

Università degli Studi di Torino



C I F I S

Centro Interateneo di interesse regionale
per la Formazione degli Insegnanti Secondari

Percorsi Abilitanti Speciali (P.A.S.)

Classe A047

aa.ss. 2014-15

TESI FINALE

**Apprendimento della matematica e
disabilità visiva: ostacoli ed opportunità.
Un caso di studio**

*Learning Mathematics and visually impaired students:
barriers and opportunities.
A case study.*

Relatore: Enrico Dolza

Candidato: Marco Bracco
matricola 266679

Indice

Introduzione.....	3
1. La matematica e la disabilità visiva.....	4
Problematiche nell'accesso ai contenuti matematici.....	4
Espressioni.....	4
Grafici.....	6
Strumenti di supporto.....	6
Accesso.....	7
Comprensione dei contenuti.....	9
Produzione.....	10
2. Caso di studio.....	12
Affrontare una disabilità sensoriale nell'adolescenza.....	12
Cristina.....	12
Gruppo di ricerca per l'accesso alla matematica.....	13
3. Uno strumento per la scrittura di documenti scientifici.....	15
TeX e LaTeX.....	15
Utilizzo.....	16
Scrittura di formule matematiche.....	16
Modo matematico.....	16
4. Un progetto didattico.....	19
La genesi del progetto.....	19
Ricadute nella didattica della matematica.....	20
Un progetto in due fasi.....	22
Prima fase.....	22
Uno spunto didattico: LaTeX e l'algebra.....	22
Seconda fase.....	25
Ricadute nella didattica: il concetto di funzione e LaTeX.....	25
Attività conclusiva.....	26
Conclusioni.....	28
Bibliografia.....	29
Sitografia.....	30
URL.....	30
Contenuto.....	30

Introduzione

Nei giorni precedenti l'inizio dell'anno scolastico ho scoperto che una delle allieve della nuova prima liceo in cui avrei insegnato ha un grave deficit visivo. Non è la prima volta che ho a che fare con la disabilità visiva, ma è la prima volta che entro in relazione con una persona in questa situazione vestendo i panni dell'insegnante. Fortunatamente la famiglia di Cristina, questo è il nome di fantasia che userò in questa trattazione, accompagna la sua situazione con un'attenzione ed una delicatezza straordinarie. Già prima dell'inizio delle lezioni la mamma mi chiede di incontrarci, ed entro così in un mondo a me sconosciuto, in cui occorre ripensare ogni particolare che normalmente ci pare ovvio e giocare continuamente d'anticipo per limitare i danni che le tante barriere del quotidiano opporrebbero all'apprendimento. Ad esempio, per poter utilizzare i libri di testo occorre che questi siano in formato elettronico, e per ottenerli in questo formato occorre farne richiesta con grande anticipo (per alcuni diversi mesi) alla biblioteca "Regina Margherita" di Monza, che offre questo servizio su tutto il territorio nazionale.

Ma per studiare matematica, fisica o scienze l'aver ottenuto il libro in pdf non basta ancora...come ho scoperto qualche settimana dopo. Grazie al suggerimento del prof. Dolza, conosciuto nel corso delle lezioni del PAS, mi sono messo in contatto con la prof.ssa Capietto ed il dott. Murru, che si occupano proprio di facilitare l'accesso agli studi scientifici agli studenti con disabilità, in particolare visiva o agli arti superiori. Già nel nostro primo incontro ho scoperto che in questo contesto è davvero poco quello che si può dare per scontato. Sono rimasto colpito dalla complessità delle attività di questo gruppo di ricerca, che si articolano tra l'analisi delle varie barriere all'accesso dei contenuti matematici, la ricognizione dei vari strumenti tecnici ed informatici (ed a volte la progettazione di nuovi) e soprattutto un lavoro delicato ed attento di ascolto e relazione con chi la disabilità la vive, affinché i frutti di questa ricerca possano essere davvero utili e concreti.

Dall'incontro prima con loro, e successivamente in un gruppo più ampio con Cristina e la sua famiglia, sono emerse alcune idee per rendere più efficace l'apprendimento di Cristina: da queste idee, cercando di elaborare una strategia il più possibile inclusiva ed allo stesso tempo riflettendo sul profilo in uscita specifico della classe della ragazza, è maturato un progetto didattico più ampio, rivolto alla classe intera e che coinvolge più discipline.

Nel primo capitolo tenterò di riassumere alcuni dei principali ostacoli all'apprendimento delle materie scientifiche per i disabili visivi, nel secondo tratteggerò la situazione di Cristina e del gruppo di ricerca della prof.ssa Capietto, nel terzo esporrò brevemente il funzionamento di un linguaggio per il markup che potrebbe rivelarsi molto utile in questa situazione e nel quarto ed ultimo capitolo descriverò il progetto didattico.

1. La matematica e la disabilità visiva

Problematiche nell'accesso ai contenuti matematici

L'accesso ai contenuti matematici non è necessario solo per lo studio della matematica, è un requisito fondamentale per chiunque scelga di approfondire una disciplina scientifica, dalla fisica all'economia, dalla chimica all'informatica, in quanto la matematica fornisce gli strumenti per comprendere e modellizzare le altre scienze.

Poiché la matematica è trasmessa in massima parte con modalità visive (espressioni, grafici, ecc...), è più difficile trasmetterne i contenuti utilizzando altre modalità (tattili o legate all'ascolto) in quanto questi canali, rispetto a quello visivo, non offrono la possibilità di ottenere velocemente uno sguardo d'insieme. I disabili visivi incontrano maggiori difficoltà nell'apprendimento dei concetti matematici e la ragione per cui sono molto pochi a proseguire gli studi universitari in indirizzi scientifici risiede sicuramente anche in questo. Non ci sono cause a livello cognitivo per cui i contenuti matematici non possano essere compresi a causa di un deficit visivo, pertanto è evidente che la notazione usata per lavorare con la matematica rappresenta una barriera importante. Poiché normalmente essa è essenzialmente visiva, diventa difficile trasmettere tali contenuti usando altre modalità.

Espressioni

La maggior parte dei contenuti matematici sono rappresentati attraverso espressioni¹: esse vengono spesso scritte in due dimensioni, e questa maniera di rappresentarle ha una grande utilità, in quanto aiuta il lettore nella comprensione del contenuto. Infatti la struttura dell'espressione viene percepita quasi istantaneamente, ed al suo interno il lettore può localizzare gli elementi principali, e solo allora analizzarli isolatamente. L'albero che rappresenta l'espressione è costruito mentalmente in maniera quasi inconscia prima ancora che le sue foglie vengano lette. Di contro tutti i metodi non visuali per rappresentare le espressioni (dal Braille alla sintesi vocale) ed in qualche modo anche l'uso dell'ingrandimento, costringono a passare dalle due dimensioni ad una scrittura su singola riga, che viene definita linearizzazione dell'espressione.

Qualunque formula può essere linearizzata, ma quasi sempre la linearizzazione genera una rappresentazione molto più lunga e più difficile da comprendere di quella grafica. Per comprendere la differenza è sufficiente confrontare una semplice formula (1) con la sua linearizzazione, (2), che necessita di più simboli ed è di più difficile comprensione.

$$\frac{x+1}{x-1} \quad (1) \qquad (x+1)/(x-1) \quad (2)$$

1 In questa trattazione i termini "espressione" e "formula" vengono usate in maniera intercambiabile, in quanto si pone l'attenzione più sulla scrittura con una notazione complessa che sul contenuto semantico

Rappresentazione tattile

Dalla rappresentazione linearizzata è possibile stampare (o riprodurre con una specifica periferica di output) una versione Braille, utilizzando degli insiemi di caratteri Braille codificati specificamente per la matematica. Poichè il Braille si basa su una codifica in sei punti, esso permette la generazione di soli 64 diverse configurazioni, che non sono abbastanza per rappresentare la grande varietà di simboli matematici necessari: di conseguenza molti simboli sono rappresentati utilizzando la combinazione di più caratteri Braille, il che rende le formule linearizzate ancora più lunghe e di difficile comprensione! Le problematiche connesse con questo tipo di rappresentazione saranno descritte nel seguito.

Sintesi vocale

L'alternativa al Braille è la pronuncia della versione linearizzata della formula da parte di una persona o per mezzo di un programma di sintesi vocale, ma in entrambi i casi l'ascolto delle formule presenta alcuni svantaggi rispetto alla lettura diretta.

In primo luogo può dare adito ad ambiguità: ad esempio la formula “x più uno fratto x meno uno” può essere rappresentata in tre modi diversi (3,4,5):

$$x + \frac{1}{x-1} \quad (3) \quad x + \frac{1}{x} - 1 \quad (4) \quad \frac{x+1}{x} - 1 \quad (5)$$

In realtà una formula può sempre essere letta senza lasciare spazio ad ambiguità: ad esempio l'espressione (3) può essere letta come "x più *inizio frazione* con *numeratore* 1 fratto *denominatore* x meno 1 *fine frazione*" senza lasciare adito a differenti interpretazioni, ma ciò comporta una lettura decisamente più prolissa ed impegnativa per l'uditore.

Un altro ostacolo alla comprensione di informazioni matematiche ricevute attraverso il solo canale uditivo è l'incremento del lavoro mentale necessario alla memorizzazione di breve termine ed alla comprensione delle informazioni. Infatti, mentre il lettore può utilizzare la pagina stampata come una sorta di “memoria esterna” ed aiuto alla conservazione delle informazioni, l'uditore ha solo il ricordo dell'espressione ascoltata, il che rende estremamente difficile la comprensione di dati sintatticamente complessi.

Questa condizione di difficoltà strutturale si combina con variabili legate allo strumento tecnologico utilizzato per la lettura. Il massimo livello di comprensione si ha quando una formula viene letta da una voce umana, mentre quando si utilizzano i sintetizzatori vocali occorre valutare la qualità degli stessi, che secondo i risultati di alcuni studi condiziona in maniera importante la comprensione del testo. I vari sintetizzatori si differenziano ad esempio per la naturalità della pronuncia, per il livello di prosodia² contenuto nell'espressione letta, per il rispetto della punteggiatura e per la possibilità di personalizzare la velocità della lettura e la durata delle pause.

2 La prosodia è la parte della linguistica che studia l'intonazione, il ritmo, la durata e l'accento del linguaggio parlato.

Grafici

Un'altra questione che meriterebbe di essere approfondita è quella dell'accesso alle rappresentazioni grafiche (istogrammi, rappresentazioni sul piano cartesiano, diagrammi di vario tipo), fondamentali nei processi di modellizzazione ed interpretazione dei dati, che rappresenta un'ulteriore fonte di difficoltà per gli studenti non vedenti.

Tali difficoltà sono di due ordini: la scarsità (o il costo) di strumenti per la produzione rapida ed efficiente di figure in rilievo e la difficoltà di interpretarle con il tatto, che ha un potere risolutivo a livello spaziale molto limitato (con i polpastrelli si possono percepire come distinti due punti che distano almeno due millimetri: quindi particolari minuti che risultano visibili ad occhio possono invece non essere apprezzati con il tatto). Inoltre, come per le espressioni, il processo di esplorazione della figura con le dita (con la ricostruzione mentale di una rappresentazione globale a partire dai particolari) procede in senso inverso rispetto alla modalità visiva, che si basa su un approccio top-down, con una percezione immediata del generale dalla quale si fa discendere un'analisi dei particolari rilevanti.

Per questo le figure ed i grafici presentati in forma tattile perdono buona parte della propria valenza di semplificazione della comprensione di concetti e situazioni, necessitando, al contrario, di un corredo testuale che spieghi ciò che è rappresentato e favorisca la sua interpretazione.

Non ha in genere senso presentare ad un cieco una immagine tattile e chiedergli cosa sia. Si cita in proposito un episodio reale che può rendere più evidente la natura di questa difficoltà:

Un test condotto con alcuni allievi non vedenti di un istituto per saggiare la loro capacità di percezione di forme tattili, fatto con la classica figura del teorema di Pitagora, presentata senza nessuna spiegazione sul suo significato, fece concludere che nessuno dei ragazzi notava il triangolo al centro della figura. Alla domanda: "Quali forme geometriche vedi in questa figura?" Tutti avevano risposto: "Tre quadrati." Qualcuno al più aveva aggiunto: "con due vertici a contatto".³

Fatte queste premesse, nei casi in cui la figura è indispensabile e si è trovato il modo di progettarela bene, i modi per realizzarla possono essere molteplici, da quelli artigianali (con l'uso di carta, colla, spago e forme ritagliate di cartoncino spesso) all'uso del computer con varie tipologie di stampanti in rilievo.

Strumenti di supporto

Dopo aver rapidamente tratteggiato alcune delle principali difficoltà che ostacolano i disabili visivi nell'accesso ai contenuti matematici, entriamo nel merito degli strumenti che sono stati creati per rimuovere o ridurre alcune di queste "barriere" all'apprendimento.

Per rendere più ordinata la trattazione i vari strumenti e progetti vengono descritti focalizzando l'attenzione su tre successivi livelli di manipolazione dei contenuti matematici: l'accesso agli stessi, la comprensione ed infine la produzione di oggetti matematici.

³ Dagli atti del convegno: Handimatica'98, IROE "Nello Carrara" Firenze

Accesso

La prima necessità è quella di permettere l'accesso alle formule ed ai grafici con canali sensoriali differenti da quello visivo, quindi attraverso il tatto e l'udito. Per quanto riguarda le formule, come descritto in precedenza, è necessario un processo di linearizzazione che consente una rappresentazione unidimensionale per mezzo di specifici linguaggi, che vengono descritti nel seguito.

Sintesi vocale

La sintesi vocale (in inglese *speech synthesis*) è la tecnica per la riproduzione artificiale della voce umana. Un sistema usato per questo scopo è detto sintetizzatore vocale e può essere realizzato con specifici software. I sistemi di sintesi vocale sono noti anche come *Text-to-speech (TTS)* per la loro possibilità di convertire il testo in parlato. La qualità di un sintetizzatore vocale si valuta sulla base sia della somiglianza con la voce umana che con il suo livello di comprensibilità. Un programma di conversione da testo a voce con una buona resa può avere un ruolo importante nell'accessibilità, e per questo molti sistemi operativi includono funzioni di sintesi vocale. Le applicazioni che utilizzano la sintesi vocale per leggere il testo mostrato sullo schermo del computer prendono il nome di *screen reader*. I principali *screen reader*⁴, spesso integrati negli strumenti di accessibilità dei sistemi operativi, solitamente non consentono una chiara comprensione delle formule matematiche.

Braille

Nel corso del ventesimo secolo sono state sviluppate diverse strategie per ridurre la lunghezza delle formule matematiche rappresentate in Braille, che hanno portato alla creazione di *notazioni Braille specifiche per la matematica*. La riduzione della lunghezza delle formule viene effettuata assegnando ad uno stesso carattere Braille significati diversi a seconda del contesto in cui esso viene usato. Queste notazioni sono abbastanza difficili da apprendere (e da insegnare), in quanto chi impara deve cimentarsi con due difficoltà contemporanee: la comprensione del contenuto matematico e la codifica dello stesso, che a volte risulta ancora più difficile. Per complicare ulteriormente le cose le notazioni Braille sono state sviluppate in paesi diversi, con differenti radici linguistiche e culturali, e risultano pertanto molto diverse tra loro. Questo significa che una funzione in Braille scritta con la notazione italiana non è comprensibile da un lettore tedesco, inglese o giapponese, e viceversa. Questo problema risulta ancora più importante in relazione al fatto che il numero di documenti Braille disponibili è una



⁴ Alcuni *screen reader*, suddivisi per sistema operativo, sono: Orca, in ambiente Linux, sviluppato da Gnome; JAWS e Windows-eyes per Microsoft e VoiceOver per Apple, su OSX

frazione decisamente esigua delle pubblicazioni matematiche (Archambault et al, 2007).

L'iGroupUMA,⁵ un gruppo internazionale che lavora su vari fronti dell'apprendimento della matematica per ciechi, per superare la difficoltà di conversione tra le varie notazioni geografiche, ha sviluppato UMCL, un insieme di librerie open-source che, attraverso la traduzione delle formule in un linguaggio “centrale” (MathML), permette la conversione in maniera relativamente semplice tra notazioni Braille diverse.

MathML

Il MathML (acronimo di Mathematical Markup Language, linguaggio di markup matematico) è un linguaggio derivato dall'XML usato per rappresentare simboli e formule matematiche affinché possano essere presentati in modo chiaro nei documenti web. È una specifica del gruppo di lavoro sulla matematica del W3C. Nell'ottobre 2003 è stata emanata dal W3C la seconda edizione di MathML. Il grande pregio di MathML è l'interoperabilità: esistono molti programmi in grado di convertire espressioni matematiche scritte in vari formati (ad esempio LaTeX) in MathML. Inoltre ormai tutti i maggiori browser sono in grado di visualizzare formule scritte in MathML; esso è supportato da diversi programmi di videoscrittura (come OpenOffice.org e Microsoft Word) e da software matematici come Mathematica. Il MathML essendo un linguaggio di markup è particolarmente adatto per essere maneggiato dalle tecnologie assistive, tuttavia sussistono alcune problematiche non del tutto superate che complicano (e talvolta compromettono) l'accessibilità di formule inserite sul web mediante tale linguaggio.

LaTeX

LaTeX è un linguaggio di markup usato per la preparazione di testi basato sul programma di composizione tipografica TeX, che ha trovato un'ampia diffusione nel mondo accademico, grazie all'ottima gestione dell'impaginazione delle formule matematiche (ad esempio il motore di Wikipedia utilizza LaTeX per il rendering delle formule ed in Geogebra è possibile scrivere le espressioni in questo modo). Maggiori dettagli su questo linguaggio saranno esposti nel seguito.

I sorgenti LaTeX sono spesso usati dagli studenti universitari con disabilità visiva: essendo dei file di testo possono essere letti su un display Braille o attraverso un sintetizzatore vocale. L'unico limite, poichè il LaTeX nasce come linguaggio di markup, è che il codice a volte risulta troppo prolisso per essere facilmente compreso da un ascoltatore umano.

Ci sono stati dei tentativi di rendere il codice LaTeX più intellegibile per le persone⁶ ma, anche se presenta dei limiti ad una comprensione immediata, questo formato risulta attualmente il più richiesto da parte degli studenti universitari con disabilità visiva agli editori per accedere alle risorse scientifiche.

⁵ International Group for Universal Math Accessibility

⁶ Ad esempio con un progetto di ricerca promosso all'università di Linz con lo sviluppo di HrTeX, un pacchetto LaTeX che può essere utilizzato per produrre documenti sorgente ascoltabili da lettori umani, particolarmente utile per utenti ciechi (atti del convegno “International Conference: education for all”, 2007).

OCR

Se una risorsa viene fornita in un formato accessibile (che sia LaTeX o MathML o un altro formato che consenta la scrittura di formule), essa può essere letta con una barra Braille o con un sintetizzatore vocale. Ma se la risorsa è stampata su un foglio o è stata acquisita come immagine (ad esempio con una scansione in jpg o pdf), come renderne accessibile il contenuto?

Esistono vari software per il riconoscimento ottico dei caratteri, identificati con l'acronimo OCR (dall'inglese optical character recognition) che producono un testo digitale modificabile con un normale editor a partire da un'immagine. Questi sistemi hanno raggiunto un grado di accuratezza eccellente quando si tratta di elaborare testo semplice, con tassi di riconoscimento solitamente superiori al 99%. Ma la maggior parte di essi non è in grado di tradurre una formula, soprattutto se bidimensionale, in un formato digitale.

Per questo sono nati alcuni progetti di ricerca volti proprio al riconoscimento di formule matematiche: un esempio è l'InftyProject, un'organizzazione che raccoglie ricercatori di diverse università ed istituti di ricerca con la priorità dichiarata di sviluppare strumenti concreti che possano essere utilizzati nella scuola e nella ricerca.

Infty

All'interno del progetto Infty è stato sviluppato un sistema integrato di lettura di documenti matematici che utilizza un OCR, chiamato "InftyReader". Il sistema prende in input la scansione di pagine a carattere scientifico, contenenti anche delle formule, e ne restituisce il riconoscimento del contenuto in uno dei possibili formati di output, tra cui LaTeX, MathML, XML, Unified Braille Code (formato inglese), ecc.. Il software è distribuito con una licenza commerciale, e costa ai privati circa 800\$.

Comprensione dei contenuti

Come risulta evidente esistono molti strumenti che permettono l'accesso alle formule (la trattazione è limitata soprattutto a queste, per parlare anche dei grafici sarebbe stato necessario uno spazio decisamente più ampio), con la conversione in sintassi particolari (formati Braille o particolari linguaggi quali LaTeX o MathML) fruibili con canali sensoriali diversi dalla vista. Permangono comunque le difficoltà già sottolineate nella fruizione dei contenuti matematici legati alla frammentazione delle informazioni conseguente alla linearizzazione delle formule ed alla decodifica della sintassi dei linguaggi di markup.

Esiste pertanto un secondo livello di supporto che può essere fornito agli studenti con disabilità visiva, orientato a facilitare la comprensione dei contenuti matematici. Nei documenti studiati nella preparazione di questa tesi ho scoperto che negli anni scorsi sono stati avviati diversi progetti con questa finalità⁷, ma quando ho cercato informazioni più recenti sul loro sviluppo non ho trovato documentazione aggiornata né programmi utilizzabili. Le idee sulle quali si basavano sono interessanti ed aiutano a comprendere la natura dei problemi connessi alla comprensione delle formule, pertanto, seppure in sintesi, sintetizzo il funzionamento di due di questi sistemi:

⁷ I principali sono ad esempio Maths Genie, Techread system, ASTeR, MaWEn .

AS_TeR (Audio System for Technical Reading) è un sistema per la riproduzione accurata di documenti in LaTeX che sfruttava l'uso della prosodia per risolvere le ambiguità derivanti dalla lettura delle formule.

Maths Genie invece adotta un sistema di navigazione delle espressioni che anziché leggere la linearizzazione della formula per intero ne fornisce versione “navigabile”, in cui a partire da una sintesi che evidenzia la struttura (ad esempio per una frazione algebrica potrebbe essere vocalizzato “entità fratto entità), a partire dalla quale l'utente può selezionare le varie componenti ed accedere selettivamente ai dettagli dell'espressione.

DTB e Progetto Daisy

Un DTB (digital talking book) è una versione digitalizzata di un libro in cui i contenuti sono fruibili anche attraverso l'ascolto, ma rispetto alla semplice registrazione della lettura ad alta voce del libro offre una serie di strumenti aggiuntivi: gli utenti possono cercare contenuti, inserire segnalibri, effettuare una navigazione riga per riga o regolare la velocità di ascolto senza distorsioni. E ancora è possibile avere accesso a tabelle “ascoltabili”, a note bibliografiche o informazioni aggiuntive. In questo modo un disabile visivo ha la possibilità di utilizzare un'enciclopedia o un manuale di istruzioni, documenti il cui uso è estremamente difficile con la tradizionale registrazione audio.

Lo standard tecnico (l'unico esistente ad oggi) per la creazione di libri digitali è stato prodotto dal Consorzio Daisy (Digital Accessible Information System), ed è uno standard aperto creato per guidare la transizione verso i “libri parlanti digitali”. L'obiettivo dichiarato è quello di garantire pari opportunità di accesso all'informazione ed alla conoscenza, soprattutto in riferimento alla disabilità. L'idea fondamentale è che le risorse per l'accesso ai documenti da parte dei disabili non siano “costruite sopra” i documenti, ma incapsulate negli stessi, che sono quindi universalmente fruibili già in partenza.

Produzione

L'accesso e la comprensione della matematica non è ancora sufficiente per “fare” matematica. È necessario essere in grado di scrivere formule matematiche, di risolvere problemi, di pubblicare documenti scientifici.

Esistono alcune soluzioni, alcune basate sulla possibilità di inserire input matematici tramite menù o con il riconoscimento di un testo scritto a mano (ad esempio con MathType di Design Science, che si integra con i principali strumenti di videoscrittura, da Microsoft Word a Pages a svariati altri software) oppure con l'inserimento di contenuti matematici codificati utilizzando particolari linguaggi di input (ad esempio LaTeX o simili, ad esempio l'editor specifico per le formule matematiche integrato in Infty - un progetto descritto in precedenza - o ancora il Cmath plug-in).

Questi software sono utili per permettere una scrittura più agevole delle formule matematiche, ma non ad aiutare le persone a “fare” matematica, soprattutto nel caso di disabili visivi.

Progetto Lambda

Il progetto Lambda (Linear Access to Mathematics for Braille Device and Audio-synthesis) ha sviluppato un sistema che facilita la lettura, scrittura e l'elaborazione di testo ed espressioni matematiche, utilizzando la sintesi vocale o la barra Braille. Ha la sua specifica codifica Braille ed un editor matematico multimodale progettato specificamente per rappresentare il codice lambda. Il sistema è molto efficiente, ma presenta il grave svantaggio di costringere gli utilizzatori ad imparare un nuovo codice matematico basato su una rappresentazione Braille ad otto punti.

Infty

Anche nel progetto Infty esiste un importante supporto per l'immissione e la fruizione dei contenuti matematici. Oltre all'InftyReader, descritto in precedenza, il software integra l'InftyEditor, che offre un metodo molto semplice ed efficace per scrivere simboli matematici ed espressioni (immessi da tastiera usando comandi LaTeX o attraverso dei menu), e ChattyInfty, uno strumento di sintesi vocale che include la lettura delle formule matematiche.

Strumenti di conversione tra formati

Infine esistono una serie di progetti che permettono la conversione tra i principali formati matematici, quali ad esempio LaTeX, MathML e le varie notazioni Braille, con lo scopo di facilitare la produzione di documentazione scientifica in Braille e viceversa di rendere possibile la visione da parte dei docenti o dei compagni di contenuti matematici prodotti da studenti con disabilità visiva.

2. Caso di studio

Affrontare una disabilità sensoriale nell'adolescenza.

Cristina

Attualmente insegno matematica ed informatica, sia in un liceo scientifico (opzione scienze applicate) sia nel biennio di un liceo classico. Al primo anno del liceo delle scienze applicate ho tra i miei studenti Cristina, sempre in prima fila con il suo inseparabile MacBook Pro da 15 pollici che, insieme ad una tenacia di ferro, a buone capacità e ad uno splendido sostegno da parte della famiglia, le consente di affrontare (fino a questo momento con risultati molto positivi) un percorso impegnativo come questo indirizzo liceale.

Cristina è affetta da degenerazione maculare giovanile di Stargardt, malattia a trasmissione autosomica recessiva legata a mutazione del gene ABCA4. È la forma più comune di degenerazione maculare ereditaria, con una frequenza di un caso ogni 10.000 persone. I sintomi consistono soprattutto nella riduzione della visione centrale (spesso in forma grave), che inizia durante l'adolescenza o, comunque, in giovane età (prima e seconda decade). Inoltre, i pazienti possono lamentare disturbi nella percezione dei colori (discromatopsia), scotomi centrali (macchie nere nel campo visivo) e fotofobia (intolleranza alla luce). La mutazione del gene ABCA4 provoca disfunzione e perdita dei fotorecettori coni e bastoncelli, in conseguenza di un danno foto-ossidativo. Non esiste una terapia risolutiva. Una terapia mirata a contrastare il meccanismo di danno fotossidativo potrebbe mitigare gli effetti della malattia o quantomeno arrestarne l'evoluzione.

Cristina ha effettuato visite oculistiche all'età di 4 e 6 anni che non avevano evidenziato alterazioni. All'età di 7 anni viene riscontrato un calo dell'acuità visiva, passando dai 10/10 OO ai 7-8/10 OO. All'età di 8 anni viene sospettata malattia di Stargardt, confermata da indagine genetica, con un calo ulteriore dell'acuità visiva. A tutt'oggi l'acuità visiva è di 1/10 OO. Attualmente Cristina è seguita annualmente presso il Centro Studi di Retinopatie Ereditarie della Seconda Università degli Studi di Napoli.

L'acuità visiva in questo momento è stabile, tutti gli sforzi adesso si concentrano sull'evitare un peggioramento. Per aumentare le probabilità di conservare il proprio residuo visivo è importante che Cristina stressi il meno possibile la vista, cercando di sfruttare gli altri sensi ogni qual volta è possibile (con ausili quali la sintesi vocale o uno screen reader) e minimizzi le attività di visualizzazione che le richiedono maggiore fatica.

Da quando è stata diagnosticata la malattia di Stargardt la famiglia ha cercato di individuare gli ausili via via più efficaci, in relazione sia alla capacità visiva di Cristina, sia all'accettazione della propria situazione da parte della ragazza, che rendeva alcuni strumenti, magari utili, non accettabili perché avrebbero evidenziato la sua minore capacità visiva nella relazione con i pari.

Durante la scuola primaria Cristina ha utilizzato solo saltuariamente a domicilio un videoingranditore da tavolo.

Dal 2011, con l'inizio della scuola secondaria inferiore, è seguita a domicilio per 6 ore alla settimana da un'educatrice dell'IRiFoR⁸. Durante il primo anno Cristina a scuola non aveva ausili, ad eccezione di un videoingranditore portatile che raramente ha utilizzato in classe, con conseguente affaticamento, nonostante l'ottimo rendimento. Il videoingranditore era vissuto da lei come un oggetto che sottolineava la sua diversità e per questo non lo utilizzava.

Dal secondo anno Cristina utilizza libri in formato pdf scaricati sul suo computer e ha acquisito sempre più dimestichezza con l'ausilio informatico, nel tempo divenuto indispensabile: il computer è per lei uno strumento sia di lettura e di scrittura. Eppure per matematica e fisica continua ad usare quaderni con quadretti grandi, della larghezza di un centimetro. È affezionata al suo "Mac", che percepisce come un oggetto che la differenzia sì dagli altri, ma in un senso positivo. Attualmente utilizza ancora poco la sintesi vocale per lo studio, mentre i libri di lettura vengono ascoltati in formato "audio".

Gruppo di ricerca per l'accesso alla matematica

Durante il mio PAS (Percorso formativo Abilitante Speciale) per l'insegnamento della matematica sono venuto a conoscenza delle attività di un progetto attivato all'interno del Dipartimento di Matematica "G. Peano" per favorire l'accesso agli studi da parte di studenti con disabilità. Il progetto ha come obiettivo la selezione, lo sviluppo e la diffusione di tecnologie informatiche che aiutino l'accesso a studi scientifici con particolare riferimento agli studenti con disabilità visive e/o disabilità agli arti superiori. Il progetto, oltre ai docenti ed ai ricercatori coinvolti, si avvale della preziosa collaborazione di studenti ed ex-studenti ipovedenti o non vedenti.

Mi sono messo in contatto, ed ho successivamente incontrato, la professoressa Anna Capietto ed il dott. Nadir Murru, anime e principali attuatori del progetto: negli ambienti in cui portano avanti il proprio lavoro mi hanno illustrato gli ambiti di ricerca della propria attività ed introdotto alle principali difficoltà di apprendimento degli studenti disabili, mostrato la strumentazione acquistata ed alcune delle applicazioni realizzabili con essa, oltre a descrivermi le prospettive future.

Successivamente ho presentato loro la situazione di Cristina, per capire se potevano suggerirmi strumenti o strategie che avrebbero potuto aiutarla in questo momento o, in prospettiva, in vista del suo prosieguo liceale ed universitario. Ho incontrato l'apertura ad una collaborazione a tutto campo e la disponibilità ad occuparsi della situazione di Cristina insieme.

Abbiamo così deciso di proporre alla famiglia di Cristina un incontro allargato a tutte le figure che in questo momento sono coinvolte nel suo processo di apprendimento: dopo aver verificato la disponibilità della famiglia abbiamo fissato la data della nostra prima riunione.

Incontro con la famiglia

Il dodici dicembre 2014 la stanza del secondo piano di palazzo Campana in cui avevo incontrato per la prima volta la prof.ssa Capietto ed il dott. Murru, era decisamente più affollata. Oltre a noi tre

⁸ L'Istituto per la Ricerca, la Formazione e la Riabilitazione (I.Ri.Fo.R.) - onlus, è stato costituito dall'UICI nel 1991; lavora soprattutto nel settore della formazione e della riabilitazione.

erano presenti Cristina e la sua mamma, l'educatrice dell'IRiFoR ed un'altra professoressa della classe di Cristina.

Per non mettere a disagio Cristina con discorsi che alludessero a prospettive di peggioramento delle sue residue capacità visive, abbiamo iniziato chiedendole di raccontarci quali fossero le sue difficoltà principali con la fruizione/manipolazione dei contenuti matematici a scuola. Inizialmente le abbiamo domandato se incontrasse più difficoltà nel leggere o nello scrivere espressioni matematiche: Cristina ha risposto che le difficoltà maggiori sono nello scrivere

Dopo aver capito che Cristina non utilizzava programmi specifici per scrivere la matematica, la professoressa Capietto le ha domandato se conoscesse già il LaTeX: alla risposta negativa della ragazza le ha spiegato che si tratta di un linguaggio per la redazione tipografica di testi, particolarmente adatto alla creazione di testi matematici e scientifici, descrivendone il funzionamento.

Dopo aver esplorato insieme a Cristina gli altri strumenti che in questo momento sono disponibili per la scrittura delle formule (MathML, che ha una sintassi più complessa e prolissa, ed il software del progetto Lambda) e dopo un breve confronto sulle esigenze e sulle possibilità di Cristina, si è convenuto che il LaTeX potrebbe essere un buon ausilio già in questo momento e rappresentare uno strumento scalabile e versatile in vista del proseguo degli studi.

La questione che si apriva a questo punto riguardava la modalità di apprendimento di questo linguaggio, che pur non presentando una sintassi particolarmente complessa necessita comunque della memorizzazione di un “ventaglio” di istruzioni abbastanza ampio, soprattutto per poter rappresentare le espressioni matematiche. In quali tempi e con quali modalità insegnare il LaTeX a Cristina?

3. Uno strumento per la scrittura di documenti scientifici

Per comprendere meglio l'utilità del LaTeX sia per la generica redazione di un testo scientifico che nella specifica situazione che è oggetto di questa trattazione, descriverò brevemente in questo capitolo la sintassi e gli ambiti di utilizzo di questo linguaggio di markup, con il corredo di alcuni esempi.

TeX e LaTeX

Nascita del TeX

LaTeX è un linguaggio di markup usato per la preparazione di testi basato sul programma di composizione tipografica TeX, creato da Donald Knuth nel 1978.

TeX rappresenta in qualche modo il cuore di LaTeX: è un sistema programmabile di composizione tipografica estremamente efficace nella formattazione di formule matematiche. Knuth decise di non distribuire il sistema TeX a pagamento, ma con una licenza libera. Il programma è liberamente modificabile a patto che quello che viene ridistribuito non si chiami a sua volta TeX. Un aspetto curioso per i matematici è che le successive versioni di TeX, per scelta dell'autore, sono contraddistinte da numeri crescenti che convergono a π . La versione attuale è la 3.14159265. La pronuncia del nome non è “*tecs*”, come il popolare protagonista della serie di fumetti di Bonelli, ma “*tech*” poiché l'origine del nome deriva dalla radice della parola greca τέχνη, téchnē (ovvero arte, tecnica, tecnologia). L'ultimo carattere è la lettera greca *chi* greca maiuscola (X) la cui grafia si confonde con quella della latina “ics” (X).

Da TeX a LaTeX

Il TeX è un linguaggio molto potente ma anche complesso: prima di utilizzarlo occorre studiare le sue moltissime particolarità. Per questo a partire dal TeX sono stati creati linguaggi di più alto livello (quindi più semplici da utilizzare per l'utente umano), come LaTeX e ConTeXt, al fine di permettere una più rapida composizione di documenti di alta qualità e non solamente votati alla matematica.

LaTeX, creato nel 1985 da Leslie Lamport, fornisce agli utilizzatori un modo semplice per sfruttare la potenza di TeX senza doverne imparare gli oltre 300 comandi elementari e per questo è divenuto il principale metodo di utilizzo di TeX. Infatti poche persone usano ancora direttamente TeX base per la redazione di documenti.

Fornisce funzioni di desktop publishing programmabili e mezzi per l'automazione della maggior parte della composizione tipografica, inclusa la numerazione, riferimenti incrociati, tabelle e figure, organizzazione delle pagine, bibliografie e molto altro.

Proprio come il TeX è distribuito come software libero ed è multiplatforma: ne esistono pertanto versioni funzionanti per tutti i sistemi operativi: Microsoft Windows, Mac OS X e le varie distribuzioni Linux. Viene molto usato in ambito accademico, da fisici, matematici, informatici,

sociologi ed ingegneri, oltre ad avere un impiego commerciale.

Utilizzo

Il meccanismo di funzionamento di LaTeX è molto diverso da quello di Word o di Pages o di un comune programma di videoscrittura, in quanto l'attenzione non è centrata sull'aspetto estetico e sulla formattazione del documento (che può comunque essere gestita) ma sulla costruzione di una struttura e sul corretto inserimento dei contenuti in questa struttura.

L'input per LaTeX è un file di testo in ASCII puro: per creare un documento si scrive del codice utilizzando un comune editor di testo e salvando il file sorgente con l'estensione *.tex*: questo file, che contiene “le istruzioni” per la creazione del documento, deve successivamente essere compilato dando luogo alla generazione di un file “finale”, in uno dei formati di output (ad esempio PDF o PostScript).

Per fornire un rapidissimo esempio: il codice sottostante definisce un documento (un libro) e ne istanzia alcuni contenuti (l'autore, la data ed il titolo). Ovviamente il resto del documento andrebbe inserito tra l'istruzione *\maketitle* e la fine del documento. Il risultato della compilazione del codice è mostrato nella figura, e rappresenta la “copertina” del libro in corso di elaborazione.

```
\documentclass[12pt,a4paper]{book}

\begin{document}
\author{Marco Bracco - marcobracco@gmail.com}
\date{marzo 2015}
\title{Apprendimento della matematica e
disabilità visiva: ostacoli ed opportunità. Un
caso di studio}
\maketitle

\end{document}
```



Come si evince dall'esempio la sintassi è abbastanza semplice. Non si ritiene fondamentale ai fini di questa trattazione una presentazione dettagliata dei comandi di LaTeX, ma può risultare utile una breve incursione nell'insieme dei comandi utilizzati per le formule matematiche.

Scrittura di formule matematiche

Modo matematico

Il LaTeX ha una modalità speciale per scrivere la matematica: per attivarla occorre segnalare la presenza di una formula, inserendo la stessa tra due sequenze speciali di caratteri. Quando si utilizza una di queste sequenze il programma entra in *modo matematico*, quando si chiude la formula con la sequenza di fine formula il programma ritorna in *modo testo*.

Scrittura in linea

Se si intende inserire la formula *in linea*, cioè all'interno di un paragrafo, esistono tre modalità equivalenti: le parti matematiche vanno incluse tra `\(` e `\)`, oppure tra `$` e `$` o ancora tra `\begin{math}` e `\end{math}`.

Questo significa che il codice

Se inserisco le formule "in linea", nella prima modalità ottengo

```
\( y=x^2 \)
```

, nella seconda viene scritto

```
$ y=\frac{2}{x}$
```

mentre nella terza

```
\begin{math} y=e^x \end{math}
```

genera la seguente visualizzazione

Se inserisco le formule "in linea", nella prima modalità ottengo $y = x^2$, nella seconda viene scritto $y = \frac{2}{x}$ mentre nella terza $y = e^x$

Se la formula che si vuole inserire è particolarmente lunga o la si vuole enfatizzare, è possibile inserirla in una nuova riga: per fare questo occorre includerla tra `\[` e `\]` o tra `\begin{displaymath}` e `\end{displaymath}`, come nel codice successivo:

Formula inserita in una nuova riga

```
\[ y=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \]
```

in modo da enfatizzarne il contenuto

Che genera

Formula inserita in una nuova riga

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

in modo da enfatizzarne il contenuto

Senza pretese di esaustività si riporta nella tabella successiva un piccolo sottoinsieme dei comandi LaTeX per la matematica, con lo scopo di mostrare come sia sufficiente conoscere la traduzione inglese dei nomi degli operatori e delle funzioni matematiche per impossessarsi rapidamente di un repertorio sufficientemente ampio da poter scrivere agevolmente la maggior parte delle formule in uso nella scuola superiore. Inoltre la maggior parte degli editor di LaTeX forniscono dei suggerimenti per il completamento dei comandi, rendendo più semplice la digitazione ed aiutando la memorizzazione degli stessi, e spesso hanno dei pulsanti che supportano nell'inserimento delle formule matematiche più comuni.

	Codice	Risultato
Apici	<code>a^2</code>	a^2
Pedice	<code>a_2</code>	a_2

Frazioni	<code>\frac{2}{4}</code>	$\frac{2}{4}$
Derivate	<code>x', y'', f', f''</code>	x', y'', f', f''
Funzioni elementari	<code>\sin x + \ln y + \operatorname{sgn}</code>	$\sin x + \ln y + \operatorname{sgn} z$
Insiemi	<code>\forall \exists \emptyset \emptyset \in \notin \varnothing \in \notin \in \notin \in \notin</code>	$\forall \exists \emptyset \emptyset \in \notin \in \notin \in \notin \in \notin$
Radicali	<code>\sqrt{2} \approx 1{,}4</code>	$\sqrt{2} \approx 1,4$
Radicali	<code>\sqrt[n]{x}</code>	$\sqrt[n]{x}$
Limite	<code>\lim_{n \to \infty} x_n</code>	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
Distinzione di casi	<code>f(n)=\begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ 3n+1, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}</code>	$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ 3n + 1, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

4. Un progetto didattico

La genesi del progetto

Dopo aver analizzato gli strumenti disponibili ed alla luce di un confronto con la prof.ssa Capietto ed il dott. Murru, siamo giunti alla conclusione che lo strumento che in questo momento potrebbe essere più utile per Cristina è il LaTeX. Questa convinzione si fonda su alcune considerazioni.

In primo luogo Cristina ha manifestato la propria difficoltà nello scrivere le formule, quindi l'acquisizione di questo strumento (anche con un repertorio limitato di comandi) potrebbe permettere a Cristina di elaborare facilmente relazioni e approfondimenti, ed essere pertanto stimolante dal punto di vista della motivazione, in quanto spendibile nel brevissimo periodo.

Inoltre nell'ipotesi, che purtroppo non possiamo scartare, di una diminuzione del residuo visivo, l'aver già acquisito il LaTeX le consentirebbe di ascoltare o produrre formule utilizzando questa sintassi che, come visto in precedenza, elimina le ambiguità nella lettura della formula a fronte di un aggravio relativamente lieve in termini di lunghezza della linearizzazione.

Ma allo stesso tempo non avremmo voluto caricare Cristina (che oltre al tempo che dedica allo studio nel pomeriggio è anche impegnata in diversi allenamenti a settimana di nuoto, che pratica a livello agonistico con risultati importanti) di un impegno gravoso, che avrebbe potuto farle percepire questo apprendimento come un peso ulteriore e non come una risorsa utile, per quanto la ragazza sia collaborativa e volitiva.

A queste considerazioni si aggiunga che il LaTeX è di fatto lo standard per la redazione di testi scientifici, e che quindi rappresenterebbe una risorsa molto utile per tutti gli studenti del liceo delle scienze applicate, la cui caratterizzazione rispetto ad uno scientifico tradizionale è proprio nell'importanza che viene data all'apprendimento laboratoriale ed alla costruzione del sapere da parte degli allievi: è molto frequente che i ragazzi debbano produrre relazioni di esperienze di laboratorio per scienze o fisica, o scrivere documenti ad alta densità di formule ed espressioni sia per matematica che per informatica.

La conoscenza dei rudimenti di questo linguaggio potrebbe dunque essere utile e spendibile fin dal primo anno, ed eventualmente ampliabile negli anni successivi. Da questa suggestione è nata l'idea di non lavorare esclusivamente con Cristina, con il conseguente sovraccarico in termini di tempo e fatica, ma di creare un progetto didattico più ampio ed inclusivo che coinvolgesse la classe, con l'acquisizione di una competenza non prevista inizialmente nella progettazione curricolare ma dall'indubbia utilità per la costruzione del profilo in uscita previsto dalle scienze applicate (studenti che sappiano coniugare la riflessione teorica e l'applicazione di quanto appreso). A questo punto si trattava di analizzare la fattibilità dell'idea. Come implementare un modulo su LaTeX per la classe? Con quali obiettivi? In quale momento dell'anno?

Come

LaTeX è un linguaggio di markup sicuramente più semplice da utilizzare rispetto al TeX, ma non immediatamente comprensibile nella sua struttura e nella sua sintassi, soprattutto da parte di allievi

di una prima superiore che non hanno nessuna dimestichezza con i linguaggi formali e con la programmazione: per questo è necessario, almeno per incominciare, enucleare alcuni concetti fondamentali, esposti con la massima semplicità e chiarezza, e fornire molto velocemente strumenti per l'applicazione pratica di quanto appreso.

Ricadute nella didattica della matematica

Oltre all'utilità presente e futura per la redazione di testi scientifici, insegnando “come” scrivere formule matematiche si possono fare alcune incursioni di carattere più specificamente didattico legate al “cosa” quelle formule matematiche rappresentano.

Struttura delle espressioni

La costruzione di una formula LaTeX richiede un'estrema chiarezza sulla struttura dell'espressione rappresentata. Un passaggio intermedio preliminare alla scrittura in LaTeX potrebbe essere la rappresentazione con un albero della struttura della formula, dal quale potrebbe immediatamente discendere la “traduzione” in LaTeX, ma che potrebbe contestualmente permettere una riflessione in merito ad alcuni degli errori più comuni nella manipolazione delle formule, in particolare quelle algebriche. Solo a titolo di esempio si potrebbe analizzare l'albero⁹ che rappresenta una frazione algebrica, mostrando in maniera più plastica quali semplificazioni sono lecite e quali no. L'idea sarà dettagliata meglio quando si descriverà la progettazione didattica.

Concetto di funzione

La scrittura di alcune formule matematiche (come altri comandi LaTeX) prevede che determinate funzioni, evidenziate dalla sintassi con un *backslash*, prendano altri oggetti come argomento. Ad esempio il coseno di x viene scritto con la formula `\cos{x}`. Come si può notare l'argomento della funzione è inserito tra parentesi graffe. Il risultato della compilazione è $\cos x$. Nel caso di composizione di funzioni, la funzione più interna viene scritta tra le graffe come argomento di quella esterna, con una scrittura simile alla tradizionale notazione $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. L'apprendimento della sintassi di LaTeX potrebbe rappresentare un ulteriore momento di riflessione sul concetto di “argomento” di una funzione e sul consolidamento di un'immagine mentale delle funzioni viste come “macchine di input-output”, che prendono in ingresso un valore del dominio e restituiscono un valore in uscita.

Quando

L'ultimo aspetto da definire è quale sia il momento più indicato per inserire il modulo didattico sul LaTeX nella scansione curricolare dell'anno, tenendo conto sia della spendibilità all'interno delle altre discipline (ragione che indurrebbe ad introdurlo il prima possibile), sia dell'eventuale intreccio con la progettazione di matematica. Sarebbe coerente programmarlo contemporaneamente alla

9 Esistono notazioni specifiche per rappresentare le formule matematiche: ad esempio la notazione polacca è una particolare sintassi atta a denotare formule matematiche e algoritmi, caratterizzata dal fatto che gli operatori si trovano tutti a sinistra degli argomenti. Per questo motivo, viene anche detta notazione prefissa. Ma per non aumentare eccessivamente la complessità per i ragazzi si può utilizzare un semplice albero che mostri graficamente la priorità degli operatori

trattazione dell'algebra, con il vantaggio di avere uno strumento per scrivere in elettronico le formule ed insieme approfondire il discorso della struttura delle espressioni nella rappresentazione ad albero, come descritto in precedenza. Lo studio del LaTeX andrebbe anche temperato con il programma di informatica, magari introducendolo dopo aver visto altri esempi di linguaggi di markup di più immediato utilizzo (come l'html, che non necessita di compilazione e quindi di installazione di programmi specifici da parte dei ragazzi e li introduce egregiamente nel “mondo” dei marcatori e dei linguaggi formali, con possibilità di applicazioni immediate ed interessanti per i ragazzi).

Le prime considerazioni suggerirebbero di introdurre il LaTeX immediatamente, mentre pensando agli aspetti informatici sarebbe più indicato farlo verso la fine dell'anno. Ma le differenti esigenze possono essere mediate: si può introdurre qualche comando LaTeX sfruttando degli editor specifici già presenti su GeoGebra o integrabili in LibreOffice come estensioni, con i quali scrivere tutte le formule matematiche necessarie per relazioni ed esercitazioni, e qualche mese dopo riprendere in maniera più estesa il LaTeX, presentandolo come linguaggio tipografico ed insegnando agli studenti a crearne e compilarne un sorgente.

Un progetto in due fasi

Alla luce delle considerazioni fatte finora e grazie al confronto con la prof.ssa Capietto ed il dott. Murru sono passato alla definizione di un progetto didattico suddiviso in due fasi, come descritto in precedenza: nella prima l'obiettivo è introdurre un insieme di comandi molto semplificato per scrivere espressioni matematiche ed utilizzarlo immediatamente nelle discipline scientifiche; nella seconda invece si vuole affrontare in maniera più dettagliata la struttura ed il funzionamento del linguaggio, giungendo alla creazione di documenti interamente scritti in LaTeX.

Prima fase

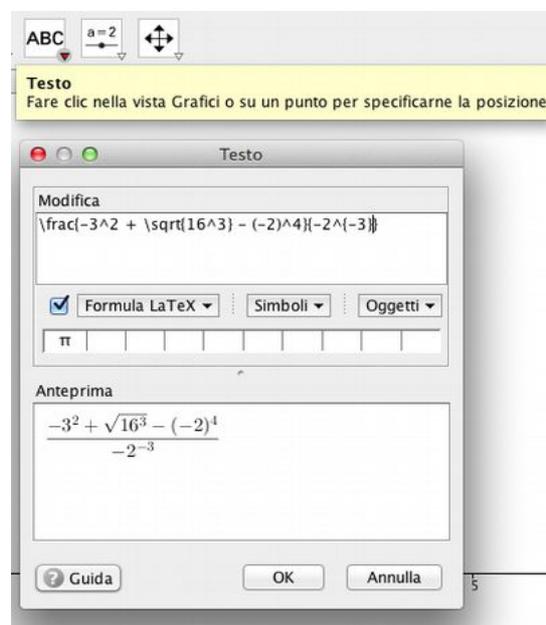
Poichè LaTeX è lo standard de facto per la scrittura di documenti scientifici ho immaginato che gli strumenti di videoscrittura più diffusi ed i software matematici possedessero plug-in o espansioni per sfruttare le potenzialità di questo linguaggio. Con una ricognizione sul web ho trovato estensioni sia per Libreoffice.org che per Openoffice.org (suite di office automation distribuite rispettivamente con una licenza LGPL e con una licenza libera, quindi scaricabili ed installabili dagli studenti sui propri computer, oltre a poter essere usate facilmente a scuola). Per Microsoft Word non ho trovato una soluzione altrettanto pratica¹⁰, e trattandosi di software commerciale (per quanto diffuso) ho deciso di soprassedere. Inoltre ho scoperto che anche in GeoGebra è possibile inserire formule matematiche con un editor LaTeX.

Uno spunto didattico: LaTeX e l'algebra Geogebra

Inizialmente occorre introdurre i ragazzi agli strumenti con i quali possono produrre formule in LaTeX. Si potrebbe cominciare con GeoGebra, facilmente utilizzabile su una grande varietà di dispositivi e già installato nel laboratorio di informatica della scuola. Direttamente dai pulsanti della schermata principale si seleziona l'inserimento del testo, e spuntando l'apposito pulsante "Formula LaTeX" si può inserire il comando nella parte alta e visualizzare l'anteprima nella parte sottostante.

Alberi per rappresentare le formule

In questo modo si possono scrivere espressioni aritmetiche o algebriche. Come anticipato in precedenza la scrittura in un linguaggio formale impone una riflessione sulla formula stessa. Per capire in quale ordine scrivere gli operatori è necessario "destrutturare" la formula, ragionando sulla priorità dei singoli operatori e quindi

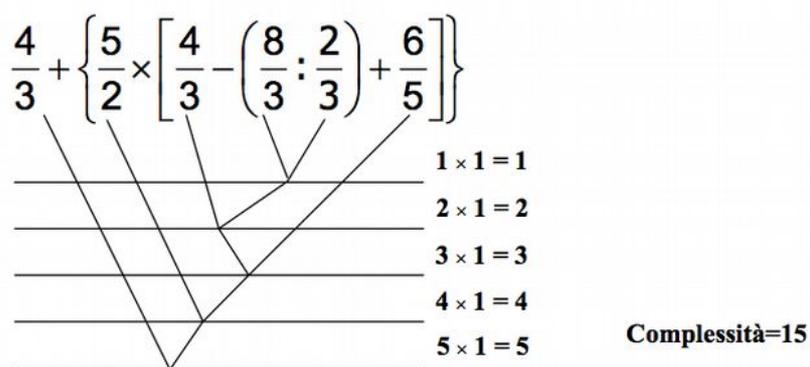


¹⁰ Ho scoperto che esistono software come Aurora o TexPoint che in qualche modo permettono di gestire comandi LaTeX in Word editando la sorgente, ma entrambi sono a pagamento.

sull'ordine con cui vanno eseguite le operazioni.

Una delle letture da cui ho tratto ispirazione è un'attività di Matematica 2003, dal titolo “sciogliamo i nodi”, che aveva

l'obiettivo di far precedere al calcolo algebrico una fase preliminare di carattere grafico, con l'analisi della struttura dell'espressione ed un calcolo sommario della “complessità” della stessa.

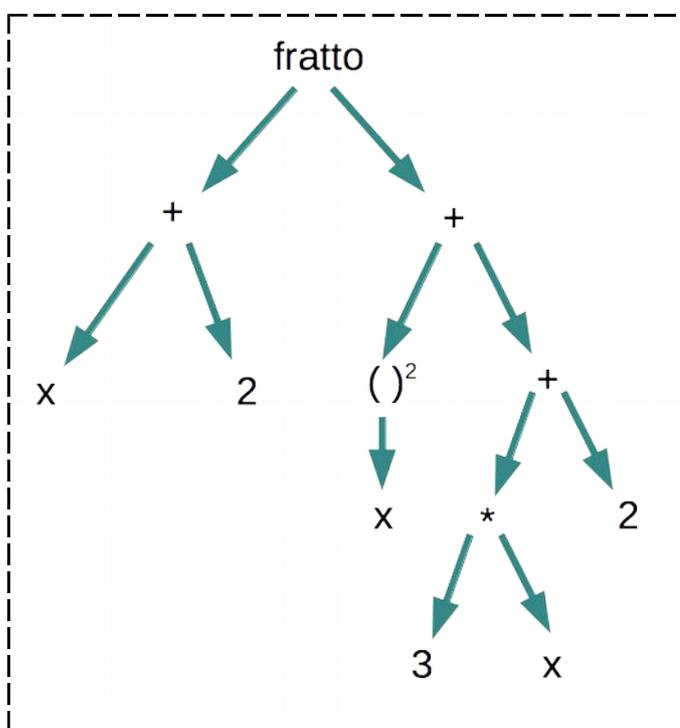


L'immagine a lato, tratta

dalla descrizione dell'attività, potrà rendere in maniera intuitiva l'idea del procedimento proposto.

In maniera analoga si potrebbe costruire un albero che rappresenta la “struttura” dell'espressione, nel quale l'ultima operazione da effettuare rappresenterebbe la radice, e scendendo verso le foglie si incontrerebbero le operazioni con priorità maggiore.

Si potrebbe cominciare con un'espressione aritmetica per prendere dimestichezza con il metodo, quindi passare ad espressioni algebriche. In particolare quest'attività potrebbe rivelarsi utile nel periodo in cui i ragazzi studiano per la prima volta le frazioni algebriche. Uno degli errori più frequenti nella manipolazione di frazioni algebriche è la semplificazione di addendi che compaiono sia al numeratore che al denominatore. Ad esempio in $\frac{x+2}{x^2+3x+2}$ non è infrequente veder semplificare il “+2” a numeratore ed a denominatore. Rappresentando la frazione

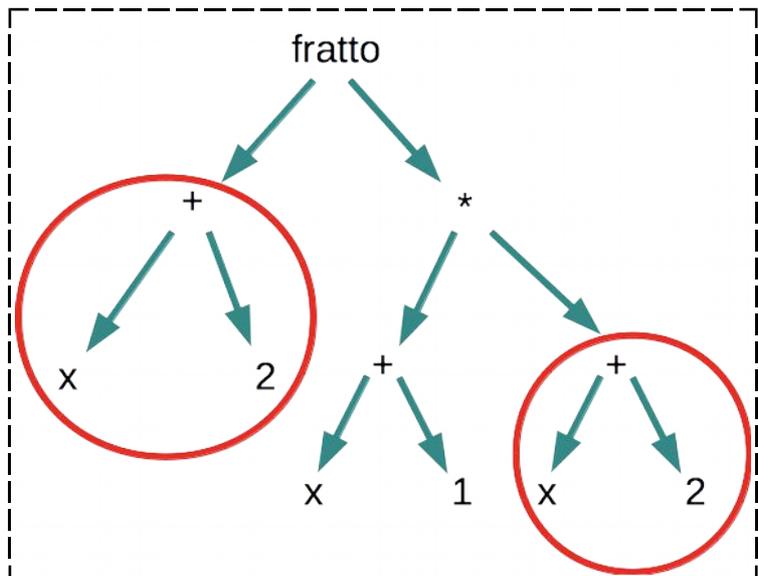


sotto forma di albero, come nella figura, si può sottolineare come i due “sottoalberi” che rappresentano i “+2” non siano semplificabili, in quanto non sono fattori del numeratore e del denominatore.

Se scomponiamo il denominatore, riscrivendo la frazione come $\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$ l'albero che rappresenta le operazioni da compiere si modifica, come evidenziato nella figura successiva. Anche in quest'albero non posso semplificare la x a numeratore con una x a denominatore, o il “+2” sopra e sotto, come prima perché non sono fattori. La struttura ad albero mi permette di identificare più facilmente un fattore, cioè un sottoalbero che sia collegato a tutti gli altri sottoalberi (del numeratore

o del denominatore) solo da moltiplicazioni. In questo modo posso evidenziare due sottoalberi identici, che rappresentano il binomio $x+2$, verificare che entrambi sono fattori ed in questo modo semplificarli.

Un procedimento analogo mi permetterebbe di motivare la semplificazione di un fattore elevato ad una potenza, come nella frazione $\frac{x+2}{(x+1)(x+2)^3}$, in quanto il fattore $x+2$ elevato alla terza a denominatore sarebbe un sottoalbero identico a quello del numeratore (ma legato con un ramo ad un'operazione successiva di elevamento a potenza).

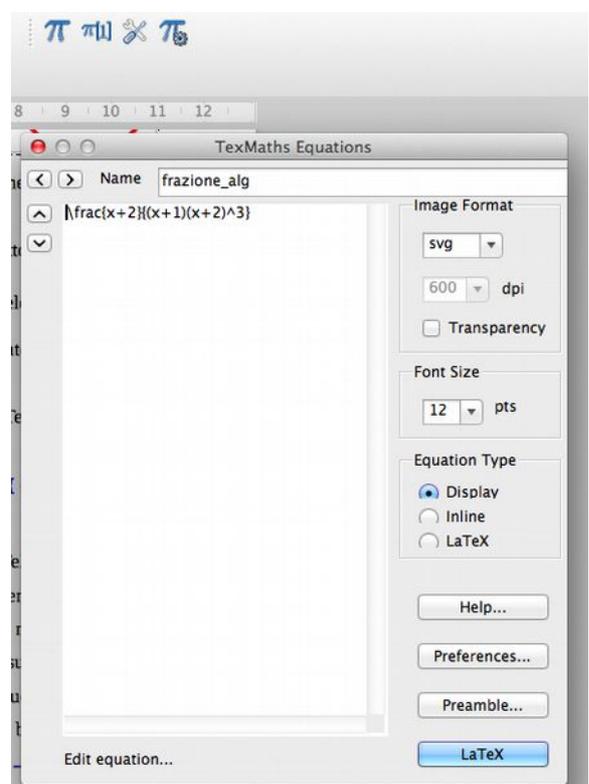


La struttura così creata mi permette di generare correttamente il sorgente LaTeX per la formula, identificando che devo innanzitutto dichiarare la frazione (con il comando `\frac{...}{...}`) e successivamente indicare numeratore e denominatore, ottenendo `\frac{x+2}{(x+1)(x+2)^3}`.

Libreoffice.org

La competenza acquisita nello scrivere espressioni utilizzando i comandi LaTeX potrebbe essere immediatamente spesa per la stesura delle relazioni di laboratorio di fisica e scienze. Poiché questa fase del progetto didattico potrebbe essere messa in campo nella seconda metà di marzo, periodo nel quale si dovrebbe trattare in fisica la forza elastica, la creazione della relazione sugli esperimenti di laboratorio scritta in elettronico con le formule in LaTeX potrebbe essere un buon compito per le vacanze di Pasqua. La rappresentazione dei vettori in LaTeX è molto semplice, basta premettere il comando `\vec`, per cui la formula $\vec{F} = -k\vec{x}$ si ottiene con il codice `\vec F = -k \vec x`.

L'integrazione di LaTeX in LibreOffice, strumento in questo momento usato dalla classe per la videoscrittura, è decisamente semplice utilizzando l'estensione TexMaths, scaricabile in maniera facile e gratuita, sviluppata a partire da OOoLaTeX, un'estensione con le stesse funzionalità per OpenOffice.org. Per far funzionare TexMath è necessario che sul computer sia



presente un'installazione funzionante di LaTeX, che comunque sarebbe stato necessario installare successivamente, al momento di utilizzare il LaTeX come linguaggio tipografico. L'immagine precedente mostra in alto i pulsanti aggiunti alla barra degli strumenti e nel resto dell'immagine la finestra utilizzata da TexMath su Libreoffice nella generazione di una delle formule usate in precedenza. Come si può notare l'utilizzo è decisamente semplice, cosicché tutto le energie possono essere convogliate sulla creazione delle formule.

Seconda fase

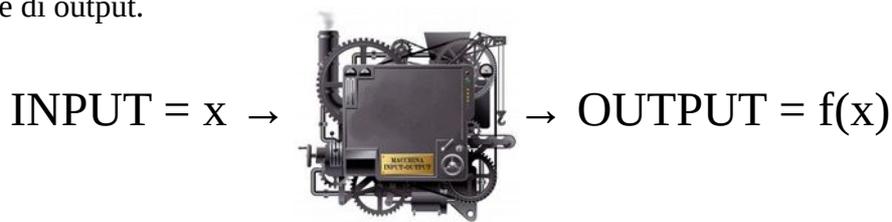
Nella seconda fase si potrebbero introdurre i comandi più specificamente legati alla gestione dei contenuti di un documento ed alla formattazione dello stesso e le nozioni sul funzionamento del compilatore TeX e di LaTeX.

È quindi necessaria l'installazione di LaTeX (esistono distribuzioni di facile installazione sia per Linux che per Macintosh che per Windows) sia in laboratorio che sulle macchine dei ragazzi (se devono esercitarsi in autonomia a casa), qualora questa non sia già stata effettuata nella fase precedente.

A questo punto è necessario far acquisire ai ragazzi gli elementi basilari della sintassi di LaTeX. Una trattazione approfondita non è necessaria agli scopi di questa tesi, mi limiterò ad evidenziare come anche questa fase all'apparenza così lontana dalla matematica può essere utilizzata con delle ricadute sulla didattica

Ricadute nella didattica: il concetto di funzione e LaTeX

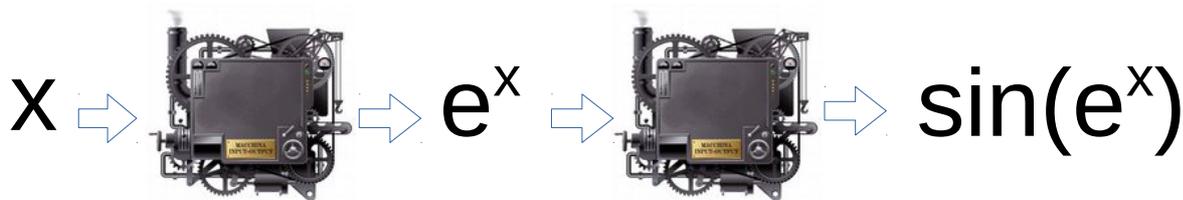
Quello di funzione è un concetto chiave della matematica ed, anche in relazione alle Nuove Indicazioni Nazionali per i licei del 2010, è necessario interrogarsi su come introdurlo in modo che venga colto nella sua complessità cognitiva. La definizione formale del concetto di funzione, o concept definition [Tall, 1988] potrebbe essere: “la relazione tra due insiemi A e B in cui ogni elemento di A è in relazione con uno ed un solo elemento di B”. Gli studi di didattica della matematica hanno mostrato come la comprensione della definizione sia tutt'altro che immediata. Infatti quello di funzione è un concetto sfaccettato: per esempio può essere vista come un'azione che assegna ad ogni elemento x di A un corrispondente elemento f(x) in B, o come un grafico, o come una tavola di valori. In pubblicazioni o libri scolastici [Impedovo, Paola 2013] che propongono alternative alle modalità tradizionali di trasmissione del concetto di funzione, esso viene descritto ad esempio come una “macchina” di input-output, che preso in input un valore lo “trasforma” in uno ed un solo valore di output.



Quella della macchina di input-output rappresenta un'immagine facilmente comprensibile dai ragazzi, che può aiutarli a strutturare una concept image [Tall, 1988] delle funzioni facilmente

richiamabile ed utilizzabile, ad esempio, per verificare se un determinato oggetto matematico sia o meno una funzione. Spesso la concept image che gli studenti hanno di un concetto corrisponde con la prima rappresentazione che hanno ricevuto del concetto stesso, quindi l'immagine della macchina di input-output potrebbe rivelarsi un ottimo punto di partenza. Nell'insegnare la scrittura delle formule in LaTeX si possono enfatizzare, all'interno delle formule, gli elementi che descrivono delle funzioni, mostrando come l'input (della funzione rappresentata come macchina) venga scritto tra parentesi graffe.

Ad esempio $y = \sin\{x\}$, rappresentato come $y = \sin x$, è la funzione che prende in input il valore di x . Dall'immagine della funzione come macchina di input-output si può facilmente introdurre la nozione di “funzione di funzione”, rappresentabile come una sequenza di due macchine in cui l'output della prima diventa l'input della seconda. Anche in questo caso la sintassi di LaTeX può rappresentare un'occasione per anticipare questo concetto, che può essere successivamente ripreso ed approfondito. Ad esempio il codice LaTeX $y = \sin\{e^x\}$ genera l'espressione $y = \sin e^x$: come si vede dall'esempio, la struttura di “funzione di funzione” risulta meno evidente dalla formula, mentre viene maggiormente evidenziata dalla sintassi LaTeX, in cui l'input è marcato dalle parentesi graffe.



Si potrebbero dedicare a questa fase le ultime settimane dell'anno scolastico. In questo modo ci si potrebbe collegare con il programma di matematica, nel quale si affrontano le equazioni dal punto di vista grafico, come intersezioni della curva che rappresenta una funzione con l'asse delle ascisse. In questo modo si potrebbe approfittare della sintassi del LaTeX per tornare sul concetto di funzione. Inoltre in questo modo si avrebbe il tempo di far precedere questa fase da un approfondimento sull'html, in modo che i ragazzi possano interiorizzare il concetto di linguaggio formale e di sintassi con un linguaggio di markup più semplice e intrigante per loro, che trascorrono tanto tempo navigando nel web. Infine si potrebbero sfruttare le vacanze estive per permettere ai ragazzi di esercitarsi, eventualmente con la creazione di una ricerca o di un resoconto delle proprie attività estive utilizzando solamente il LaTeX.

Attività conclusiva

Un lavoro molto interessante che potrebbe essere avviato e portato avanti negli anni successivi è la produzione collaborativa di un manuale di matematica o di fisica, in cui gli allievi, singolarmente o a gruppi, potrebbero redarre la propria parte creando i sorgenti in LaTeX, e successivamente compilare tutti i sorgenti in un unico testo. Un lavoro del genere potrebbe avere ricadute molto interessanti sia nell'ottica della produzione dei contenuti (si approfondirebbero in maniera

laboratoriale concetti come la progettazione di un documento scientifico o la necessità di definire degli standard affinché il risultato di un lavoro non individuale risulti coerente) che dell'utilizzo dei formalismi matematici. Inoltre si lavorerebbe in maniera positiva sulle dinamiche relazionali all'interno della classe (si potrebbero valorizzare con ruoli diversi le diverse attitudini dei ragazzi).

Conclusioni

Gli ostacoli che la disabilità visiva oppone all'apprendimento della matematica sono molti e sfaccettati. Prendiamo ad esempio agli strumenti più comuni usati per esprimere concetti matematici: le formule ed i grafici. Entrambi sono rappresentati (pensiamo ad una frazione algebrica o ad una funzione sul piano cartesiano) in modo da essere immediatamente interpretati nel loro significato globale, per permettere di analizzare i particolari rilevanti in un secondo tempo. Chi ha una disabilità visiva accede a questi contenuti attraverso altri canali sensoriali, operando necessariamente in senso opposto, dal particolare al generale, con conseguenti difficoltà nella comprensione e nella memorizzazione. A complicare la situazione spesso è necessario passare da una rappresentazione bidimensionale delle formule (pensiamo ad esempio ad una frazione algebrica, che è scritta su due “piani”) ad una “versione” linearizzazione, più complessa da comprendere. Inoltre la lettura delle formule può dar luogo ad ambiguità, per evitare la quale è necessario aggiungere altri simboli ancora.

Il ventaglio degli strumenti elaborati per facilitare l'accesso ai contenuti di studio, ed in particolare a quelli matematici, da parte degli studenti con disabilità visiva è estremamente ampio e copre uno spettro di funzioni che va dall'accesso ai contenuti stessi al supporto per la comprensione, fino alla possibilità di produrre materiale originale. Nella tesi viene riportata una panoramica frutto di una ricerca che ha investito vari ambiti, dalle tecnologie assistive agli strumenti per la redazione di contenuti matematici fino a progetti specifici per l'accessibilità delle informazioni scientifiche da parte dei disabili visivi.

Lo scopo della ricerca, condotta con la guida ed il supporto del gruppo di ricerca “*Per una Matematica accessibile e inclusiva*” del Dipartimento di Matematica “G. Peano”, era quello di individuare gli strumenti più adatti per Cristina, una mia studentessa del primo anno di liceo affetta dalla malattia di Stargardt. Dopo due incontri ed una serie di riflessioni la nostra attenzione si è diretta verso il LaTeX, un linguaggio di markup molto noto in ambito accademico per la grande versatilità nella redazione di testi scientifici che, se appreso da Cristina, potrebbe risultare utile nell'immediato e rivelarsi prezioso nel proseguo dei suoi studi.

Nel valutarne la fattibilità quest'idea si è evoluta in un progetto più ampio che coinvolge tutta la classe di Cristina nell'apprendimento del LaTeX, strutturato in due fasi successive, ognuna delle quali potrebbe rappresentare l'occasione per lavorare con i ragazzi, oltre che sulla sintassi del linguaggio, su alcuni concetti matematici importanti del primo anno di studi. Nella *prima fase*, contestualmente all'acquisizione dei comandi per la scrittura di formule matematiche, si potrebbe approfondire la struttura delle espressioni, con un focus particolare sulle frazioni algebriche e su alcuni dei più comuni errori che i ragazzi compiono manipolandole (ad esempio nella semplificazione delle stesse). Nella *seconda fase* si intende sfruttare la sintassi del linguaggio per la traduzione delle funzioni matematiche con lo scopo di consolidare una delle possibili immagini proposte per acquisire il concetto di funzione, quella di una macchina di input-output, applicando questa immagine per introdurre la composizione di funzioni.

Bibliografia

- Atti del convegno “international conference: education for all” - Warsaw, (2007). *Towards an accessible science: facilitating access to scientific digital resources for visually impaired students* .
- Armano, T., Capietto, C., Illengo, M., Murru, N., Rossini, R., (2014). *An overview on ICT for the accessibility of scientific TeXts by visually impaired students*, SIREM – SIE – L 2014, 4 pages.
- Archambault, D., Stöger, B., Fitzpatrick, D., & Miesenberger, K., (2007). *Access to scientific content by visually impaired people*. Upgrade, VIII(2), 14 pages.
- Bernareggi, C., (2010). *Non-sequential Mathematical Notations in the LAMBDA System. Computers Helping People with Special Needs, Lecture Notes in Computer Science*, 6180, 389-395.
- Tobias Oetiker Hubert Partl, Irene Hyna e Elisabeth Schlegl. (2000). *Una (mica tanto) breve introduzione a LaTeX2ε*.
- MIUR, (2010). *Indicazioni Nazionali Liceo Scientifico*.
- Paola d., Impedovo M., (2014). *Matematica dappertutto*, Zanichelli Editore.
- Tall, D. (1988). *Concept Image and Concept Definition*, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, 37- 41.
- MIUR, UMI et al. (2003). *Quaderni del MIUR, Matematica 2003*.

Sitografia

URL

Contenuto

www.w3.org	<i>Sito ufficiale del consorzio W3C, che ha sviluppato le specifiche del linguaggio MathML</i>
www.inftyproject.org/en/index.html	<i>Home page del progetto Infty</i>
www.lambdaproject.org/it/home_it	<i>Home page del progetto Lambda</i>
www.apple.com/it/accessibility/osx/voiceover/	<i>Pagina di VoiceOver, screen reader per OSX</i>
wiki.gnome.org/Projects/Orca	<i>Progetto Orca, screen reader per Linux</i>
www.windoweyesforoffice.com	<i>Windows Eye, screen reader per Windows</i>
it.wikipedia.org/wiki/JAWS	<i>JAWS (acronimo per Job Access With Speech), uno screen reader per sistemi operativi Microsoft.</i>
www.daisy.org/daisy-projects	<i>Home page del progetto Daisy</i>
www.dessci.com/en/products/mathtype/works_with.asp	<i>Pagina di Math Type sul sito di Digital Science</i>
www.uicpiemonte.it/Irifer	<i>Sito piemontese dell'unione italiana dei ciechi e degli ipovedenti</i>
LaTeX-project.org	<i>Sito ufficiale del progetto LaTeX</i>
www.guiTeX.org/home/	<i>Il sito del Gruppo utilizzatori Italiani di TeX, creato con l'intento di incrementare l'utilizzo di LaTeX</i>
www.fi.infn.it/pub/tex/doc/html/latex_19.html	<i>Elenco simboli LaTeX</i>
www.access2science.com/latex/tutorial_txht.xhtml	<i>Istruzioni sull'uso di tex4ht</i>
www.chikrii.com/products/tex2word/tex-to-word/	<i>Progetto per convertire i formati di TeX e Word</i>
miktex.org/about	<i>Implementazione di LaTeX per Windows</i>
www.handimatica.it/Handi1998/Convegni98/matematica/C98grzia.htm	<i>Atti del convegno: "La matematica e gli studenti con minorazioni visive"</i>