aspetti geometrici della visione: concetti matematici impliciti



[tratto da: http://www.math.lsa.umich.edu/~mathsc.../lesson1.shtm]

Geometria proiettiva

Lezione 1

La maggior parte del progresso matematico è motivata dalla nostra investigazione del mondo scientifico. L'economia motiva campi come sistemi dinamici, caos ed equazioni differenziali. La fisica motiva la teoria dei gruppi e l'algebra di Lie. L'informatica motiva la logica teorica e la teoria dell'informazione. La criptologia motiva la geometria algebrica e la teoria dei numeri. È raro che interi campi della matematica siano inventati per amore delle arti fini, ma questo è precisamente ciò che è accaduto in geometria proiettiva. La geometria proiettiva è stata essenzialmente inventata dai pittori rinascimentali che volevano più fedelmente rappresentare il mondo attorno a loro. Durante il XV secolo, questi artisti guadagnarono grandi somme di denaro facendo lavori su commissione. Poiché le loro carriere dipendevano dalla loro abilità di dipingere bene, essi avevano una grande motivazione di apprendere i metodi migliori per rappresentare il loro mondo. Chiunque abbia provato a fare uno schizzo di un complesso edificio, conosce le molte difficoltà che questi artisti incontrarono.

Allo scopo di rendere il quadro corretto, si devono cambiare e distorcere le caratteristiche reali dell'edificio: una finestra quadrata su un muro laterale deve essere rappresentata come un parallelogramma appiattito! Un orologio circolare deve essere disegnato come un ovale allungato. Alcune rette che si sa essere parallele devono essere rappresentate non parallele, mentre altre devono essere disegnate veramente parallele. Il problema di fondo, che affronta l'artista (realista) è che l'occhio non vede ciò che realmente *c'è*. Esso ne vede una qualche versione bidimensionale. Se solo noi potessimo "disegnare ciò che vediamo", allora potremmo ignorare la geometria dell'edificio e disegnarlo come l'occhio lo vede. La mente tuttavia interferisce con l'occhio dell'artista, e una mente che *sa* che due rette sono parallele può rifiutare di accettare il giudizio dell'occhio. Di certo il problema è risolto attraverso la fotografia, ma a qualche artista testardo piace ancora dipingere con le sue mani (grazie a Dio!).

Io ho collezionato alcuni sforzi precoci verso il realismo che illustrano appena quanto difficile sia ottenere l'architettura corretta sul foglio.

Entriamo in matematica. Usando la matematica i pittori rinascimentali hanno riconosciuto che l'occhio non solo distorce le cose in modo caotico e casuale, ma esso trasla la geometria euclidea "regolare" dello spazio in una geometria tutta sua, strana e nuova. In questa geometria, rette parallele sembrano intersecarsi, e i cerchi possono diventare ellissi. Questa geometria dell'occhio è nota come geometria proiettiva. Il pittore necessita di comprendere la geometria proiettiva e la sua relazione (attraverso la visione) con la geometria euclidea dello spazio.

. Lezione 2

La geometria dell'occhio: ciò che si vede è ciò che si ottiene

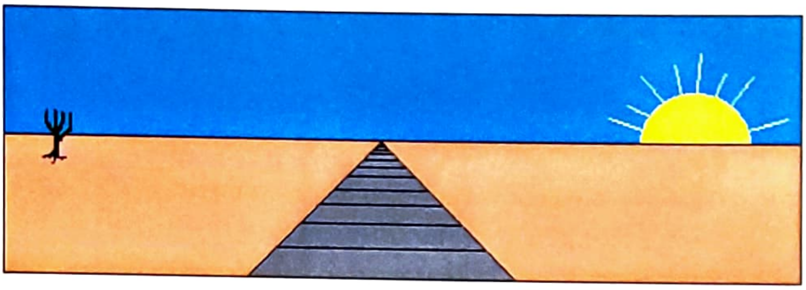
Che cos'è la geometria proiettiva? In primo luogo, è geometria: essa ha punti, rette, cerchi e altri elementi tradizionali. Per esempio vale ancora che per due punti qualsiasi, passi esattamente una retta che li unisce.

Tuttavia essa differisce dalla geometria euclidea regolare, perché: per due rette qualsiasi c'è sempre un punto di intersezione.

Ma come possono rette parallele intersecarsi?

Se, per esempio, si cammina lungo due rette parallele -diciamo i binari ferroviari- si può vedere facilmente che comunque li si percorra, le due rette -le verghe- che li compongono non si intersecano. Anche se si cammina un milione di miglia lungo i binari, essi saranno ancora alla stessa distanza (qui sto assumendo per semplicità che la terra sia piatta. Altrimenti, basterebbero 25000 miglia per tornare al punto di partenza!). Dopo un così lungo viaggio sono sicuro che si sarebbe tentati di sedersi e dare sfogo alla propria frustrazione. Ci si asciugherebbe la fronte guardando di mala voglia l'incredibile quantità di miglia che si dovrebbero ancora percorrere per raggiungere l'orizzonte.

Questo è ciò che si vedrebbe



I binari convergerebbero verso un unico punto sull'orizzonte. Si potrebbe anche essere tentati di credere che essi realmente concorrano verso quel punto. Si potrebbe, però, accettarlo se si fosse creduta ogni cosa che si è vista.

Si potrebbe dunque credere che *rette parallele si incontrano, in qualche luogo, al di fuori di lì...*

...all'infinito...

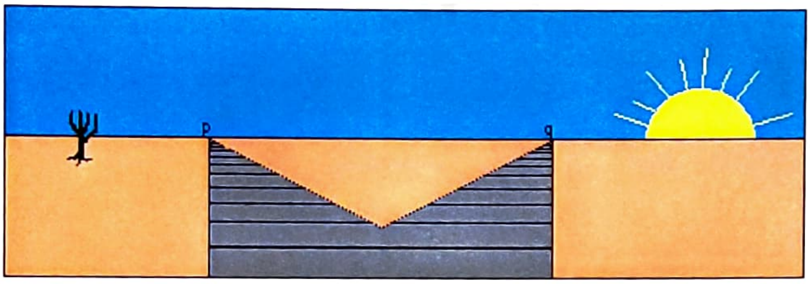
Ora, io non sto provando a dire che rette parallele si intersecano. Di certo esse non lo fanno. Io sto solo provando a convincere che quando le si guarda sembrerà di vedere un punto sull'orizzonte dove esse si intersecano. Se stiamo sviluppando la geometria dell'occhio per descrivere ciò che si vede, allora questi "punti apparenti" dovrebbero essere considerati proprio reali (cioè realmente visti) come tali consideriamo i "punti reali" sulle rette, anche se sono tanto lontani almeno per quanto l'occhio può percepire.

Rette parallele si incontrano all'infinito sull'orizzonte, almeno in accordo ai miei occhi.

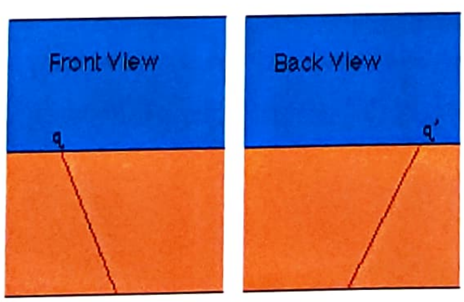
Domanda: quanti punti all'infinito ci sono?

Bene, quanti?

È lo stesso chiedere quanti punti apparenti ci sono sull'orizzonte. Ce n'è di certo una grande quantità (infinitamente molti), uno per ogni direzione che i binari ferroviari potrebbero aver seguito. Scegliamo, quindi, due di tali punti, diciamo P e Q:



Domanda: ricordiamo: per due punti qualsiasi, c'è esattamente una retta che li unisce. C'è una retta che unisce questi due punti (P e Q)? Attenzione! Ci sono *infiniti* punti!
Se noi guardiamo la figura potremmo tentare di disegnare semplicemente la retta che unisce i due punti e continuarla indefinitamente da entrambi i lati. La retta che noi disegneremmo in questo modo è certamente la linea stessa dell'orizzonte. È la *retta infinita* -una retta all'infinito costituita da tutti i punti all'infinito!
(Pondera questo: *la retta infinita è in realtà un cerchio?*)
Ecco un fatto strano riguardo ai nostri punti all'infinito. Supponiamo di stare su una qualche retta che guarda oltre l'orizzonte. La retta incontra un singolo punto all'infinito (Q) sull'orizzonte. Ma se noi ci giriamo attorno, la nostra stessa retta incontra un punto differente (Q') sull'orizzonte. Cosa succede?



Una qualsiasi altra retta che contiene questo punto all'infinito "di fronte", infatti, sarà parallela alla nostra retta e conterrà anche lo stesso punto all'infinito "di dietro". Questi due punti sono *misticamente accoppiati*: una qualsiasi retta attraverso uno passa attraverso l'altro! Questo potrebbe essere una gran cosa da un punto di vista spirituale, ma non è così buona da un punto di vista geometrico. Dopo tutto, abbiamo supposto avere *esattamente una retta* che unisce due punti qualsiasi, e ora abbiamo dozzine di rette diverse che uniscono questi due punti.

Come risolviamo l'"accoppiamento mistico", così da poter ancora dire "tra due punti qualsiasi, c'è esattamente una retta"?
Bene, come?

Lezione 3

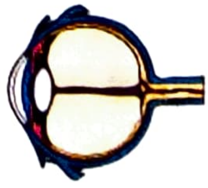
Risolvere un mistero mistico

Abbiamo visto che i punti all'infinito si presentano a coppie, uno su ciascun estremo di una retta qualsiasi. Se P e Q sono due di tali punti accoppiati, allora una qualsiasi retta attraverso P passerà attraverso Q, e viceversa. Questo contraddice l'assioma: "tra due punti qualsiasi, c'è esattamente una retta".
Questo problema supporta l'evidenza di non aver fatto qualcosa di sbagliato. C'è una maniera molto semplice per risolvere questa questione in modo da mantenere sia i punti all'infinito, sia la veridicità dell'assioma precedente.
La risoluzione è:
ogni volta che due punti all'infinito appartengono agli estremi "opposti" della stessa retta, li considereremo come lo stesso punto. Nelle figure sopra, P e Q sono solo due lati differenti dello stesso punto -possiamo vedere questo punto "da davanti" o "da dietro".
Se siamo disposti ad accettare questo piccolo aggiustamento, allora la nostra geometria soddisfa ancora l'assioma suddetto, e in più per due rette qualsiasi c'è esattamente un punto su ciascuna di esse. Questo è il modo "corretto" di aggiungere punti all'infinito.
(Pondera questo: *ogni retta è in realtà un cerchio?*)

Lezione 4

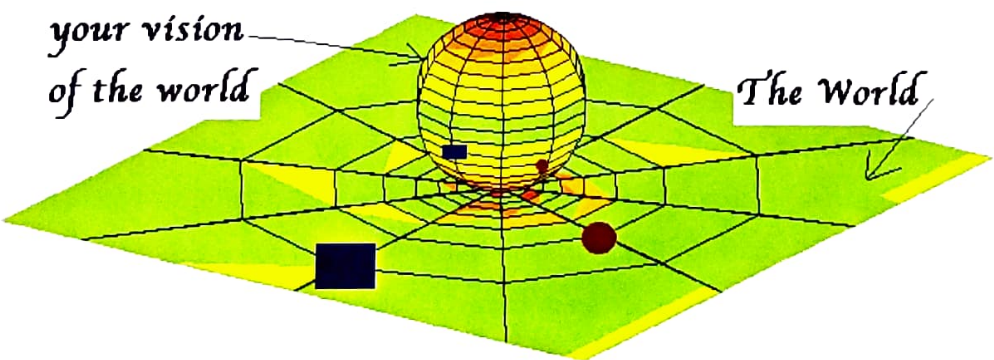
L'occhio vede tutto!

Se stiamo per dipingere correttamente un edificio o apprendere coscienziosamente la geometria proiettiva, dobbiamo essere capaci di rispondere alla domanda: che cosa vede l'occhio quando guarda un edificio? Un modo di rispondere a questo è quello di far luce sul bulbo dell'occhio e studiare la retina, per ottenere un sentore di ciò che è visto. Questa misura estrema, però, non è necessaria. Allo scopo di comprendere ciò che è visto



dobbiamo riconoscere che il mondo attorno a noi è solo quello - *attorno a* noi. Ci sono

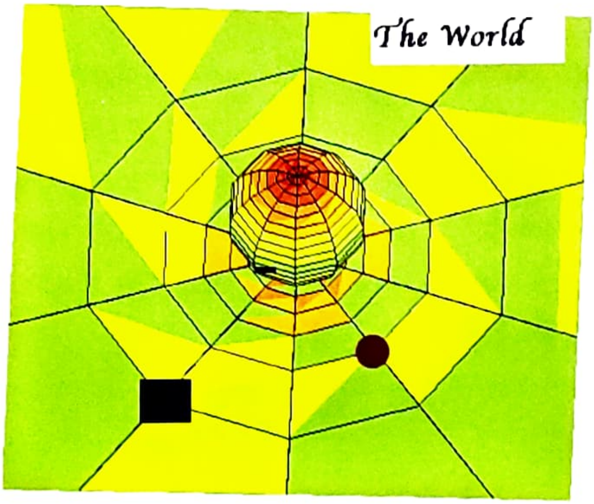
tante direzioni differenti nelle quali possiamo guardare, e tutte queste direzioni ci circondano ugualmente. Il mondo *come noi* lo *vediamo* è solo una grande palla sferica disegnata che ci circonda. Questo suggerisce che per comprendere la geometria dell'occhio dovremo studiare la geometria della sfera. Abbiamo visto prima che la geometria dell'occhio è la geometria di un piano (con punti all'infinito). Qui, vediamo che essa è la geometria della sfera. Come possono questi due differenti sistemi descrivere entrambi la geometria corretta dell'occhio? Qual è quello più reale?
Di certo, entrambe le descrizioni della geometria della visione sono esatte. Questo ci lascia con il dovere di riconciliarle e mostrare come comprendere ogni sistema in termini dell'altro.
Essenzialmente, necessitiamo di fare un dizionario Sfera-Piano che ci aiuterà ad andare avanti e indietro dalla comprensione di ciascun sistema a quella dell'altro.



Questo è uno schema di una persona che sta guardando un piano. Il soggetto si trova ovviamente nel centro della sfera grande. La sfera rappresenta il mondo come lo si vede. Il piano rappresenta il mondo attuale (piuttosto piatto). Ogni punto sul piano corrisponde a un punto sulla sfera, attraverso la linea degli occhi del soggetto. L'"oggetto reale" che forma il cerchio rosso produce un'immagine sulla sfera, così come l'oggetto disegnato produce un quadrato blu. Le rette sul piano (radiali uscenti dal punto dove ci si trova) producono rette (di un tipo) sulla sfera. Certamente esse non sono realmente rette -esse sono dei grandi cerchi che coprono tutta la strada (o è solo metà strada?) attorno al cerchio. I cerchio sul piano (che circondano il soggetto) producono cerchi sulla sfera. In altre parole, le rette possono "sembrare" grandi cerchi, mentre i cerchi continuano a "sembrare" cerchi.

Lezione 5

Una visione alternativa



Sfere e piani infiniti: tirar fuori le grinze

Potrebbe essere stato notato che il piano e la sfera non si 'sposano' perfettamente. Prima di tutto i punti all'infinito "opposti" sul piano (che sono realmente lo stesso punto) sembrano corrispondere a due punti genuinamente distinti sull'equatore della sfera. La linea degli occhi da essi va "verso il cielo". Ognuno di questi, poi, si presenta con un problema di 'sposare' il consueto piano infinito con il nostro diagramma a sfera. Come possiamo risolvere tali difficoltà?

Per risolvere il problema dei due punti che diventano uno, non possiamo permettere che due punti, visti opposti rispetto all'equatore da un terzo punto di osservazione, siano "differenti". Dobbiamo mischiare questi punti in uno solo. Ciò suggerisce come agire sui punti sulla cima della sfera. Li mischiamo con i punti opposti sul fondo della sfera, cosicché ogni punto risulti mischiato con esattamente un punto, sull'esatto opposto della sfera. Con che cosa siamo rimasti dopo aver fatto questa strana operazione? Certamente non con una sfera, ma con un altro tipo di forma che è assolutamente difficile da disegnare (come dicono i matematici, essa "non si immerge nello spazio tridimensionale"). Questa forma è chiamata il "piano proiettivo", ed è identica al piano infinito di cui abbiamo discusso prima. Infatti essa soddisfa perfettamente gli assiomi della geometria che desideriamo, basta stare attenti ad interpretare un "punto" come "una coppia di punti opposti sulla sfera", e una "retta" come "un grande cerchio sulla sfera":

1. attraverso ogni coppia di punti (sulla sfera) passa esattamente un solo cerchio massimo (= retta);
2. ogni coppia di rette (cerchi massimi sulla sfera) si incontra esattamente in un punto (ovvero esattamente due punti opposti sulla sfera).

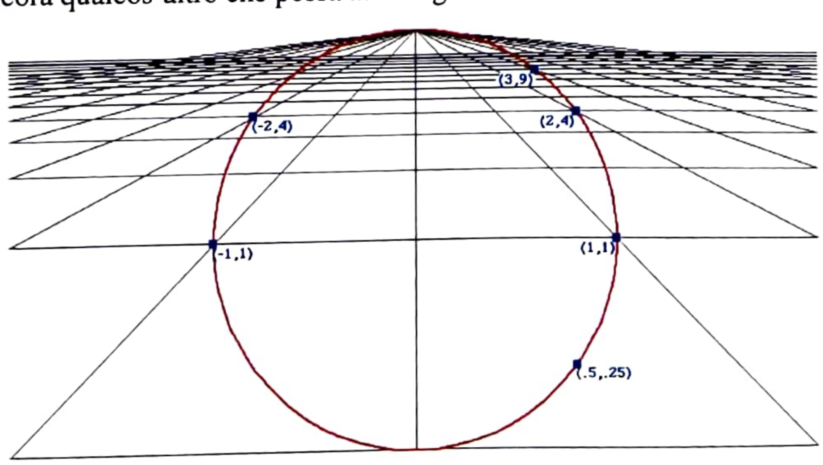
In altre parole si tratta di una geometria valida in cui non vi sono rette parallele. Ovviamente questa geometria è differente dalla geometria ordinaria. Essa è nota come "geometria non euclidea", nello specifico viene chiamata "geometria proiettiva" o "geometria ellittica". C'è il sospetto tra fisici ed astronomi che la geometria ellittica sia più vicina di quella euclidea alla geometria del nostro universo. Naturalmente il nostro universo ha 4 dimensioni invece di 2.

Lezione 6

Oh beh, sì, mi sembri proprio una circonferenza

Abbiamo visto circonferenze sul piano che assomigliano a circonferenze sulla sfera. C'è qualcos'altro sul piano che assomigli ad un cerchio? Se sì, che cosa? A dire il vero altre forme possono sembrare circonferenze. Si consideri una finestra la cui forma assomiglia ad un ovale allungato. Se ci si trova a pochi passi di fronte alla finestra essa avrà una forma piuttosto ovale, se invece ci si trova posti di sbieco essa sembrerà molto più arrotondata. Se la finestra è un'ellisse perfetta vi sarà una posizione dalla quale essa potrà essere vista come una circonferenza perfetta.

Ma c'è ancora qualcos'altro che possa assomigliare ad una circonferenza?



Vedere per credere!

Adesso sappiamo che circonferenze, ellissi e parabole possono sembrare circonferenze. Si è perso qualcosa? Le iperboli naturalmente! Tutto questo non sembra un po' sospetto? Che cosa c'è di così speciale nelle sezioni coniche dopo tutto?

Lezione 7

Dipende tutto da come lo sezioni!

Quando si osserva una forma sul piano la luce proviene dal piano verso i nostri occhi. Il punto dove essa passa attraverso la sfera è il nostro modello di "dove vediamo l'oggetto". Il posto sul piano da dove la luce proviene è la nostra idea di "dove esso si trovi". Si è visto che tutte le sezioni coniche (eccetto forse le iperboli?) sul piano possono sembrare circonferenze di un certo tipo sulla sfera. Perché? Per dare una risposta proviamo a capovolgere la domanda: perché una circonferenza sulla sfera dovrebbe corrispondere a una sezione conica sul piano? A che cosa può corrispondere una circonferenza sulla sfera? È facile visualizzare la risposta se si pone una sorgente luminosa al centro della sfera, invece del nostro occhio. Allora la circonferenza (sulla sfera) proietterà un'ombra che avrà la forma di ciò a cui essa corrisponde sul piano. Quali posizioni (nello spazio tridimensionale) sono ombreggiate da una circonferenza tracciata su una sfera che avvolge una sorgente luminosa? Si ponga un anello in un fascio luminoso, si vedrà la forma cercata: si tratta di un cono. Se l'ombra (nello spazio tridimensionale) è a forma di cono allora quale forma essa creerà raggiungendo il piano? Il piano taglierà questo cono creando, naturalmente, una sezione conica.

[Fine citazione]

Nei fogli precedenti sono stati introdotti, in modo intuitivo, i concetti matematici e geometrici con cui abitualmente trattiamo, magari inconsciamente. È stato così messo in luce che il parallelismo, i punti all'infinito, l'equivalenza delle coniche e le geometrie non euclidee sono argomenti insiti nella nostra visione e che alcune nostre certezze: "è vero perché lo vedo" sono basate su argomenti che, in realtà, non padroneggiamo.

Diamo, pertanto, di tali concetti una descrizione esplicita e rigorosa.

Che cos'è la geometria

La geometria si occupa delle proprietà delle figure del piano e dello spazio. Tali proprietà sono così numerose e così diverse che non si può far ordine in tutta questa ricchezza dell'umano sapere senza un principio di classificazione. Si potrebbe, per esempio, introdurre una classificazione basata sul metodo che si usa per dedurre i teoremi: da questo punto di vista, si fa di solito una distinzione tra il procedimento "sintetico" e il procedimento "analitico". Il primo è il classico metodo assiomatico di Euclide, secondo cui la teoria si costruisce su fondamenti puramente geometrici indipendenti dall'algebra e dal concetto di continuo numerico, e i teoremi si deducono con un ragionamento logico partendo da un complesso iniziale di proposizioni dette assiomi o postulati. Il secondo metodo è basato sull'introduzione di coordinate numeriche e usa la tecnica dell'algebra: è un metodo che ha prodotto un profondo mutamento nella scienza matematica, approdando ad un'unificazione della geometria, dell'analisi e dell'algebra in un sistema organico.

In questo capitolo, però, daremo più importanza ad una classificazione secondo il *contenuto* anziché secondo il metodo, ci baseremo, cioè, sul carattere dei teoremi stessi, senza tener conto dei metodi usati per dimostrarli. Nella geometria piana elementare si distingue tra i teoremi che trattano della congruenza delle figure e usano i concetti di lunghezza e di angolo, e i teoremi che trattano della similitudine delle figure, e usano soltanto il concetto di angolo. Non si tratta di una distinzione molto importante, perché lunghezze e angoli sono così intimamente connessi che una separazione di essi è piuttosto artificiosa. Possiamo invece dire che i teoremi di geometria elementare riguardano le *grandezze*: lunghezze, misure di angoli e aree. Da questo punto di vista, due figure nel piano sono equivalenti se sono *congruenti*, cioè se da una di esse si può ottenere l'altra mediante un *moto rigido*, in cui soltanto la posizione ma non la grandezza viene alterata. Viene ora spontanea la domanda se il concetto di grandezza e i concetti ad esso connessi di congruenza e di similitudine siano essenziali in geometria, o se possano esistere proprietà delle figure geometriche ancora più profonde che non si lasciano distruggere da trasformazioni ancora più radicali dei moti rigidi. Vedremo che accade proprio così.

Supponiamo di aver disegnato un cerchio e in esso una coppia di diametri perpendicolari su un blocco rettangolare di legno tenero. Se poniamo il blocco tra le due facce di un forte compressore e lo comprimiamo fino a ridurlo alla metà della sua larghezza originaria, il cerchio diverrà un'ellisse e gli angoli formati dai diametri di quest'ultima non saranno più retti. Mentre il cerchio gode della proprietà che i suoi punti sono equidistanti dal centro, questo non è più vero per l'ellisse. Potrebbe allora sembrare che tutte le proprietà geometriche della figura originale vengano distrutte dalla compressione, ma questo non è affatto vero: per esempio, l'affermazione che il centro biseca ognuno dei diametri vale sia per il cerchio che per l'ellisse. Siamo qui in presenza di una proprietà che persiste anche dopo un cambiamento piuttosto profondo nella dimensioni della figura originale. Questa osservazione ci suggerisce la possibilità di classificare i teoremi relativi ad una figura geometrica secondo che la loro validità si mantenga o meno quando la figura è sottoposta ad una compressione uniforme. Più generalmente, data una classe determinata di trasformazioni di una figura (per esempio la classe di tutti i moti rigidi, delle compressioni, delle inversioni rispetto a cerchi, ecc.), ci si può chiedere quali proprietà della figura rimarranno invariate rispetto a questa classe di trasformazioni. Il complesso di teoremi che trattano di queste proprietà costituirà la geometria associata a tale classe di trasformazioni. L'idea di classificare i diversi rami della geometria secondo le classi di trasformazioni considerate fu proposta da Felix Klein (1849/1925) in un famoso discorso (il "programma di Erlangen") tenuto nel 1872. Da quel tempo essa ha profondamente influenzato il pensiero matematico.

Veramente sorprendente risulta il fatto che alcune proprietà delle figure geometriche sono così intimamente inerenti ad esse che persistono anche quando le figure siano state assoggettate a deformazioni del tutto arbitrarie; le figure disegnate su un pezzo di gomma, per quanto questo venga tirato o compresso in tutti i modi possibili, mantengono ancora alcune delle loro caratteristiche originarie.

Possiamo dunque dire che la geometria proiettiva è costituita da quelle particolari proprietà che rimangono immutate, "invarianti", rispetto ad una particolare classe di trasformazioni, che si trova tra la classe molto ristretta dei moti rigidi da una parte e la classe più generale delle deformazioni arbitrarie dall'altra, cioè la classe delle "trasformazioni proiettive".

Punti all'infinito come "punti impropri"

Il ragionamento geometrico è spesso ostacolato dal fatto che due rette parallele non si intersecano, cosicché, in ogni argomento in cui si consideri l'intersezione di rette, il ca-

so eccezionale delle rette parallele deve essere esaminato e formulato separatamente. Allo stesso modo si deve distinguere la proiezione da un centro **O** da una proiezione parallela, che richiede una trattazione a parte. Se si dovesse effettivamente affrontare la discussione dettagliata di ciascuno di questi casi eccezionali, la geometria diventerebbe molto complicata. Siamo perciò condotti a risolvere in altro modo la questione e precisamente a estendere i nostri concetti fondamentali in modo da eliminare le eccezioni.
L'intuizione geometrica ci indica la via: se una retta che ne interseca un'altra ruota lentamente, tendendo a diventare parallela, il punto di intersezione delle due rette si allontana all'infinito. Si potrebbe dire, con un linguaggio impreciso ma efficace, che le due rette si intersecano in un "punto all'infinito". L'essenziale è, poi, di dare a questa vaga affermazione un significato preciso, in modo da poter trattare i punti all'infinito, o, come talvolta si dice, i punti "impropri", esattamente come se fossero punti ordinari o punti "propri" del piano e dello spazio. In altre parole vogliamo che tutte le leggi relative al comportamento di punti, rette e piani, ecc. continuino a valere anche quando questi elementi geometrici sono impropri; per raggiungere questo scopo si potrà procedere o intuitivamente o formalmente.
Prima di tutto, fermiamo l'attenzione sul fatto che nella geometria sintetica non sono matematicamente definiti neppure i concetti fondamentali di punto "proprio" e retta. Le cosiddette definizioni di questi concetti, che spesso si trovano nei testi scolastici, sono soltanto delle descrizioni destinate a suscitarne l'immagine. Nel caso degli elementi propri della geometria, la nostra intuizione non incontra ostacoli ad accettare la loro "esistenza". Ma ciò di cui abbiamo veramente bisogno in geometria, quando la si consideri come un sistema matematico, è la validità di certe leggi, per mezzo delle quali si possano eseguire con questi concetti delle operazioni, come quelle di congiungere punti, trovare l'intersezione di rette, ecc. Considerato da un punto di vista logico, un "punto" non è una "cosa in sé", ma è completamente descritto dalla totalità delle proposizioni con cui è collegato ad altri enti. L'esistenza matematica dei "punti all'infinito" sarà assicurata non appena avremo stabilito in maniera chiara e senza contraddizioni le proprietà matematiche di questi nuovi enti, cioè le loro relazioni con i punti propri della geometria e tra loro. Gli assiomi usuali della geometria (per esempio quelli di Euclide) sono delle astrazioni dal mondo fisico dei segni di matita e di gesso, dei fili tesi, dei raggi di luce, delle aste rigide, ecc.

Le proprietà che questi postulati attribuiscono ai punti ed alle rette della matematica sono descrizioni molto semplificate e idealizzate del comportamento dei loro corrispondenti fisici. Per due qualsiasi punti disegnati con la matita possono essere tracciate, con la matita, non una ma molte rette. Se i punti diventano di diametro sempre minore, queste rette approssimativamente coincidono. Questo è ciò che si ha in mente quando si stabilisce come assioma della geometria che "per due punti si può tracciare una ed una sola retta"; ci si riferisce non ai punti e alle rette fisiche, ma ai punti e alle rette astratte della geometria. I punti e le rette geometriche hanno proprietà essenzialmente più semplici di quelle degli oggetti fisici, e questa semplificazione costituisce la condizione essenziale per lo sviluppo della geometria come scienza deduttiva.

Come abbiamo già osservato, la geometria ordinaria dei punti e delle rette è molto complicata dal fatto che due rette parallele non si intersecano in un punto. Siamo perciò indotti ad apportare un'ulteriore semplificazione nella struttura della geometria, allargando il concetto di punto geometrico in modo da rimuovere questa eccezione.

Faremo, perciò, la convenzione di aggiungere ai punti propri di ciascuna retta un solo punto improprio. Si considererà questo punto come appartenente a tutte le rette parallele alla retta data e a nessun'altra. Come conseguenza di questa convenzione, due rette del piano si intersecano sempre in un punto; se le rette non sono parallele si intersecano in un punto proprio, mentre se sono parallele si intersecano nel punto all'infinito comune ad entrambe. Per ragioni intuitive, il punto improprio di una retta si dice "punto all'infinito" della retta.

Per lo stesso motivo il concetto di un punto che si allontana all'infinito su una retta potrebbe suggerire di aggiungere ad ogni retta due punti impropri, uno per ciascuno dei due versi della retta. Se ne viene aggiunto uno solo, così come è stato fatto, è per il desiderio di conservare il postulato che per due punti passi una e una sola retta. Se una retta avesse due punti all'infinito in comune con ogni retta parallela, allora per questi due punti passerebbero infinite rette parallele.

Faremo anche la convenzione di aggiungere alle rette proprie del piano una sola retta "impropria" (detta anche la retta all'infinito del piano), contenente tutti i punti impropri del piano e nessun punto oltre a questi.

Questa convenzione ci è imposta precisamente dal desiderio di conservare il postulato precedente e la nuova proposizione, ora stabilita, che due rette si intersecano sempre in un punto.
Infatti, scegliamo due punti impropri qualsiasi. Allora l'unica retta che deve passare per questi punti non può essere una retta propria, perché abbiamo fatto la convenzione che ogni retta propria contenga soltanto un punto improprio. La retta che stiamo cercando, inoltre, non può contenere punti propri, perché un punto proprio e un punto improprio determinano una retta propria. Infine, questa retta deve contenere tutti i punti impropri, poiché si vuole che abbia un punto in comune con tutte le rette proprie. Essa deve, quindi, avere esattamente le proprietà che abbiamo attribuito alla retta impropria del piano.
Secondo le nostre convenzioni, un punto all'infinito è determinato o è rappresentato da una qualsiasi famiglia di rette parallele, proprio come un numero irrazionale è determinato da una successione monotona di intervalli razionali. L'affermazione che l'intersezione di due rette parallele è un punto all'infinito non è una locuzione misteriosa, ma soltanto una maniera conveniente di asserire che le rette sono parallele. Questo modo di esprimere il parallelismo nel linguaggio originariamente riservato a enti intuitivamente diversi, ha il solo scopo di rendere superflua l'enumerazione dei casi eccezionali; essi sono ora automaticamente compresi nello stesso tipo di espressioni linguistiche o di altri simboli usati per i casi "propri".
Riassumendo: le nostre convenzioni relative ai punti all'infinito sono state scelte in modo che le leggi che governano le relazioni di incidenza tra i punti e le rette proprie continuino a valere nel dominio di punti più esteso, mentre l'operazione di trovare il punto di intersezione di due rette, prima possibile soltanto se le rette non erano parallele, può essere adesso eseguita senza restrizioni. Le considerazioni che ci hanno condotto a questa semplificazione formale nelle proprietà della relazione di incidenza possono sembrare in qualche modo astratte. Esse sono però ampiamente giustificate dai risultati.

Assiomi della geometria proiettiva

Quanto detto nel paragrafo precedente ci permette di modificare gli assiomi della geometria come segue.

Incidenza

1. Ci sono almeno due punti.
2. Ogni coppia di punti è incidente ad una sola retta.
3. Dati i punti **A, B** la retta **AB** è incidente con almeno un punto tra **A** e **B**.
4. C'è almeno un punto non incidente con la retta **AB**
5. Se **A, B, C** sono tre punti non allineati e **D**, distinto da **B** e **C** è un punto su **BC** mentre **E**, distinto da **A** e **C** è un punto su **CA**, allora c'è un punto **F** su **AB** tale che **D**, **E**, **F** siano allineati.
6. C'è almeno un punto che non si trova sul piano **ABC**.

Separazione

Indichiàmo con il simbolo **AB||CD** il fatto che **A** e **B** separino **C** e **D**.

1. Se **A**, **B**, **C** sono tre punti allineati c'è almeno un punto **D**, tale che **AB||CD**.
2. Se **AB||CD** allora **A**, **B**, **C**, **D**, sono allineati e distinti.
3. Se **AB||CD** allora **AB||DC**.
4. Se **A**, **B**, **C**, **D** sono quattro punti allineati allora o **AB||CD** oppure **AC||BD** o ancora **AD||BC**.
5. Se **AB||CD** e **AD||BX**, allora **AB||CX**.
6. Se **AB||CD** e **ABCD ≅ A'B'C'D'** allora **A'B'||C'D'**,

dove con il simbolo ≅ si indica che i punti **A**, **B**, **C**, **D** sono in corrispondenza prospettica con i punti **A'**, **B'**, **C'**, **D'**.

Questa corrispondenza è stabilita tra due rette complanari pensandole come sezioni di uno stesso fascio. Le coppie di punti saranno in corrispondenza se sono intersezione delle due rette con una stessa retta del fascio.

Continuità

Per ogni suddivisione di tutti i punti di un segmento in due insiemi non vuoti tali che nessun punto di uno giaccia tra due punti dell'altro, c'è un punto di un insieme che si trova tra ogni altro punto di quell'insieme ed ogni altro punto dell'altro insieme.

Gli assiomi qui enunciati, ci permettono di dedurre una geometria più generale di quella euclidea, detta "geometria proiettiva".

Nonostante in essa non siano più verificati alcuni criteri di regolarità, né una metrica, è comunque possibile definire nuovi oggetti e nuove relazioni, che permettono di stabilire un nuovo concetto di ordine.
Tra questi ricordiamo, in particolar modo, gli insiemi armonici e il birapporto.

Insiemi armonici

Se indichiamo con H(**AB**, **CD**) il fatto che **D** è il coniugato armonico di **C** rispetto ad **A** e **B**, questo significa che esiste un quadrangolo **IJKL** tale che una coppia di lati opposti si intersechi in **A**, una seconda coppia in **B**, mentre la terza coppia incontri **AB** in **C** e **D**. Questa relazione è chiaramente simmetrica tra **A** e **B** e tra **C** e **D**. Dati tre punti complanari **A**, **B**, **C**, possiamo ottenere **D** prendendo due punti **I**, **J** allineati con **C** e costruendo le intersezioni **K = (AJ, BI)**, **L= (AI, BJ)**, **D=(AB, KL)**.

Birapporto

(Definizione e dimostrazione di invarianza).
Esattamente come la geometria metrica si basa sul concetto fondamentale di lunghezza di un segmento, esiste in geometria proiettiva un concetto fondamentale per mezzo del quale si possono esprimere tutte le proprietà proiettive delle figure. Dati tre punti **A**, **B**, **C** su una retta, in seguito a una proiezione verranno alterate non soltanto le distanze **AB** e **BC**, ma anche il rapporto **AB** / **BC**. Infatti, è sempre possibile mettere in corrispondenza tre qualsiasi punti **A**, **B**, **C** di una retta **l** con altri tre punti qualsiasi **A'**, **B'**, **C'** di un'altra retta **l'** mediante due proiezioni successive. Per far ciò, basta far ruotare la retta **l** intorno al punto **C'** fino a che assuma la posizione **l''** parallela a **l**. (vedi fig.). Si proietta poi **l** su **l''** con una proiezione parallela alla retta congiungente **C** e **C'**, determinando così tre punti **A''**, **B''**, **C''** (= **C'**). Le rette congiungenti **A'**, **A''** e **B'**, **B''** si incontreranno in un punto **O**, che sceglieremo come centro della seconda proiezione. Le due proiezioni portano al risultato voluto. Come abbiamo ora visto, nessuna delle quantità relative a soli tre punti può essere invariante rispetto a una proiezione. Ma – e questa è la scoperta decisiva della geometria proiettiva – dati su una retta quattro punti **A**, **B**, **C**, **D**, se li si proietta nei punti **A'**, **B'**, **C'**, **D'** di un'altra retta, esiste una certa quantità, detta il "birapporto dei quattro punti", che mantiene lo stesso valore rispetto alla proiezione. È questa una proprietà matematica dell'insieme di quattro punti di una retta che

non viene distrutta dalle proiezioni e può essere riconosciuta in qualsiasi immagine della retta. Il birapporto non è una lunghezza né il rapporto di due lunghezze, ma il rapporto di due di questi rapporti: se si considerano i rapporti **CA / CB** e **DA / DB**, il loro rapporto **X = (CA / CB) / (DA / DB)**, è per definizione il birapporto dei quattro punti **A, B, C, D** presi in quest'ordine.

Si vede che il birapporto di quattro punti è invariante rispetto alle proiezioni, cioè che se **A, B, C, D** e **A', B', C', D'** sono punti di due rette che si corrispondono in una proiezione si ha:

((CA / CB) / (DA / DB)) = ((C'A' / C'B') / (D'A' / D'B'))

Fin ora abbiamo inteso il birapporto di quattro punti **A, B, C, D** su una retta **l** come un rapporto tra lunghezze positive. È ora opportuno modificare la definizione come segue. Scegliamo su **l** un verso come positivo, e facciamo la convenzione che le lunghezze misurate in questo verso siano positive, quelle in verso opposto negative. Definiremo ora il birapporto di **A, B, C, D** presi in quest'ordine come la quantità

(ABCD) =((**CA / CB**) / (**DA / DB**))

dove i numeri **CA, CB, DA, DB** si intendono presi con il loro segno. Si mostra facilmente che il valore di **(ABCD)** non dipende dal verso scelto. È facile vedere che **(ABCD)** è positivo o negativo secondo che la coppia di punti **A, B** sia o no separata dalla coppia **C, D**. Poiché questa separazione è invariante rispetto alle proiezioni anche il segno del birapporto è invariante. Se si sceglie su **l** un punto fisso **O** e si assume come ascissa x di ciascun punto su **l** la sua distanza orientata da **O** in modo che le ascisse di **A, B, C, D** siano rispettivamente x_1, x_2, x_3, x_4, allora

(ABCD) =((**CA / CB**) / (**DA / DB**)) = $(((x_3- x_1)/(x_3- x_2))/((x_4- x_1)/(x_4- x_2)))=(((x_3- x_1)(x_4- x_2))/ ((x_3- x_2)(x_4- x_2)))$

Quando **(ABCD) = - 1** e quindi CA / CB **= - DA / DB, C** e **D** dividono il segmento **AB** internamente ed esternamente nello stesso rapporto. In questo caso si dice che **C** e **D** dividono il segmento **AB** armonicamente, e ciascuno dei due punti **C** e **D** si dice il coniugato armonico dell'altro rispetto alla coppia **A, B**. Se **(ABCD) = 1** allora i punti **C** e **D** (o **A** e **B**) coincidono.

Coniche

Si può dare una definizione proiettiva delle coniche: le sezioni coniche non sono altro che le proiezioni di un cerchio su un piano. Se si proietta un cerchio C da un punto **O**, le rette proiettanti formano una doppia superficie conica e l'intersezione di questa superficie con un piano π rappresenta la proiezione di C.

Questa intersezione sarà un'ellisse o un'iperbole secondo che il piano tagli una o tutte e due le parti della superficie conica. Il caso intermedio è quello della parabola, e si presenta quando π è parallelo a una delle rette passanti per **O**.

Non è necessario che il cono proiettante sia circolare retto, esso può anche essere obliquo.

Possiamo immaginare che il vertice del cono coincida con l'occhio dell'osservatore.

La definizione che si è appena data è quindi più nello spirito della geometria proiettiva che non la solita definizione focale, poiché quest'ultima si fonda interamente sulla nozione metrica di distanza. Anche la definizione attuale non è esente da questo difetto, poiché il cerchio è esso pure un concetto di geometria metrica. Arriveremo tra poco a una definizione puramente proiettiva delle coniche.

Poiché abbiano convenuto che una conica sia semplicemente la proiezione di un cerchio, ne segue che ogni proprietà del cerchio, che sia invariante per operazioni di proiezione sarà anche una proprietà comune a tutte le coniche. Ora un cerchio gode della ben nota proprietà (metrica) che gli angoli alla circonferenza, che insistono su archi uguali, sono uguali.

Questa proprietà può essere messa in relazione col concetto proiettivo di birapporto, considerando sul cerchio quattro punti **A, B, C, D**. Le quattro rette **a, b, c, d** che li congiungono ad un quinto punto **O** del cerchio avranno un birapporto **(abcd)** che dipenderà soltanto dagli angoli che insistono sugli archi **CA, CB, DA, DB**. Se si congiungono **A, B, C, D** con un altro punto **O'** del cerchio si ottengono quattro rette **a', b', c', d'**. Per la proprietà del cerchio ora ricordata, le due quaterne di rette saranno "congruenti" e quindi avranno lo stesso birapporto. Se ora si proietta il cerchio in una conica K, si ottengono su K quattro punti che chiameremo di nuovo **A, B, C, D**, due altri punti **O, O'** e le due quaterne di rette **a, b, c, d** e **a', b', c', d'**. Queste quaterne non saranno congruenti, perché una proiezione, generalmente, non mantiene l'uguaglianza degli angoli, ma, es-

sendo il birapporto invariante rispetto alle proiezioni varrà ancora l'uguaglianza **(abcd)= (a'b'c'd')**. Si arriva così al teorema fondamentale: se si congiungono quattro determinati punti **A, B, C, D** di una conica K a un quinto punto **O** di K mediante le rette **a, b, c, d** allora il valore del birapporto **(abcd)** è indipendente dalla posizione di **O** su K. Non è difficile dimostrare l'inverso di questo risultato nella forma seguente: se esistono su una curva K due punti **O, O'**, tali che ogni quaterna di punti **A, B, C, D** di K appaia sotto lo stesso birapporto sia da **O** che da **O'** , allora K è una conica.
Da quanto detto possiamo costruire una conica a partire da fasci di rette ottenendone la caratterizzazione puramente proiettiva: una conica K è il luogo geometrico delle intersezioni di rette corrispondenti di due fasci tra loro proiettivi.

Rappresentazione analitica

Osservazioni introduttive.
Quando la geometria proiettiva cominciò a svilupparsi, era diffusa una forte tendenza a costruire ogni teoria su una base sintetica e "puramente geometrica" che non facesse ricorso all'uso dei numeri e dei metodi dell'algebra. Questo programma si imbatté, però, in serie difficoltà, perché rimaneva sempre qualche punto in cui la formulazione algebrica appariva inevitabile. Soltanto verso la fine del XIX secolo si riuscì a costruire una geometria proiettiva puramente sintetica, a prezzo, però, di una grande complicazione. Sotto questo aspetto, hanno avuto un successo molto maggiore i metodi della geometria analitica. La matematica moderna ha la tendenza generale di basare ogni argomento sul concetto di numero, e in geometria questa tendenza, che ebbe inizio con Fermat e Descartes ha decisamente trionfato.

Coordinate omogenee: la base algebrica della dualità.
Nella geometria analitica ordinaria, le coordinate ortogonali di un punto del piano sono le distanze, prese con il loro segno, del punto da una coppia di assi perpendicolari. Questo sistema, però, viene meno per il punto all'infinito nel piano esteso della geometria proiettiva. Quindi se si vogliono applicare i metodi analitici della geometria proiettiva, è necessario trovare un sistema di coordinate che comprenda i punti impropri allo stesso modo dei punti propri. Il miglior modo per introdurre questo sistema di coordinate è di

supporre il piano dato π (le cui coordinate siano X e Y) come situato nello spazio a tre dimensioni nel quale siano state definite le coordinate ortogonali x,y,z. Poniamo il piano π parallelamente al piano coordinato x,y e a distanza 1 al di sopra di esso, in modo che ogni suo punto abbia le coordinate (X,Y,1). Prendendo l'origine **O** del sistema di coordinate come centro di proiezione, osserviamo che ogni punto **P** determina un'unica retta passante per **O** e viceversa. Le rette passanti per **O** e parallele a π corrispondono ai punti all'infinito di π.

Definiremo ora, per i punti di π un sistema di "coordinate omogenee". Per trovare le coordinate omogenee di un punto proprio **P** di π, prendiamo la retta passante per **O** e **P** e scegliamo su questa retta un punto **Q** diverso da **O**. Allora le coordinate spaziali ordinarie x,y,z di **Q** si dicono le coordinate omogenee di **P**. In particolare le coordinate (X, Y, 1) di **P** costituiscono una terna di coordinate omogenee per **P**. Inoltre, ogni altra terna di numeri (tX, tY, t),con $t \neq 0$, rappresenterà ancora per **P** una terna di coordinate omogenee, poiché tutti i punti della retta **OP** diversi da **O** avranno coordinate di questa forma. Il punto (0,0,0) è stato escluso perché non può servire a distinguere le rette passanti per esso. Questo sistema di coordinate richiede tre numeri invece di due per individuare la posizione di un punto nel piano, e presenta inoltre lo svantaggio che le coordinate di un punto non sono determinate in modo unico, ma soltanto a meno di un fattore arbitrario t. Ora però, e questo è il grande vantaggio anche i punti all'infinito di π sono compresi nella rappresentazione cartesiana. Infatti un punto **P** all'infinito di π si trova su una retta passante per **O** e parallela a π ed avrà quindi coordinate omogenee della forma (x,y,0).

Per trovare l'equazione in coordinate omogenee di una retta di π, basta osservare che le rette che congiungono **O** ai suoi punti appartengono a un piano passante per **O**. Si dimostra in geometria analitica che l'equazione di questo piano ha la forma:

$$ax + by + cz = 0.$$

Dunque questa è l'equazione in coordinate omogenee di una retta di π.

Ora che il modello geometrico, in cui i punti di π sono considerati come rette passanti per **O**, è servito al suo scopo, possiamo lasciarlo da parte e dare del piano esteso questa definizione puramente analitica.

Un punto è una terna ordinata di numeri reali (x, y, z), non tutti nulli. Due di tali terne, (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), definiscono lo stesso punto se, per un $t \neq 0$,

$$x_2=tx_1,$$

$$y_2=ty_1,$$

$$z_2=tz_1.$$

In altre parole, le coordinate di un punto possono essere moltiplicate per un qualsiasi fattore diverso da zero, senza che il punto cambi.

Un punto (x, y, z) è proprio se $z \neq 0$, è un punto all'infinito se $z=0$.

Una retta di π è costituita da tutti i punti (x,y,z) che soddisfano a un'equazione lineare della forma:

$$ax + by+cz=0,$$

dove a, b, c sono tre costanti non tutte nulle. In particolare, i punti all'infinito di π soddisfano tutti all'equazione lineare:

$$z=0.$$

Questa è per definizione una retta e si dice retta all'infinito di π.

Poiché una retta è definita da un'equazione della forma precedentemente data, diremo che i tre numeri (a, b, c) rappresentano le coordinate omogenee della retta di π. Ne segue che anche (ta, tb, tc), per ogni $t \neq 0$, sono le coordinate della retta precedente, poiché le due equazioni:

$$ax + by+cz=0,$$

$$(ta)x + (tb)y+(tc)z=0,$$

sono soddisfatte dalle stesse terne di coordinate (x, y, z).

Osserviamo in queste definizioni la perfetta simmetria tra punto e retta: entrambi sono individuati da tre coordinate omogenee (u, v, w). La condizione che il punto (x, y, z) appartenga alla retta (a, b, c) è che $ax + by+cz=0$, e questa è nello stesso tempo la condizione che il punto di coordinate (a, b, c) appartenga alla retta di coordinate (x, y, z).

Questa simmetria costituisce la base della dualità tra il punto e la retta in geometria proiettiva, poiché ogni relazione tra punti e rette diventa una relazione tra rette e punti quando si reinterpretino opportunamente le coordinate.

Nella nuova interpretazione le coordinate originarie di punti e rette vengono considerate come se rappresentassero rette e punti rispettivamente. Benché le operazioni algebriche e i risultati rimangano gli stessi, la nuova interpretazione dà il corrispondente duale del teorema originario. Bisogna osservare che questa dualità non si conserva nel piano ordinario a due coordinate X,Y, poiché l'equazione di una retta in coordinate ordinarie $aX + bY + c=0$ non è simmetrica in X,Y e a, b, c. Si può stabilire esattamente il principio di dualità soltanto introducendo i punti e le rette all'infinito.

Per passare dalle coordinate omogenee x, y, z di un punto ordinario P del piano π alle coordinate ortogonali ordinarie basta semplicemente porre

$$X=x/z$$

$$Y=y/z$$

Allora X,Y rappresentano le distanze del punto P dai due assi perpendicolari di π (paralleli agli assi x e y rispettivamente).

Sappiamo che un'equazione della forma

$aX + bY + c=0$

rappresenta una retta di π, che, con le sostituzioni precedenti diventa, in coordinate omogenee

$ax + by + cz = 0$

Un'osservazione rimane ancora da fare.

Siamo riusciti a dare una definizione puramente analitica di punto e retta, ma cosa si può dire del concetto altrettanto importante di trasformazione proiettiva? Si può dimostrare che una trasformazione proiettiva di un piano in un altro è rappresentata analiticamente da un sistema di equazioni lineari

$x' = a_1x + b_1y + c_1z$

$y' = a_2x + b_2y + c_2z$

$z' = a_3x + b_3y + c_3z$

che lega le coordinate omogenee x', y' e z' del piano π', alle coordinate omogenee x, y, z del piano π.

Trasformazioni proiettive

Lo studio delle proprietà geometriche suddette si impose ai matematici molti secoli fa attraverso i problemi di *prospettiva* di cui si occuparono artisti quali Leonardo da Vinci e Albrecht Durer. L'immagine creata da un pittore può essere considerata come una proiezione dell'originale sulla tela, come il centro di proiezione nell'occhio del pittore. In questo procedimento necessariamente si alterano lunghezze ed angoli, in una misura che dipende dalla posizione relativa dei vari oggetti dipinti: eppure, di solito, sulla tela si può ancora riconoscere la struttura geometrica dell'originale. Come è possibile questo? Esistono dunque senza dubbio delle proprietà geometriche "invarianti rispetto alla proiezione", proprietà che rimangono immutate nell'immagine e rendono possibile l'identificazione. È chiaro che i teoremi di questo ramo della geometria non possono essere delle proposizioni relative a lunghezze e ad angoli o alla congruenza. Alcune proprietà isolate di natura proiettiva sono note fin dal XVII secolo, o, come nel caso del "teorema di Menelao", fin dall'antichità. Ma solo alla fine del XVIII secolo si ebbe uno studio sistematico della geometria proiettiva, cioè quando, per opera dell' Ecole Polytechnique di Parigi, ebbe inizio un nuovo periodo di progresso per le matematiche e in particolare per la geometria. Da questa scuola, sorta in seguito alla rivoluzione francese, uscirono molti ufficiali destinati ai servizi militari della Repubblica. Nel XIX secolo, per opera di Steiner, von Staudt, Chasles e altri, la geometria proiettiva divenne uno dei principali soggetti di ricerca matematica. La sua popolarità si dovette in parte al suo grande fascino estetico, e in parte alla luce che essa gettava sulla geometria come complesso e alla sua intima connessione con le geometrie non euclidee e con l'algebra.

Il gruppo delle trasformazioni proiettive

Cominciamo prima di tutto a definire il concetto di classe o "gruppo" di trasformazioni proiettive. Supponiamo di avere nello spazio due piani π e π', non necessariamente paralleli. Si può allora eseguire una *proiezione centrale* di π su π', da un dato centro **O**, non appartenente né a π né a π', definendo come immagine di ciascun punto **P** di π quel punto **P'** di π' tale che **P** e **P'** giacciano sulla stessa retta passante per **O**. Si può anche eseguire una *proiezione parallela*, cioè una proiezione nella quale le rette proiettanti sono tutte parallele. Alla stessa maniera si può definire la proiezione di una retta **l**, appartenente ad un piano π, in un'altra retta **l'** del piano π' da un punto **O**, oppure mediante una proiezione parallela.

Ogni trasformazione di una figura in un'altra mediante una proiezione centrale o parallela, o con una successione finita di tali proiezioni, si dice una *trasformazione proiettiva*. La geometria proiettiva del piano o della retta è costituita dal complesso di quelle proposizioni geometriche che non sono alterate da trasformazioni proiettive arbitrarie delle figure a cui si riferiscono. In contrapposizione, diremo *geometria metrica* il complesso di quelle proposizioni che si riferiscono alla grandezza delle figure e sono invarianti soltanto rispetto alla classe dei moti rigidi.

Alcune proprietà proiettive sono immediatamente riconoscibili. Un punto **P** si proietta, naturalmente, in un altro punto **P'**. Una retta, inoltre, si proietta in una retta; infatti, se si proietta la retta **l** di π sul piano π', l'intersezione di π' col piano passante per **O** e per **l** sarà la retta **l'**. Se un punto **A** e una retta **l** sono incidenti, dopo una proiezione il punto **A'** e la retta **l'** corrispondenti saranno di nuovo incidenti. Quindi l'incidenza di un punto e di una retta è invariante rispetto al gruppo delle proiezioni. Da ciò seguono molte semplici ma importanti conseguenze. Se tre o più punti sono allineati, cioè appartenenti a una retta, anche le loro immagini saranno allineate. Analogamente se nel piano π tre o più rette sono concorrenti cioè incidenti nello stesso punto, anche le loro immagini saranno rette concorrenti. Mentre queste semplici proprietà – incidenza, allineamento e concorrenza – sono proprietà proiettive (cioè proprietà invarianti rispetto alle proiezioni), le misure di lunghezza e di angoli e i rapporti di tali grandezze sono generalmente alterati dalle proiezioni. I triangoli isosceli ed equilateri possono proiettarsi in triangoli di cui i lati hanno lunghezze diverse. Quindi, benché il "triangolo" sia un concetto della geometria proiettiva, il "triangolo equilatero" non lo è, e appartiene soltanto alla geometria metrica.

Geometrie non euclidee

Il carattere di ogni geometria è determinato dal tipo di corrispondenza attraverso cui le sue relazioni sono invarianti, ad esempio la geometria euclidea è invariante rispetto alle similitudini. Il concetto di similitudine, che gioca un ruolo così vitale nella geometria euclidea non ha analogo in nessun' altra delle geometrie non euclidee. D'altra parte il concetto di parallelismo per rette su un piano appartiene sia alla geometria euclidea sia a quella iperbolica, ma manca in quella ellittica. Janos Bolyai diede il nome di *geometria assoluta* al corpus più ampio delle proposizioni comuni alla geometria euclidea e iperbolica.

Il contrasto tra la geometria assoluta ed ellittica è chiaramente mostrato nella teoria dell'ordinamento. In entrambe le geometrie si può descrivere un ordinamento mediante quattro punti, affermando che quattro punti allineati si dividono in due coppie che si separano l'una dall'altra. Nella geometria assoluta questo può essere dedotto dall'ordinamento più forte ottenuto mediante tre punti, nel quale si afferma che uno di tre punti allineati giace tra gli altri due. Nella geometria ellittica, però, tutte le rette sono chiuse e così la nozione di ordinamento non specifica uno dei tre punti: l'ordine non è più sequenziale ma ciclico.

Sin dall'antichità la geometria è stata basata sul concetto di misura che è definita a partire dalla relazione di congruenza, ma è possibile costruire una geometria coerente senza questo concetto. Ci si può focalizzare sulla relazione più semplice di incidenza. La geometria euclidea, privata della congruenza, è detta geometria affine. Dato che molte figure nella geometria euclidea sono definite in funzione della congruenza potrebbe sembrare che nella geometria affine sia rimasto poco da studiare. È vero che il contenuto della geometria affine è meno ricco di quella euclidea, ma è ancora possibile definire le coniche e distinguerne i tre tipi.

La nozione di perpendicolarità, però, è completamente mancante. Definendo in modo opportuno la perpendicolarità possiamo ricostruire l'intera geometria euclidea. Modificando la definizione possiamo derivare invece la geometria minkowskiana, il cui caso quadridimensionale è utilizzato nella teoria della relatività speciale. Similmente la geometria ellittica, privata della congruenza, è la geometria reale proiettiva. Questa è stata sviluppata dalla geometria euclidea, a cui si sono aggiunti i punti all'infinito, ancora prima della geometria ellittica stessa. Essa supera la geometria affine nella simmetria delle sue proposizioni di incidenza, che si ottengono a coppie in accordo con il principio di dualità. Inoltre essa include tutte le altre geometrie che sono state menzionate. Infatti, mediante una definizione opportuna di perpendicolarità, si possono ricostruire le proprietà metriche della geometria ellittica e modificando la definizione si può invece trovare la geometria iperbolica. Inoltre rendendo specifico un piano nel caso tridimensionale o una retta nel caso bidimensionale si può ottenere la geometria affine e da questa quella euclidea o minkowskiana.

Geometria euclidea

Euclide ha fondato la sua geometria su 5 assunzioni fondamentali chiamati assiomi o postulati.

1. Per ogni punto P e per ogni punto Q diverso da P esiste un'unica retta l che passa attraverso P e Q.
2. Per enunciare il secondo postulato dobbiamo prima dare la seguente definizione: dati due punti A e B il segmento $\underline{AB}$ è l'insieme i cui membri sono i punti A, B e tutti i punti che giacciono sulla retta AB e si trovano tra A e B. I due punti dati A e B sono detti estremi del segmento $\underline{AB}$. Il secondo postulato afferma che per ogni segmento $\underline{AB}$ e per ogni segmento $\underline{CD}$ esiste un unico punto E tale che B si trova tra A ed E ed il segmento $\underline{CD}$ è congruente al segmento $\underline{BE}$
3. Per enunciare il terzo postulato occorre un'altra definizione: dati due punti O ed A l'insieme di tutti i punti P tali che OP = OA è detto cerchio di centro O e raggio OA. Il terzo postulato dice che per ogni punto O e per ogni punto A diverso da O esiste un cerchio di centro O e raggio OA.
4. Definiamo un angolo di vertice A come l'insieme costituito da un punto A e da due segmenti non collineari $\underline{AB}$ e $\underline{AC}$ detti lati dell'angolo uscenti da A. Se due angoli BAD e CAD hanno un lato AD in comune e i due lati AB e AC collineari, si diranno "supplementari". Un angolo BAD si dirà "angolo retto" se è supplementare di un angolo a cui è congruente.Possiamo adesso enunciare il quarto postulato: tutti gli angoli retti sono tra loro congruenti. Questo significa che lo spazio è considerato omogeneo.

Il postulato delle parallele

I primi 4 postulati di Euclide sono stati sempre prontamente accettati dai matematici. Il 5° postulato (sulle parallele), invece, è stato altamente controverso fino al XIX secolo. Infatti, come vedremo più avanti considerazioni sulle alternative al 5° postulato hanno permesso lo sviluppo delle geometrie non euclidee.

Diamo la seguente definizione: due rette l ed m sono parallele se esse non si intersecano, ovvero se non hanno alcun punto in comune.

Si noti, in primo luogo, che supponiamo che le rette giacciano nello stesso piano.

Il 5° postulato afferma che: per ogni retta l e per ogni punto P, che non giaccia su l esiste un'unica retta m passante per P che è parallela ad l.

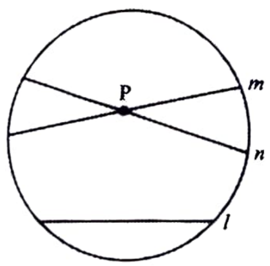
L'origine della controversia nata sul 5° postulato deriva dal fatto che, mentre per i primi quattro possiamo avere un riscontro empirico usando strumenti come righe, compassi e goniometri, in quest'ultimo caso ciò non è possibile. Non possiamo, infatti, tracciare rette nel senso geometrico del termine, ma solo segmenti. Il nostro solo appoggio è verificare il parallelismo indirettamente utilizzando criteri al posto della definizione.

Geometria iperbolica: modello di Beltrami-Klein

Fissiamo un cerchio γ nel piano euclideo. Se O è il centro di γ e $\underline{OR}$ è un raggio, l'interno di γ, per definizione, è costituito da tutti i punti X tali che $\underline{OX}<\underline{OR}$. Nel modello di Klein i punti nell'interno di γ rappresentano i punti del piano iperbolico. Si ricordi che una corda di γ è un segmento $\underline{AB}$ che congiunge due punti A e B su γ. Vogliamo considerare il segmento senza i suoi estremi e lo chiameremo "corda aperta", denotandolo con A)(B. Nel modello di Klein le corde aperte di γ rappresentano le rette del piano iperbolico. La relazione "giacere su" è rappresentata nel senso usuale: P giace su A)(B significa che P giace sulla retta euclidea AB e P si trova tra A e B.

La relazione iperbolica "stare fra" è rappresentata dalla usuale relazione euclidea.

È immediatamente chiaro dalla figura



che, in questo modello, vale l'assioma iperbolico:

"esistono una retta l e un punto P, non appartenente ad l, per il quale passano almeno due rette distinte parallele ad l".

Qui le due corde aperte m ed n passanti per P sono entrambe parallele alla corda aperta l. La definizione di parallelismo, infatti, stabilisce che due rette sono parallele se non hanno punti in comune. Questo avviene nella rappresentazione di Klein: due corde aperte sono parallele se esse non hanno punti in comune. Il fatto che tre corde, quando sono prolungate, si incontrino al di fuori di γ è irrilevante, in quanto i punti al di fuori di γ non appartengono al piano iperbolico.

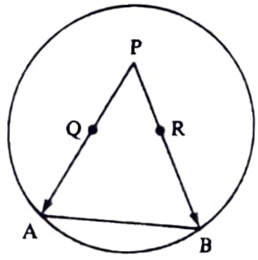
Geometria ellittica

Nella geometria euclidea vi è esattamente una parallela ad una retta l passante per un punto P che non giace su l; nella geometria iperbolica ve ne è più d'una. Una terza geometria può essere studiata in cui non vi è alcuna parallela ad l passante per P: essa è la "geometria ellittica".

I suoi assiomi derivano da quelli della geometria proiettiva e la particolarità principale, oltre al fatto che non vi siano rette parallele è che è impossibile parlare di un punto B dicendo che si trova "tra" altri due punti A e C.

Senza la nozione di "stare tra" si devono riformulare con attenzione tutti i termini della geometria che ne fanno uso. Ad esempio il segmento AB veniva definito come l'insieme dei punti che si trovano tra A e B. Questo, però, ora non ha più senso e si dovrà parlare di un segmento ABC determinato da tre punti collineari: esso consiste dei punti A, B e C e di tutti i punti non separati da B per mezzo di A e C.

Analogamente dobbiamo definire la nozione di un triangolo dal momento che i suoi lati non sono più determinati per mezzo di tre vertici.



Una volta che sono state ridefinite queste nozioni gli assiomi di congruenza e continuità riacquistano di nuovo senso e il resto può essere lasciato intatto.
Vi è ancora una difficoltà relativa all'assioma di incidenza che asserisce che due punti non giacciono su più di una retta.
Questo è falso per i cerchi massimi sulla sfera, che può essere un modello di geometria ellittica una volta che si sia ovviato al problema identificando tra loro i punti antipodali. In questo modello si interpreterà come "retta" ogni cerchio massimo e come "punto" una coppia di punti antipodali.
Possiamo notare che questa identificazione rende il piano ellittico non orientabile.
Come ci si aspetta da questo modello è possibile provare che tutte le rette hanno lunghezza finita. Inoltre tutte le rette perpendicolari ad una retta l non sono parallele fra loro, ma sono concorrenti, ovvero tutte le perpendicolari ad l hanno un punto in comune detto "polo di l" (il polo nord e/o il polo sud sono i "poli" dell'equatore nel modello della sfera).

Qual è la geometria dello spazio fisico?

Logicamente parlando, si potrebbe pensare che la geometria iperbolica sia sullo stesso piano della geometria euclidea. D'altra parte la nostra esperienza quotidiana potrebbe farci considerare la geometria iperbolica solo come un passatempo intellettuale, e dare maggiore importanza alla geometria euclidea come modello del mondo fisico in cui viviamo. Sicuramente in ingegneria e architettura la geometria euclidea è estremamente utile per la misura ordinaria di distanze non troppo grandi. L'accuratezza rappresentazionale della geometria euclidea, tuttavia, è minore quando si ha a che fare con distanze più grandi. Facciamo un esempio: consideriamo una "linea" fisicamente come il cammino percorso da un raggio di luce. Potremmo allora considerare tre sorgenti di luce, ampiamente separate, che formano un triangolo fisico. Supponiamo di voler misurare gli angoli di questo triangolo fisico per verificare se la somma è 180° o meno (questo corrisponde al chiedersi se lo spazio sia euclideo o iperbolico).
Gauss ha fatto questo esperimento, usando i picchi di tre montagne come vertici del suo triangolo. I risultati sono stati inconcludenti. Perché? Perché un qualsiasi esperimento fisico coinvolge l'errore sperimentale. I nostri strumenti non sono mai completamente accurati e la misura non è mai esatta, ma affetta da incertezza. Supponiamo che la som-

ma risultante sia di 180°. Se l'errore nella nostra misura è stato al più di 1/100 di grado, potremmo concludere soltanto che la somma è tra 179.99° e 180.01°. Questo deriva dal fatto che non possiamo mai essere sicuri che essa sia realmente di 180°.

D'altra parte supponiamo che la misura dia una somma di 179°. Sebbene, in questo caso, potremmo concludere (assumendo lo stesso errore di 1/100 di grado) solo che la somma è compresa fra 178.99° e 179.01°, saremmo certi che la somma è comunque minore di 180°. In altre parole l'unico risultato conclusivo di un tale esperimento sarebbe che lo spazio è iperbolico.

A causa dell'incertezza, quindi, un esperimento fisico non può mai dimostrare in modo assoluto che lo spazio è euclideo, ma soltanto che esso è non-euclideo.

La questione non è, però, tutta qui. Dobbiamo, infatti, considerare anche la natura dei nostri strumenti e la nostra interpretazione delle linee: non sono gli strumenti progettati sulla base di assunzioni euclidee? Non possono i raggi luminosi viaggiare su cammini curvi? Non può lo spazio, soprattutto quello di dimensioni cosmiche, essere descritto da geometrie diverse da quelle euclidea e iperbolica?

Con la teoria della Relatività, Einstein (1905) ha considerato lo spazio e il tempo inseparabili e ha asserito che i raggi di luce sono curvati dall'attrazione delle masse. Nella sua concezione, lo spazio non è più pensato come una scatola newtoniana vuota; al contrario i suoi contorni sono influenzati dai corpi presenti al suo interno.

Di certo la geometria di Euclide potrebbe apparire la più conveniente. Sicuramente così è per l'ingegneria ordinaria, ma certo non per la teoria della relatività. Lo stesso Poincaré (1902) commenta: "... una geometria non può essere più vera di un'altra: essa può solo essere più conveniente".

Si può pensare che la geometria euclidea sia la più conveniente: essa lo è per l'ingegneria ordinaria, ma non per la teoria della relatività. Inoltre R.K. Luneburg afferma che lo spazio visuale, ovvero lo spazio raffigurato nei nostri cervelli attraverso gli occhi, sia meglio rappresentato dalla geometria iperbolica (R. K. Luneburg: "Mathematical analysis of binocular vision" Princeton university press 1947).

Esperimenti di Luneburg, Blank, Helmholtz e Hillebrand

A partire da osservazioni di Leonardo da Vinci gli scienziati Luneburg, Blank, Helmholtz e Hillebrand dimostrarono che la geometria della visione è la geometria iperbolica.

Che la geometria euclidea non risolvesse tutti i paradossi visivi, era già noto nel tardo medioevo con lo studio della prospettiva. Solo nel secolo scorso, però, gli studiosi citati svolsero esperimenti atti a verificare quale geometria soddisfacesse meglio la nostra visione.

Il primo di tali esperimenti, proposto da Luneburg (1947) e successivamente migliorato da Blank, consiste nell'analizzare il comportamento di alcuni individui che, in una camera buia, devono lavorare con semplici configurazioni geometriche, create da punti luminosi. Nelle condizioni di questo esperimento i soggetti non possono appoggiarsi a punti di riferimento esterni, ma possono fare appello alla sola facoltà visiva.

Le conclusioni a cui giunsero i due scienziati sono essenzialmente le seguenti:

- esiste una grande differenza tra la visione monoculare e quella binoculare; con un solo occhio il nostro giudizio sulle forme e sulla loro localizzazione nello spazio è errato, perché esso è vincolato alle nostre esperienze prospettiche e non alle afferenze acquisite direttamente;
- se l'oggetto osservato è un singolo punto luminoso, sempre in assenza di riferimenti esterni, il tentativo di trovare una corrispondenza tra il punto fisico e quello percepito fallisce, poiché le percezioni non dipendono esclusivamente da fattori fisici, ma anche da fattori psicologici. Se, infatti, il punto viene acceso e spento alternativamente la sua posizione viene percepita dall'occhio umano come modificata di volta in volta. Quindi la percezione binoculare di un punto isolato non differisce, in quanto a precisione, da quella monoculare.

Helmhotlz, in un altro esperimento, richiese ad alcuni soggetti, posti, però, nelle condizioni precedentemente descritte, di allineare una serie di punti luminosi in modo da essere simmetrici rispetto ad un piano parallelo a quello di fissazione. Osservò che i punti venivano disposti lungo particolari curve, che in generale non erano rette, la cui concavità o convessità, rispetto all'osservatore, dipendeva dalla distanza che esse avevano rispetto al piano considerato.

Questo esperimento rivela, allora, un nuovo elemento dello spazio visivo: esiste una facoltà immediata che ci permette di vedere tre punti allineati secondo una retta soggettiva.

Un esperimento legato al precedente, detto comunemente "esperimento dei corridoi" fu svolto dallo scienziato Hillebrand. Egli richiedeva, sempre nelle condizioni già descritte, di disporre punti luminosi secondo rette parallele. Si ottennero così curve aventi forma simile a quella di iperboli, costituenti i cosiddetti "corridoi delle parallele".

L'esperimento fu ripetuto in condizioni tecniche migliorate da Blumenfeld. In questo caso due file di luci devono essere disposte simmetricamente rispetto a un piano ortogonale a quello di fissazione; la prima coppia di tali luci, la più vicina al soggetto, è prefissata.

L'esperimento è suddiviso in due fasi: nella prima i soggetti devono costruire i "corridoi delle parallele", mentre nella seconda è richiesto loro di focalizzare la distanza tra i punti luminosi.

Anche in questa situazione le curve risultanti mantengono una forma simile a quella determinata da Hillebrand, ma non appaiono più rette neppure ai soggetti testati. Esse vengono dette "distanze delle parallele" e giacciono al di fuori dei "corridoi delle parallele".

Proprio lavorando su tale distanza si è oggi dedotto che la geometria della visione è individuata dalla sola geometria iperbolica.

Alcune informazioni mediche (anatomiche e fisiologiche), tuttavia, non supportano tale tesi, in quanto limitano la generalità degli esperimenti precedentemente descritti.

Innanzitutto osserviamo che se anatomicamente la retina è curva, tale struttura non incide sulla visione perché la distribuzione dei coni e dei bastoncelli non è omogenea. Questi ultimi, in particolare, sono concentrati nella fovea, ma al di fuori di essa sono così radi da essere facilmente identificabili; i coni, invece, compaiono solo nella fovea. Considerando, inoltre, la presenza del punto cieco (punto di contatto tra la retina e il nervo ottico) si può affermare che la retina non è esattamente una superficie continua, proprio come la sua capacità percettiva non è omogenea.

Se consideriamo una scodella su di un tavolo possiamo notare che nella zona di contatto essa è sostanzialmente piana; con le dovute proporzioni possiamo ripetere il ragionamento, immaginando come scodella la retina e come zona di contatto la fovea.

Non è errato, pertanto, considerare piana tale zona di messa a fuoco. Ricordiamo, inoltre, che nella zona periferica i bastoncelli hanno il solo compito di segnalare al cervello una variazione dell'immagine, affinché una rotazione del capo sposti l'attenzione della fovea. I bastoncelli, infatti, non sono sensibili ai colori e reagiscono solo al movimento.
È per questo motivo che gli esperimenti di Blank, Helmhotlz e Hillebrand danno una verità parziale.
Se i soggetti degli esperimenti non possono muovere gli occhi, è fisiologicamente giustificato che essi non padroneggino tutto il loro campo visivo disponibile. I punti luminosi e le loro distanze saranno percepiti differentemente secondo la posizione che, durante l'esperimento, essi assumono rispetto alla zona foveale.
Non possiamo dimenticare, inoltre, che, se i soggetti degli esperimenti non possono muovere gli occhi, in alcuni momenti essi dovranno avvalersi della sola visione monoculare, la quale, come è facile verificare, deforma la posizione degli oggetti.
Per quanto riguarda i "corridoi delle parallele" possiamo chiederci se la divergenza delle "rette" non sia il tentativo di controbilanciarne la convergenza, cioè la tradizionale illusione ottica. La maggior parte degli individui occidentali, infatti, è soggetta a tale illusione, cioè non padroneggia tale astrazione matematica.
Il mondo che ci circonda, oltretutto, non ci propone alcun esempio in proposito perché, in realtà, non è un piano.
Non vogliamo, comunque, contestare gli esperimenti descritti, ma solo mettere in luce che essi non provano inconfutabilmente che la visione si poggia sulla sola geometria iperbolica. Essi garantiscono che la geometria euclidea non è la geometria del mondo.
Aggiungiamo qui di seguito alcuni fatti quotidiani, che mostrano come le geometrie iperbolica ed euclidea intervengano, anche contemporaneamente, nella nostra visione.

Ipotesi sulla percezione matematica della realtà

Diamo ora un elenco dei concetti matematici principali che abitualmente usiamo nella nostra quotidianità.
Vedremo che essi provengono da tre geometrie: quella euclidea, quella iperbolica e quella proiettiva e che è nostra abitudine aver a che fare con i poligoni, le coniche, le rette, i piani, i punti, i vettori, i concetti di misura, di infinito, di birapporto di orientamento e che, senza le lunghezze d'onda la visione non esisterebbe.

Nel capitolo precedente abbiamo detto che le prime informazioni che il cervello chiede all'occhio riguardano i contorni degli oggetti. In altre parole potremmo dire che, in prima istanza, il cervello cerca di riorganizzare il *mondo visto* attraverso i perimetri dei suoi elementi.

È capitato a tutti di associare la forma degli oggetti, anche comuni, alle forme geometriche, vedendo piani di tavoli, specchi, quadri ecc... come quadrati rettangoli, ellissi e cerchi più o meno perfetti.

Per questo tipo di classificazioni non servono nozioni geometriche troppo approfondite, ma se vogliamo "assiomatizzare" la visione stereoscopica esse divengono molto più ricercate.

Possiamo dividere tale visione secondo due direzioni: quella parallela al piano degli occhi, il piano di fissazione, e quella perpendicolare ad esso.

Le leggi geometriche che regolano tali piani, sono diverse secondo la direzione: per quella parallela agli occhi è utile impiegare sia la geometria euclidea, sia quella iperbolica, mentre, se consideriamo tali piani in sequenza, al fine di cogliere interamente la scena a cui assistiamo nella sua profondità, essa sarà regolata dalla geometria proiettiva.

Ci troviamo di fronte, infatti, allo stesso problema che riguardò la pittura del tredicesimo secolo; quando si avviò lo studio della prospettiva.

Consideriamo le geometrie suddette, non perché supponiamo che la loro combinazione sia la "geometria del mondo", ma perché riteniamo, che, almeno per la realtà occidentale, esse rappresentino un buon livello di astrazione, forse il migliore raggiunto, per descrivere quanto ci circonda.

Possiamo, dunque, stilizzare gli oggetti che sono alla portata dei nostri occhi attraverso alcune figure comuni a entrambe le geometrie; esse sono: rette, punti, piani e le coniche. Ogni altro ente geometrico, infatti, può essere ad essi ricondotto attraverso le trasformazioni topologiche.

Analizziamo pertanto la teoria delle sezioni coniche, rispetto alle quali l'occhio è il vertice del "cono" delimitante il campo visivo.

Questo ci porta ad un'altra considerazione: dobbiamo renderci conto che noi percepiamo piani di fissazione infiniti, ma non possiamo considerarli tali, perché abbiamo il vincolo della "messa a fuoco", cioè della zona interessante la fovea.

Potremmo dire che quest'ultima crea un "sotto-campo visivo" regolato dalle leggi della geometria iperbolica, che, tuttavia, tornano ad essere quella euclidea nel "campo visivo completo".

Per capire meglio consideriamo che le due geometrie sono differenziate da un unico postulato: quello delle rette parallele; nella geometria iperbolica, infatti, per un punto ne passano infinite, mentre nella geometria euclidea una retta data ammette un'unica parallela passante per un punto a lei esterno.

Le rette parallele, dunque, sono tali secondo la concezione euclidea nella globalità del campo visivo e non nelle localizzazioni della fovea; sempre che si assuma come definizione la seguente: "si dicono parallele quelle rette che non si incontrano mai".

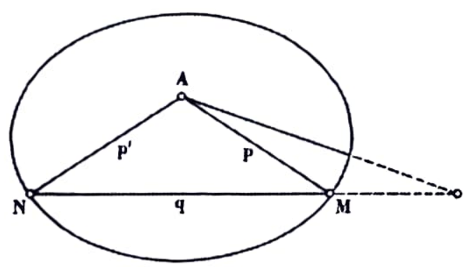


Fig. 8.1A

Un altro elemento che mostra la compenetrazione delle due geometrie nella visione è il concetto di distanza: essa compare anche nella geometria iperbolica, attraverso il calcolo del logaritmo del birapporto.

Anche nel modello di Klein la distanza deve essere invariante rispetto a ogni "spostamento" non euclideo, perché gli spostamenti non devono alterare le distanze. Sappiamo che i birapporti sono invarianti per operazioni di proiezione. Per considerare un birapporto relativo a due punti arbitrari P e Q interni al cerchio, basta semplicemente prolungare il segmento $\underline{PQ}$, fino a incontrare il cerchio in O e S. Il birapporto (OSQP) di questi quattro punti è un numero (positivo) che si può sperare di assumere come definizione della "distanza" $\underline{PQ}$ tra P e Q. Ma, per poter usare questa definizione bisogna modificarla leggermente. Infatti se i tre punti P, Q, R, sono allineati, si deve avere

$\underline{PQ} + \underline{QR} = \underline{PR}$.

Ora in generale

$(OSQP) + (OSRQ) \neq (OSRP)$.

Si ha invece la relazione

(1) (OSQP) * (OSRQ) = (OSRP)

Come si vede dalle equazioni

$(OSQP) * (OSRQ) = (\underline{QO} / \underline{QS}) / (\underline{PO} / \underline{PS}) * (\underline{RO} / \underline{RS}) / (\underline{QO} / \underline{QS}) = (\underline{RO} / \underline{RS}) / (\underline{PO} / \underline{PS}) = (OSRP)$.

In base alla relazione (1) si può dare una soddisfacente definizione additiva, misurando la "distanza" non con il birapporto stesso, ma con il suo logaritmo:

$\underline{PQ} = \log (OSQP)$.

Questa distanza sarà un numero positivo, poiché (OSQP) > 1, se P = Q

Applicando la proprietà fondamentale del logaritmo, segue dalla (1) che

$\underline{PQ} + \underline{QR} = \underline{PR}$

Non ha importanza la base scelta per il logaritmo, perché un cambiamento di base cambia soltanto l'unità di misura. Osserviamo incidentalmente che se uno dei punti, per esempio Q, si accosta al cerchio allora la distanza non euclidea PQ cresce all'infinito. Questo mostra che la retta della nostra geometria non euclidea è di lunghezza non euclidea infinita, benché nel senso euclideo ordinario sia soltanto un segmento.

Quanto detto prima solidifica il ponte creatosi tra la zona a fuoco della fovea e il campo visivo tradizionale: in essi il concetto di distanza non euclidea, infatti, coincide con l'impossibilità di messa a fuoco dell'oggetto e fornisce una stima della distanza euclidea dell'oggetto stesso. Quando, cioè, l'oggetto non è a fuoco, esso è a distanza "infinita" rispetto alla capacità di messa a fuoco della fovea, anche se la sua distanza metrica potrebbe non essere eccessiva.

Abbiamo visto nel capitolo precedente che non si sa ancora come il cervello trasformi la "disuguaglianza" in distanza, ma sappiamo tutti che, con più o meno precisione, riusciamo a prendere gli oggetti che ci interessano. In geometria proiettiva non abbiamo una metrica, quindi neanche la possibilità di parlare di misura. A livello geometrico spieghiamo, dunque, questa capacità solo con "l'intervento" di rette e piani paralleli e perpendicolari a quello di fissazione, che ci riportino alla geometria euclidea e ai teoremi della trigonometria. Ciò ci viene suggerito anche dalla figura del capitolo precedente (profondità di campo). In tale caso quindi, poiché questo processo richiede la messa a fuoco, la geometria euclidea compare impiegata nel campo-visivo della fovea e quella iperbolica nel campo visivo globale. Se, infatti, provassimo a prendere un oggetto posto lateralmente rispetto all'occhio, senza ruotare il bulbo, non ci riusciremmo immediatamente.

Non dimentichiamo, infatti, che la geometria euclidea è un caso particolare di quella proiettiva.

Riassumiamo ciò che abbiamo finora riconosciuto come punti di contatto, delle due geometrie, utili a stilizzare la visione.

Per quanto riguarda le figure, consideriamo fondamentali: punti, piani, rette e coniche.In geometria euclidea, inoltre, è necessario parlare esclusivamente della circonferenza; tutte le figure a lei riconducibili o in lei inscrivibili, infatti, seguono le sue stesse leggi di trasformazione, modificando in conseguenza di ciò le loro regolarità.

È per questo che prospettivamente le circonferenze diventano ellissi, iperboli o parabole e, conseguentemente, i poligoni perdono le loro caratteristiche: così finestre rettangolari compaiono come informi quadrilateri proiettati dal sole sul pavimento e l'ombra di un armadio è più piccola di quella di una sedia.

La misura, infatti, nasce con il "bisogno del confronto", ma in geometria proiettiva, come ripetuto più volte, essa non ha senso. Le trasformazioni proiettive non mantengono costanti le misure dell'oggetto, quindi esse sono dipendenti dalla posizione di quest'ultimo.

Si pensi, ad esempio, alla nostra ombra proiettata sul terreno nelle varie ore della giornata.

C'è un unico confronto possibile tra i concetti euclidei di misura, distanza e ordine, e il non ordinamento del mondo proiettivo: l'invarianza del birapporto.

Abbiamo, infine, un'ultima considerazione da fare, che, ancor meglio delle precedenti, indica quanto limitata sia la nostra percezione della realtà. Possiamo paragonare, infatti, le illusioni ottiche, alla mancanza della percezione globale della realtà fisica: le scie degli aerei, i tratti percorsi sulla superficie terrestre ci appaiono retti, quando invece si tratta di archi di curva.

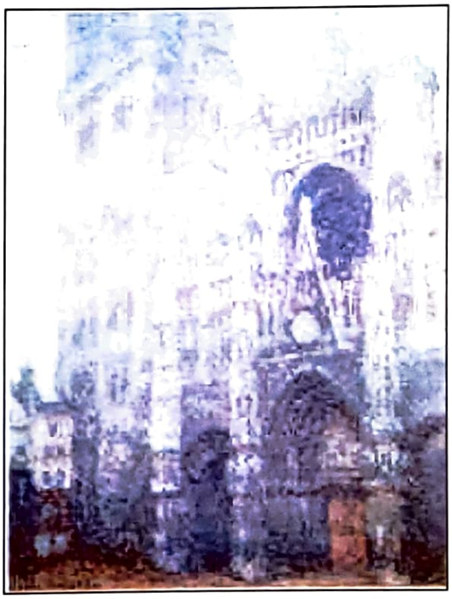
Dalla scienza alla visione di colori e forme

Nel primo capitolo abbiamo introdotto come la medicina spieghi il perché della visione. In breve essa è il frutto della rielaborazione di stimoli e ipotesi.

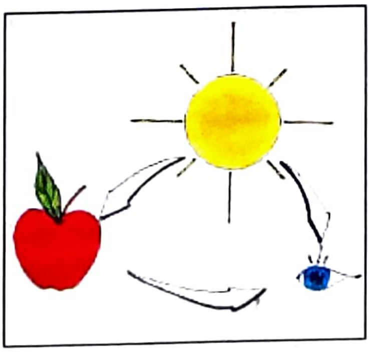
Il nostro intento, ora, è di descrivere matematicamente i meccanismi attraverso cui riusciamo a dire: "vedo"; fornendo un modello matematico fondato sulle asserzioni mediche.
Prima di fare ciò, approfondiamo l'aspetto della percezione visiva di colori e forme, facendo riferimento a degli estratti da tre siti internet.

1. [tratto da: *http://pctidifi.mi.infn.it/set/*]

Il colore degli oggetti



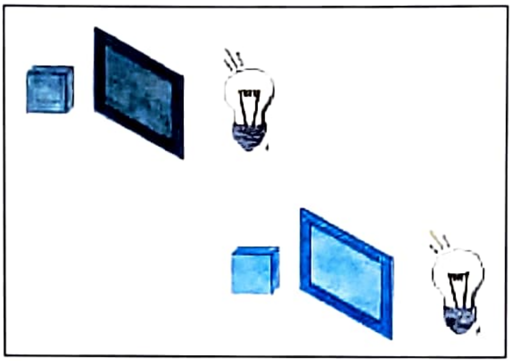
Tutti noi siamo abituati, fin da piccoli, a riconoscere e a usare i colori. Nessun bambino ha difficoltà a dire che il pomodoro è rosso o che il cielo è azzurro perché ha sempre visto i pomodori e il cielo di quei colori. L'esperienza quotidiana lo ha portato ad associare il colore rosso al pomodoro e a dare per scontato che il pomodoro "è" rosso. [...] è difficile, quindi, comprendere che il colore è determinato da più elementi che concorrono tra loro.



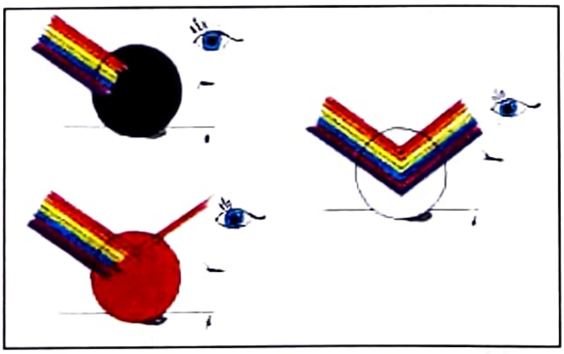
[...] il colore di un oggetto si modifica in relazione alle diverse situazioni luminose in cui si trova o è collocato.

Lo spettro dei colori

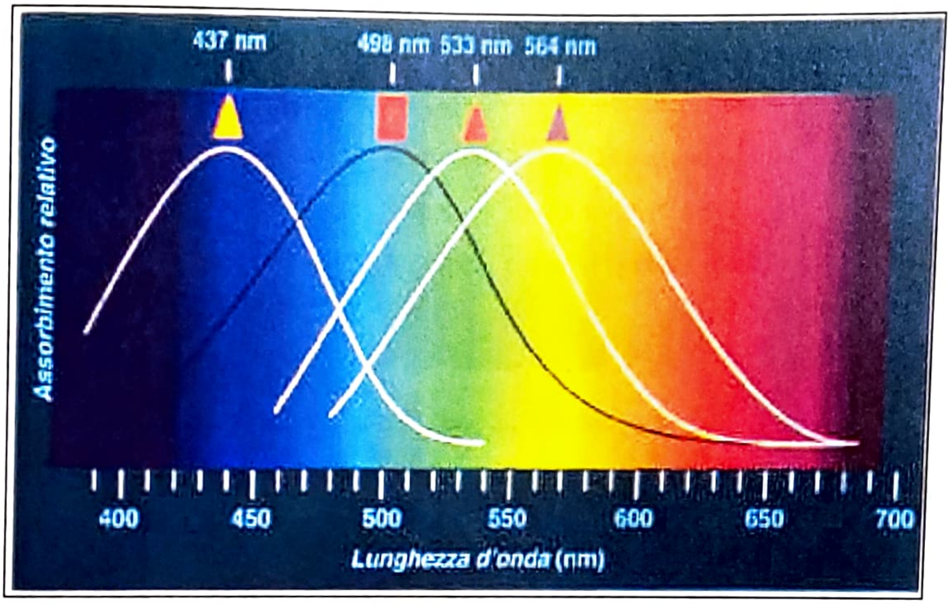
A mano a mano che nella stanza diminuisce la luce (fino al buio completo) gli oggetti assumono colori e sfumature diverse, fino a sparire del tutto. La stessa cosa succede quando si utilizza una sorgente luminosa (lampadina) dotata di variatore d'intensità. Nell'ultima situazione, i fasci di luce colorata colorano del loro colore gli oggetti bianchi illuminati. Gli oggetti non bianchi risultano colorati in maniera diversa a seconda delle lastrine utilizzate.



[...] Il colore degli oggetti cambia nelle diverse situazioni di luce [...]. Possiamo distinguere i diversi colori degli oggetti solo se questi sono illuminati. Al buio, infatti nessun oggetto appare colorato. Quindi non sono gli oggetti ad essere colorati, ma è la luce che li fa apparire tali ai nostri occhi.
Un corpo opaco, quando viene colpito da un raggio di luce bianca può assorbirlo completamente risultando così nero, può diffonderlo completamente risultando in tal caso bianco o, infine, può diffonderlo solo parzialmente ed appare ad es. rosso, perché rosso è il colore che viene diffuso.



Dopo che il raggio luminoso viene diffuso da un oggetto colpisce i nostri occhi. All'interno dell'occhio si trovano dei recettori che sono sensibili ai diversi colori. Quando i recettori sensibili al colore rosso vengono colpiti mandano stimoli nervosi al **cervello**, il quale li traduce nei colori: è quindi il nostro sistema percettivo a creare i colori. [...] i coni consentono la percezione del colore; ce ne sono di tre tipi: quelli sensibili al rosso (massimo di sensibilità a 560 nm), al blu (430 nm) e al verde (530 nm).



I coni, colpiti dalla luce, subiscono una trasformazione chimica in seguito alla quale inviano un impulso nervoso al **cervello** che registra la presenza del colore. I coni sono attivi solo in presenza di luce. Se questa è molto scarsa solo i bastoncelli funzionano e, di conseguenza, gli oggetti ci appaiono grigi.

Il colore, quindi, non è una proprietà intrinseca di quell'oggetto ma è il risultato di processi che avvengono nel nostro occhio e nel nostro **cervello**, è una qualità della nostra sensazione, anche se esso dipende dalle proprietà fisiche della sorgente che illumina e dei corpi che vengono illuminati.

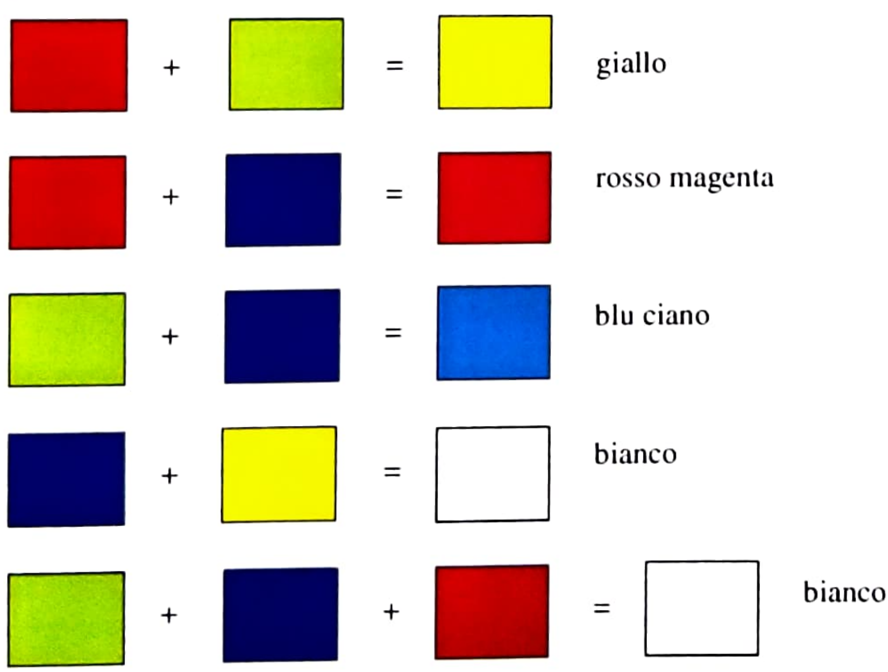
"*... il colore percepito assumiamo che sia il risultato di una misura eseguita dall'occhio e di una interpretazione data dal cervello della composizione spettrale della radiazione osservata*" (K. Nassau - A. Frova (a cura di), 1994, quaderno n.78, Le Scienze).

[...] E' senz'altro vero che in una certa misura il colore di un oggetto si modifica quando viene illuminato dalla luce solare o da altre sorgenti di luce. Tuttavia questi sono effetti piccoli rispetto a quelli che potremmo attenderci per le variazioni delle proprietà fisiche delle sorgenti. Di fatto i colori degli oggetti tendono a mantenersi relativamente invariati anche per variazioni notevoli della radiazione illuminante. Questo fenomeno percettivo è chiamato costanza del colore. E' come se il nostro sistema visivo fosse in grado di valutare le proprietà spettrali della radiazione illuminante così da poterne compensare gli effetti sull'apparenza degli oggetti illuminati. Secondo la teoria formulata da Land (1986) l'eccitazione prodotta da un oggetto colorato verrebbe considerata in rapporto a tutto quello che gli sta intorno o meglio in rapporto con l'eccitazione media che l'ambiente produce nei tre tipi di coni. Questo confronto permetterebbe di scartare gli effetti che la sorgente illuminante ha tanto su quell'oggetto come su tutto l'ambiente. La costanza del colore non può essere spiegata in modo soddisfacente solo in base a meccanismi retinici e implica certamente fenomeni che avvengono a livello cerebrale.

La composizione dei colori

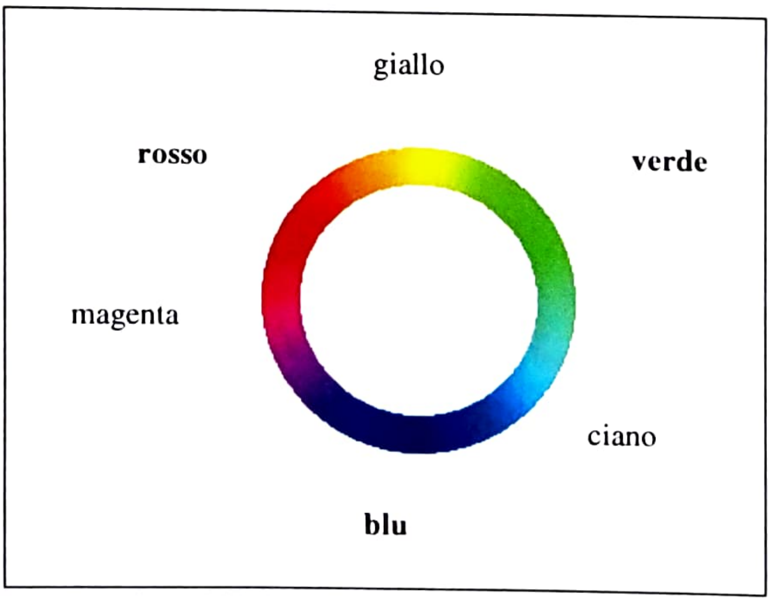
I colori primari della luce (cioè i colori che non si ottengono dalla sovrapposizione di altri fasci colorati) sono verde, rosso e blu.

Sovrapposti a due a due i colori primari della luce danno colori secondari.



- Si può osservare che i colori secondari della luce sono i colori primari delle tempere [...] e viceversa.

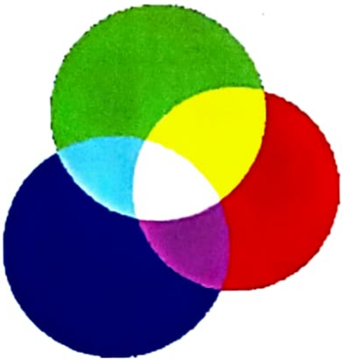
- Sempre in analogia con le tempere si possono individuare i colori complementari della luce che, sulla ruota dei colori, si trovano in posizione diametralmente opposta.
- Il giallo è complementare del blu; il rosso magenta è complementare del verde; il blu ciano è complementare del rosso.
- Ogni colore secondario è complementare del colore primario che non entra nella sua composizione (sovrapponendo luce verde e blu si ottiene il colore blu ciano che è complementare del rosso).
- Sovrapponendo le luci complementari si ottiene il bianco, così come si ottiene il bianco sovrapponendo il verde, il rosso e il blu.



[...] I filtri, verde, rosso e blu, posti davanti a ciascuna sorgente di luce bianca trattengono tutte le lunghezze d'onda dello spettro tranne quella corrispondente al loro colore che viene così proiettato sullo schermo. Quando questa luce raggiunge l'occhio va a stimolare una determinata varietà di coni sensibile alle lunghezza d'onda di una particolare regione dello spettro. Il segnale viene inviato al **cervello** che elabora il colore.
La sovrapposizione di due luci colorate (es. rosso e verde) stimola contemporaneamente due tipi di recettori per cui il **cervello** percepisce un colore diverso (in questo caso il giallo).

Nella zona in cui convergono tutte e tre le luci colorate lo schermo diffonde una luce bianca ottenuta attraverso la somma delle lunghezze d'onda delle tre radiazioni luminose, mentre nell'occhio i tre tipi di coni vengono stimolati contemporaneamente con la stessa intensità.

La ricomposizione della luce bianca ottenuta per sovrapposizione di fasci luminosi definiti in base alla loro lunghezza d'onda è la sintesi additiva del colore-luce.



La sintesi additiva si riferisce sia ad una sovrapposizione di fasci di luce colorati sia ad una sovrapposizione nell'occhio.

Benché non sia stato ancora completamente chiarito come i coni mandino i segnali al **cervello** e come il **cervello** elabori questi dati, l'uomo ha sfruttato i principi della sintesi additiva per inventare la fotografia a colori, i monitor e i televisori a colori (i punti dei fosfori - rossi, verdi e blu - di cui è costituito ogni pixel sono vicini e così piccoli da essere indistinguibili e nell'occhio dell'osservatore si fondono).

Già nell'800 esistevano esempi di immagini in sintesi additiva. Il puntinismo (scuola di pittura che si è sviluppata dall'impressionismo), si fondava su una tecnica di accostamento di piccoli colpi di colore (punti) separati l'uno dall'altro che ricomponevano, se visti ad una certa distanza, l'oggetto rappresentato.

[...] Si può completare l'esperienza osservando le ombre di un oggetto illuminato da due o tre sorgenti colorate.

Con due luci colorate (ad esempio rossa e verde) possiamo notare su uno schermo la comparsa di una zona di ombra nera e di due zone di penombra colorate, rispettivamente di rosso e di verde. L'ombra nera è dovuta al fatto che in quell'area i fasci colorati sono stati assorbiti completamente dall'oggetto mentre si ha penombra verde perché è stata assorbita la luce rossa e lasciata passare solo quella verde, viceversa per quella rossa.

Più articolata è la stessa esperienza con tre luci colorate (rosso, blu e verde). In questo caso si ottiene un'ombra nera e sei penombre colorate (rosso, blu, verde, giallo, rosso magenta e blu ciano).

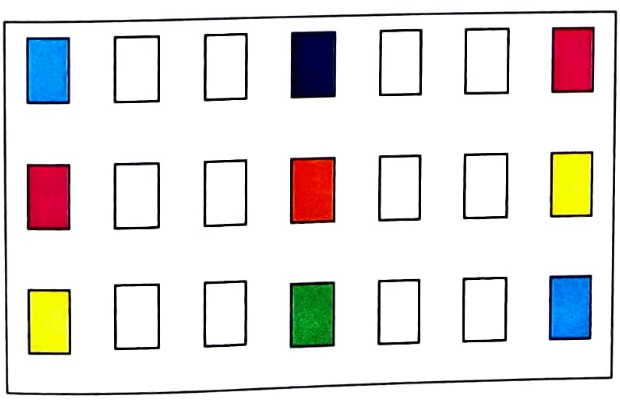
Le ombre colorate nei quadri

L'ombra del covone è vistosamente dipinta con il colore complementare a quello che domina nelle parti illuminate del quadro. La luce dominante, dorata, crea un'ombra dipinta con il colore complementare, cioè l'azzurro. Il colore dell'ombra contribuisce a creare contrasto.

C. Monet - Covoni con la brina

I colori secondari

Nei rettangoli centrali dalla mescolanza dei due primari ottengo:



ciano + magenta = viola

magenta + giallo = arancione

giallo + ciano = verde

Nei rettangoli intermedi ottengo vari verdi, viola od arancioni con **gradazioni** diverse a seconda della quantità di colore prevalente.

[...] Il **colore secondario**, che si ottiene nel rettangolo centrale, è dato dalla mescolanza in quantità uguali di due primari. Il disegno rappresenta, nella parte libera dei cerchi, i tre colori primari: giallo, magenta e ciano; nelle parti dove si sovrappongono giallo e ciano vedo il verde, dove si sovrappongono ciano e magenta, il blu/viola e nella parte dove si sovrappongono giallo e magenta, rosso/arancione.

I colori secondari delle tinte sono i **colori primari delle luci**.

Al centro, dove si mescolano in parti uguali i tre primari, vediamo un colore bruno-grigio quasi nero.

Il disegno presenta diversi colori in quanto abbiamo mescolato in vario modo le tinte, le abbiamo aggiunte le une alle altre; in effetti ciò che vediamo non è dovuto ad una somma di colori ma ad una sottrazione di bande di luce che viene definita **sintesi sottrattiva**. Infatti ogni zona ci appare di un dato colore perché, se colpita da luce bianca, ne assorbe alcune componenti e diffonde nello spazio circostante solo quella componente che verrà percepita dai nostri occhi.

Ad esempio il ciano assorbe il rosso, il magenta assorbe il verde e noi vediamo un blu-violetto; il giallo assorbe il blu, il ciano assorbe il rosso e vediamo verde; infine vediamo un colore rosso-arancio dove si mescolano magenta e giallo che assorbono rispettivamente il verde e il blu.

Al centro vediamo un colore scuro tendente al nero perché ciascuna tinta primaria sottrae allo spettro determinate bande di luce; la mescolanza di tali tinte assorbe tutte le componenti della luce bianca e nessuna viene rimandata. Si ha quindi una totale assenza di luce diffusa che equivale al nero.

I colori ciano, giallo e magenta sono pertanto detti **colori primari sottrattivi** delle tinte. Le tinte, rispetto alla luce che le colpisce, si comportano come filtri colorati [...] che sottraggono luce alla luce. Gli oggetti si comportano come le tinte: ciascun oggetto assorbe parte della luce che lo colpisce sottraendole quindi dei colori e riflette/diffonde o trasmette (se è trasparente) in diversa percentuale le radiazioni monocromatiche di diversa lunghezza d'onda di cui è composta la radiazione solare; il nostro occhio somma le bande di luce che riceve secondo le regole della **sintesi additiva**.

La sintesi sottrattiva interviene nella comune esperienza di osservazione dei colori, nelle arti grafiche e nella fotografia a colori .Nelle arti grafiche si ricorre di necessità ad una terna di primari che comprende il giallo , perché con mescolanza sottrattiva è impossibile ottenere questo colore. Se è vero infatti che una mescolanza additiva di luce rossa più luce verde produce una sensazione di giallo, nel mescolare i rispettivi pigmenti coloranti, che operano sottrattivamente si arriva al marrone.

Quando prevale uno dei due primari ottengo colori con **tonalità** intermedie in relazione alle percentuali/quantità di colore presenti in ciascuna mescolanza.

Tono di un colore: la gradazione o sfumatura di colore è una *variazione qualitativa*, dipende dall'aggiunta di altri colori al colore saturo.

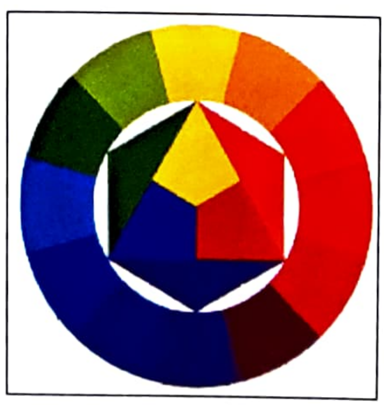
- La cornice bianca attorno ad ogni rettangolo di colore permette di percepire i colori senza l'**influenza dello sfondo**.
- Nell'osservazione delle tavole accade di vedere zone grigie agli incroci dei margini bianchi lasciati. Ciò è dovuto al fatto che il nostro occhio percepisce il bianco più luminoso per contrasto con le zone di colore, e al centro della zona bianca viene percepito come più scuro per contrasto con il bianco circostante.

[…] Nel cerchio cromatico vengono proposti 12 colori […].

Nel triangolo centrale vi sono i colori primari (ciano, giallo e magenta). Nell'esagono compaiono i colori secondari che si ricavano dalla mescolanza di due primari in rapporto 1:1.

Nella corona circolare, divisa in 12 spazi, vi sono in corrispondenza dei vertici del triangolo i colori primari, in corrispondenza degli altri tre vertici dell'esagono i secondari.

Negli altri sei spazi si collocano le tonalità intermedie.



ULTERIORI APPROFONDIMENTI

- **C. Kandinskij** associa i colori alle forme. Kandiskij indica per ogni primario una forma in rapporto alla luminosità: per il magenta il quadrato, per il giallo il triangolo, per il ciano il cerchio.
  La mescolanza tra i primari diventa anche una mescolanza di forme.
- Colori terziari: dalla mescolanza di tutti e tre i colori primari in diverse quantità si ottengono colori che sono pastosi, morbidi, delicati o spenti.
  Mescolando i colori primari in uguale quantità si ottiene il nero.

I colori complementari

[...] Ogni volta che un colore secondario viene mescolato con il colore primario che non contiene si ottiene il colore bruno/grigio tendente al nero.
Tali colori (primario e secondario) sono detti **colori complementari** in quanto ricostituiscono la terna dei colori primari, cioè in ogni coppia troviamo i 3 primari.

- Giallo + viola (magenta +ciano)
- Magenta + verde (giallo +ciano)
- Ciano + arancione (magenta + giallo)

I colori complementari se accostati si rafforzano a vicenda e acquistano una maggiore luminosità, se mescolati si annullano in un colore bruno-grigio ([...] **sintesi sottrattiva**).
[...] Cerchio cromatico di Itten: [...] per [...] osservare che i colori complementari si trovano da parti opposte.

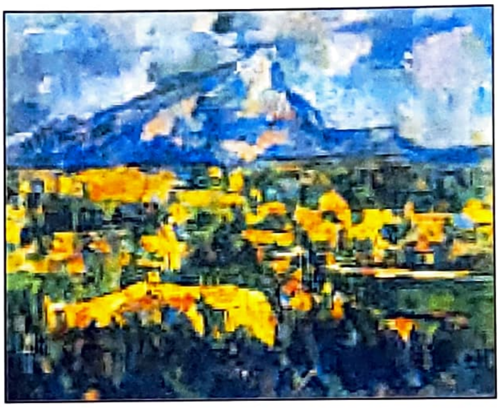
Contrasto tra colori complementari

Accostando coppie di colori complementari si ottiene un contrasto forte e violento perché i colori complementari accostati si rafforzano a vicenda, respingendosi energicamente.
Secondo Itten

> ”Ogni coppia di colori complementari possiede suoi caratteri specifici. Così la giustapposizione di giallo e viola dà luogo anche ad un forte contrasto chiaroscurale. La coppia arancione- blu/verde rappresenta il punto estremo della polarità

caldo- freddo. I complementari rosso – verde possiedono un uguale grado di luminosità e lucentezza".

Al contrasto cromatico si aggiunge, quindi, in alcuni casi un contrasto di luminosità. Inoltre poiché i colori complementari generalmente appartengono l'uno alle cosiddette tinte calde, l'altro alle tinte fredde, il contrasto tra colori complementari può caricarsi anche di questo contrasto caldo-freddo. L'effetto chiaroscurale che accompagna giallo e viola viene spesso impiegato in pittura. Ad esempio nel quadro di Cézanne "Mont S.te Victoire", questo contrasto viene utilizzato per dare un senso di profondità al paesaggio , accentuando il distacco tra figura e sfondo.



La sovrapposizione dei filtri

Intercettando il percorso della luce bianca con un filtro rosso, sulla parete si osserva una macchia rossa.

Guardando attraverso il filtro giallo, il foglio del quaderno appare giallo.

Dalla sovrapposizione del filtro ciano e di quello giallo si ottiene il verde. Sovrapponendo invece il filtro ciano e quello magenta si ottiene il blu-viola; sovrapponendo il filtro magenta con quello giallo si ottiene il rosso-arancione. Sovrapponendo giallo, ciano e magenta si ottiene un colore bruno scuro.

[…] I filtri colorati con i colori che compongono lo spettro della luce bianca si comportano come un setaccio, assorbono tutti i colori della luce tranne il proprio che trasmettono e riflettono, in pratica lasciano passare la luce del proprio colore impedendo il passaggio delle altre. Nel caso di filtri di colori non spettralmente puri si determina un comportamento diverso. Ad esempio il filtro magenta assorbe le radiazioni del verde e lascia passare quelle della zona rossa e blu; viene così percepito il colore porpora (magenta) per sintesi additiva che avviene nell'occhio.

I filtri di colore sono sottrattivi: le lunghezze d'onda (o i colori della luce) vengono assorbite selettivamente e il colore che si percepisce è il risultato della sottrazione dalla luce bianca delle lunghezze d'onda assorbite dal filtro. Il filtro rosso assorbe il blu e il verde e lascia passare il rosso; il filtro giallo assorbe il blu e lascia passare il verde e il rosso (le luci primarie che costituiscono il giallo). E poi il ciano assorbe il rosso, il magenta assorbe il verde, il verde assorbe il blu e il rosso, il blu assorbe il rosso e il verde.

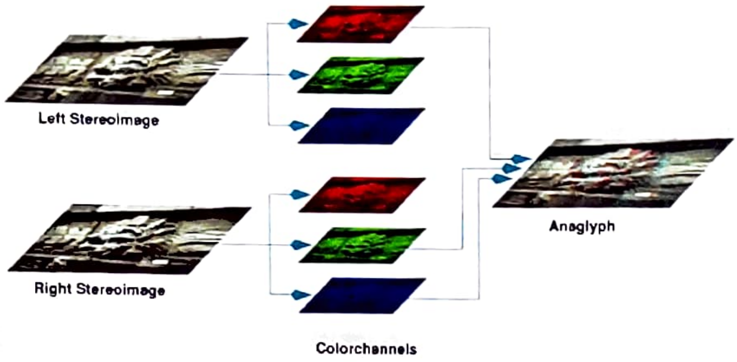
2. [tratto dal sito: *http://axon.physik.uni-bremen.de/research/stereo/color_anaglyph/index.html*]

Anaglifi colorati: costruzione e interpretazione

L'anaglifo è il metodo classico attraverso il quale il sistema visivo umano coglie il fatto che le immagini destra e sinistra danno un diverso apporto nella percezione della profondità.

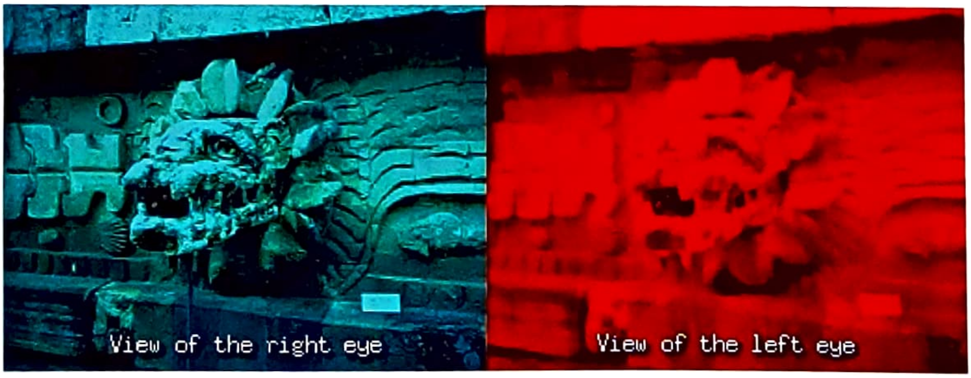
Visto attraverso un filtro rosso, posto di fronte all'occhio sinistro, e attraverso un filtro verde o blu, situato di fronte all'occhio destro, questo anaglifo è percepito in tre dimensioni e a colori.

Un anaglifo racchiude l'informazione della visione tramite l'occhio sinistro nel canale del colore rosso e l'informazione della visione tramite l'occhio destro nei canali verdi e blu dell'immagine a colori.



Un anaglifo viene creato prendendo i dati a partire dal canale del colore rosso dell'immagine sinistra e combinandoli con quelli ottenuti dai canali verde e blu della visione stereoscopica destra.

Il filtro rosso davanti all'occhio sinistro estrae solo l'informazione della visuale sinistra e un filtro verde o blu posto di fronte all'occhio destro solo l'informazione proveniente dalla visuale destra. Dunque i due occhi vedono le seguenti immagini:



Osservando un anaglifo colorato attraverso appropriati filtri si separano le informazioni stereoscopiche per l'occhio destro e sinistro (le due immagini sono disposte in modo che uno possa fonderle e incrociarle). Come si può osservare, né l'occhio sinistro né quello destro ricevono informazioni utili sul colore. È interessante notare che di solito ne siamo inconsapevoli.

Se si stanno usando filtri di buona qualità, si può ottenere una percezione dei colori originari della scena. Il fatto che i colori di un anaglifo vengano percepiti, porta ad una interessante considerazione: normalmente si suppone che l'informazione sul colore sia già ricodificata a livello retinale nei canali di colore rosso-verde e blu-giallo. Questo dovrebbe ovviamente completare l'informazione stereoscopica. In aggiunta, come mostra l'immagine precedente, l'informazione sul colore a livello retinale non ha molto a che fare con i colori che percepiamo quando osserviamo un anaglifo colorato. La percezione del colore, quindi, deve avvenire in uno stadio successivo, dove l'informazione proveniente da entrambi i canali stereoscopici risulta essere disponibile. Ma una semplice combinazione dell'informazione sul colore, proveniente dai due occhi, non basterebbe a far corrispondere le due immagini a quella reale, ciò a causa delle disparità dell'anaglifo.

Prima che si possa ottenere la percezione del colore, il sistema visivo umano deve fondere i dati provenienti dai due occhi nella visione comune ciclopica (monoculare) di riferimento. Solo in questa visione, infatti, e solo dopo la fusione delle immagini, torna ad essere disponibile l'originaria informazione sul colore.

3. [tratto dal sito del Dipartimento di Matematica-Università di Roma Tor Vergata: http://www.mat.uniroma2.it]

La percezione

Come il cervello elabora le percezioni sensoriali

Oggi sappiamo come la corteccia cerebrale, lo strato più esterno del cervello, sede dei processi cognitivi superiori, analizza i messaggi sensoriali che arrivano dall'esterno, ma ancora si sta studiando in che modo il cervello combina le percezioni con l'esperienza passata dell'individuo per assegnare a questi stimoli sensoriali un significato. Tra gli studi in questa direzione cito ad esempio un articolo di W.J. Freeman in cui mostra, attraverso un'analisi del comportamento del bulbo olfattivo, come il cervello trasforma quasi istantaneamente i messaggi sensoriali in percezioni consapevoli. Il bulbo olfattivo è una particolare area del sistema olfattivo che elabora gli stimoli dati dalle molecole emanate da una sostanza odorosa e, ci dice Freeman, analizza ogni configurazione di segnali per sintetizzarli poi in un messaggio che trasmette attraverso i propri assoni a un'altra parte del sistema olfattivo: la corteccia olfattiva. Dalla corteccia nuovi segnali vengono inviati a molte parti del cervello, dove i segnali si combinano con quelli di atri sistemi sensoriali. Il risultato è una Gestalt, una percezione carica di significato e di forma , unica per ogni individuo. Per un lupo l'odore di una volpe può avere il significato di cibo e l'attesa di un pasto. In un coniglio lo stesso stimolo può portare al significati di pericolo e di attesa di un'aggressione. Nello stesso modo le percezioni nell'uomo sono integrate tra loro e strutturate con un significato complessivo strettamente legato alle esperienze personali.

Il modello di Freeman basato sugli attrattori caotici

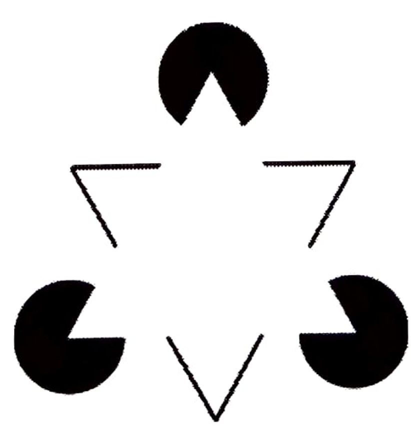
Freeman ha ipotizzato in questi processi un'attività cerebrale caotica, un comportamento complesso, che sembra casuale ma che in realtà possiede un ordine nascosto che si manifesta nella tendenza di ampi gruppi di neuroni a passare bruscamente e simultaneamente da un quadro complesso di attività a un altro, in risposta. Questa attività complessa sarebbe per l'autore proprio la chiave della percezione e anche altri tipi di attività, compreso il concepire idee nuove. Dopo aver analizzato le fasi ottenute da elettroencefalogrammi prima e durante la percezione di un odore noto, ed averle rappresentate nello spazio come forme generate da un modello al calcolatore, Freeman conclude che le forme ottenute, irregolari ma ancora strutturate, rappresentano attrattori caotici. Ogni attrattore corrisponde al comportamento assunto dal sistema per effetto di un particolare stimolo, per esempio una sostanza odorosa ben conosciuta. Il modello interpreta un atto percettivo come un balzo esplosivo del sistema dinamico dal "bacino" di un attrattore caotico a quello di un altro.

Dice Freeman:

" [...] Un notevole vantaggio che il caos può conferire al cervello è che i sistemi caotici producono continuamente nuovi tipi di attività. A nostro parere queste attività sono decisive per lo sviluppo di raggruppamenti di neuroni diversi da quelli già stabiliti. Più in generale la capacità di creare nuovi tipi di attività può essere alla base della capacità del cervello di formulare intuizioni e di risolvere i problemi per tentativi ed errori".

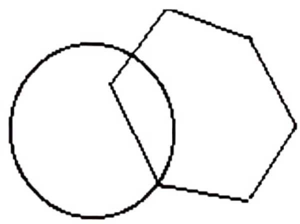
Modalità percettive della visione

Tutto ciò dovrebbe darci questa consapevolezza: l'atto della percezione non si esaurisce nella riproduzione passiva di uno stimolo in arrivo, ma è già un evento strutturato che nel cervello concorre all'organizzazione dei pensieri.
La strutturazione degli stimoli percettivi è stata studiata in maniera approfondita per quello che riguarda la visione. L'ambiente che ci circonda è formato da oggetti distinti dotati di forma propria ed è naturale pensare che la visione consista nel tenere gli occhi aperti e lasciare che queste forme imprimano la loro traccia nella corteccia visiva. In altre parole, si potrebbe ingenuamente pensare che è la struttura dell'ambiente a replicarsi fedelmente negli elementi della percezione, ma le cose stanno diversamente. La realtà percettiva non è semplicemente spiegabile con l'esistente corrispettivo nella realtà fisica. Osserviamo ad esempio questa situazione:



Il triangolo bianco che appare in maniera molto nitida a coprire parzialmente i tre dischi neri e un altro triangolo a bordi neri in realtà non esiste.

Oppure vediamo quest'altro caso:



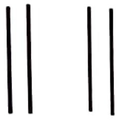
È ben difficile che qualcuno percepisca la figura sopra come l'accostamento di queste tre figure distinte:

Si vedranno invece nella figura precedente un cerchio e un esagono parzialmente sovrapposti.
Questa percezione costante dei vari raggruppamenti di figure fa parte delle modalità percettive della visione, modalità ben descritte e studiate dalle leggi della Gestalt.

Alcune leggi della Gestalt

L'occhio in realtà non possiede dei recettori specializzati per la percezione della forma : il cristallino proietta l'immagine del campo visivo sulla retina, e qui vengono stimolati coni e bastoncelli, recettori nervosi che codificano e trasmettono gli stimoli attraverso il sistema nervoso fino alla corteccia cerebrale. Nella corteccia visiva avvengono complesse e immediate integrazioni dei singoli neuroni, che portano con sé una strutturazione e una interpretazione del campo visivo secondo leggi precise. Una di queste è il raggruppamento: il campo visivo viene visto organizzato in gruppi significativi di configurazioni e non come un insieme disordinato di stimoli.

Altre leggi sono illustrate in figura:



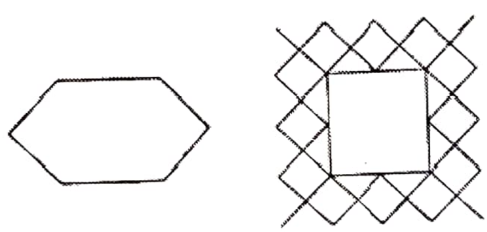
VICINANZA: gli elementi più vicini tra loro vengono visti come un insieme

SIMMETRIA: vengono percepiti insieme gli elementi simmetrici

CONTINUITA': gli elementi con minori interruzioni vengono percepiti come unità. Così vediamo una linea curva e una retta, e non una retta con semicerchi al di sopra o al di sotto

CHIUSURA: si percepisce come unità la figura chiusa. In questo caso è più forte della vicinanza

Ricordiamo anche l'effetto mascheramento: l'aggiunta di nuovi elementi a una struttura può portare al mascheramento della struttura stessa, rendendola "invisibile" come accade per l'esagono di sinistra che è mascherato nella figura a destra.

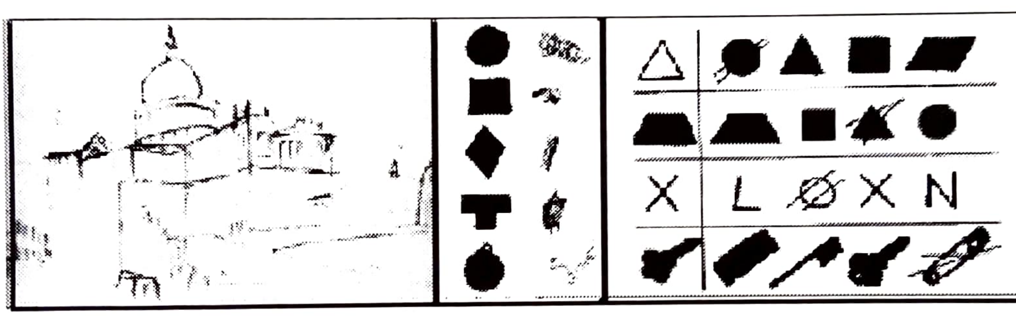


Queste leggi di organizzazione percettiva furono elaborate nella prima metà del '900 dagli psicologi della Gestalt, ma il concetto di percezione come unità strutturata e non come semplice associazione di elementi sensoriali è più antico. Già Kant, ad esempio, sosteneva che la mente, nel processo percettivo, forma o crea un quadro unitario, funzione di un contesto significativo.

Recenti scoperte sul sistema visivo cerebrale

Sul piano della neurologia la moderna concezione del sistema visivo cerebrale si è evoluta negli ultimi trent'anni. La concezione del sistema percettivo che resistette fino agli anni settanta separava la percezione dalla comprensione mentre negli anni novanta si è

arrivati ad affermare che l'integrazione dell'informazione visiva è un processo in cui la percezione e la comprensione dell'immagine visiva avvengono simultaneamente. Leggiamo in un articolo del neurobiologo Semir Zeki
" [...] Negli ultimi due decenni la neurologia ha compiuto scoperte stupefacenti sul sistema visivo cerebrale. Ora non è più possibile separare il processo della visione da quello della comprensione, come un tempo facevano i neurologi".
La corteccia visiva è divisa in numerose aree, identificate da un numero progressivo, in ognuna delle quali si elabora un aspetto particolare legato alla visione e si integra con le elaborazioni delle altre aree.
I danni cerebrali che colpiscono parti della corteccia visiva mettono bene in luce come il "vedere" sia già un "capire" derivante dall'integrazione di diverse aree corticali.

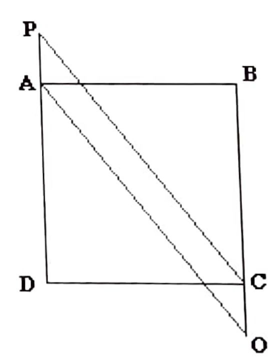


Le figure sopra si riferiscono alle prestazioni di pazienti colpiti ad aree specifiche della corteccia visiva. Il primo (fig. al centro e a destra) aveva subito un danno dovuto ad avvelenamento da monossido di carbonio, che interessava l'area V1. Questo paziente aveva enormi difficoltà a copiare forme anche semplici, come figure geometriche o lettere dell'alfabeto, perché il sistema di percezione dell'area V1 era gravemente compromesso.
Il secondo paziente, colpito da infarto cerebrale, mostrava un'ampia lesione nella corteccia prestriata, una zona ben circoscritta della corteccia visiva, che però aveva risparmiata l'area V1.Questo paziente, come previsto, riconosceva le forme. Era per esempio in grado di riprodurre in un disegno la cattedrale di San Paolo a Londra con un'abilità superiore a quella di molte persone sane, tuttavia non riusciva a comprendere cosa aveva disegnato; poiché l'area V1 era intatta riusciva a identificare gli elementi costitutivi della forma, come angoli e rapporti, e a copiare con precisione ciò che

vedeva. La lesione alla corteccia prestriata tuttavia gli impediva di integrare questi tratti in un insieme complesso e di riconoscere il soggetto del disegno come un edificio. Il paziente vedeva delle forme ma non sapeva associarvi un significato.
Lo studio di casi come questi ha rivelato una caratteristica importante dell'organizzazione della corteccia visiva: nessuna delle aree visive si limita a passare segnali ad altre aree. Al contrario, ognuna fa parte del meccanismo che trasforma attivamente i segnali in arrivo e contribuisce in maniera esplicita, anche se incompleta, alla percezione come unione di struttura e di significato.

Wertheimer e il pensiero produttivo

Il lavoro degli psicologi della Gestalt non si limitò all'elaborazione delle leggi di percezione visiva, ma si estese anche allo studio del pensiero produttivo, cioè di quei processi che portano la mente a produrre procedure nuove rispetto a ciò che è stato imparato precedentemente.
Wertheimer conclude le sue ricerche in questo campo ipotizzando che il risultato di un pensiero produttivo si ottenga essenzialmente attraverso una ristrutturazione del campo cognitivo. Tra i molti esempi che ha discusso vediamo questo problema:



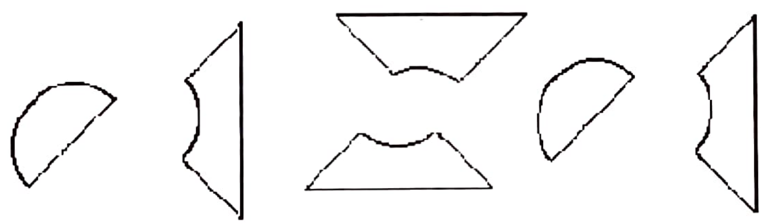
Sia dato il quadrato ABCD e si prolunghino i due lati AD e BC in modo che i due segmenti AP e CQ siano tra loro uguali. Sono note le lunghezze del lato del quadrato e la lunghezza dei due prolungamenti. Trovare la somma delle aree del quadrato ABCD e del parallelogramma APCQ.

Questo problema può essere risolto in due modi. Uno, il più scolastico, consiste nel "vedere" che il lato del quadrato è anche l'altezza del parallelogramma di cui si chiede l'area. Questo tipo di considerazione richiede una "ristrutturazione di funzioni", nel senso che un elemento che nel problema ha un ruolo (lato del quadrato) deve assumerne uno nuovo (altezza del parallelogramma). Questa ristrutturazioni di funzioni, che nel campo della geometria razionale gioca un ruolo importante ed essenziale, viene ostacolata dalla "fissità funzionale" degli oggetti, cioè dalla difficoltà che abbiamo ad assegnare agli oggetti funzioni diverse da quelle che li definiscono

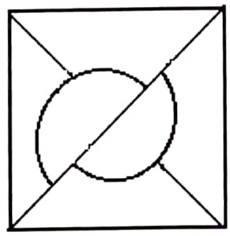
Una seconda soluzione, più creativa, si ha quando la riorganizzazione strutturale avviene in modo che la figura venga vista come formata da due triangoli che parzialmente si sovrappongono. In questo modo "si vede" che la somma delle loro aree (PDxDC) è proprio l'area del quadrato più quella del parallelogramma. L'emergere di nuovi aspetti che permettono di risolvere un problema geometrico, la riorganizzazione figurale, il superamento della fissità funzionale, avvengono in funzione del campo creato dal problema stesso.

Fattori visivi nella soluzione di un problema

Le leggi gestaltiche di organizzazione percettiva esposte prima possono agire sia nel senso di evidenziare strutture che portano alla soluzione, sia in quello di "mascherarle", ostacolando così la soluzione.
Ecco un problema in cui i pezzi a disposizione agiscono in modo coercitivo nella direzione opposta a quella richiesta dalla soluzione. Si chiede di comporre un quadrato con in seguenti pezzi:



Affrontando questo problema il 95% dei soggetti inizia tentando a lungo di comporre il quadrato attorno al disco ottenuto con i due semicerchi a disposizione, mentre il quadrato finale richiesto ha questa struttura:



L'azione dei fattori di organizzazione avviene anche quando abbiamo dei problemi non geometrici:

Sotto un ponte passano nuotando due anatre davanti a due anatre, due anatre dietro a due anatre, e due anatre in mezzo. Quante anatre ci sono in tutto?

L'immagine che viene spontanea a tutti, per fattori di tipo linguistico, è la seguente:

ma se si dice che la risposta prevede anche il caso in cui le anatre sono quattro, sono pochi quelli che riescono a "vedere" le anatre nuotare in fila indiana.

[Fine citazione]

Concetti matematici impliciti nella visione

Def. Sia Δt l'intervallo di tempo "infinitesimo" necessario all'occhio per perlustrare il campo visivo di un osservatore che può muovere gli occhi, ma ha il vincolo di non poter muovere la testa. Per immagine visiva (istantanea) intendiamo l'insieme delle figure presenti all'interno del campo visivo dell'osservatore. Ciò significa che le eventuali figure in movimento, pur risultando "congelate" all'intervallo Δt, vengono registrate nell'immagine insieme all'informazione relativa alla loro velocità istantanea, calcolata cioè relativamente all'intervallo Δt (si veda la sezione 6).

1. Il cervello concepisce dimensioni ≥ 3

Considerando il fatto, come già osservato, che non esiste visione senza percezione del colore (non esistono perimetri su un foglio bianco), riteniamo di poter affermare che un modello matematico di immagine visiva necessita sicuramente di un ambiente di dimensione maggiore di 3. Come sappiamo infatti l'occhio vede i colori per sommazione delle 3 lunghezze d'onda fondamentali: verde, rosso, blu, secondo quanto spiegato nell'articolo precedente inerente al colore degli oggetti. Pertanto 3 parametri dello spazio ambiente devono essere utilizzati per individuare il colore di un punto dell'immagine mediante la terna delle intensità dei colori fondamentali e, tenendo conto che a questi occorre aggiungere almeno 2 parametri, i e j, per individuare la posizione del punto sul piano di fissazione, ricaviamo che la dimensione dello spazio ambiente è maggiore o uguale a 5.

Da tali considerazioni sembra ragionevole dedurre che il concetto di dimensione arbitraria (ed in particolare maggiore di 3) sia un concetto connaturato nella struttura delle facoltà intellettive del cervello.

2. *Carte e atlanti*

Come abbiamo già osservato l'immagine visiva, percepita dal cervello, non è paragonabile ad una fotografia, bensì va interpretata come un insieme di fotogrammi che, stimolando l'attività rielaborativa del cervello, costituiscono l'immagine complessiva. L'immagine è infatti l'insieme dei singoli pezzi del campo visivo percepiti dal cervello mediante la successione dei movimenti oculari di perlustrazione nell'intervallo Δt. Matematicamente una tale situazione può essere descritta mediante il concetto di varietà, interpretando i singoli fotogrammi come carte e l'insieme di essi come l'atlante che caratterizza la varietà. Può essere interessante osservare come il bambino piccolo tenda a riprodurre le singole componenti di un suo disegno in modo quasi indipendente. Per esempio, egli ritrae spesso gli esseri umani di pari dimensioni o più grandi della casa in cui dovrebbero abitare! Ciò sembra suggerire che nel bambino la visione non sia ancora complessiva ma sia ridotta alle singole carte. Mancano ancora, cioè, le funzioni di transizione che gli permetterebbero di vedere l'immagine nel suo insieme. Tali funzioni di transizione (non meglio specificate se non come "mentali") vengono sviluppate dall'essere umano negli anni, mediante l'esperienza, fino a permettere la visione adulta. Essa è già stata descritta precedentemente, ma se la visione stereoscopica ci dà il senso della prospettiva e la costanza delle proporzioni, quella adulta e lo sviluppo delle "funzioni mentali" non possono prescindere dalle illusioni ottiche e dalle leggi presentate nell'articolo sulla "percezione della forma". È interessante osservare anche come alcune patologie possano compromettere tali funzioni di transizione ed in tal caso il soggetto affetto da tale patologia perde la visione complessiva, riconoscendo i singoli elementi ma ignorando le interconnessioni (si veda a tale proposito quanto esposto nel capitolo seguente sugli infarti cerebrali).

Riassumendo, da quanto detto, sembrano evidenziarsi i concetti matematici di: carta, atlante, funzioni di transizione, varietà.

3. *Sogni e topologia intrinseca*

Il cervello vede (come già detto) grazie al fatto che riesce a distinguere i colori (nell'uomo). L'immagine è cioè un insieme di macchie di colore, ciascuna delle quali tende ad essere interpretata come oggetto a sé. In realtà il cervello sembra separare tra loro solo macchie di colore fortemente contrastanti, mentre tende a considerare come un unico oggetto una macchia in cui il colore subisce delle variazioni graduali (ricordiamo che è grazie alla sfumatura di colore che riconosciamo la concavità e la convessità degli oggetti). Matematicamente possiamo interpretare le macchie che compongono la visione come le componenti connesse per cammini dello spazio dei colori.

Da ciò sembra emergere una forte struttura topologica "primitiva" delle nostre facoltà visive che tende a preferire le "figure" connesse (per cammini). Lo stesso principio di completamento dell'immagine è in realtà molto più vasto e riguarda la percezione in senso generale: quante volte ci è capitato di sentire qualcosa che in realtà non è mai stato detto, solamente perché abbiamo completato pochi suoni percepiti malamente! Questo sembra confermare una struttura topologica mentale complessiva necessaria a "completare" informazioni esterne insufficienti mediante il bagaglio delle esperienze, sulla base di una qualche nozione "metrica" di distanza minima. Inoltre anche la facoltà umana di pensiero ed immaginazione potrebbe essere interpretabile come capacità di deformare topologicamente le immagini e i concetti mentali già acquisiti dal cervello con l'esperienza. È evidente che, nel caso del pensiero e dell'immaginazione, lo spazio dei parametri, in cui i nostri concetti possono deformarsi topologicamente, dipende da un numero di parametri di molto superiore a quello limitato alla visione, che costituisce un suo sottospazio. Anche i momenti di sogno possono essere visti come movimenti di deformazione di immagini iniziali, richiamate al cervello da sensazioni emotive o da eventi esterni, come rumori o vincoli al movimento.

Tra i concetti matematici che possono emergere da tali considerazioni evidenziamo quelli di: inclusione, intersezione, topologia, continuità, connessione per cammini.

4. Struttura di schema algebrico

Sappiamo che nel cervello esistono cellule predisposte a contenere informazioni complesse, come quella del quadrato o di altre forme geometriche fondamentali. Questo fa pensare che la "varietà della visione" sia costituita non solo da punti standard, come quelli di una varietà topologica di un R^n ordinario, ma che essa sia arricchita da punti "non standard" del tipo dei punti "non chiusi" di uno schema algebrico. Quando una forma diventa nota al cervello (cioè assume significato), essa è da considerarsi un vero e proprio elemento a sé, costituito non solo dall'insieme dei suoi punti (chiusi), ma anche dalla sua forma globale, alla quale il cervello dedica una minima porzione di sé (nello specifico una cellula particolare). Per chiarire il paragone proveremo a descrivere la struttura topologica del piano come schema algebrico (affine): Spec(R[x,y]), che denoteremo per comodità nel seguito con P. P, come spazio topologico, è costituito da un insieme di punti I e da una topologia Z. Gli elementi di I sono tutti i punti standard del piano insieme a tutti i sottoinsiemi algebrici del piano stesso, cioè i luoghi di punti (reali e complessi) definiti da equazioni o sistemi di equazioni algebriche reali. Per esempio la circonferenza C: $x^2+y^2=1$ è un punto di P. Tale punto costituisce, per definizione, il punto generico della circonferenza C. La topologia Z di P, nota con il nome di topologia di Zariski, può essere definita prendendo come chiusi i sottoinsiemi algebrici di P, dove per sottoinsieme algebrico C intendiamo l'insieme dei punti di I che "soddisfano" le equazioni che definiscono C, compresi i punti non standard.

Più correttamente i punti di I sono gli ideali primi di R[x,y], mentre i chiusi di Z sono i sottoinsiemi algebrici, ossia i sottoinsiemi di I costituiti da tutti gli ideali primi contenenti a, per qualche ideale a di R[x,y].

Osservazione: il punto non standard "generico" corrispondente all'equazione della circonferenza $x^2+y^2=1$ non costituisce un insieme chiuso poiché ogni punto standard che soddisfa l'equazione fa parte della sua chiusura; per esempio il punto (1,0) appartenente alla circonferenza fa parte della chiusura del punto generico, poiché l'ideale primo massimale (x-1,y) corrispondente al punto (1,0) contiene l'ideale primo (x^2+y^2-1) corrispondente al punto generico della circonferenza.

Tornando all'analogia con il cervello, l'insieme I può essere pensato come l'insieme dei punti chiusi (o standard) del piano e dei punti "non chiusi", che costituiscono le "forme algebriche" possibili dei vari luoghi del piano (definiti da equazioni algebriche), esatta-

mente come il punto “cellula quadrato" costituisce l'idea (o la forma) del quadrato e ne richiama tutti i punti standard.
Osserviamo inoltre che il concetto di punto “generico” o “non chiuso” potrebbe essere anche utilizzato per interpretare matematicamente l’assegnazione di un “nome” ad un’immagine o ad un concetto.

5. L’occhio si muove cercando vettori tangenti?

La neurologia ha messo in evidenza che l’occhio è in grado di fornire al cervello informazioni sulla “forma” delle figure parallelamente a quelle del colore e della posizione. Matematicamente l’informazione sulla forma sembrerebbe essere collegata alla capacità dell’occhio di percepire la frontiera di una regione connessa (per cammini). In particolare il cervello sembra in grado di classificare le forme fondamentali di tali curve in rettilinee, circolari, curvilinee. Ciò potrebbe essere interpretabile, matematicamente, come capacità di controllare la direzione del “vettore tangente” alla curva frontiera durante la perlustrazione oculare dell'immagine, con una certa capacità di distinguere la curvatura della frontiera tra i casi: nulla, costante e variabile. Tale capacità di distinguere, in parallelo alla percezione del colore, la frontiera delle regioni connesse e contemporaneamente il campo vettoriale tangente alla frontiera, riteniamo sia la stessa facoltà che guida i movimenti dell’occhio nella ricostruzione dell’immagine complessiva.

6. Il movimento come campo vettoriale

Come per la forma, anche per la percezione del movimento, il cervello riceve informazioni dagli occhi in parallelo alle altre afferenze. Il movimento non è colto attraverso sensori retinali specifici, ma grazie al fatto che, nella corteccia visiva primaria, apposite cellule sensibili alle direzioni sono attivate contemporaneamente.
Anche l’informazione di movimento può essere interpretabile matematicamente sotto forma di campo vettoriale definito sulla frontiera, supplementare e subordinata all’informazione fornita dal campo vettoriale tangente (definito anch’esso sulla frontiera). Infatti l’informazione relativa alla direzione e alla velocità scalare "istantanea" del movimento della forma (della regione connessa o equivalentemente della sua frontiera) è priva di significato, o meglio non percepibile, senza l’informazione relativa alla forma. Anche in tal caso, il cervello, mediante l’informazione movimento, potrebbe essere

dotato di appositi neuroni in grado di riconoscere, a livello qualitativo, alcuni moti standard, come quello di traslazione e rotazione e quindi i moti composti nonché alcune velocità scalari del tipo lento o veloce. Non siamo, però, a conoscenza di studi in questo senso.

È evidente che nell'informazione relativa al movimento è implicito il parametro tempo, che va ad aumentare la dimensione dello spazio "mentale" ambiente. A tale proposito conviene evidenziare che il concetto di immagine istantanea come varietà, richiede una concezione discreta del flusso del tempo, in modo tale da permettere all'occhio di avere il tempo necessario Δt per percorrere l'immagine intera. L'immagine statica può dunque essere pensata come un fotogramma nella pellicola del film della visione, che il cervello è in grado di "proiettare" completando le discontinuità tra un fotogramma e quello successivo, proprio come la costruzione di un cartone animato.

7. Matematica da studiare o da rendere razionale?

La possibilità dell'occhio di ricostruire l'oggetto tridimensionale ed i suoi colori originali a partire da anaglifi visti con gli appositi occhiali, dimostra ancora una volta la complessità del processo della visione, che ha nell'occhio solo il primo di una serie di strumenti estremamente diversificati. Il fatto che il cervello sia in grado di vedere il colore originale dell'oggetto, quando ciascun occhio vede solamente un colore specifico, fa capire che l'acquisizione del colore non avviene semplicemente nell'occhio, bensì è il risultato di un processo complesso che si conclude con un' opera di sommazione da parte delle aree del cervello preposte. Similmente, la percezione della posizione relativa dei punti delle figure costituenti l'immagine è frutto di una analoga "sommazione" delle posizioni percepite singolarmente dai due occhi. Sostanzialmente l'occhio, percependo mediante la differenza retinica le proiezioni delle figure sul piano di fissazione, risulta essere in grado di valutare (almeno entro una certa distanza) la profondità dei punti che costituiscono le varie figure (ossia la loro distanza dall'osservatore). Risulta evidente pertanto come il cervello sia in grado di utilizzare il concetto di angolo (connesso al fenomeno della differenza retinica) e quindi di padroneggiare le tecniche della trigonometria necessarie per ottenere dalla conoscenza dell'angolo le informazioni relative alla profondità degli oggetti osservati.

Nell'ambito della visione tridimensionale riteniamo che esiste qualche evidenza per giustificare un interesse nell'indagare se e come il cervello sia in grado di utilizzare concetti matematici come:

- Superficie piana in contrapposizione a superficie curva
- Poliedro elementare
- Sfera
- Superficie generale
- Piano tangente ad una superficie
- Concavità-convessità
- Curvatura gaussiana
- Superfici sviluppabili

Ricordiamo, per concludere, che i concetti di concavo e convesso sono normalmente utilizzati dall'occhio al fine di ricostruire la tridimensionalità delle figure osservate.

CAPITOLO TERZO

Visione patologica:
pensare geometria tra vedere e non vedere

Richiami preliminari

Abbiamo detto che la retina, organo recettore della via visiva, è una proiezione "in avanti" dell'encefalo, al quale rimane connessa per mezzo del nervo ottico.

La parte dello spazio entro la quale un singolo neurone modifica la sua attività elettrica spontanea, quando viene impattata da uno stimolo luminoso, è detta "campo recettivo". Tale variazione dell'attività spontanea può avvenire sia in senso facilitante sia in senso inibitorio. I fotorecettori, infatti, presentano un campo recettivo ad assetto anulare concentrico antagonista con una porzione centrale ed una periferica. Il campo recettivo è definito "on-off" quando la risposta elettrica viene evocata da uno stimolo luminoso diretto al centro e inibita da uno stimolo diretto alla periferia. Al contrario esso è definito "off-on" quando la stimolazione della periferia evoca una risposta eccitatoria e la stimolazione del centro una risposta inibitoria.

Questa doppia rappresentazione è modulata dalle cellule orizzontali e costituisce il supporto funzionale per la specializzazione delle singole cellule alla visione del colore, del contrasto, dell'orientamento, ecc.

In parole semplici si può dire che la percezione di maggiore o minore luminosità non viene data dalla maggiore o minore eccitazione dei recettori retinici, ma da un vero e proprio rapporto di forze tra stimolazione e inibizione.

Il nostro occhio è capace di percepire un "quanto" di luce che è una quantità veramente minima: ciò è possibile perché questa piccolissima quantità di energia, che influisce su un recettore, viene amplificata dalle cellule che si trovano negli strati superiori. Un'intera area di tali cellule può essere influenzata da un solo recettore, mentre ciascuna cellula può necessitare, per reagire, dell'influenza di un'intera area di recettori. Quando un solo recettore agisce su molte cellule gangliari abbiamo la cosiddetta "divergenza ascendente", termine con cui intendiamo che il segnale ascende e si allarga lateralmente. Quando, invece, una cellula gangliare è raggiunta da uno stimolo proveniente da un'intera area di recettori abbiamo la convergenza di tanti stimoli detta, appunto, "convergenza".

La retina è strutturata intorno alla fovea e divisa in distretti che vengono conservati nella loro distribuzione visutopica (nasale e temporale) al livello delle strutture visive cerebrali.

L'architettura funzionale della corteccia visiva, come già detto, ha una struttura a colonne orientate perpendicolarmente alla superficie corticale e organizzate in due moduli funzionali, colonnari embricati tra loro, che corrispondono a tutte le possibili variabili di stimolazione: colonne di orientamento e colonne di dominanza oculare. Le colonne di orientamento sono formate da cellule impilate i cui campi recettivi derivano dalle stesse aree retiniche con le stesse caratteristiche di sensibilità per l'orientamento delle linee, la forma, il movimento, il contrasto, il colore. Ogni tipo di orientamento è rappresentato con una prevalenza per gli assi orizzontali e verticali, il che giustifica la nostra migliore acuità visiva per questi rispetto agli assi obliqui. Le colonne di dominanza oculare sono caratterizzate dall'alternanza di zone della corteccia nelle quali le cellule sono dominate, o meglio eccitate, in modo preferenziale da uno dei due occhi.
La maggior parte delle cellule dell'area 17 ricevono afferenze monoculari o binoculari; i neuroni corticali monoculari sono stimolati da un solo occhio mentre i binoculari e/o da un occhio e/o dall'altro. La corteccia visiva primaria è connessa con un numero elevato di relais corticali visivi deputati a elaborare il messaggio visivo, a raffrontarlo con dati memorizzati, svolgendo una funzione di supervisione e di cernita.
La via visiva primaria viene mielinizzata precocemente, essa è infatti completa già a 16 settimane, mentre la mielinizzazione globale del cervello si completa intorno ai 18 mesi d'età. Già nel neonato è possibile identificare alla R.M.N. (risonanza magnetica) la mielinizzazione dei nervi ottici e perfino del fascio chiamato "fascicolo longitudinale mediale" che è di fondamentale importanza nei processi di integrazione dell'oculomozione. Spesso quest'ultimo è già mielinizzato nei feti di 20 settimane di età gestazionale.

Sviluppo dell'apparato visivo

Abbiamo ripreso alcuni concetti già esposti nel capitolo 1, per meglio cogliere la complessità dell'apparato visivo e poter introdurre gli aspetti funzionali, che si vengono a determinare nell'età evolutiva.
L'apparato visivo, anche se relativamente maturo alla nascita, risente, per i primi mesi di vita, dell'influenza ambientale in maniera determinante. Tale influenza condiziona fortemente la maturazione strutturale predeterminata geneticamente. La maturazione visiva è una maturazione legata allo stimolo. Diversamente da altre cellule dell'organismo

come le linee staminali degli eritrociti nel midollo osseo, che nella loro maturazione non sono influenzate da quello che accade fuori dall'organismo, nella funzione visiva è l'input sensoriale che contribuisce a strutturare la funzione stessa.

Se un bambino viene tenuto in una condizione di totale assenza di stimoli visivi la sua vista non si sviluppa.

La maturazione del sistema visivo nei primi mesi di vita è sia anatomica sia funzionale. Infatti è in quel periodo che il neonato "attiva" la via genicolata, mentre alla nascita usa unicamente una via detta "extragenicolata"; è sempre in quel periodo che avviene la maturazione anatomica della macula. La corteccia visiva dei mammiferi, al momento della nascita, è immatura sia dal punto di vista anatomico sia funzionale. Durante i primi mesi di vita si ha una riorganizzazione anatomica delle connessioni all'interno della corteccia visiva, contemporanea allo sviluppo e alla maturazione della fovea e della via genicolata. Questo sviluppo dipende in gran parte dall'esperienza visiva esplicitata dal soggetto durante un breve periodo di plasticità chiamato "periodo critico". L'esperienza visiva agisce modulando il livello e la conformazione dell'attività neuronale. Questo periodo di plasticità gioca un ruolo cruciale nel rinforzare, rimodellare, ed eliminare i circuiti sinaptici (potatura), al fine di costituire un sistema visivo integrato, la cui strutturazione sia quella definitiva dell'adulto. Si può quindi affermare, senza alcuna esitazione, che l'esperienza visiva ha un ruolo strutturante nello sviluppo della visione. L'occhio del neonato, pur essendo molto più piccolo di quello dell'adulto, 16mm vs24mm, presenta un apparato diottrico già maturo e idoneo alla corretta refrazione (rifrazione all'interno dell'occhio) dei raggi luminosi e alla corretta focalizzazione delle immagini sulla retina. Le variazioni refrattive a carico soprattutto della cornea e del cristallino seguono armonicamente l'allungamento del bulbo. Al contrario della retina la fovea non è matura: i coni foveali, lunghi e addensati nell'adulto, si presentano corti e meno compatti nel neonato. Bisogna attendere il terzo quarto anno di vita per un completo sviluppo della fovea, anche se già dal primo mese si ha una differenziazione tale da consentire alla fovea di dominare funzionalmente sulla periferia.

Questo processo di differenziazione foveale, unitamente alla maturazione delle vie visive superiori, comporta un maggior potere di risoluzione e la possibilità di una visione distinta, indispensabili per un corretto sviluppo della funzione visiva.

Nel neonato i campi recettivi delle cellule gangliari sono più ampi e meno competitivi tra le zone on-off.

Il corpo genicolato laterale si presenta di dimensioni inferiori all'adulto del 50%, è appena riconoscibile la struttura laminare avviata nel feto a 24 settimane ma sono identificabili gran parte dei tipi cellulari descritti nell'adulto.

La corteccia visiva aumenta in ampiezza fino al 4°/5° mese, quando raggiunge quasi i valori dell'adulto. Contemporaneamente alla crescita si osserva un cambiamento nell'aspetto della corteccia: nel prematuro il polo occipitale è liscio e appena si riconosce la scissura calcarina. Nel neonato sono visibili numerose circonvoluzioni. A livello istologico si osserva che la popolazione neuronale, che alla nascita è di circa 90 mila unità per millimetro cubo, scende a 40 mila a 4 mesi, e si stabilizza a 35 mila nell'adulto. La sinaptogenesi, che sta alla base dei contatti interneuronali, mostra un andamento molto particolare: la massima densità sinaptica è raggiunta intorno all'ottavo mese e dopo tale periodo assistiamo a una graduale riduzione fino agli undici anni, quando le sinapsi, potate del 60% del valore massimo, raggiungono la densità del soggetto adulto. Non è ancora del tutto chiarito il significato funzionale di questo fenomeno, ma è sicuramente espressione dell'estrema plasticità del sistema visivo in questo periodo e della naturale predisposizione alla selezione di canali preferenziali, ottenuta sfrondando quella esuberante ridondanza sinaptica.

Si pensa che si tratti di fenomeni di adattamento degli schemi geneticamente predeterminati della maturazione a condizionamenti ambientali indotti dall'esperienza visiva. Questa ipotesi è dimostrata dalla nascita delle colonne di dominanza oculare nelle prime settimane di vita e dalla loro associazione con la perdita di connessioni sinaptiche non utili o non utilizzate provenienti da uno dei due occhi. La progressiva contrazione delle sinapsi potrebbe giustificare strutturalmente la graduale perdita di plasticità del sistema visivo nell'età evolutiva. Bisogna ricordare che nelle prime settimane di vita, quando ancora non vi è stata la maturazione della fovea e ancora residuano fibre crociate provenienti dalla retina temporale, l'occhio del bambino funziona come quello degli animali inferiori, che utilizzano vie interamente sottocorticali e crociate.

Ogni occhio è cioè sintonizzato in una sola direzione e non è in grado di seguire oggetti che si muovono nella direzione opposta.

Alla nascita vi è un'estrema immaturità delle interconnessioni tra la corteccia, il corpo genicolato laterale, il mesencefalo e il collicolo; il neonato pertanto non dispone di adeguate afferenze di controllo (le vie che poi si chiameranno corticocollicolari). Egli è in grado di percepire stimoli mal definiti che eccitano i campi recettivi della periferia retinica, evocando movimenti riflessi saccadici finalizzati alla localizzazione; essa, però, avviene senza una sufficiente analisi del messaggio visivo e con il predominio di riflessi motori posturali e vestibolari.

Alla nascita, quindi, il riflesso di fissazione è già presente anche se non è stabile. I primi 4 mesi di vita corrispondono al periodo critico, quello nel quale si sviluppano le principali funzioni monoculari e binoculari, sia sensoriali sia motorie. In questo periodo il sistema visivo è estremamente sensibile e plastico e risente in maniera condizionante degli effetti di stimoli adeguati o scorretti. In questo periodo si sviluppano la convergenza e l'accomodazione; tali meccanismi consentono di indirizzare gli occhi verso un oggetto posto a distanza ravvicinata e di focalizzarlo, mentre i movimenti orizzontali rapidi (saccadi) permettono di dirigere prontamente gli occhi verso un oggetto dello spazio.

Tra il 4 e il 6 mese i movimenti oculari coniugati si perfezionano e il bambino è in grado di fissare un oggetto, di seguirne il movimento, di volgere rapidamente lo sguardo verso uno stimolo visivo. Al 6 mese, con il maturare del riflesso della fusione, che consente al cervello di unire in una unica immagine le impressioni visive ricevute dai due occhi, lo sviluppo della visione binoculare singola è completato ed è possibile già rilevare un certo grado di acutezza stereoscopica.

Per quanto riguarda l'acutezza visiva, non ostante fin dalle prime settimane di vita, con metodiche adeguate (potenziali evocati) sia possibile interpretare la capacità visiva del bambino ed esprimerla in decimi, si ritiene che un potere risolutivo simile a quello dell'individuo adulto sia raggiunto a 6 mesi.

La percezione del colore è la manifestazione della capacità di confrontare le diverse lunghezze d'onda, pertanto è espressione di una funzione corticale. Alla nascita le capacità discriminatorie, seppur presenti, risultano deficitarie, nel senso di una percezione dicromatica che abbraccerebbe i primi due o tre mesi di vita del neonato a termine.

Tale difetto sembra legato alla mancanza del funzionamento dei coni selettivi per il blu e all'immaturità delle strutture corticali connesse. Un'analoga maturazione si realizza anche per la percezione dell'orientamento delle linee; tale funzione si perfeziona intorno alla sesta settimana di vita. Connessa con tale maturazione è la risposta selettiva al movimento in una particolare direzione; funzione che viene raggiunta poco dopo la discriminazione dell'orientamento. Un'ulteriore e più tardiva funzione della vista è quella relativa al riconoscimento della corrispondenza o della disparità tra le immagini provenienti dai due occhi. Essa è detta "binocularità" e rappresenta il fondamento dello sviluppo della steraopsi. Tale capacità viene raggiunta dal bambino in tempi variabili dalla dodicesima alla diciassettesima settimana di vita.

Come è noto la funzione neuronale che è in grado di fondere le due immagini si sviluppa progressivamente attraverso due possibili modalità: la strutturazione progressiva di nuove connessioni, che finiscono con lo stabilire un rapporto tra le due autonome esperienze oculari e la restrizione selettiva delle possibili connessioni, che rende efficace la coordinazione della visione binoculare. Quest'ultima è l'ipotesi più accreditata. Anche gli aspetti oculomotori sono una spia importante del comportamento visivo, manifestando già dai primi giorni alcune valenze funzionali proprie della capacità cognitiva. E' noto che il nistagmo optocinetico (di cui parleremo nel seguito), è un fenomeno riflesso consistente in una risposta oculomotoria al movimento di uno stimolo dall'ampio pattern. E' presente già alla nascita benché riveli anch'esso un percorso di maturazione nei primi mesi di vita. L'acquisizione progressiva della funzionalità corticale può essere meglio seguita attraverso lo studio delle saccadi, che evolvono nel primo anno di vita da meccanismi puramente riflessi a dinamiche intenzionali. In questo itinerario neuroevolutivo di costruzione dell'oggetto nel corso dei primi mesi di vita, il comportamento visivo più pregnante di valenza cognitiva è la cosiddetta "attenzione visiva", che sottende un processo di orientamento selettivo scomponibile in una serie di elementi che vanno dall' "arousal" alla scelta dell'oggetto da osservare. La scelta è per così dire motivata dalle caratteristiche attrattive dell'oggetto (saccade riflessa) o dall'intenzionale ricerca da parte del soggetto (saccade intenzionale). L'attenzione visiva è alla base di tutti i comportamenti visivi che vengono testati nei primi mesi di vita, per valutare lo sviluppo cognitivo precoce, tali comportamenti visivi rappresentano, nei primi due anni di vita, una modalità non scomponibile di manifestazione dell'intelligenza.

La sensibilità al contrasto matura tra il 3° e il 6° mese, ma è più precoce per frequenze spaziali basse con alto contrasto.

Va detto a questo proposito che abitualmente si impiega l'acutezza visiva per quantificare la capacità visiva di un individuo. Questo è molto riduttivo ed esclude altre funzioni fondamentali come il campo visivo, il senso cromatico, la sensibilità al contrasto ecc., che insieme alla acuità visiva definiscono la funzione visiva globale e reale. Per fare un esempio è molto più invalidante un campo visivo fortemente ristretto, anche se accompagnato da una buona acutezza visiva, rispetto ad una acuità visiva fortemente ridotta, ma con un campo visivo buono.

Deficit visivi e sviluppo

Abbiamo visto che i primi mesi di vita sono importanti per il normale sviluppo della funzione motoria e sensoriale degli occhi del bambino: una volta acquisita, questa funzione non è stabile, ma lo diventerà solo dopo i 10/12 anni di età. Esiste quindi un secondo periodo critico che va dal momento in cui si è raggiunta la maturità visiva (6 mesi) al momento in cui si raggiunge la stabilità visiva (10/12 anni). Se vi sarà un ostacolo alla normale maturazione dell'apparato visivo, entro i primi 6 mesi si creerà un arresto di sviluppo gravissimo e spesso irreversibile; se l'ostacolo si produrrà dopo il 6° mese, vi sarà un'estinzione, o meglio una regressione di una potenzialità già acquisita e il danno conseguente sarà minore.

È noto che i bambini con disturbi visivi, specie se severi, presentano caratteristiche evolutive peculiari sia sul piano cognitivo, che comportamentale. Dal punto di vista cognitivo la presenza di una cecità completa fin dalla nascita, pur rappresentando un sicuro handicap nell'acquisizione fisiologica delle competenze visive, specie nel primo anno di vita, non impedisce al bambino di raggiungere un livello cognitivo adeguato, sebbene sfruttando meccanismi di compenso in grado di esaltare le doti residue. Ovviamente il processo implica un margine di precarietà per il bambino, che, se non adeguatamente sostenuto, può andare incontro a gravi turbe del comportamento fino allo strutturarsi di veri e propri quadri di autismo.

Gli studi recenti sullo sviluppo delle competenze visive hanno potuto analizzare i comportamenti evolutivi dei diversi aspetti funzionali. In realtà, la vista è più che un semplice organo sensoriale, è una funzione assai complessa in cui si assommano, oltre che la ricezione delle immagini, la percezione delle loro diverse caratteristiche (forma, movimento, orientamento, ecc.) fino alle vere gnosie, su cui si innestano le funzioni di elaborazione superiore dell'intelligenza rappresentativa.

Lo specifico delle vicende evolutive e del connesso rischio psicopatologico nel bambino cieco o ipovedente è rappresentato proprio dalla mancanza o carenza significativa di uno strumento che, non solo è finalizzato ad una serie di apprendimenti più o meno formalizzati, ma partecipa a pieno titolo alla costruzione della mente. La vista si configura quale strumento preadattato alle esigenze di esplorazione e controllo della realtà. È uno strumento che possiede un funzionamento di tipo tonico e di fatto ricopre il ruolo di principale mediatore della continuità percettiva del mondo circostante.

Altre modalità sensoriali, come l'udito hanno invece un funzionamento di tipo fasico, nel senso che si attivano solo dietro appropriata stimolazione. In conseguenza di questo funzionamento il soggetto rischia di essere frammentato in una serie di percezioni parzialmente o totalmente sganciate le une dalle altre.

Conseguenza di questa duplice modalità di funzionamento dei sistemi sensoriali è che, mentre la vista costituirebbe il supporto più naturale per raggiungere una stabile rappresentazione della realtà e delle connesse esperienze affettive, nel bambino cieco un così cruciale passaggio può avvenire solo appoggiandosi al registro della propria vita mentale. Paradossalmente, in tale patologia, la vita mentale diventa l'elemento di più difficile costruzione, ma anche l'unico fondamento per la costruzione della realtà circostante. La persona cieca, o ipovedente, vede attraverso le "immagini mentali".

Nella scimmia lo sviluppo visivo è 4 volte più rapido che nell'uomo; avviene in 4 settimane. Lo sviluppo delle colonne di dominanza, che nell'uomo, per stabilizzarsi, richiede 8/9 anni, nella scimmia richiede 1 anno; nel gatto addirittura 4 mesi. È stato sperimentalmente riprodotto l'effetto di una deprivazione visiva inducendo artificialmente uno strabismo, così pure, sperimentalmente, si è studiato l'effetto della sutura di entrambe le palpebre. In quest'ultimo caso si è determinata una riduzione omogenea e generalizzata dei neuroni visivi corticali, nell'altro caso l'effetto era l'insorgenza di quella che viene chiamata "ambliopia".

Ambliopia

Per ambliopia si intende un deficit della visione centrale monolaterale o bilaterale, che insorge nei primi anni di vita, nel quale non siano dimostrabili alterazioni manifeste delle strutture oculari, anche se l'alterazione sussiste in termini di funzionalità.

Le cause dell'ambliopia, pur non essendo presenti alterazioni biologiche delle strutture oculari, riconoscono alla base due meccanismi: la deprivazione visiva e l'interazione binoculare alterata.

Il nistagmo, lo strabismo, le ametropie producono ambliopia. Le variazioni funzionali determinate da queste patologie producono un'alterazione nella formazione delle colonne di dominanza, che sono estremamente influenzate dalle stimolazioni binoculari. Se i due occhi funzionano in modo uguale o equivalente il numero di cellule corticali connesse con ciascun occhio è uguale e le cellule appropriate vengono catturate dalle sinapsi dello strato corrispondente della corteccia visiva. Se invece un occhio viene deprivato dalla nascita, le connessioni corticali si perdono e predominerà l'occhio adelfo, che catturando un numero di sinapsi maggiore farà prevalere la classe di cellule ad esso collegate. Da questo evento ne consegue che le cellule non strutturate non potranno avere caratteristiche di cellule adulte e non potranno rispondere sufficientemente allo stimolo e all'orientamento.

Abbiamo esposto le alterazioni legate a uno dei processi patologici possibili in forma molto semplificata, quando in realtà tali patologie sono studiate e conosciute in maniera ben più complessa.

Ai fini della nostra esposizione può essere utile aggiungere alla comprensione dei concetti dell'alterazione visiva, i due elementi seguenti: il cosiddetto "fenomeno dell'affollamento" e l'errata applicazione del "nistagmo".

Per l'acutezza visiva il potere di risoluzione per lettere isolate è migliore di quello con lettere raggruppate in linee. Questo fenomeno è definito, appunto, "fenomeno dell'affollamento" e può essere spiegato dall'importanza che assume l'interazione dei contorni. L'ambliope, infatti, compiendo movimenti oculari anomali e possedendo un'attenzione visiva discontinua, subisce un'alterazione a livello dei campi recettivi. Valutando l'acutezza visiva a differenti livelli di luminanza, inoltre, l'ambiople risponde meglio a livelli bassi di luminanza; probabilmente per un'alterazione dei campi recettivi retinici. L'anomalo comportamento visivo dell'ambliope, infatti, deriva dalla riduzione della sensibilità al contrasto, dall'imprecisione nella visione spaziale e dalla mancata loro correlazione.

La distorta percezione dello spazio visivo induce un'anomalia nel tempo di reazione, con conseguente alterazione a carico del riflesso vestibolo-oculare.

Ci addentriamo, ora, nella conoscenza di tale riflesso per approfondire la patologia del nistagmo.

Il termine nistagmo indica la presenza di una oscillazione involontaria, ritmica e coniugata dei due occhi; esso può essere di due tipi: o a scosse o pendolare.

Nel primo caso ad una saccade segue un movimento lento di deriva, che allontana la fovea dal target di fissazione: Nel secondo caso non sussistono saccadi correttive e l'oscillazione consiste in due fasi lente di deriva. È importante sottolineare come le scosse, nel nistagmo, non abbiano che una funzione correttiva, mentre la componente lenta è la causa e il mantenimento dell'oscillazione nistagmica. L'oscillazione aumenta nel tentativo di fissare meglio il target, oppure negli stress emotivi, mentre, a volte, può ridursi nei movimenti oculari di lateroversione o di convergenza.

L'acutezza visiva, in questa patologia, in assenza di deficit sensoriali importanti, dipende dalla velocità del movimento dell'immagine sulla retina e dalla presenza di saccadi di fissazione che cercano di riportare l'immagine sulla macula. Quanto più è bassa la velocità del movimento o quanto più è lungo il periodo di foveazione, tanto più è elevata la funzione visiva.

Le strutture nervose che generano e mantengono i movimenti nistagmici sono situate nel ponte, nel mesencefalo e nella corteccia. Esse sono le stesse che abbiamo descritto per fissare correttamente un oggetto. In condizioni di normalità un target viene mantenuto sulla fovea dai sistemi vestibolari e optocinetici, che sono incaricati di stabilizzare le immagini sulla retina durante le rotazioni della testa, mentre i complessi sistemi che producono l'inseguimento lento stabilizzano le immagini di un target in movimento. Un'anomalia di questi sistemi, a qualsiasi livello si determini, può causare lo spostamento lento unidirezionale degli occhi cioè il nistagmo. Si capisce pertanto che è necessaria l'integrità dell'intera via visiva afferente. Un'anomalia di questa sede cortocircuita sul nascere i meccanismi di fissazione e di inseguimento, scatenando l'oscillazione nistagmica. Vi possono essere comunque oscillazioni di nistagmo per un'anomalia di proiezioni retino-striate, fenomeno questo tipico degli albini.

Proponiamo un ulteriore approfondimento dei meccanismi che sottendono al nistagmo, in particolar modo riferendoci ai riflessi che permettono la visione degli oggetti in movimento e la visione durante la rotazione del capo.

Il VOR (riflesso vestibolo oculare) viene utilizzato continuamente al fine di stabilizzare la linea dello sguardo per le piccole e grandi variazioni della rotazione del capo. Ad esempio durante la deambulazione il VOR deve compensare i piccoli movimenti della testa che altrimenti provocherebbero una grande instabilità della proiezione visiva sulla retina.

Il VOR è un riflesso molto preciso e permette che la testa possa ruotare mentre leggiamo queste righe, mantenendo le parole leggibili. Il VOR attua questi compensi con un movimento lento e un movimento rapido; l'alternanza di fasi lente e fasi rapide, durante la rotazione del capo, prende il nome di nistagmo, in questo caso, però, fisiologico. Il VOR esprime la propria funzione attraverso un circuito nervoso compatto che parte dal tronco dell'encefalo, passa da varie stazioni ed è guidato dai segnali che arrivano dai canali semicircolari dell'orecchio. L'altro sistema per stabilizzare lo sguardo durante le rotazioni della testa o quando l'oggetto è in movimento è il sistema "optocinetico". A differenza del VOR, questo sistema utilizza l'informazione visiva globale al fine di cogliere quanto velocemente e in quale direzione il mondo visivo si sposta attraverso la retina. Tale movimento del mondo visivo è chiamato "scivolamento retinico" e viene utilizzato dall'apparato visivo per generare un movimento oculare pari in velocità, ma opposto in direzione allo scivolamento retinico, stabilizzando in questo modo il sistema visivo sulla retina. Così come il VOR il sistema optocinetico determina nistagmo.

L'implicazione geometrica e matematica di parti che sembrerebbero puramente neurologiche si capisce già da quanto precedentemente scritto e dalla precisazione seguente.

Nell'uomo e in molti vertebrati la retina proietta ad un'area del mesencefalo, chiamata "pretetto". Molti neuroni di quest'area si attivano quando il mondo visivo scivola in una direzione particolare e la loro frequenza di scarica aumenta con l'aumentare della velocità dello scivolamento. Si capisce quindi che i neuroni del pretetto codificano la velocità e la direzione dello scivolamento retinico, attivando un continuo calcolo della forza statica necessaria a mantenere gli occhi nella nuova posizione. I sistemi ora descritti si vanno ad affiancare ai movimenti saccadici di cui abbiamo precedentemente parlato. I movimenti saccadici sono spostamenti repentini dello sguardo che possono far ruotare gli occhi alla velocità di 800° di arco al secondo. Il circuito che controlla questi movimenti è il meccanismo di movimento volontario appartenente al sistema motorio. Al pari dei sistemi per il mantenimento dello sguardo, il sistema saccadico che abbiamo appena descritto può generare sia un impulso di forza dinamica, per modificare la velocità di rotazione dell'occhio, sia un aumento della forza statica, per mantenere gli occhi nella nuova posizione.

Il sistema saccadico utilizza informazioni visive somatosensoriali e acustiche per calcolare la rotazione oculare necessaria ad allineare lo sguardo con un obiettivo visivo. La grandezza e la direzione del cambiamento desiderato della posizione degli occhi vengono ritrasmessi a circuiti cerebrali di controllo che calcolano le forze statiche e dinamiche necessarie alla rotazione oculare selezionata.

Facciamo notare come l'apparato visivo utilizza, per la sua rielaborazione, quegli stessi elementi che sono oggetto della sua indagine: angoli, movimento, distanza, ecc.

A conferma di quanto detto consideriamo la traiettoria di un movimento saccadico, mentre sposta il punto di fissazione lateralmente e in profondità. Molti spostamenti dello sguardo in animali binoculari e provvisti di fovea coinvolgono sia un movimento coordinato di entrambi gli occhi (detto versione), sia un movimento separato di ciascun occhio per aggiustare le differenze in distanza dallo stimolo (detto vergenza). La funzione del sistema di vergenza è di convergere più o meno le linee dello sguardo dei due occhi in modo tale che esse si incontrino sullo stimolo in visione foveale. Di conseguenza i movimenti oculari determinano spostamenti dello sguardo come se la linea dello sguardo che deve essere spostata verso uno stimolo fosse unica. Questo è il funzionamento del sistema saccadico e del sistema di inseguimento lento.

La modalità secondo la quale due occhi distanti parecchi centimetri l'uno dall'altro riescono a fissare un unico stimolo è l'attivazione di un sistema deputato al calcolo della correzione di vergenza, appropriata per ciascun occhio, durante lo spostamento dello sguardo.

Il movimento oculare è composto da tre fasi: nella prima fase gli occhi iniziano a convergere lentamente prima che il movimento saccadico abbia inizio (è l'inizio del movimento di vergenza). Dopo un breve intervallo ha inizio il movimento saccadico ad alta velocità, in occasione del quale il punto di convergenza dello sguardo si sposta attraverso il campo visivo e contemporaneamente anche nel senso della profondità. Alla fine il movimento saccadico ad alta velocità e la porzione lenta del movimento di vergenza vengono completati. Questi complessi meccanismi sono il risultato del lavoro di neuroni specifici deputi a tale obiettivo.

La percezione dello spazio nella patologia

All'interno di ciascun emisfero cerebrale, l'informazione visiva è elaborata in maniera seriale attraverso una successione di aree progressivamente sempre più distanti dalla corteccia visiva primaria del lobo occipitale. Nonostante che l'informazione visiva in entrata sia importante per operazioni spaziali, la consapevolezza dello spazio è molto più che una funzione visiva; prova ne è il fatto che riusciamo a conoscere la posizione di un oggetto nello spazio, o la sua forma, sia quando lo vediamo, sia quando lo percepiamo attraverso il tatto. La consapevolezza dello spazio intesa in termini generali, non dipende dalle aree visive classiche, ma piuttosto dalle aree sopravisive a cui esse proiettano. La transizione dalle aree deputate alla funzione visiva a quelle che mediano la consapevolezza generale dello spazio è graduale e si conclude solo quando la via dorsale visiva raggiunge la stazione finale nella corteccia associativa del lobo parietale posteriore.

La conferma di ciò è data dalla constatazione che lesioni della corteccia parietale compromettono, nell'uomo, le funzioni spaziali. Nelle patologie più comuni del lobo parietale si assiste a sintomi come: la difficoltà della programmazione della distanza di un oggetto e del conseguente suo raggiungimento (Balint); la difficoltà a cogliere stimoli alla periferia del campo visivo (Balint); l'incapacità di cogliere le relazioni spaziali tra oggetti, l'impossibilità a individuarne la dimensione e i rapporti di distanza, l'incapacità di percepire più di un oggetto alla volta e l'impossibilità di copiare disegni semplici, omettendo o trasponendo delle parti (simultanagnosia).

Il paziente con simultanagnosia nel guardare la fiamma di un fiammifero non vede la mano che lo tiene, oppure di fronte a una configurazione di punti sottostima il numero di punti.

Riportiamo l'esempio di una paziente: 4 mesi dopo un infarto cerebrale all'emisfero destro la signora lamentava di percepire l'ambiente come se fosse frammentato. La paziente coglieva i singoli elementi, ma questi le sembravano isolati e non era in grado di distinguere le relazioni tra un elemento e l'altro. Affermava, per esempio, di essere in grado di orientarsi dentro casa quando era ad occhi chiusi, ma si confondeva quando apriva gli occhi. Cercando di raggiungere la camera da letto usava una lampada come punto di riferimento, ma cadeva sul tavolo da pranzo perché non lo coglieva mentre si spostava. Alla televisione si confondeva perché "vedeva" una persona alla volta e non riusciva a stabilire chi stesse parlando e chi stesse ascoltando. Non era in grado di leggere perché le parole erano in competizione con quella che individuava; era incapace di scrivere perché vedeva una sola lettera alla volta, ma contemporaneamente non poteva cogliere la punta della matita e perdeva intanto ciò che aveva scritto in precedenza. Può essere ancora più significativo il risultato di un test applicato a questi pazienti. Posti di fronte ad un insieme di cerchi verdi e rossi disposti casualmente i pazienti erano incapaci di dire se i cerchi erano di colori differenti, presumibilmente perché essi potevano vedere un solo cerchio alla volta. Tuttavia quando coppie di cerchi di colori diversi erano congiunti da segmenti di linee, quindi uniti in un oggetto singolo, i pazienti erano in grado di notare la differenza di colore. Questo miglioramento era specifico per le condizioni in cui erano uniti cerchi di colori differenti, come mostrato dal fatto che, quando invece erano uniti due cerchi dello stesso colore (condizione singola), non si osservava alcun miglioramento. Questo dimostra che l'incapacità dei pazienti nel percepire e confrontare coppie di cerchi, nella condizione casuale e singola, era dovuto al fatto che i cerchi venivano percepiti come oggetti separati e non erano semplicemente un effetto della distanza che li separava. La simultanagnosia, impedendo la visione contemporanea di due oggetti, causa una caduta ai test che richiedono un confronto tra oggetti diversi. Questi pazienti sanno giudicare accuratamente le relazioni spaziali se il giudizio riguarda un singolo oggetto e sono in grado, per esempio, di stabilire se un rettangolo è più allungato orizzontalmente o verticalmente.

Un'altra manifestazione delle lesioni parietali è quel disturbo descritto come "atassia ottica". Il paziente affetto presenta difficoltà nelle situazioni della vita quotidiana che richiedono il raggiungimento accurato di un bersaglio sotto controllo della visione. Per esempio nel tentativo di tagliare il cibo con forchetta e coltello non raggiunge il piatto ma taglia il tavolo. Un sintomo classico del danno parietale è "l'eminegligenza spaziale" o "neglect". I pazienti non si rendono conto della presenza degli oggetti nell'emispazio controlesionale. Tali pazienti sbattono contro ostacoli, oppure nella lettura di parole commettono errori di identificazione di lettere poste nel lato controlesionale, oppure, nel disegnare oggetti semplici, omettono i dettagli della parte dello spazio compromesso. Inoltre, quando devono immaginare se stessi in un ambiente pubblico a loro familiare e descrivere cosa vedono, non riportano gli oggetti presenti in tutto l'emispazio controlesionale, indipendentemente dalla direzione verso la quale si immaginano di guardare.

Riassumendo abbiamo ormai la certezza che la corteccia parietale posteriore svolge un ruolo cruciale nella percezione spaziale; essa riesce a costruire una rappresentazione dello spazio integrando le informazioni che provengono dalle diverse sensorialità con i segnali motori.

Un contributo centrale all'integrazione della rappresentazione dell'informazione spaziale è dato dai neuroni della corteccia frontale, che codificano in maniera privilegiata la posizione degli oggetti in relazione al corpo, anche quando essi non sono il bersaglio immediato dell'azione. I neuroni della corteccia prefrontale completano l'opera codificando la posizione degli oggetti nella memoria di lavoro a breve e a lungo termine. La rappresentazione dello spazio e del sé rispetto all'ambiente esterno è invece codificato dall'ippocampo, che posiziona l'orientamento della testa e del corpo in forma stabile.

Si vede come è strettamente intrecciato il vedere, il percepire lo spazio, il controllo dello spazio stesso e il conseguente comportamento motorio necessario per la realizzazione di tutte le interazioni soggetto-oggetto. Pazienti con patologie diffuse a queste aree mostrano prestazioni deficitarie quando devono esprimere dei giudizi spaziali su oggetti (allargare pollici-indice per mostrarne la dimensione pensata, oppure quando devono imitare i movimenti necessari per afferrare i medesimi oggetti). Il gesto, invece, è corretto se devono afferrare concretamente l'oggetto.

Ogni ambito della ricerca visiva implica risorse complesse da parte del cervello, per esempio: ciascun emisfero usa una strategia differente per esaminare i contenuti del proprio campo visivo. L'emisfero sinistro usa una strategia guidata intelligente, mentre l'emisfero destro non lo può fare; questo significa che l'emisfero sinistro è in grado di adottare un'utile strategia cognitiva per risolvere i problemi, mentre l'emisfero destro non possiede questa abilità.

Apparentemente il lobo temporale memorizza rappresentazioni visive della forma: è probabile che i lobi temporali destro e sinistro abbiano differenti specializzazioni. Mentre l'emisfero destro sembra essere più adatto ad immagazzinare esemplari specifici, (per esempio la specifica immagine di un cane), l'emisfero sinistro è più abile a immagazzinare l'informazione visiva categoriale riguardo alla forma (un prototipo della forma di un cane tipico).

Gli emisferi cerebrali codificano anche differenti intervalli di frequenze spaziali. La frequenza spaziale corrisponde al numero di volte in cui buio e luce regolarmente si alternano in una certa unità spaziale (generalmente 1° di angolo visivo). Ad esempio strisce nere e bianche di uguale larghezza, alternate le une alle atre, possiedono una frequenza spaziale più alta quando sono sottili, rispetto a quando sono più spesse. Per verificare questa ipotesi ai soggetti di un esperimento sono state presentate varie versioni del test delle figure di Navon (1987) consistenti in una lettera dell'alfabeto di grandi dimensioni (livello globale) costruita da esemplari più piccoli di un'altra lettera (livello locale). Ai soggetti era stato chiesto di determinare se era presente una certa lettera bersaglio, che poteva essere la lettera nella forma globale oppure la lettera più piccola con cui la forma completa era disegnata. Quando gli stimoli venivano presentati al campo visivo di sinistra i soggetti codificavano meglio la configurazione globale (frequenza spaziale più bassa), mentre se presentati al campo visivo destro, essi codificavano meglio la configurazione locale.

I pazienti con lesioni dell'emisfero sinistro tendono a riprodurre solo il livello globale, mentre quelli con lesione destra tendono a riprodurre solo il livello locale.

Secondo quanto abbiamo detto, inoltre, le proprietà spaziali sono codificate dai luoghi parietali, ma l'emisfero destro contiene, in realtà, la rappresentazione di entrambi i campi visivi, mentre l'emisfero di sinistra contiene la rappresentazione spaziale del solo emicampo controlaterale.

È possibile considerare le relazioni spaziali come concetti basati su categorie di tipo linguistico, in quanto la localizzazione spaziale viene definita in base a un sistema metrico e pertanto l'emisfero sinistro dovrebbe codificarle meglio del destro. In realtà si è visto che le relazioni spaziali metriche, utilizzate per esempio nella navigazione, sono coperte soprattutto dall'emisfero destro, che codifica meglio del sinistro tali coordinate spaziali.

Maturazione della rappresentazione grafica nell'uomo

Vi sono diversi stadi per la maturazione grafica nell'uomo. Il primo stadio è detto "*stadio dello scarabocchio*" e si attua fra i 2 e i 4 anni: è basato sul movimento, e si manifesta con rappresentazioni tendenzialmente di tipo longitudinale, disordinato, con avvii alla circolarità. La chiusura del cerchio, tuttavia, avviene solo intorno al terzo anno di età. Il secondo stadio, fra i 4 e i 7 anni, detto "*preschematico*", prevede l'avvio dello sviluppo dei primi simboli e la comparsa delle prime rappresentazioni di forme. Nel terzo stadio, dai 7 ai 9 anni, detto "*schematico*", prosegue lo sviluppo dei simboli, con il raggiungimento di uno schema sia per gli oggetti, sia per le figure, e per la prima volta si definisce l'uso di una linea di base. Il quarto stadio, dai 9 agli 11 anni è chiamato "*realismo*" ed è caratterizzato dal stabilizzazione delle schema visivo; inizia, perciò, l'abilità della profondità spaziale. Il quinto e il sesto stadio, che si susseguono dagli 11 anni fino alla maturità, detti rispettivamente "*pseudorealismo*" e periodo "*della decisione*", corrispondono a un'utilizzazione sempre più matura delle abilità precedentemente acquisite. Il primo stadio ha in realtà un avvio dai 16/18 mesi, epoca in cui anche se non assistiti i bambini tracciano, spontaneamente, segni sulle superfici di qualsiasi genere. In questa fase i bambini pensano cinesteticamente, cioè in base alle proprie sensazioni di movimento, pertanto lo spazio e il pensiero è conseguente alla rappresentazione "tutta corporea" del proprio vivere. Arrivato ai tre anni il bambino avvia la comparsa del pensiero simbolico, grazie allo sviluppo del linguaggio; inizia a classificare ciò che vede, organizzando spontaneamente per forma e grandezza e per colore. Nessuno insegna a un bambino di 18 mesi a scarabocchiare, anche perché all'inizio vi è uno scarso controllo del movimento utilizzato per produrre il disegno. I risultati ottenuti sono accidentali e la penna è utilizzata allo stesso modo per scrivere o per essere morsa. Comunque prodotto lo scarabocchio resta il risultato delle esperienze cinestetiche del bambino e della sua capacità di coordinazione tra l'attività motoria e visiva. Lo scarabocchio, all'inizio, è un segno prodotto dal semplice movimento del braccio, ma è già in questo garbuglio di linee che ha inizio l'espressione delle prime abilità sia gestuali sia rappresentative dell'individuo. Alcuni studiosi hanno tentato di categorizzare gli scarabocchi, classificandoli in 4 stadi: disordinati, longitudinali, circolari e significanti. Sicuramente è l'inizio di un movimento espresso attraverso le linee, ma non di un uso intenzionale della linea di per se stessa.

Sviluppo percettivo: condizioni d'apprendimento basate su strutture filogeneticamente determinate

La percezione è il processo mediante il quale vengono estratte informazioni dall'ambiente. Ciò avviene attraverso i sensi, che sono i sistemi "modali" preposti alla raccolta dei dati provenienti dal mondo esterno. Le informazioni così ottenute, che viaggiano in noi come semplici impulsi elettrici, vengono interpretate dal cervello che attribuisce loro un significato.

Abbiamo già esaminato la discordanza esistente fra la realtà oggettiva e la realtà soggettiva, dimostrata dai diversi fenomeni osservati nell'ambito della percezione visiva. Essa è stata messa in luce negli esempi delle figure ambigue, definite col termine "organizzazioni concorrenti", oppure nelle cosiddette "immagini mal definite".

Un altro esempio di questa discordanza fra realtà oggettiva e realtà soggettiva è quello che viene chiamato l'effetto contesto: una configurazione visiva può essere percepita in maniera differente in rapporto ad informazioni aggiuntive provenienti dal contesto.

Tutte le esperienze appena citate dimostrano che la percezione non è un processo passivo, ma è un processo attivo che non è guidato solo dai dati, vale a dire dagli occhi, ma è soprattutto il risultato della capacità rielaborativa della corteccia. Nel processo percettivo il soggetto va attivamente a ricercare, nello stimolo, quegli elementi e quei dati che ne permettono la ricostruzione interna e quindi il riconoscimento in rapporto a delle premesse fissate dal contesto. Ciò implica, pertanto, l'esistenza di sistemi di conoscenza centrale, che risparmiano l'attività percettiva. In rapporto a questo modello interattivo si può affermare che la percezione attiva quelle stesse conoscenze che le permettono di entrare in funzione. In questa prospettiva essa può anche essere definita come quel processo mediante il quale viene attribuito un significato allo stimolo in entrata, cioè all'esperienza sensoriale.

Percezione e riconoscimento rappresentano, pertanto, due aspetti di un unico processo.

Il fatto che l'individuo, durante la crescita, sia in grado di migliorare l'abilità di escludere l'elemento irrilevante dello stimolo, a favore delle caratteristiche significative di quest'ultimo, è alla base dell'apprendimento conseguente alla percezione e al riconoscimento. Tale capacità viene affinata, durante lo sviluppo, imparando ad estrarre gli elementi "invarianti" dello stimolo stesso.

Senza i cosiddetti “tratti distintivi”, per esempio, sarebbe impossibile imparare a leggere. Il bambino di 5/6 anni, infatti, impara le lettere dell’alfabeto in base sia alla loro configurazione spaziale sia al loro rapporto con una lista di enunciati che descrivono tale configurazione spaziale. La lettera A, per esempio, viene riconosciuta grazie alla capacità neurobiologica di affinare la visualizzazione della configurazione spaziale delle due linee oblique “/ \”, e questa in rapporto all’orientamento spaziale della linea trasversale “-”. In questo caso “/ \” e “-” sono i tratti distintivi attraverso cui l’apparato corticale riconosce la lettera A.

Se le cellule della corteccia non potessero essere rese sensibili a tali tratti, la lettera in questione sarebbe ogni volta un oggetto sconosciuto.

Con lo stesso processo viene progressivamente acquisita la capacità di riconoscere la linea retta “|” in rapporto spaziale con il semicerchio “ ∩”.

È evidente che questo processo non prevede semplicemente abilità percettive, ma richiede la competenza cognitiva, neurologicamente predisposta, di valutare informazioni contestuali in confronto a elementi noti, correggendo l’attribuzione di dati percettivi inadeguati.

I disturbi spaziali, che conseguono a lesioni degli emisferi cerebrali, causano manifestazioni diverse in rapporto alla sede del danno. La complessità di tali disturbi rispecchia la profonda elaborazione della percezione spaziale.

Esistono danni delle aree corticali che inducono l’impossibilità di cogliere l’emispazio controlaterale dell’emisfero leso. Il comportamento spaziale normale (orientamento spaziale) altro non è che lo svolgersi di una serie di risposte adeguate flessibilmente all’integrazione tra le informazioni spaziali somatiche (spazio interno) e quelle dello spazio esterno. Il fine è essenzialmente quello di cogliere con immediatezza la posizione di uno stimolo extracorporeo rispetto al nostro soma (corpo). Ciò è possibile grazie al fatto che molteplici condizioni dello spazio esterno sono prevedibili a priori (per esempio la direzione della forza di gravità). Esistono disturbi della percezione spaziale legati a danni corticali ben precisi: per esempio pazienti con lesioni corticali parietali destre non possiedono più il senso della direzione spaziale e nemmeno il senso della verticalità o dell’orizzontalità. L’apprezzamento della profondità, studiata in senso stereoscopico, è compromesso nei soggetti con lesioni dell’emisfero destro; così pure lesioni dell'emisfero destro, prevalenti nella zona detta "rolandica", determinano l'impossibilità di cogliere la prospettiva nonché di tracciare o usare mappe topografiche.

Soggetto patologico: Ester Tornavacca

L'esperienza qui riportata è quella diretta dell'autrice della tesi, come soggetto ipovedente affetto dalla seguente anamnesi.

Anamnesi:

occhio destro = bulbo sub-atrofico con cheratopatia bollosa.

ODV (= occhio destro visus): zero

occhio sinistro = leucoma corneale aderente paracentrale a ore 3 e nistagmo. Importante riduzione del campo visivo.

Vediamo, nel dettaglio, quali ripercussioni percettive ciascuna malformazione crea sulla visione del soggetto.

La totale assenza delle afferenze dell'occhio destro, impedisce la visione stereoscopica, secondo la tradizionale rielaborazione descritta in precedenza. La percezione della tridimensionalità di un oggetto, infatti, deve avvenire per altra via, o per meglio dire attraverso l'utilizzo di altri sensi.

E' innanzi tutto il tatto ad apportare il maggior numero di informazioni al riguardo e a garantire un'esperienza ben consolidata. L'esperienza stessa, poi, permette di confrontare oggetti tridimensionali differenti, consentendo di metterne in evidenza le comunanze. Si scopre così che tutti gli oggetti considerati presentano un certo tipo di ombreggiature: sarà allora proprio tale caratteristica ad essere assunta dal soggetto come indice di tridimensionalità.

Come abbiamo detto, però, l'ombreggiatura comunica, al soggetto normodotato, la presenza della concavità (convessità) dell'oggetto e non il suo essere tridimensionale.

Possiamo pertanto notare che l'informazione dedotta dal soggetto patologico è parziale, perché la concavità (convessità) dell'oggetto è un'acquisizione quasi totalmente persa.

Anche in questo caso l'esperienza supplisce la carenza visiva e fornisce gli indizi mancanti al completamento dell'immagine. Un po' di abitudine è sufficiente per ricordare e quindi per vedere che una poltrona, un vaso, un piatto da minestra, ecc... sono oggetti concavi.

Un'analisi della sfumatura, tuttavia, non è sufficiente, al soggetto patologico, per cogliere la tridimensionalità di un'intera scena: essa sarà formata da oggetti considerati come tridimensionali e dunque verrà detta essa stessa tridimensionale.

Questo concetto, però, non ha senso di per se stesso, ma solo in relazione alla sua funzionalità: è necessario che la propria abitazione, le strade, le auto, ecc. siano tridimensionali, perché tridimensionali sono le persone e quindi il soggetto.

L'esistenza di una realtà più articolata di quella in qualche modo percepita sul piano di fissazione, introdotto dalla neurologia, è dunque un'astrazione dedotta da prove empiriche, ma che non può essere verificata; essa è dunque soggetta ad errori di non sempre facile individuazione.

Mancando un apparato stereoscopico vero e proprio, è totalmente assente, nel soggetto patologico, la concezione della misura: essa acquista senso solo quando l'oggetto è direttamente confrontato con altri.

Come per la tridimensionalità, anche la misura è legata alla necessità: impilare oggetti, riempire contenitori, arredare ambienti, ecc... sono tutte attività che richiedono la misura e che permettono di stabilire confronti. Non potendo, tuttavia, astrarre un concetto di misura, tali azioni non formeranno, nel soggetto in questione, alcuna esperienza sulla base della quale generalizzare le informazioni acquisite nello specifico. La domanda "ci sta?" non potrà, dunque, mai essere evitata, a meno che la situazione non ripresenti sempre lo stesso quesito e gli stessi oggetti: "il vaso azzurro sta sul tavolino del salotto". Ovviamente, anche in questa occasione, il tatto soccorre l'ipovendente, dando indicazioni sulla grandezza degli oggetti: "se il vaso bianco è più o meno grande del il vaso azzurro, anch'esso sta sul tavolino del salotto". Anche in un caso semplice come questo, però, il margine di errore è comunque non trascurabile.

Il leucoma corneale paracentrale impedisce la visione dell'immagine nella zona della cornea a ore 3: tale visione non è sostituita da una "macchia nera", ma appare non ben delineata, potremmo dire come vista attraverso un vetro smerigliato.

Compare una sagoma confusa, anche se continua, della quale si intuisce la forma grazie ai suggerimenti dell'immagine mentale più quotata.

La scoperta di un nuovo oggetto richiede, pertanto, un movimento dell'occhio e della testa maggiore di quello di un soggetto normodotato nonché un tempo più lungo di esplorazione. In generale, quindi, il soggetto supplisce la mancanza di informazioni formulando un'ipotesi, da cui originano le afferenze sulle quali il cervello elabora l'immagine.

Il nistagmo, di cui si è parlato molto precedentemente, impedisce all'oggetto osservato di mantenere contorni netti: in genere essi sfumano nei colori degli oggetti circostanti.

Ciò incide, come si può facilmente dedurre, sulla percezione della forma di un oggetto, la cui rappresentazione sarà facilitata dalla presenza di un netto contrasto di colore tra l'oggetto e il suo sfondo.

In realtà l'analisi del perimetro di un oggetto avviene, nella mente di un vedente, esattamente con la stessa tecnica: il contrasto di colore crea la "linea di confine dell'oggetto", mentre una superficie di colore omogeneo non induce il riferimento per la visione di alcun perimetro. Nel soggetto patologico, però, il meccanismo di decodificazione avviene molto lentamente, anzi, talvolta, così lentamente da non essere supportato, per il tempo necessario, dalla possibilità di messa a fuoco dell'oggetto in esame. Esso, quindi, scompare definitivamente dal visus dell'osservatore prima che l'apparato visivo abbia potuto formulare un'ipotesi.

Il campo visivo ristretto, infine, è vincolante, soprattutto, per la visione d'insieme. Una qualunque scena, infatti, dovrà essere esplorata "oggetto per oggetto" e la sua visualizzazione globale sarà solo un'astrazione mentale del soggetto.

Talvolta, però, l'analisi "oggetto per oggetto" non è immediatamente possibile: per fare ciò, infatti, il soggetto dovrebbe sapere a priori il numero di oggetti da esplorare. Può anche accadere che il campo visivo sia occupato da porzioni di oggetti diversi, che non sempre vengono colti come tali. Il primo "tentativo" dell'apparato visivo dell'ipovedente è, come del resto per quello del normodotato, dare senso alle informazioni che riceve: esso, quindi, in prima istanza, ricompone quei frammenti in un oggetto unico. Tale oggetto, però, non esiste realmente, ma diventa comunque il punto di partenza su cui ricostruire la scena; la contestualizzazione, poi, aiuta il soggetto a rettificare l'ipotesi elaborata.

Egli può così rendersi conto che se viaggia in autostrada difficilmente sta vedendo barche a vela sulla carreggiata, come il suo apparato visivo, però, suggerirebbe; in realtà è probabile che alcune automobili bianche, o alcune roulotte, siano posizionate in un particolare quadro prospettico.

Possiamo, dunque, riassumere i concetti precedenti osservando che la differenza principale tra il soggetto ipovedente in questione e il soggetto normodotato è rappresentata dal modo in cui le afferenze delle vie visive giungono alla corteccia visiva primaria.

Nel primo soggetto, infatti, esse sono di per sé ipotesi, perché l'esperienza e la contestualizzazione sono già dovute entrare in azione. Nel secondo soggetto, invece, le afferenze non subiscono rielaborazioni prima di raggiungere la corteccia.

In altre parole potremmo dire che l'immagine, per l'ipovedente, è "un'ipotesi di ipotesi" e non, come per il vedente, "un'ipotesi basata su afferenze". Tutto ciò, però, non implica necessariamente che la visione del soggetto patologico sia errata; è, infatti, sufficiente che le ipotesi-afferenze siano rielaborate correttamente, al fine di fornire alla corteccia visiva primaria stimoli equivalenti a quelli che essa riceverebbe da un apparato visivo sano.

L'immagine del soggetto, non è, dunque, costituzionalmente errata, ma la sua ricostruzione, da parte dell'apparato visivo, sarà più facilmente affetta da incongruenze. Prima di poter dire "vedo", inoltre, è necessario considerare anche il tempo impiegato perché il soggetto si renda conto dell'errore e possa correggerlo.

Un'altra differenza è dovuta all'incapacità del soggetto ipovedente di cercare un oggetto: egli, cioè, rielabora e "vede" gli oggetti che a poco a poco entrano nel suo campo visivo, ma non è detto che, pur esplorando l'ambiente circostante, riconosca ciò che lo interessa. Questa necessità è semplificata dalla conoscenza, da parte dell'ipovedente, del contesto, ma gli richiede di conoscere a priori l'oggetto cercato.

L'espressione "non vedo", pertanto non è esatta per questa patologia; sempre che gli oggetti non siano fuori dal campo visivo disponibile.

In generale sarebbe più corretto dire: "non so dare alcun significato a ciò che vedo".

Riassumendo possiamo affermare che la visione non è preclusa al soggetto, ma, a volte, essa richiederebbe un periodo di ipotesi corticale "infinito"; l'ipovedente, quindi, "vede ciò che conosce" e "sente" ciò che non conosce.

Nei capitoli precedenti abbiamo illustrato come ogni persona vedente utilizza spontaneamente dei concetti matematici; vediamo quali di essi si conservano nel caso dell'ipovendente in questione.

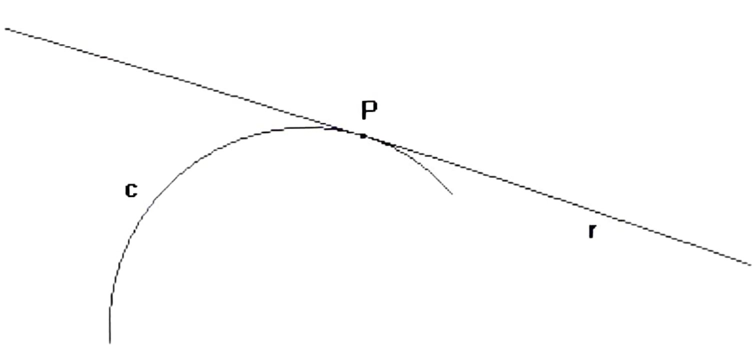
1. Per quanto riguarda i *poligoni* dobbiamo notare che nell'ipovedente dalla nascita i neuroni addetti alla visione di quadrati, rettangoli e stelle, benché predisposti, non sono stati attivati. Egli, pertanto, non può riconoscerli immediatamente, come, invece, avviene per il vedente. Anche le forme più semplici devono essere analizzate ogni qual volta si presentino. Tuttavia si noti che, grazie al contrasto di colore, il soggetto può cogliere piuttosto rapidamente il numero (non superiore a 4) di lati di un oggetto, sempre che esso appartenga al suo campo visivo. Si verifica così che, in questa visione, i poligoni vengono classificati in base al numero di lati e non rispetto alla loro eventuale regolarità, ulteriormente resa insignificante dalla mancanza del concetto di misura. Nella realtà del soggetto, pertanto, non ci sono quadrati, ma quadrilateri, non ci sono cerchi, ma ovali e due oggetti non sono vicini, ma uniti o disgiunti.
2. Un discorso analogo può essere proposto per il concetto di *conica*. Essa viene colta dal soggetto come linea chiusa, sempre che la sua estensione non fuoriesca dal campo visivo. In questo caso, la linea verrà esplorata a blocchi, tentando di coglierne la continuità.
3. Per quanto riguarda i concetti di *punto, retta, piano* e *vettore* possiamo osservare che, una volta acquisiti, essi vengono concepiti dall'ipovedente come dal vedente. Tali concetti, infatti, sono di per sé astrazioni anche per il soggetto sano, quindi la difficoltà non è nel maneggiarli, ma nel coglierli. Così come per il vedente, è difficile per l'ipovedente rappresentare mentalmente il punto, poiché, per questo soggetto, l'utilizzo di strumenti quali carta e penna non è sempre risolutivo. È più proficuo far uso di una piccola luce, che viene sicuramente colta dal soggetto con maggiore facilità per mezzo del contrasto chiaro-scuro. In seguito sarà possibile dare la consueta rappresentazione grafica del concetto in questione, perché l'ipovedente "sa cosa deve vedere". Volendo studiare, invece, rette, piani e vettori, gli esempi legati alla realtà quotidiana non mancano; essi possono essere facilmente suggeriti da tavoli e spigoli. È immediato, però, osservare che essi sono comunque limitati e non aiutano il soggetto a percepire il concetto di infinito. Anche il ve-

dente si trova di fronte a tale difficoltà, ma può aiutarsi con il passaggio intermedio del "molto grande". Questo ausilio, invece, non è sempre impiegabile dal soggetto patologico, che è vincolato dalla limitatezza del proprio campo visivo. Egli, però, in qualche modo, percepisce panorami, che possono costituire un elemento di paragone.

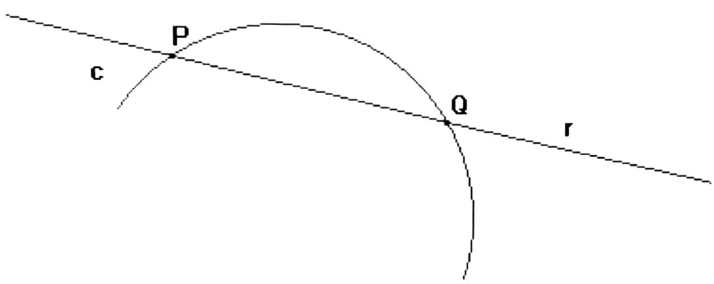
4. Il concetto di *misura* e quindi di *birapporto* è stato affrontato in precedenza. L'ipovedente, però, può avvicinarsi a tale concetto attraverso se stesso per esempio misurando gli oggetti con il palmo della mano.
5. Come per la misura, il soggetto patologico può *orientarsi* analizzando il contesto rispetto a se stesso. In prima istanza, gli oggetti saranno: davanti, dietro, di fianco, sopra o sotto l'osservatore. In seguito, dopo aver analizzato l'ambiente circostante, il soggetto potrà descrivere correttamente la posizione degli oggetti secondo il riferimento più comodo.

Creare il "passato" dell'oggetto attraverso la teoria matematica

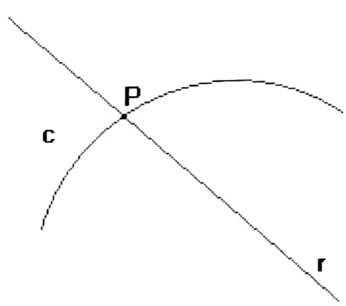
Il rischio principale corso da una persona ipovedente o cieca è quello, già accennato nel paragrafo precedente, di non riuscire a costruirsi una rappresentazione coerente del mondo esterno. Egli può, cioè, rielaborare un'immagine mentale della realtà non veritiera, ma così coerente da apparire corretta anche ad una prima descrizione verbale. Il seguente esperimento fu proposto ad una studentessa al quinto anno del liceo linguistico cieca dalla nascita, durante una tradizionale lezione di matematica. Vennero costruite in pongo una curva e una retta e vennero posizionate secondo la figura qui illustrata.



Contemporaneamente tale disegno venne riprodotto sulla lavagna e sottoposto all'osservazione dei compagni vedenti della candidata. Fu detto: "La retta è tangente alla curva, perché esse si incontrano in un solo punto".
Poi venne disegnato sulla lavagna e riproposto in pongo anche il contro-esempio seguente:



in cui la retta interseca in forma evidente la curva. In seguito fu chiesto agli studenti di costruire un esempio in cui una retta e una curva fossero tangenti in un punto. La struttura in pongo proposta dalla studentessa cieca fu la seguente:



È vero che tale equivoco poteva coinvolgere anche ragazzi vedenti, a causa della definizione verbale data. Dobbiamo, quindi, osservare che i ragazzi vedenti hanno acquisito sull'argomento due informazioni: una verbale esplicita, data dalla definizione, e una implicita, suggerita dal disegno. La curva, infatti, almeno in un intorno del punto P di intersezione con la retta, appartiene interamente allo stesso semipiano individuato dal quest'ultima. Tale informazione implicita non è altrettanto percepibile da un modello in pongo di per sé non istantaneamente esplorabile: scoprire e verificare che si hanno di fronte una retta, una curva e un punto di intersezione è una catena di concetti di non banale rielaborazione, che richiede la totalità dell'attenzione.
Approfondiamo, con l'articolo seguente, la relazione tra immagini, concetti e verbalizzazione.

[tratto dal sito del Dipartimento di Matematica-Università di Roma Tor Vergata: *http://www.mat.uniroma2.it*]

Il linguaggio e le immagini

Il concetto

Quando esprimiamo un pensiero usiamo sempre qualche dispositivo simbolico (non potrebbe essere altrimenti, dato che non siamo telepatici). Un pensiero riguarda sempre qualcosa, e un modo standard di riferirci a questo "qualcosa" è quello di usare la parola "concetto". Allora potremo sinteticamente dire che quando parliamo di linguaggio verbale o intendiamo riferirci alla capacità dell'uomo di usare parole e frasi in modo tale che i concetti nella nostra mente possano essere comunicati agli altri o, indifferentemente, a come percepiamo le parole che ci vengono dette e a come le trasformiamo in concetti.
L'uso del termine "concetto" però può essere fuorviante perché tende a suggerire che ci sia un'entità ben definita, ad esempio il concetto di numero, che si acquisisce o non si acquisisce. In realtà non esiste in questo senso un procedimento del tipo "tutto o nulla".

Concetto e immagini

Acquisire un concetto collegato a una parola vuol dire riuscire a controllarne l'uso tramite immagini adeguate. Supponiamo che a una persona venga fatto vedere un piccolo cartoncino con qualcosa stampato sopra e le venga detto che è un biglietto d'autobus, fornendone una definizione adeguata. In mancanza di qualsiasi esperienza pratica, per quella persona il concetto "biglietto d'autobus" si identificherà quasi totalmente con la definizione e non lo renderà capace di immaginare l'insieme dei comportamenti e dei significati correlati alla definizione stessa come fa invece l'abitante di una grande città che abbia acquisito lo stesso concetto anche per pratica diretta. Una grande utilità della parola sta nel fatto che ci permette di comunicare le nostre concettualizzazioni senza specificare che tipo di forma hanno nella nostra mente, istante dopo istante. Possono essere mappe, parole, immagini, sensazioni motorie, ricordi, o tutto questo insieme. Userò d'ora in avanti il termine "immagine" o "non verbale" per qualunque rappresentazione mentale che non abbia il "formato" verbale.

Già Aristotele nei suoi splendidi studi di logica afferma che la semanticità di un suono consiste nella sua capacità di rinviare all'immagine della cosa presente nell'anima, ossia alla corrispondente affezione, assumendo valore di simbolo.

" [...] Ora, (i suoni) che sono nella voce sono simboli delle affezioni che sono nell'anima, e i segni scritti lo sono dei (suoni) che sono nella voce".

In questa analogia le parole scritte stanno alle parole dette come le parole dette stanno alle immagini.

Immagini e verifica

Ma Aristotele individua anche le prime profonde differenze:

" [...] se non si percepisse nulla non si apprenderebbe né si comprenderebbe nulla, e quando si pensa, necessariamente al tempo stesso si pensa un'immagine [...] le immagini sono come le sensazioni, tranne che sono prive di materia. Ma l'immaginazione è diversa dall'affermazione e dalla negazione, poiché il vero e il falso consistono in una connessione di nozioni [...] Ma le prime nozioni in cosa si distingueranno dalle immagini? Certo, neppure le altre sono immagini, ma non si hanno senza le immagini".

Qui Aristotele tocca un punto fondamentale:

" [...] l'immaginazione è diversa dall'affermazione e dalla negazione, poiché il vero e il falso consiste in una connessione di nozioni".

Il linguaggio è uno straordinario strumento di pensiero che con la sua evoluzione nel tempo ci ha permesso di introdurre criteri di verificabilità nei nostri ragionamenti: il vero e il falso consentono di elaborare correttamente i prodotti di quella cosiddetta "compressione cognitiva" che ci aiuta a categorizzare il mondo e a ridurre l'insieme delle strutture concettuali a una scala gestibile. I concetti salgono da piani molto concreti a livelli estremamente astratti, e l'astrazione, livello dopo livello, richiede l'intervento di una sintesi, di una compressione. Così la parola "biglietto d'autobus" può evocare esperienze vissute direttamente, mentre la frase "la democrazia richiede una partecipazione informata" ha bisogno, per essere ben compresa, dell'intervento della capacità del pensiero di riunire molti concetti sotto un unico simbolo (e parallelamente molte immagini in un'unica rappresentazione) e su quell'unico simbolo operare ancora nello stesso modo, riunendolo ad altri fino ad arrivare ai massimi gradi dell'astrazione.

Processi linguistici e capacità concettuali

Da un punto di vista neurologico però la maturazione dei processi linguistici non è strettamente correlata a quella delle capacità concettuali. Si danno casi di bambini che crescono con sistemi concettuali gravemente compromessi ma con una buona competenza grammaticale mentre, viceversa, bambini con sordità fin dalla nascita, hanno una capacità concettuale normalissima pur non sviluppando un linguaggio verbale. Anche le persone che hanno compromesse alcune funzioni legate all'area verbale non hanno per questo problemi di concettualizzazione. Durante una conferenza internazionale dal titolo *Pensiero senza linguaggio* un giovane matematico universitario con un grave problema nella lettura e nella scrittura (dislessia) descrisse come riuscisse a pensare senza usare il linguaggio verbale: " Sin dalla più tenera età mi resi conto di come sia più facile riflettere su alcune cose senza usare il linguaggio.". Quando calcolava la resistenza totale di una rete di resistori ne immaginava la configurazione fisica e "...manipolavo la rete tagliandola, piegandola e ricollegandola mentalmente... il processo era del tutto averbale, eppure preciso come l'algebra a cui andava a sostituirsi".

Le lesioni cerebrali hanno messo in evidenza come l'uomo possa perdere le sue capacità verbali senza perdere le facoltà immaginativa, quelle cioè di richiamare immagini alla mente e di elaborarle.

Immagini mentali

Le immagini mentali sono un tema presente da sempre nelle questioni che coinvolgono il pensiero, dal tempo dell'antica Grecia ad ora, ma nel '900 ha avuto vicende alterne. La psicologia rifiutava qualunque indagine che si servisse dell'introspezione e quindi per lungo tempo non si è occupata del tema, ma agli inizi degli anni '70 Shepard mise a punto una serie di esperimenti con i quali dimostrò definitivamente che gli uomini sono capaci di formare immagini mentali e di operare con esse. Contemporaneamente Allan Pavio dimostrava che le immagini sono in grado di migliorare le prestazioni della memoria, rispetto a una rappresentazione proposizionale dei ricordi. Si cominciò allora a pensare a due forme distinte ma ugualmente valide di rappresentazione mentale, quella proposizionale e quella per immagini, e che lo studio dell'immagine mentale come effettiva modalità di funzionamento della mente umana, fosse ormai possibile. Il maggior studioso in questo campo è stato lo psicologo S. Kosslyn. I suoi studi sulle immagini mentali hanno anche precisato meglio le loro relazioni con i modelli mentali, oggetti affini ma non uguali alle immagini.

Modelli mentali

Un modello mentale si può definire come una descrizione non proposizionale, analogica di un determinato stato di cose. Le immagini e i modelli mentali hanno intersezione non vuota, ma non coincidono, essendo gli ultimi orientati a una funzione più strettamente cognitiva, piuttosto che a una semplice rappresentazione percettiva. In altre parole, a parità di immagine di un ente, il modello mentale corrispondente cambia in funzione della sua destinazione cognitiva, per esempio una singola rappresentazione può originare due diversi modelli mentali, rappresentanti l'uno l'Italia, l'altro uno stivale.

Il programma di Kosslyn

Secondo Kosslyn si possono generare immagini attingendo alla memoria a lungo termine, si possono raggruppare, sottoporre a trasformazioni varie, classificarle in termini di categorie semantiche. Il programma di Kosslyn può essere considerato un'impresa innovatrice nel campo della scienza cognitiva perché affronta problemi fino ad ora tradizionalmente filosofici ricorrendo a un sistematico programma di ricerca sperimentale. Si occupa in profondità delle rappresentazioni mentali evitando gli errori delle prime ricerche, troppo basate su dati introspettivi. Partendo da dati sperimentali, fa ricorso in modo massiccio a modelli di simulazione al computer e sviluppa importanti connessioni con le neuroscienze che sono oggetto oggi di vitali esplorazioni. Sono stati chiariti molti aspetti della generazione di immagini mentali, comprese le somiglianze e differenze nei confronti della semplice percezione o della memoria. Il gruppo di Kosslyn non ha certamente risolto tutti i problemi importanti sulle immagini mentali, eppure, partendo dalle ricerche di Pavio, Shepard e di altri ricercatori, ha fatto dello studio dell'immaginazione mentale un argomento rispettabile all'interno della scienza cognitiva e ha affrontato aspetti cruciali di questa rappresentazione mentale. Possiamo dire con Gardner che l'immaginazione mentale è oggi al centro di ogni mappa cognitiva della disciplina.

Importanza didattica delle immagini mentali

L' esperienza personale nella matematica come studentessa e come insegnante mi ha portato a prestare molta attenzione ai processi immaginativi, che ho vissuto come parte insostituibile dei processi mentali miei e dei miei alunni nello studio della materia. Mentre la psicologia sperimentale rifiuta per motivi epistemologici l'introspezione, l'insegnamento fa molto spesso affidamento sulla comprensione degli stati interni di pensiero e l'attività didattica spinge continuamente l'insegnante a chiedere o a figurarsi ciò che passa per la testa dei propri alunni. L'attenzione alle loro immagini mentali nel momento iniziale di una situazione nuova semplifica il lavoro, in quanto un modello mentale ben costruito fin dai primi stadi può risolvere molte situazioni che altrimenti avrebbero uno sviluppo negativo.

L'autopercezione dei processi cognitivi però privilegia in modo netto i processi analitico-verbali. Questi infatti, mediante le parole, possono descrivere e definire e, con le loro proprietà analitiche, portarci alla soluzione dei problemi per gradi, affrontandone un aspetto per volta; ci mettono in grado di astrarre, di essere logici e razionali. Il pensiero per immagini invece sembra un parente povero del precedente. Possiamo essere consapevoli delle immagini che pensiamo, ma spesso ci sfuggono, sommerse dalle parole, e anche quando non le perdiamo per strada, non siamo in grado di estrarne un senso compiuto, razionale; molto spesso ci risulta persino difficile anche il solo raccontarle.

Il nostro pensiero per immagini viene di norma percepito legato alle emozioni, privo di logica, frammentario e mescolato a impressioni e sensazioni provenienti da altri organi di senso che non siano la vista. In altre parole siamo tentati di guardare al pensiero per immagini come a un pensiero primitivo, magari simile a quello di una scimmia (vi siete mai chiesti come può pensare una scimmia?...), come al pensiero di un bambino che serve fino a quando, con l'uso della parola e della scrittura, non si sviluppi pienamente il pensiero verbale, e con esso la razionalità, la capacità di astrarre e di simbolizzare.
[Fine citazione]

È un luogo comune degli studenti che la matematica sia una sterile sequenza di formule e conti, proposta mediante l'uso di simboli più o meno incomprensibili da utilizzare poche ore alla settimana.
Se essa risulta noiosa e ostica per la persona vedente, tanto più sembra inadeguata per il cieco o l'ipovedente, per il quale gli strumenti didattici costituiscono vere e proprie "barriere architettoniche".
Non si considera l'apporto che la forma-mentis di tale materia può fornire a queste persone, facilitando la ricostruzione mentale del mondo esterno.
Le leggi matematiche che lo regolano, infatti, non sono immediatamente riconoscibili, ma, una volta scoperte, sono di facile impiego. Per loro natura, inoltre, presentano la caratteristica di essere invarianti, qualità che le rende "punti certi" in una realtà basata sull'ipotesi.
Il mondo esterno è ricco di simmetrie, similitudini, proporzioni costanti (es.: sezione aurea), forme geometriche in genere, moti rigidi e moti deformanti: è logico che padroneggiando tali concetti, almeno nell'astrazione matematica, è più facile immaginare il contesto circostante.
Proponiamo un esempio concreto attraverso lo studio della seguente fotografia. Essa ritrae la sede del **Dipartimento di Matematica (palazzo Campana) della facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di Torino**, dove la tesista ha frequentato il corso di laurea in Matematica.

Il soggetto non è in grado di riconoscere che l'immagine ritrae palazzo Campana, ma ne è capace quando esso le compare innanzi dal vero. Usufruiamo, pertanto, della fotografia al fine di consolidare la nostra immaginazione, che ci vede seduti in piazzetta Carlo Alberto, con gli occhi rivolti al palazzo, nell'inquadratura suggeritaci dall'obiettivo.
Nella descrizione seguente, dobbiamo considerare il fatto che la familiarità del luogo è di fondamentale importanza, affinché il soggetto possa coglierne anche alcuni particolari.
Ciò che compare agli occhi dell'ipovedente è una grossa struttura, variopinta, che, vicino, sfuma nel grigio della strada e più lontano nell'azzurro del cielo. Egli sa di trovarsi in un luogo abitato, quindi la prima struttura geometrica con cui "paragona" il palazzo è un parallelepipedo o un cubo. Sullo sfondo chiaro, sono ben evidenti "strisce nere" verticali, che si ripetono frequentemente: esse, quindi, vengono facilmente pensate essere delle finestre. Se si considera valida l'ipotesi che siano finestre, allora le strisce nere rappresentano i loro vani. È anche possibile che esse siano incassate, perché l'incavo

appare scuro; se gli infissi fossero allineati al muro, infatti, i vetri rifletterebbero il sole, almeno in certe zone.

Le finestre incassate sono una caratteristica dell'architettura neoclassica, quindi le "righe scure" trasversali possono essere dei rilievi di rifinitura. Una riga scura più marcata delimita la zona inferiore del piano nobile. Piccoli tratti in rilievo compaiono anche sulle finestre del primo piano, zona in cui la facciata del palazzo cambia colore. Ciò supporta l'ipotesi della natura neoclassica.

Il piano terra appare di colore scuro (grigio-marrone), anch'esso solcato da finestre individuate da riquadri chiari. Alcune, però, non saranno finestre, bensì porte, in quanto è logico che dalla facciata si acceda al palazzo. Un po' in lontananza appare un rilievo più marcato, nel decoro di separazione tra il piano terra e quello nobile. Esso individua l'ingresso principale: il soggetto continua, infatti, a supporre il medesimo periodo architettonico dell'edificio. Quest'ultimo pertanto avrà un ingresso principale che sarà situato più o meno al centro della lunghezza della facciata. Una striscia nera sporgente delimita il tetto del palazzo. Al di sopra di essa appare ancora una struttura chiara, più corta rispetto alla facciata. Anch'essa è solcata da finestre e ricoperta da un tetto, rispettivamente riconoscibili tramite strisce nere e una spessa striscia scura.

Sull'angolo che unisce la facciata frontale a quella che dà sulla piazza, il primo e il secondo piano appaiono impreziositi da zone di colore rosso. Questo colore, insieme al giallo e al panna, caratterizza la facciata laterale. Essa appare architettonicamente più complessa della precedente: una fascia rossa attraversa orizzontalmente tutto l'ultimo piano; bande gialle verticali separano macchie scure; scanalature rettangolari o ad arco solcano il piano terra.

La banda rossa del secondo piano è inframmezzata da riquadri chiari e strisce gialle. Probabilmente frammenti di muro sono lasciati a vista. Compaiono, inoltre, terne di macchie scure individuate da brevi tratti gialli orizzontali e verticali: sono delle trifore.

Nel piano nobile, vicino all'angolo, quattro bande gialle verticali racchiudono un balcone. Esso non è visto di per se stesso, ma come un decoro che sembra particolarmente illuminato rispetto al resto della facciata. Questo fatto può accadere solo se l'oggetto della visione ha una certa sporgenza dal muro: deve quindi trattarsi di un balcone.

Sopra il balcone, un arco chiaro è individuato da una linea nera esterna e da una macchia scura interna. La linea nera caratterizza il rilievo del decoro chiaro: il tutto fa sup-

porre che la macchia scura interna sia una finestra. Allontanandosi dall'angolo, invece, i decori gialli delimitano delle nuove macchie scure, che assomigliano a dei quadrilateri. Trattandosi del piano nobile, essi vengono ancora interpretati come finestre, anche perché all'interno compaiono di nuovo sottili righe gialle.
Scendendo al piano terra, il soggetto concepisce le scanalature rettangolari come piccoli decori del muro (assimilabili alle costruzioni in paramano degli edifici). Le scanalature ad arco racchiudono grandi macchie scure, intese come porte. Nella parte superiore del piano, vicino all'angolo, a sinistra e a destra della porta sono presenti altre piccole macchie scure. Il soggetto pensa a queste ultime come pannelli di decoro del muro o come piccole finestre. Tra le altre porte, invece, si intravedono delle parti in rilievo interpretate come decori (rosoni).
La facciata è sovrastata infine da una spessa striscia nera che rappresenta il tetto.

Come la matematica viene in aiuto al soggetto ipovedente nella visione del palazzo?

- Tridimensionalità: trovandosi in un centro abitato, l'ipovedente sa di avere intorno a sé oggetti tridimensionali, cioè dotati di lunghezza, altezza e profondità. Queste direzioni sono state prima percepite empiricamente, tramite i movimenti del proprio corpo nello spazio, successivamente interiorizzate attraverso lo studio teorico delle basi di uno spazio vettoriale (qual è, ad esempio, lo spazio tridimensionale che ci circonda).
- Simmetrie: fin da piccolo, il soggetto ha modo di sperimentare certe regolarità degli oggetti quotidiani (un esempio può essere rappresentato dalle forme degli oggetti manipolati per gioco: una palla, mattoncini per costruzioni, blocchi colorati,...; successivamente, sedie, tavoli, finestre,...). Solo uno studio rigoroso, però, permette di classificare correttamente le regolarità delle forme. Questo consente di formulare ipotesi plausibili sulla "ripetitività" degli oggetti nel mondo circostante (un esempio è rappresentato dalla successione delle finestre in un edificio). Riferendoci al caso di palazzo Campana, abbiamo vari esempi di regolarità: le bande gialle, le strisce nere, gli archi, le linee scure, ecc... non sono visti dal soggetto ipovedente a distanza regolare, ma è per lui semplice pensarli tali. Per quanto suggerito dall'esperienza, inoltre, ciascuna porta e ciascuna finestra presentano simmetrie proprie (rispetto ad assi verticali e orizzontali) ed è lecito aspettarsi che tali simmetrie si ripetano per le

successive porte e finestre. Un discorso analogo può essere fatto per altri elementi, anche decorativi, del palazzo.

I concetti matematici qui esposti sono solo alcuni di quelli utilizzati dal soggetto per dare senso a ciò che lo circonda. Essi forniscono il modello mentale secondo cui l'ipovedente organizza le afferenze ricevute. Notiamo, tuttavia, che agenti esterni (stanchezza fisica del soggetto, variazioni di luce, improvvisi elementi di disturbo, ecc...) possono interrompere il processo di visione.
Sono dunque linee ed ombre a definire perimetri ed aree, a delimitare le zone da osservare e, qualora il soggetto riesca a contestualizzare gli oggetti circostanti, esse forniscono i suggerimenti essenziali per la decodifica delle immagini.
Diventano quindi fondamentali i concetti di parallelismo, intersezione e punto di fuga. L'acquisizione che il primo di questi sia un caso particolare del secondo è stata utilissima per il soggetto patologico, perché egli ha potuto ridurre il numero di elementi sui quali basa il mondo esterno.
Come abbiamo detto, il palazzo è in stile neoclassico, quindi si possono individuare alcune figure geometriche come: il quadrato (pannelli), il rettangolo (decori rossi), la linea retta (bande di decoro orizzontali e verticali), e linee a curvatura costante (gli archi a tutto sesto delle porte e delle finestre).
Anche altri stili architettonici presentano regolarità geometriche, magari alternate diversamente, ma simili alle precedenti. Il soggetto è in grado di riconoscere:

- Romanico: la linea curva, che a partire dal "basso" torna al "basso", è ciò che l'ipovedente coglie come caratteristica del romanico. I volumi delle costruzioni realizzate in questo stile sono come "trattenuti", ben delineati dagli archi a tutto sesto.
- Gotico: nel gotico, invece, la linea slancia la costruzione verso il cielo, creando fughe di archi a sesto acuto. (Questo elemento caratterizzante è stato appreso dal soggetto analizzando l'espressione "... è il vuoto sul pieno... ")
- Barocco: in questo stile le linee trasformano le facciate dei palazzi in "onde" e le arricchiscono di decori tondeggianti (è stato detto al soggetto che il decoro principale

è la "forma a conchiglia"). Gli interni presentano addobbi preziosi e talvolta ridondanti.

- Neoclassico: come è stato detto in precedenza, a proposito di Palazzo Campana, le linee creano spazi geometrici regolari, in cui sono incastonate porte e finestre.

Si osservi come, soprattutto in quest'ultimo caso, le caratteristiche percepite non siano vere e proprie peculiarità. La linea viene usata nello stesso modo anche nello stile cinquecentesco. Per non cadere in errore il soggetto ha dunque bisogno di altre informazioni, che non provengono, però, da ciò che vede.
Sono stati considerati pochissimi stili architettonici, ma questi sono gli unici che, per ora, il soggetto è in grado di distinguere; ammesso che l'affaticamento visivo non riduca ulteriormente le afferenze oculari.

Proponiamo, ora, la descrizione di un ambiente che il soggetto patologico non conosce, per mettere in risalto le particolarità e le difficoltà della visione, quando essa non è supportata dall'esperienza.

ATL (Agenzia Turistica Locale) Sestriere

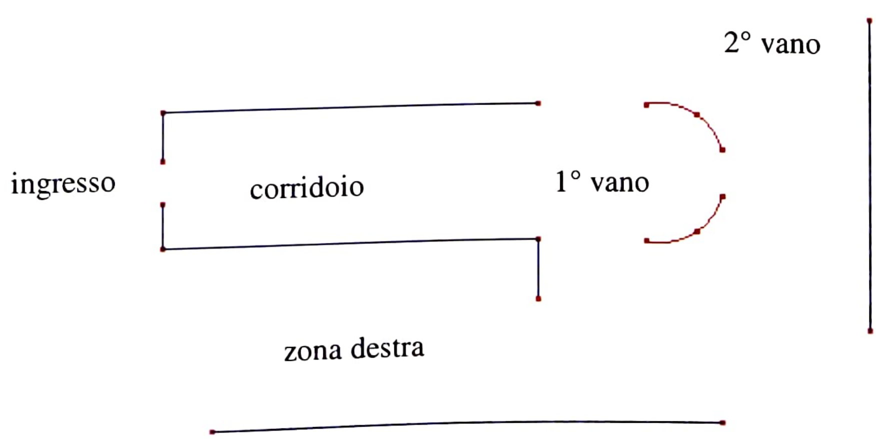
Appena entrata dall'ingresso principale è comparsa, alla sinistra dell'ipovedente, la seguente immagine: in due rettangoli immaginari (campo visivo) erano racchiusi rispettivamente un termosifone e una striscia di legno verticale con macchie colorate.
È stato facile intuire che si trattasse di un termosifone perché la sua struttura era quella tradizionale: strisce chiare e scure indicavano che gli elementi da cui era costituito erano posti a distanza regolare l'uno dall'altro fino a formare un parallelepipedo. Il legno verticale era un espositore di depliant, arredamento consueto in un ufficio di informazioni turistiche.
Alzando e abbassando lo sguardo lungo il primo rettangolo si sono poi notate altre particolarità dell'ambiente circostante: un faretto alogeno a soffitto e un estintore appoggiato al pavimento; quest'ultimo é stato riconosciuto grazie alla forma del bocchettone (le impugnature rosse sono intervallate dal colore dello sfondo) e dal classico colore rosso.
Spostando lo sguardo nella direzione frontale, il soggetto si è trovato in un corridoio che dava adito a due vani (in realtà si trattava di tre vani senza corridoio).

I particolari comparvero, come sempre, poco alla volta: solitamente sono le luci ad attirare per prime l'attenzione del soggetto, in questo caso esse erano posizionate sul soffitto e quindi il chiaro-scuro degli oggetti ivi appesi venne colto prima del resto della struttura; si trattava di sfere di decorazione. La parte iniziale del soffitto sembrava ribassata, ma in verità non era così (il soggetto continuò a vederla ribassata anche in seguito). Tutti gli oggetti erano inseriti in una struttura regolare: da un corridoio a parallelepipedo si accedeva ad un locale più ampio, del quale si vedeva solo la parete di fondo. Essa, secondo l'osservatore, era tondeggiante (in realtà piana) e interrotta da un'apertura nel muro, che era la porta di accesso al secondo vano (in realtà il terzo). Vicino al soggetto apparvero righe verticali, che egli interpretò come un'ulteriore porta di accesso; a supportare quest'ipotesi, infatti, comparvero anche righe orizzontali, che completarono la struttura degli infissi. Oltre ad essa, il muro di sinistra era ancora arredato con l'espositore di depliant, in cui, però, era inserita una porta verde, mentre a destra una luce intensa, ma omogeneamente distribuita, indicava la presenza di una apertura nel muro. Sul fondo del secondo vano, antecedenti la parete interpretata come curva, due piccole vetrine arricchivano l'arredamento e delimitavano l'apertura da cui si accedeva all'ultimo vano. Da questa si coglieva il muro di fondo, con cui terminava l'intero ambiente; su di esso erano appesi poster colorati.

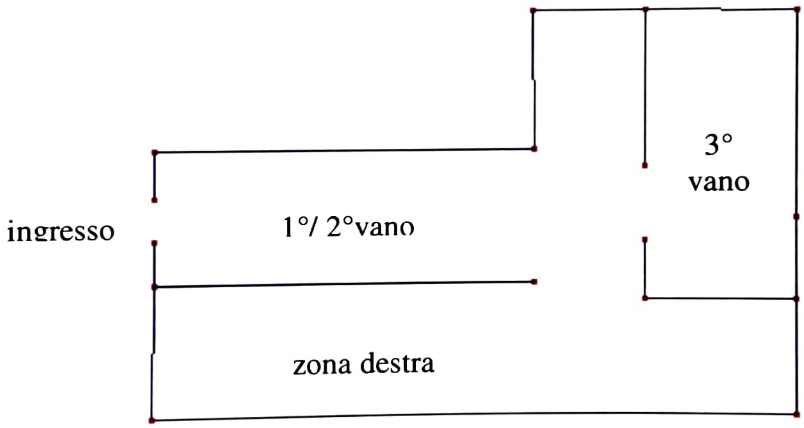
Dopo questa possibile e in parte veritiera ricostruzione, però, l'ipovedente si rese conto di un'incongruenza: un grosso oggetto, probabilmente una pianta, era posto al centro dell'apertura dell'ultimo vano. Evidentemente essa non era un passaggio, o quantomeno non la porta di accesso all'ultimo locale. L'accompagnatrice spiegò, allora, che l'apertura era chiusa da un vetro sul quale erano appesi i poster colorati e sul quale era presente anche una scritta (del tutto ignorata dal soggetto anche successivamente). Dietro al suddetto vetro, alcune persone partecipavano ad una conferenza.

In seguito l'ipovedente, durante la rotazione del capo verso destra, focalizzò nuovamente la porta più vicina e notò che vi era appeso un poster raffigurante degli alberi innevati davanti ai quali era ritratta una figura, probabilmente uno sciatore (la congettura fu confermata dall'accompagnatrice). Successivamente comparve il rivestimento in legno del pavimento, in precedenza non notato.

A destra spiccò innanzi tutto la luce esterna, che mise in risalto le righe scure degli infissi delle finestre e l'ombra delle tende di colore azzurro (il soggetto le conosce come "tende veneziane").
Superfici chiare erano sparse in tutto l'ambiente e furono interpretate come tavoli; uno in particolare era vicino alla finestra e aveva una forma a ferro di cavallo. L'ipovedente, tuttavia, non vide l'apertura attraverso cui le inservienti accedevano alle postazioni di lavoro.
Sotto il tavolo era presente un parallelepipedo scuro a cui il soggetto non seppe attribuire alcun significato; l'ipotesi di un amplificatore sonoro era, infatti, troppo azzardata (si trattava di una cassettiera). Al di là del tavolo, uno scaffale conteneva vari papiri e fogli colorati (forse depliant o pubblicazioni); il ripiano superiore sembrava realizzato in vetro per il colore chiaroscuro che presentava (non era così, poiché la variazione di colore era determinata dalla presenza di poster variopinti). Dietro allo scaffale ora descritto compariva un altro tavolo, preceduto da ciò che venne interpretato come una sedia, della quale il soggetto disse di vedere lo schienale (in realtà si trattava di una sporgenza del muro, rivestita in legno). Il fondo non presentava un muro; probabilmente l'architettura del locale terminava in altro modo. Ruotando ulteriormente lo sguardo verso destra, comparvero dei mobili rossi da ufficio. Il soggetto, però, non riuscendo a visualizzare esattamente le scanalature delle ante, non riuscì a capire se l'apertura del mobile fosse frontale o meno.
Nella mente dell'ipovedente la planimetria del locale era la seguente:

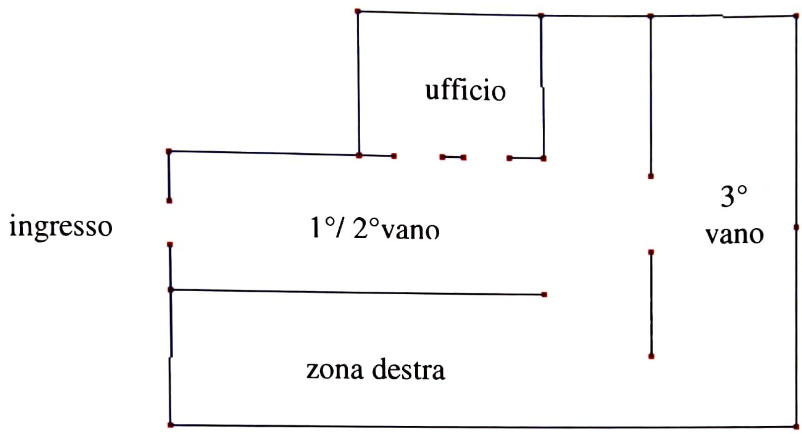


Tuttavia, grazie alle delucidazioni dell'accompagnatrice, sono stati rilevati alcuni errori. Senza, però, l'aiuto dei concetti matematici di retta, arco di curva, parallelismo, simmetria e poligono, l'ipovedente non avrebbe potuto rielaborare alcuna ipotesi in proposito. Essa è di fondamentale importanza, perché è evidente che rettificare un'ipotesi errata è più utile che percorrere vani senza averne quantomeno una percezione globale.
Attraverso i concetti matematici precedentemente espressi e integrati con le rettifiche dell'accompagnatrice, infatti, la planimetria dell'ufficio, nella mente del soggetto, è ora la seguente:



Essa nasce dal concetto che il mondo si divide in ambienti chiusi e aperti: gli edifici sono chiusi, cioè circondati da mura. La patologia visiva impedisce di cogliere i contorni perimetrali, quindi essi vanno ricostruiti completando le zone percepite.
Gli ambienti possono essere stilizzati attraverso linee curve e rette, ma queste ultime sono di più semplice impiego; quindi l'ipovedente comincia con il pensare i muri *ortogonali* tra loro. Ciò implica che gli angoli tra essi formati sono retti e da qui si deduce che raggiunto il quarto angolo retto, la stanza si chiude. Quest'ultima deve, pertanto, essere a pianta *rettangolare* o *quadrata*, cioè presentare anche pareti *parallele* tra loro.
A questo punto, il visitatore ipovedente o cieco può concentrare l'attenzione sui particolari di un ambiente che sa essere *simmetrico* rispetto agli assi e alle diagonali.

La planimetria corretta è la seguente:



Come si può notare l'ipotesi dell'ipovedente era abbastanza realistica, tranne per l'ambiente ufficio e per aver supposto la presenza del muro inferiore del 3° vano. Visitando nuovamente il locale, basandosi esclusivamente sul proprio elaborato, quindi, egli si troverebbe di fronte a un imprevisto, ma esso non costituirebbe un problema, perché sarebbe l'unico elemento dell'ambiente a richiedere una particolare attenzione da parte dell'osservatore.

Concetti matematici impliciti nel soggetto patologico

Come variano i concetti matematici impliciti nella visione, in funzione della patologia ora descritta?

Analizziamoli nel dettaglio.

Per quanto riguarda la definizione di immagine, essa è ancora valida, ma le figure presenti all'interno del campo visivo dell'osservatore risultano deformate compatibilmente all'anamnesi.

1. *Il cervello concepisce dimensioni* ≥ 3

Per quanto detto in precedenza, il colore è colto con facilità e precisione dall'ipovedente, quindi i tre parametri blu, rosso e verde sono ancora validi. Si ha qualche differenza, invece, per quelli del piano di fissazione, a causa della presenza del nistagmo, che impedisce di mantenere a fuoco l'oggetto osservato. Ciò significa che l'acquisizione dei parametri i e j è dapprima esclusivamente teorica, ma in seguito è di fondamentale utilizzo pratico.

Anche nel soggetto patologico, pertanto, la dimensione dello spazio ambiente continua ad essere maggiore o uguale a 3.

2. *Carte e atlanti*

La struttura di varietà continua ad essere molto adatta anche nella realtà patologica, nonostante i concetti di carta e funzioni mentali siano differentemente applicati.

La povertà delle afferenze visive implica che le carte corrispondenti saranno ridotte nella struttura, ma maggiori in numero. Le funzioni mentali, quindi, sono più rapide e particolarmente efficienti nel completamento e nel trasporto di informazioni. Come conseguenza di ciò la rielaborazione necessaria a produrre l'immagine richiede tempi più lunghi rispetto a quelli del soggetto sano ed in alcuni casi incompatibili con le circostanze. Per esempio, la guida di un'automobile richiede tempi di risposta troppo stretti per permettere al soggetto ipovedente di costruire un atlante adatto alla situazione.

3. *Sogni e topologia intrinseca*

Anche lo spazio dei colori del soggetto ipovedente in questione può essere considerato connesso per cammini. È possibile, tuttavia, che questi ultimi siano differenti rispetto a quelli del soggetto normodotato, a causa della limitatezza del campo visivo del soggetto patologico e quindi del numero esiguo di afferenze ricevute.

Da ciò segue che anche il modello matematico della visione dell'ipovedente si appoggia ai concetti di inclusione, intersezione, topologia, continuità, connessione per cammini, ma essi sono impiegati differentemente. Il loro utilizzo consapevole da parte dell'ipovedente, inoltre, è molto più difficile da raggiungere rispetto ad una persona vedente, che può prendere ad esempio proprio quelle immagini che il suo cervello ha matematicamente creato.

4. *Struttura di schema algebrico*

La struttura di schema algebrico rimane valida anche nel caso del soggetto patologico, ma è necessario controllare cosa accade nella definizione di punto. I punti standard sono ancora definiti, essendo essi concetti astratti tanto per i vedenti che per gli ipovedenti. Per i punti non standard, invece, dobbiamo osservare che le cellule relative alle forme semplici, come quadrati, rettangoli, triangoli e stelle, a causa della patologia non sono attive nel cervello del soggetto, che, quindi, non è detto li riconosca con la stessa immediatezza del soggetto normodotato.
La varietà dell'ipovedente, quindi, non ammette i punti non standard prima citati. Essi esistono, ma sono rappresentati da strutture più semplici come segmenti paralleli o perpendicolari. Sono "punti" costruiti sulla possibilità di orientare i segmenti (capacità insita nel cervello come descritto nel capitolo 1), e non sulla loro composizione.
La struttura di schema, pertanto, si mantiene valida, ma i suoi punti sono differenti.

5. *L'occhio cerca vettori tangenti?*

Per quanto detto in precedenza l'astrazione dei vettori tangenti vale anche per il soggetto ipovedente, ma essi descriveranno un cammino compatibile con la patologia. Le frontiere plausibili, quindi, si divideranno ancora in rettilinee, circolari, curvilinee, ma non sarà sempre detto che nello specifico esse coincidano con quelle percepite da un vedente. Ciò è infatti vincolato al campo visivo del soggetto, alla sua capacità di messa a fuoco, al suo stato fisico e ad eventuali agenti esterni.

6. *Il movimento come campo vettoriale.*

A tale proposito possiamo osservare un fatto interessante. Il soggetto patologico non è in grado di cogliere perifericamente (cioè con gli occhi) i fotogrammi che il cervello connette e rispetto ai quali stabilisce il movimento dell'oggetto osservato. Se, però, arriva al suo cervello un numero sufficiente di afferenze, in modo tale da cogliere il movimento, allora quest'ultimo viene colto nella sua continuità. Le funzioni mentali e le carte, infatti, se attivate, lavorano nell'ipovedente come nel soggetto sano restituendo lo stesso tipo di effetto.

7. *Matematica da studiare o da rendere razionale?*

Analizzando questo punto possiamo scoprire delle differenze più profonde rispetto a quelle dei punti precedenti.

Dobbiamo ricordare, infatti, che il soggetto in questione ha una visione monoculare; quindi la tridimensionalità non è percepita. Questo fatto deriva proprio dall'impossibilità di gestire correttamente gli angoli e la loro misura.

Esistono tuttavia alcune situazioni in cui tale misura viene colta, ma essa è sempre subordinata alla conoscenza dell'oggetto osservato e dell'ambiente circostante.

Se, per esempio, l'ipovedente deve riporre una penna su di un tavolo, egli, spontaneamente, appoggia prima la mano sul tavolo (sincerandosi così della sua presenza), poi completa il movimento riponendovi la penna.

Confrontiamo ora i "concetti matematici impliciti nella visione" relativi ai soggetti sani e patologici. Vorremmo, infatti, mettere in luce le difficoltà di comunicazione esistenti tra loro, dandone qualche accenno di soluzione.

Difficoltà di comunicazione

Il cervello concepisce dimensioni ≥3

In base a ciò che è stato detto precedentemente, il colore diventa il primo strumento di comunicazione. In seguito, man mano che l'ipovedente prende coscienza del mondo esterno e impara ad esplorarlo, i parametri $\underline{i}$ e $\underline{j}$ possono entrare nella conversazione. Quello che si sostiene, in altre parole, è che dapprima si consiglia al soggetto normodotato di utilizzare espressioni del tipo: "... la massa grigia che hai di fronte ...", mentre in seguito si può guidare la visione del soggetto patologico con espressioni come: "... sposta lo sguardo verticalmente verso l'alto ...".

Carte e atlanti

Come si è evidenziato dall'analisi di entrambi i modelli, gli atlanti corrispondenti rispettivamente ai soggetti normodotati e patologici, non sono equivalenti. Essi, tuttavia, hanno intersezione non vuota, perché, altrimenti, non sarebbero possibili quotidianità comuni, che invece sappiamo esistere.

Tale intersezione è funzione del tempo, perché, se per il soggetto normodotato è sufficiente la visione al fine di creare una carta, nel caso dell'ipovedente questa stessa carta richiede di essere arricchita (se non pienamente completata) dall'esperienza.
Il soggetto patologico, infatti, deve essere in grado di riorganizzare il mondo esterno secondo le deduzioni precedentemente esposte (vedi descrizione Palazzo Campana e ATL Sestriere). Più si sviluppano queste capacità più si amplia l'intersezione.
In principio, quindi, la comunicazione richiede, ancora una volta, uno sforzo da parte del soggetto sano, verso il soggetto patologico. La comunicazione, infatti, dovrà vertere sulle caratteristiche essenziali della scena in questione (un esempio può essere: "... due finestre rettangolari sono intervallate da una fascia di muro..."; notiamo che anche una descrizione di questo genere, richiede alcuni concetti non banali). Un passo più utile è, qualora il soggetto patologico debba interagire con l'ambiente, descrivere quest'ultimo in funzione dell'obiettivo. In questa situazione, è compito dell'ipovedente guidare la spiegazione ricevuta, in funzione delle sue necessità e solo in seguito delle sue curiosità.

Sogni e topologia intrinseca

Abbiamo detto che anche l'immagine dell'ipovedente è connessa per cammini, ma non è detto che il soggetto ne sia cosciente. È dunque necessario che egli impari sia a "muoversi" per cammini (in ogni senso questa parola si intenda), sia a comprendere quale cammino gli sia più utile.

Struttura di schema algebrico

Il fatto che i punti della struttura di schema di un ipovedente differiscano dalla concezione dei soggetti normodotati, implica la necessità di impiegare un linguaggio semplice, basato essenzialmente su segmenti rettilinei, curvilinei, parallelismo e intersezione.
In seguito, con il progressivo apprendimento di realtà geometriche sempre più elaborate, esso potrà utilizzare concetti più precisi.

L'occhio cerca vettori tangenti?

La patologia impedisce al soggetto di cogliere complessivamente la situazione circostante. È dunque probabile che egli percepisca come "tutto" ciò che, in realtà, è solo una parte e che articoli su di essa la discussione.

Il movimento come campo vettoriale

Questo argomento è forse quello che crea la maggiore difficoltà di comunicazione. Esso non è, infatti, controllato dal soggetto patologico, che può avvertirlo per i suoi effetti, ma non certo né controllarlo né prevederlo.

Lo studio del movimento, pertanto, avverrà solo a livello teorico, anzi è necessario che esso venga appreso in maniera approfondita, poiché è parte integrante della realtà che ci circonda.

Esso rappresenta una necessità quotidiana e richiede l'impiego di concetti matematici di un certo rilievo.

Il movimento è esso stesso un concetto che è di difficile acquisizione per un ipovedente, perché egli può produrre il moto, ma non padroneggiarne lo sviluppo.

Eppure sarebbe utile sapere a priori che un oggetto solido può essere sottoposto a moti rigidi, ma che comunque ha un punto di rottura; oppure padroneggiare il fatto che un corpo rigido, durante il moto, occupa sempre lo stesso spazio.

Se invece, un oggetto è deformabile, è necessario sapere che, alla conclusione del moto, si deve cercare attorno a sé una forma diversa da quella di partenza.

Matematica da studiare o da rendere razionale?

Per quanto riguarda l'ipovedente matematica è principalmente da studiare, ma, una volta acquisita, essa è sicuramente più utile a lui, che non a*l soggetto normodotato.*

Essa, infatti, propone una forma mentis sulla quale è possibile costruire in via teorica buona parte, se non tutta, la realtà circostante.

Per chi, dunque, non può utilizzare direttamente l'organo più adatto al raggiungimento di tale obiettivo, è naturale che ogni aiuto, per quanto lento e difficoltoso, rappresenti un'opportunità non trascurabile.

Non sosteniamo che lo studio della matematica supplisca la carenza visiva, ma osserviamo che essa fornirebbe la struttura sulla quale l'ipovedente potrebbe organizzare le proprie afferenze e la propria esperienza, evitando così un eccessivo spreco di concentrazione, memoria e dati da acquisire.

Cenni didattici

Diamo ora alcuni suggerimenti su come poter introdurre gli argomenti matematici citati in precedenza a soggetti ciechi o ipovedenti.

Difficoltà preliminari: bisogna tenere a mente che l'utilizzo della vista permette, al soggetto normodotato, un "immediato" rapporto di collaborazione con il mondo esterno. Egli, infatti, impara a coesistere e a relazionarsi con gli oggetti circostanti durante la crescita e, in età scolare, è cosciente che al di fuori di sé esiste lo spazio in cui si muove e che gli oggetti intorno a lui hanno una "vita propria".

Tutto ciò non è affatto scontato per la persona cieca o ipovedente (dalla nascita), la quale, prima ancora del "fuori", deve cogliere il "se stesso". Il "mondo" è "lui" e ciò che, nel suo immediato presente, con lui comunica. Anche lo spazio circostante non esiste in senso assoluto, ma è "grande" quanto la fisicità del soggetto patologico gli consente di percepire. Questo implica che l'istinto all'esplorazione e alla ricerca non sono sviluppati, perché il cercare "ciò che non si sa esistere" costituirebbe un pericolo eccessivo. È per questo motivo che se il "mondo mentale" del soggetto normodotato si costruisce spontaneamente attraverso le sue esperienze empiriche, quello del bambino handicappato necessita di essere preparato prima dell'esperimento diretto. Esso, infatti, di per se stesso, non può avere significato per il cieco o l'ipovedente, a meno che essi non ne colgano razionalmente il senso.

Isometrie: per le difficoltà precedentemente esposte, è utile che il soggetto patologico si avvii allo studio dell'argomento attraverso l'analisi del proprio corpo. Le mani e i piedi, infatti, costituiscono esempi di "oggetti" equivalenti e sono di facile consultazione. Inoltre il soggetto comincia a prendere familiarità con se stesso, avviando una percezione pilotata di sé. Come abbiamo detto, infatti, essa, se lasciata alla spontaneità del bambino, sarebbe o assente, o parziale.

A livello quotidiano sappiamo che due oggetti congruenti occupano lo stesso spazio. Notizia utile per molte attività quotidiane.

Tra le isometrie hanno particolare importanza le simmetrie: l'anatomia umana propone molti esempi di simmetrie assiali: le spalle, le braccia, le mani, le gambe, i piedi sono simmetrici rispetto al piano naso-nuca. Una volta percepito ciò, il bambino può scoprirsi

"piano di simmetria" per lo spazio esterno. Percorrendo uno stretto corridoio, per esempio, egli può sentirne le pareti e quindi relazionarsi con il "fuori", in un modo a lui più congeniale: antecedendo il pensiero (il concetto astratto di simmetria), all'azione. Solo in seguito egli proverà a esplorare oggetti circostanti, studiandone simmetrie assiali, centrali e altre eventuali regolarità. Esse, ovviamente, saranno riconosciute dal bambino cieco o ipovedente secondo la capacità di esplorazione a cui egli sarà stato allenato.
A livello quotidiano un oggetto intrinsecamente simmetrico permette un'esplorazione più semplice. Studiatane, infatti, una parte, si padroneggeranno automaticamente anche le altre.

Similitudini: è sempre utile cominciare con esempi legati al corpo umano, come quello fornito dalla relazione tra la mano del bambino cieco o ipovedente e quella di un adulto. E' necessario puntualizzare che questo argomento ha l'ulteriore difficoltà di mettere il bambino di fronte a oggetti che non può padroneggiare, perché sproporzionati rispetto alla sua fisicità o rispetto al suo campo visivo. È possibile, quindi, che egli non colga che un tavolo è rettangolare, ma è possibile che l'immagine mentale di un rettangolo più grande delle sue braccia, lo aiuti a esplorare l'oggetto reale.
A livello quotidiano la padronanza del concetto di similitudine permette di prevedere quali regolarità può avere un oggetto, indipendentemente dalle sue dimensioni (un foglio rettangolare, un tavolo rettangolare e un pavimento rettangolare propongono le stesse difficoltà esplorative).

Moti: ancora una volta si comincia analizzando se stessi: la camminata è un esempio di traslazione; il passo di glissosimmetria; il girare su se stessi dà il senso della rotazione attorno a un asse, ecc... In seguito il bambino può diventare la causa del moto: far girare una palla, muovere un oggetto lungo una direzione prefissata, ecc... Successivamente egli può diventare l'oggetto del moto attraverso i mezzi di trasporto comuni o sport di movimento (bicicletta, sci, pattinaggio). L'obiettivo successivo, cioè aspettarsi che il bambino controlli il movimento di un oggetto, senza il contatto fisico o quantomeno sonoro, è impossibile. Egli, però, può studiarlo teoricamente, imparando a prevenirne le conseguenze. Egli può ricordare che un oggetto rigido non si deforma, ma può rompersi; che il suo moto sarà parabolico, ecc... Se invece un oggetto è deformabile, il bambino dovrà prendere coscienza di come esso può trasformarsi e che il suo moto non è prevedibile.

Inclusione: questo concetto può essere introdotto non a livello matematico, ma attraverso il suo significato etimologico e lessicale. Le mani, per esempio, possono *includere* un piccolo giocatolo, un guanto *include* la mano, una calza *include* un piede, una scarpa sia il piede sia la calza e così via. L'inclusione come concetto matematico astratto, verrà proposto al bambino solo in seguito, compatibilmente alla sua capacità cognitiva.
A livello quotidiano l'utilità di tale concetto è, tra l'altro, legata alla misura degli oggetti in questione: se un oggetto ne contiene un altro, è implicito che il primo sia più "grande" del secondo.

Intersezione: le braccia conserte o le caviglie accavallate possono rappresentare un primo esempio di intersezione. In seguito il ragazzo ipovedente o cieco potrà intersecare oggetti. Dobbiamo notare che questo passaggio non è affatto banale, perché richiede si saper esplorare oggetti e di saper interagire con loro, anche quando essi sono in numero maggiore o uguale a due. Se la carenza visiva non impedisce al soggetto patologico di cogliere i colori, ovviamente l'acquisizione del concetto di intersezione diventa più semplice, perché potranno essere impiegati oggetti di colori molto diversi tra loro.
A livello quotidiano questo concetto implica che due o più oggetti in questione hanno almeno un punto di contatto, quindi l'agire su uno si rifletterà automaticamente sullo stato dell'altro.

Continuità: questo concetto non può essere trasmesso in forma astratta, quindi, il ragazzo cieco o ipovedente comincerà a familiarizzare con superfici e linee continue. Continui sono gli oggetti che ci circondano, una superficie approssimabile come continua è la nostra stessa pelle, benché essa sia formata di miliardi di cellule.
A livello quotidiano la continuità garantisce che l'esplorazione di un oggetto, per esempio, è facilitata. È inoltre più intuitivo considerare unico ciò che è contino, perché il perimetro ne indica univocamente la "fine".

Curve rettilinee, circolari, curvilinee; superfici concave, convesse, piane e curve: tutti questi argomenti possono essere affrontati didatticamente in maniera simile. Il profilo di una persona (fronte-mento) è un esempio di linea curvilinea, della quale il viso è un possibile sviluppo. Sottolineiamo che per un ragazzo cieco quest'ultimo passaggio è di difficile comprensione, perché richiede non solo la capacità di esplorare, ma anche di saper collegare i vari momenti dell'esplorazione. La mano può rappresentare una superficie sia piana, sia concava, sia convessa. Gli oggetti quotidiani, impiegati dopo gli esempi corporei, esplicano chiaramente i concetti citati e possono essere impiegati sia come esempi di superfici, sia come linee, analizzandone solo gli spigoli.
Se il soggetto a cui ci si rivolge è ipovedente, può accadere che, familiarizzando non solo con i concetti in questione, ma soprattutto con gli oggetti presi ad esempio, egli riesca ad attivare un riconoscimento puramente visivo, magari a percepire delle sfumature di colore o qualche ombreggiatura più marcata. Questo fatto, però, è strettamente legato non solo alla gravità della patologia, ma soprattutto a quanto essa è effettivamente invalidante (ricordiamo che, come spiegato in precedenza, a parità di situazioni gravi si possono avere differenti ripercussioni sulla vista).
A livello quotidiano riuscire a classificare gli oggetti secondo queste caratteristiche geometriche aiuta non solo la comunicazione verbale, ma suggerisce anche gli effetti che potrebbero verificarsi in un'eventuale interazione con tali oggetti. Una superficie concava serve a "contenere", una superficie piana può sostenere qualcosa, una linea curvilinea è più difficile da esplorare rispetto ad una rettilinea o circolare.

I concetti matematici affrontati nei paragrafi precedenti sono evidentemente più numerosi e più difficili di quelli fin ora approfonditi. Ciascuno di essi richiede una didattica rielaborata secondo i canoni precedentemente utilizzati, ma la difficoltà degli argomenti non esposti, necessita anche che essa sia personalizzata. Continuiamo, infatti, a sostenere che la forma mentis strutturata dall'acquisizione di matematica (non solo della geometria) può rivelarsi un utile "collante" di afferenze visive più o meno esigue. Lo studio di tale materia, però, non può prescindere dalle attitudini del soggetto, né dal periodo di sviluppo in cui egli si trova.
Per maggior chiarezza proponiamo qui di seguito diverse ***unità didattiche***, in cui gli argomenti, finora accennati, vengono esposti in maniera più dettagliata.

Visualizzazione spaziale per ragazzi ciechi tra gli zero e i diciotto anni

- Lavoro svolto come prova d'esame relativo al Corso di Matematiche Complementari -

Prof. Titolare Ferdinando Arzarello, Prof.ssa Responsabile Ornella Robutti

0/5 ANNI

AMBIENTE

In principio esso sarà la casa, in seguito la scuola dell'infanzia.

EVOLUZIONE PRE-SCOLASTICA PROPOSTA

1) C' E' UN OSTACOLO

Il bambino appena nato verrà subito sottoposto a stimoli esterni, ovviamente compatibili con la sua realtà di neonato: voci, musica, rumori quotidiani di casa, ecc... Egli, inoltre, sarà sempre posto vicino ad oggetti dei quali possa facilmente rendersi conto; mentre le persone che lo circondano, verbalizzeranno ciò che il bambino non può ancora rielaborare (es.: "alza le braccia per indossare la maglietta").

2) SAPER ESPLORARE

Verranno dati al bambino oggetti che emettono suoni in relazione a semplici gesti, cosicché egli cominci a familiarizzare con il concetto di azione-reazione.

Si osservi che per il non vedente tale idea è fondamentale, perché gli permette di prevedere situazioni reali, non padroneggiabili in altro modo.

In seguito, iniziando la progressione del movimento,il soggetto esplorerà il mondo circostante, imparando a utilizzare l'intero corpo; tale processo, inoltre, gli permetterà di raggiungere la completa padronanza delle proprie membra.

3) INTERAZIONE CON LA REALTA' ESTERNA

3/1) SOPRA-SOTTO, DENTRO-FUORI

I concetti proposti dal sotto-titolo non saranno padroneggiati dal bambino con facilità, anzi, egli ne coglierà il pieno significato solo più avanti. E' tuttavia necessario introdurli sin d'ora, logicamente attraverso esempi concreti, cioè "sfruttando occasioni", che riguardino il bambino stesso. In questa fase, infatti, è fondamentale che egli sia il soggetto dei suddetti esempi: "Sediamoci sopra il letto.", "Ora sei sotto il lenzuolo.", "La tua mano è dentro la mia.", "La tua testa è dentro il cappello."

3/2) DA DOVE

Il bambino verrà abituato a riconoscere il luogo di provenienza di richiami esterni (suoni, odori, ...). Il riscontro di ciò avverrà osservando le reazioni del soggetto: rotazioni del capo, movimento delle braccia, o altri atteggiamenti consoni alla domanda.

4) AZIONE-POSTURA-SENSAZIONE

Non si eviterà più di porre il bambino lontano da oggetti di riferimento, ricordando, tuttavia, di anticipare verbalmente ciò che si ha intenzione di aiutarlo a compiere. Questo, però, dovrà essere sempre spiegato in relazione ai riferimenti usuali del bambino (es.: "lasciamo il muro alle nostre spalle, camminando verso il centro della stanza").

5) RELAZIONARSI ALLA REALTA'

Si preparerà il bambino affinché ad ogni stimolo esterno (suono, odore, gusto,....) egli proponga un'azione o una parola di risposta (es.: " muovi la mano destra.", "a cosa ti fa pensare questo suono?").

6) CERTEZZA NELLO SPAZIO

Si insegnerà al bambino a percorrere la propria casa secondo tracciati precisi, lungo i quali egli raggiunga la completa autonomia.

Né ora né in futuro sarà impedito al bambino il movimento involontario del busto,anzi esso verrà potenziato, in favore di una costante relazione tra il soggetto e lo spazio.

Si noti che tutti i punti precedenti non sono sufficienti affinché il soggetto abbia un'idea coerente dello spazio circostante; ora egli ne possiede soltanto una conoscenza poco più che nominale e alcune modalità di approccio.

Tutte le attività precedenti vengono riproposte in presenza di altri bambini sia ciechi, sia vedenti; in tal modo si avvia il bambino cieco a scoprirsi "essere sociale".

Volutamente non si è utilizzata la parola: "socializzazione", in quanto la presenza di estranei crea un fortissimo disagio nell'individuo cieco. Egli infatti, non rielabora subito di essere circondato da suoi simili e, disorientato dalle altrui esigenze, rischia di perdere anche i propri riferimenti abituali.

7) UN ALTRO IO

I bambini vengono suddivisi in coppie, per riconoscere col tatto le somiglianze e le differenze tra se stessi e il compagno.
Dopo un certo tempo si chiede loro di verbalizzare le conclusioni (es.: "anche lei ha due mani, il viso, ma non si chiama come me).

8) LA COLLETTIVITA'

Il punto 7 viene ripetuto scambiando le coppie, cosicché l'Io soggetto crea nella sua mente una prima idea di collettività. Successivamente, in questa nuova realtà,la ripetizione di tutte le evoluzioni precedenti, ha il fine di far sviluppare un nuovo adattamento, dipendente dall'interazione di spazi e di tempi propri e altrui.

6/7 ANNI

AMBIENTE

Le attività proposte in seguito sono progettate per la scuola di base.

OBIETTIVI

Attraverso l'analisi geometrica del solido parallelepipedo, si desidera avviare il bambino cieco ad una scoperta razionale, conscia e ordinata dello spazio circostante.Per semplicità, esso è rappresentato, in questi anni, da un luogo chiuso, a lui familiare; per esempio la sua camera-soggiorno.

ATTIVITA' PROPOSTE

I bambini, singolarmente, imparano ad esplorare oggetti lineari (es.: un'asta, una collana non allacciata, una matita); poi vengono divisi in gruppi e viene loro dato un parallelepipedo, sempre da esplorare. Esso è costruito in cartone, non è smontabile e ciascuna delle sue facce è grande quanto consono alla mano di un bambino dell'età di cui trattiamo (in media).

Dopo un certo tempo, da stabilire in relazione alle attitudini della classe, si chiede agli studenti di elencare alcune caratteristiche del parallelepipedo (es.: "è spigoloso", "è liscio", "non ci sono buchi").

Ora interviene l'insegnante:

"Le parti puntute si chiamano vertici; i bordi di congiunzione spigoli; le pareti, su cui potete appoggiare le mani, facce."

Il bambino deve avere il tempo di interiorizzare e rielaborare queste informazioni come entità singole; dunque, prima, esse saranno conosciute separatamente le une dalle altre:

"Riconosci uno spigolo.", " Indica un vertice.", "Può, questa, essere una faccia?"

Poi globalmente, cioè nella posizione relativa che esse occupano nel solido parallelepipedo:

"Segui i vertici.", " Segui gli spigoli. ", "Segui le facce.", "Contane i rispettivi numeri."

Quando i bambini padroneggiano bene il parallelepipedo dell'ampiezza proposta, se ne forniscono loro di misure sempre più grosse, finchè il solido non raggiunge l'altezza dei bambini medesimi (in media).

Essi ne esplorano la superficie esterna, dopo avervi riconosciuto le caratteristiche già rielaborate, gli studenti scoprono una porta che, opportunamente preparata su un lato, è sin qui rimasta chiusa. L' apertura di tale porta comporta una nuova realtà.

Inevitabilmente ogni bambino si troverà con una mano sulla superficie esterna e l'altra su quella interna: è necessario dare al singolo soggetto un ampio tempo di rielaborazione. Egli, infatti, deve cogliere che sta toccando due bordure di una stessa cosa; la quale non è da lui padroneggiabile completamente.

Gli studenti, guidati dagli insegnanti, sentono l'analogia tra la porta di cartone e l'entrata della classe; di conseguenza quella di casa.

L'insegnante chiede:

" Che difficoltà incontrate nelle diverse esplorazioni?"

Il confronto vuol introdurre l'idea per cui il non sentire un oggetto, non ne verifica automaticamente l' inesistenza (parte superiore delle porte, soffitto delle stanze,....).

In seguito i bambini entrano nel parallelepipedo e, dopo poco tempo, si chiede loro di camminare lungo il perimetro del solido:

" Camminate così in altri luoghi ?"

Si avvia in tal modo l'analisi di un'analogia di movimenti tra ciò che si sta svolgendo in classe e le consuetudini di casa; in particolare azioni abituali nel proprio " mondo stanza".

"Potete fare lo stesso numero di passi lungo un lato del parallelepipedo e lungo il muro della classe?"

Si introduce quindi, un primo approccio alla misura; la sua prima unità usata sarà quella più consona ai bambini: i loro passi; mentre il problema di universalizzarla varrà affrontato più avanti.

Con i "passi" vengono date anche le misure di altezza e larghezza del parallelepipedo, poi si procede con quelle della classe:

" Come fare per misurare l'altezza?"

Si trasmette all'allievo l'esistenza del soffitto, per esempio attraverso l'ausilio di una scala, oppure colpendolo con aste sufficientemente lunghe.

E' ovvio che tali procedimenti non sono di facile applicabilità, perché entrambi richiedono accortezze non riscontrabili in soggetti dell'età in questione.La presenza del soffitto, pertanto,ovvero il concetto che la stanza sia uno spazio chiuso, sarà presente nei bambini, ad un livello esclusivamente informativo e non ancora come effetto di rielaborazione. Il buon esito dell'esercizio, tuttavia, dipende, ovviamente, dalle caratteristiche della classe.

ATTIVITA' PARALLELE

Parallelamente a questa attività principale, è molto importante che i bambini imparino a conoscere e a descrivere altri oggetti e altri solidi. E' utile porre in evidenza come le figure geometriche aiutino a descrivere la realtà, attività fondamentale per l'introduzione della geometria piana; argomento non facile in questa fascia d'età. Il bambino cieco, infatti, per ora, esplora gli oggetti separatamente e sarebbe, pertanto impossibile, per esempio, appoggiare una figura su un tavolo, per trasmetterla come figura piana; i rispettivi elementi verrebbero comunque colti nella loro tridimensionalità.

Si può allora procedere nel seguente modo: attraverso l'esplorazione delle facce dei solidi, si introducono poligoni e figure piane (quadrato, rettangolo, triangolo, ecc….), poi esse vengono fatte riconoscere anche come superfici di oggetti quotidiani (tavolo, sedie, quadri, ecc….), infine vengono incise su un foglio e ricoperte con un materiale diverso dalla carta.

8/13 ANNI

AMBIENTE

La scuola di base.

OBIETTIVO

Si prosegue utilizzando la geometria come strumento di conoscenza della realtà, anche se ora essa assume aspetti sempre più netti e rigorosi.
Gli studenti affronteranno lo studio dello spazio tridimensionale, così da riconoscerne le caratteristiche basilari e avvalersene per un'esplorazione più razionale del mondo circostante: "mondo-stanza" in particolare.

ATTIVITA' PROPOSTA

I bambini, ancora suddivisi in gruppi, analizzano il parallelepipedo per cercare le direzioni lungo le quali esso si sviluppa.
Con un eventuale aiuto dell'insegnante tale ricerca arriva a buon fine: lunghezza, larghezza e altezza.
Si danno, allora, agli studenti tre aste orientate secondo la terna tradizionale (X, Y, Z); poi gli allievi vengono aiutati a ricercare una terna analoga nella classe.
Si scopre così che l'aula è costruita attraverso le stesse direzioni della suddetta terna le quali, pertanto, sono da considerarsi capi-saldi iniziali nell'esplorazione di nuovi ambienti.
Dopo aver ben compreso i concetti precedenti, si effettuerà la presa di coscienza dell'angolo e dunque le mutue posizioni delle direzioni.
Ora i bambini sono pronti per imparare a muoversi razionalmente nello spazio, ma per fare ciò è necessario preparare appositamente il pavimento della classe.

Esso deve presentare della piastrelle sonore, che differenzino i passi secondo la direzione scelta, per esempio suoni gravi nel verso della lunghezza, suoni acuti per la larghezza.
Gli scolari giocano: a turno ricevono dagli altri un ordine di movimento rispetto ad una direzione, per esempio: "Fai due passi lungo la larghezza"; nel contempo una cordicella si srotola, segnando il percorso. In tal modo, al termine dell'esercizio, il concorrente può memorizzare il tracciato e riportarlo sul modellino costruito in precedenza.
In seguito l'esercizio viene svolto al contrario: un bambino inventa un percorso che gli altri devono indovinare; al termine tutti devono riuscire a riportare il tracciato sul modellino.
Le regole si complicano: ora il giocatore non solo si sposta (con o senza ordini), ma porta con sé un oggetto. Un secondo bambino deve ritrovare l'oggetto e spostarlo. Al termine gli spettatori dovranno descrivere l' intero percorso dell'oggetto.
Man mano si procede rendendo l'esercizio sempre più articolato in maniera da sviluppare il prospetto seguente:

1) Un secondo bambino deve ritrovare l'oggetto seguendo lo stesso percorso.
2) Spostare l'oggetto dopo la sosta.
3) Il bambino deve spostare l'oggetto non fino al termine della stanza, ma a un punto di essa stabilito a priori.
4) Il bambino deve ritrovare l'oggetto e riportarlo indietro.

Ognuno dei punti precedenti richiede un tempo di sviluppo non breve, essi, infatti, mirano a trasmettere concezioni ardue per il bambino cieco:

1) immutabilità dello spazio, ma possibile frammentazione, non univoca, della sua percorribilità;
2) lo spazio percorso è parte dello spazio percorribile;
3) avvio della percezione dell'esistenza di uno spazio non vissuto direttamente: spostamento bambino-suono, pausa, ripresa-visualizzazione del percorso globale.

Si osservi che, per quanto svolto sin ora, il bambino cieco, pur cominciando a possedere un'idea dello spazio, non lo concepisce assolutamente come infinito, né si rende conto di esplorare e utilizzare la parte di "un tutto".

Ora si introduce tutto il semispazio superiore: a turno i bambini mettono le gambe e le braccia in una forma di cartone porta-vino (un arto per ogni forma di bottiglia) affinché essi colgano l'esistenza dei quattro quadranti contemporaneamente.

In seguito, in analogia a quanto svolto in precedenza, il semispazio viene riprodotto sia in modellino (con le asticelle), sia nella classe (con i quattro quadranti di mattonelle sonore, per esempio: fra-mar-ti-no, sempre riportato in due tonalità per ogni quadrante).

Gli studenti esplorano l'aula così trasformata, imparando, in tal modo, a rendersi conto che possono camminare a destra a sinistra o deambulare a cavalcioni della lunghezza e della larghezza, ma non dell'altezza.

Quando gli allievi padroneggiano bene il nuovo ambiente, si procede alla ripetizione dell'esercizio precedente, ora interessando tutti e quattro i quadranti.

ATTIVITA' PARALLELE

Parallelamente all'attività descritta si possono introdurre sia il concetto di area, sia la teoria delle trasformazioni, ovviamente senza la rigorosità che questa richiederebbe.

Per il primo argomento è utile partire proprio dall'area di una mattonella per arrivare all'area della classe e ad un concetto di misura standard.

Per trasmettere questo, si procedere come segue: si fornisce la formula dell'area del rettangolo (supponiamo le piastrelle rettangolari), poi si aiutano i ragazzi a scoprire che essa si ottiene sommando, per quanto è alta la piastrella, tante strisce orizzontali di altezza "nulla", lunghe quanto la base.

Ovviamente le strisce di altezza "nulla" saranno, in realtà, molto sottili, sia perché non è possibile ottenerne di diverse, sia perché sarebbe prematuro, in questo percorso, affrontare il concetto di limite.

Altro argomento fondamentale è costituito sia dall'utilizzo dei centimetri, come prima unità di misura standard, sia dal passaggio a centimetri quadrati.

Dopo aver dedicato un tempo sufficiente alla comprensione di tutto quanto precede, si affronterà il calcolo della superficie della classe: sia attraverso il conteggio delle piastrelle per le loro aree, sia direttamente, ancora come area di un unico rettangolo (supponendo il pavimento dell'aula rettangolare).

Entrambi i metodi richiederanno un discreto tempo di applicazione, sia per le difficoltà intrinseche nello sviluppo dei concetti, sia per avviare l'utilizzo dei metri quadri.

Quando l'allievo avrà ben assimilato questi insegnamenti, si procederà al calcolo di altre aree e all'utilizzo di altre unità di misura.

Per il secondo argomento – le trasformazioni - è invece necessario che lo studente cieco sia, ancora una volta, il soggetto degli esercizi proposti. Egli utilizzerà il proprio corpo per assimilare i concetti di:

* simmetria: le braccia rispetto al busto

Ovviamente è prematuro introdurre il concetto di simmetria diretta e inversa, a meno che gli studenti non mostrino una particolare attitudine.

* traslazione: i propri piedi mentre si cammina.
* omotetia: la mano del ragazzo e quella di un adulto.
* rotazione: questo argomento richiede particolare cura e notevoli accorgimenti, perché la cecità ne rende l'apprendimento notevolmente ostico.

In principio il ragazzo imparerà a ruotare su se stesso, poi farà ruotare un oggetto, assecondandone con l'intero corpo il movimento, in seguito provocherà la rotazione del solo oggetto (spingere una palla con le mani, facendola rotolare) ed in fine, fermo, scruterà con le sole mani un oggetto posto in rotazione.

E' fondamentale che nell'ultima sequenza proposta nulla e nessuno intervenga direttamente, ma la persona coordinatrice verbalizzi e motivi ogni passaggio.

Si osservi che tutto quanto scritto in questo paragrafo è solo un accenno di possibile attività sui suddetti argomenti; perché si è preferito dare maggior spazio all'attività precedente.

ATTIVITA' TRASVERSALI

(1) RECITAZIONE

Per raggiungere una soddisfacente padronanza di un ambiente definito, è utile che il ragazzo cieco usufruisca della recitazione. Saranno, pertanto, preparate brevi piece che ripropongano situazioni quotidiane, sia nei movimenti, sia nell'ambiente (rumori, oggetti,..).

Questa riproduzione delle realtà permetterà al ragazzo cieco di cogliere completamente la situazione circostante, fatto che in genere non si verifica mai. Egli, infatti, come sempre accade in teatro, avrà studiato anche la gestualità altrui e sarà responsabile in prima persona di eventuali errori.

Quest'ultimo fatto ha un rilievo notevole, perché un errore verbale crea un concatenamento di equivoci concettuali, un errore gestuale crea un disorientamento collettivo, in entrambi i casi l'effetto negativo è immediato. Lo studente, pertanto, si renderà conto sia della sua "socialità", sia della sua "fisicità", rielaborando, così, che tali posizioni non sono affatto avulse dal contesto, anzi esse lo condizionano e lo trasformano.

Questa attività avrà inizio con la scuola di base e accompagnerà tutta la crescita del bambino, rispecchiandone man mano le scoperte.

Un esempio semplice può essere: " Un tranquillo pomeriggio in casa."

Uno più elaborato: " Le vacanze di un gruppo di amici".

E' utile che i testi siano, almeno in parte, creati dei ragazzi stessi attraverso le loro esperienze.

(2) SUONARE UNO STRUMENTO MUSICALE

Questa attività, utile soltanto se cominciata precocemente, permette al bambino cieco non solo di apprendere un'altra forma di comunicazione, ma anche di abbattere la percezione monolitica dello spazio.

Si pensi, per esempio, agli strumenti a corda, i quali richiedono movimenti e pressioni simultanee diverse, rispetto alle due mani.

(3) GITE

Il bambino cieco usufruirà anche di veicoli non così "asettici" (per lui) come l'automobile: egli conoscerà anche la bicicletta, lo sci, la seggiovia, la canoa.

Ciascuno di questi mezzi di trasporto, infatti, gli permetterà di collegare sensazioni diverse a ciò che la matematica e la fisica verbalizzano: il soggetto potrà, invero, confrontarsi con due forme di moto: una attiva, l'altra passiva (si pensi, ad esempio, alla canoa, sulla quale agisce sia l'azione dell'acqua, sia il remo diretto dal passeggero).
Tutte le attività precedenti saranno svolte in presenza di personale qualificato, il quale ne spiegherà gli copi e descriverà, momento per momento, lo sviluppo della situazione esterna circostante.

14/15 ANNI

AMBIENTE

La scuola secondaria.

OBIETTIVO

Conoscere e sapersi muovere sul piano cartesiano.

ATTIVITA' PROPOSTA

Gli studenti tornano a lavorare con il modellino del semispazio,utilizzato in precedenza.

" Non consideriamo più l'altezza; lungo quali direzioni possiamo muoverci? "

Viene così introdotto il piano cartesiano, o meglio, per ora solo un piano su cui imparare a muoversi e nel quale inserire oggetti.
Il primo di essi è una corda molto sottile; la si fa sentire agli allievi, poi si chiede loro di esplorare le varie posizioni che essa può assumere sul piano.
Le principali sono:

1) orizzontale: allora le mani possono stare al di sopra, al di sotto, una al di sopra e l'altra al di sotto, oppure sulla corda;
2) verticale: allora le mani possono stare a destra, a sinistra, una a destra e l'altra a sinistra, oppure sulla corda.
3) Curva chiusa: allora le mani possono stare dentro, fuori, una dentro e una fuori, oppure sulla corda.

Gli studenti devono imparare dapprima a esplorare l'intera corda, poi, una volta introdotti gli assi, devono riconoscere dove la corda si trovi, rispetto ad essi.
Una volta che questo esercizio viene svolto con padronanza, si procede all'utilizzo di altre figure geometriche piane e si ripete la prova.
Gli assi, che ora i ragazzi hanno imparato ad esplorare, vengono graduati, affinché gli studenti lavorino con il piano cartesiano vero e proprio. Si introducono tutti i concetti e, a tempo debito, le teorie relativi all'argomento (coppie ordinate di punti, geometria analitica, analisi), anche se l'approccio ad essi non può essere immediato.
Grazie alle attività precedenti, infatti, i giovani presentano una buona manualità, tuttavia l'esplorazione del suddetto piano richiede ai ragazzi ciechi un'eccellente coordinazione delle mani.
Per ovviare a tale difficoltà, dunque, si procederà come segue: in principio il piano sarà posto sotto una griglia (per esempio quelle da cucina), la quale possa servire da guida per le dita degli allievi. In seguito essa verrà resa sempre più fitta e alla fine tolta.
Si noti che quest'ultimo cambiamento disorienterà lo studente cieco, che necessiterà, pertanto, di una persona qualificata che lo aiuti a ricostruire analogie e movimenti nelle due situazioni.
A poco a poco il piano cartesiano sarà "ingrandito", cosicché i ragazzi ciechi debbano muovere molto le braccia per riuscire ad esplorarlo.

Si ricorda ancora che per il ragazzo cieco non c'è differenza tra il molto grande e l'infinito; dunque l'impiego di un piano cartesiano preparato su una superficie ampia trasmette più semplicemente tale concetto.
Ora si preparano gli allievi ad un fondamentale passaggio meta-cognitivo, che richiede una globale rielaborazione di tutto ciò che essi hanno fin qui appreso:

riconoscimento di un oggetto	*struttura geometrica più simile*	*proiezione sul piano cartesiano*

	Esempio	
tavolo	*Cubo*	*quadrato*
letto	*parallelepipedo*	*rettangolo*
mobile	*parallelepipedo*	*rettangolo*

In breve i ragazzi devono riconoscere un oggetto, collegarlo al solido geometrico più simile e riportarne la proiezione sul piano cartesiano; quest'ultimo concetto è, per lo studente cieco, particolarmente ostico.

Si può, allora, procedere come segue:

viene costruito un piano cartesiano in materiale morbido, cosicché l'allievo premendovi il solido in questione, possa rilevarne manualmente l'impronta.

Con questa tecnica egli potrà preparare la planimetria di ambienti conosciuti, imparando, per quanto possibile, a rispettarne le proporzioni.

L'esercizio sarà successivamente proposto al contrario: data una planimetria descrivere una possibile stanza corrispondente.

Questa inversione, come l'intera prova, è molto impegnativa, quindi non sarà proposta al ragazzo cieco se non dopo essersi assicurati ch'egli padroneggi isolatamente ciascun passaggio del procedimento.

Il giudizio su questa attività, inoltre, deve tener conto del fatto che il non vedente esplora solo parzialmente lo spazio di riferimento, ovvero egli non indaga istintivamente la parte della superficie che eccede misure già sperimentate.

16/18 ANNI

AMBIENTE

Triennio della scuola secondaria.

OBIETTIVO

In questa fascia d'età si completa lo studio della realtà circostante, introducendo il concetto di volume.

ATTIVITA' PROPOSTA

Gli studenti possiedono già un'idea dei concetti dentro-fuori, interno-esterno, ma bisogna introdurli ad esplorare la misura dello spazio che tali espressioni indicano.

Innanzi tutto viene portato ai ragazzi una adeguata quantità di arena inumidita, a turno essi vi scavano una buca la cui forma sia facilmente individuabile al tatto.

" Quanta sabbia era inizialmente contenuta nella buca?"

Gli allievi pesano la sabbia estratta ottenendo quindi una misura, ad esempio in chilogrammi; successivamente, applicando l'equivalenza (concetto nuovo), si procederà con la quantificazione in metri cubi o relativi sottomultipli, tenendo presente che così si introduce per la prima volta il concetto di volume.

In seguito essi esploreranno la buca, usufruendo dei metodi solitamente applicati nelle precedenti attività; ne individueranno così: altezza, larghezza e lunghezza.

" Moltiplicate questi tre numeri tra loro, quale cifra ritrovate? "

I ragazzi, avendo in tal modo nuovamente ottenuto il risultato precedente, analizzano più approfonditamente la formula:

$$V = XYZ$$

scoprendo, con l'eventuale aiuto dell'insegnante, che essa rappresenta: area base per altezza.

Ora viene data agli studenti una scatola a forma di parallelepipedo, al momento vuota, ma predisposta per essere riempita con rettangoli che, riproducendone una parete, la riempiano completamente (meglio se, in principio, essa è proprio la base).

Gli scolari, dunque, inseriscono i rettangoli e per comprendere pienamente ciò che la formula rappresenta, ripetono la prova con scatole di stessa forma, ma di misura diversa: il volume di un oggetto si trova immaginando di affiancare tante volte una parete, dell'oggetto medesimo, per quanto misura l'altezza relativa.

Successivamente si procede al calcolo di volumi di altri solidi, per la qual cosa si può utilizzare il metodo sin qui descritto, oppure impiegare oggetti con pareti a soffietto.

Dopo essersi assicurati che i ragazzi non solo sappiano svolgere l'esercizio, ma ne abbiano colto l'utilità e il messaggio, tali solidi potranno essere maggiormente articolati; ad esempio se ne potrebbe considerare uno a forma di campana (per classi tradizionali sarà ovviamente opportuno utilizzare le sezioni circolari).

Si accenna ad una possibile successiva attività.

E' utile variare lo spessore delle sezioni (si ricorda che esse sono preparate in un materiale idoneo che, per quanto assottigliato, rimane comunque tridimensionale),cosicchè i ragazzi possano meditare e approfondire l'utilizzo delle unità di misura e, frattanto, si avvicinino al concetto di limite.

Bibliografia

Sono stati consultati i seguenti testi:

- Richard L. Gregory: "*Occhio e cervello – la psicologia della visione*";
  casa editrice IL SAGGIATORE 1966
  RAFFAELLO CORTINA editore 1998.

- Tonino Casula: "*Tra vedere e non vedere – una guida al problema della percezione visiva*";
  editore EINAUDI 1981.

- E. Bisiach, F. Denes, E. De Renzi, P. Faglioni, G. Gainotti, L. Pizzamiglio, H. R. Spinnler, L.A. Vignolo.
  Franco Angeli /*Ricerche di psicologia*
  "*Neuropsicologia clinica*";
  FRANCO ANGELI editore 1980.

- Roberto Militerni, Carmela Bravaccio: "*Psicologia dello sviluppo*";
  gruppo editoriale IDELSON – GNOCCHI 2001.

- E. R. Kandel, J. H. Schwartz, T. M. Jessell: "*Principi di neuroscenze*";
  casa editrice AMBROSIANA 1994.

- Richard Courant, Herbert Robbins: "*Che cos'è la matematica? – introduzione elementare ai suoi concetti e metodi*";
  editore BORINGHIERI 1972.

- H. S. M. Coxeter: "N*on - euclidean geometry*";
  UNIVERSITY OF TORONTO.

- Marvin Jay Greemberg: "*Euclidean and non – Euclidean geometries- development and history*";
  W. H. FREEMAN and COMPANY.

Sono stati visitati i seguenti siti internet:

http://w.w.w.math.isa.umich.edu/mmss/courses/infinity/Geometry/Lesson ... shtml

http://pctidifi.mi.infn.it/set/

http://axon.physik.unibremen.de/research/stereo/color_anaglyph/index.html

http://w.w.w.mat.uniroma2.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

TESI DI LAUREA

ESTER TORNAVACCA