

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

Appunti di
Modelli Matematici per le
Applicazioni
e
Elementi di Teoria dei Giochi e
delle Reti
versione 8

Paolo Cermelli

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Giochi in forma strategica	3
1.1	Un esempio: il dilemma del prigioniero (PD)	3
1.2	Definizioni	4
1.3	Equilibrio di Nash	9
1.4	Dominanza	17
1.5	Esempi	20
1.6	Esercizi sugli equilibri di Nash	29
2	Giochi in forma estesa	35
2.1	Un esempio	35
2.2	Definizioni	36
2.3	Strategie comportamentali	41
2.4	Induzione all'indietro ed equilibri subgame perfect: minacce e promesse non credibili.	42
2.4.1	Grande Scimmia vs. Piccola Scimmia	42
2.5	Un esempio: il poker semplificato	46
2.6	Esercizi	49
3	Giochi evolutivi	52
3.1	Strategie evolutivamente stabili	52
3.2	La dinamica del replicatore	56
3.3	Esercizi	60
3.4	Richiami sui sistemi dinamici	61
4	Giochi iterati	63
4.1	Automati decisionali	65
4.2	I teoremi folk di Nash	72

5	L'algoritmo PageRank	77
5.1	Digrafi	77
5.1.1	Irriducibilità	78
5.1.2	Primitività	81
5.2	Richiami sulle catene di Markov a stati finiti	84
5.3	La matrice di Google	87
6	Modelli generativi per il web	94
6.1	Grafi casuali	94
6.2	Leggi di potenza	96
6.3	Modelli online	96
6.4	Attaccamento casuale	97
6.5	Attaccamento preferenziale	99
6.6	Il modello di Miller	102
7	Cenni sulle reti sociali	104
7.1	Centralità	104
7.2	Raggruppamento	105
7.3	Comunità	106
8	Alcuni problemi di selfish routing	108
8.1	Il paradosso di Braess	108
8.2	Il paradosso di Knight	114

Capitolo 1

Giochi in forma strategica

1.1 Un esempio: il dilemma del prigioniero (PD)

Il dilemma del prigioniero è uno dei più importanti modelli di competizione. E' uno degli strumenti di base per formulare e studiare problemi decisionali nella biologia evolutiva, in economia e in psicologia sociale.

Il nome *dilemma del prigioniero* fu introdotto da Albert W. Tucker nel 1951. Tucker presentò il problema sotto forma di una breve detective story. Eccone una versione:

La polizia ha arrestato due persone sospettate di avere compiuto un reato (i due giocatori). Durante l'interrogatorio, in cui gli arrestati vengono separati, vengono poste ad entrambi le seguenti opzioni: (i) se l'arrestato confessa il reato e denuncia il compagno, verrà liberato e il suo compagno sarà condannato a 7 anni di detenzione, a meno che anche il compagno non confessi, nel qual caso verranno condannati entrambi, ma solo a 5 anni per premiare la collaborazione. (ii) Nel caso che l'arrestato non confessi, se anche il suo compagno non confessa entrambi vengono condannati solo a un anno per un reato minore, non essendoci prove, ma se il compagno confessa il reato, l'arrestato verrà condannato alla pena massima di 7 anni.

La situazione può venire schematizzata come segue:

	tace	confessa
tace	-1, -1	-7, 0
confessa	0, -7	-5, -5

E' chiaro che per ciascun giocatore separatamente è preferibile sempre tradire il compagno, ma questo porta ad una situazione paradossale, in quanto entrambi devono scontare 5 anni di carcere invece di uno solo, pena che dovrebbero scontare in caso tacessero entrambi.

Il dilemma del prigioniero è un esempio di *gioco in forma strategica* a due giocatori e due strategie. Si vede da quest'esempio che il problema è completamente determinato da: l'insieme di giocatori; le strategie a loro disposizione; il payoff relativo a tutte le combinazioni possibili di strategie.

1.2 Definizioni

Un gioco è un modello matematico per un problema di decisione interattiva.

Definizione 1.2.1. Un *gioco in forma strategica* è una terna

$$\Gamma = \{\mathcal{N}, (C_i)_{i \in \mathcal{N}}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}}\},$$

dove

- \mathcal{N} è l'insieme dei giocatori (in questo corso lo supponiamo finito di cardinalità N e spesso scriveremo $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$);
- C_i è l'insieme delle *strategie* a disposizione del giocatore $i \in \mathcal{N}$. Gli elementi di C_i sono detti *strategie pure*, e vengono denotati genericamente con la lettera minuscola c_i ;
- Si denota con C l'insieme

$$C := \prod_{i \in \mathcal{N}} C_i = C_1 \times \dots \times C_N$$

i cui elementi sono i *profili di strategie pure*, ovvero le N - *uple* di strategie pure, una per ciascun giocatore. Un profilo di strategie pure è quindi

$$c := (c_1, \dots, c_N).$$

- u_i è la funzione *payoff* del giocatore $i \in \mathcal{N}$, che associa un numero reale a ciascun profilo di strategie, ovvero

$$\begin{aligned} u_i : C = C_1 \times \dots \times C_N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (c_1, \dots, c_N) &\mapsto u_i(c_1, \dots, c_N) \\ c &\mapsto u_i(c) \end{aligned}$$

Dato un profilo di strategie $c = (c_1, \dots, c_N)$ e un giocatore $i \in \mathcal{N}$, si scrive

$$c_{-i} = (c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_N),$$

per la $(N - 1)$ -upla delle strategie di tutti gli altri giocatori. Analogamente, indichiamo con

$$\mathcal{N}_{-i} = (1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, N)$$

l'insieme dei giocatori escluso l' i -esimo, e con

$$C_{-i} = C_1 \times \dots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times \dots \times C_N = \prod_{j \in \mathcal{N}_{-i}} C_j$$

l'insieme dei profili di strategie pure dei giocatori escluso l' i -esimo.

Un gioco a 2 giocatori si può rappresentare mediante una matrice a doppia entrata, detta *matrice dei payoff*. Il giocatore 1 viene detto giocatore riga, e il giocatore 2 viene detto colonna. Le righe della matrice corrispondono alle strategie pure del giocatore riga, e si pone $C_1 = (R_1, \dots, R_h)$, mentre le colonne alle strategie del giocatore colonna, e si pone $C_2 = (C_1, \dots, C_k)$. La coppia di numeri all'intersezione della i -esima riga e della j -esima colonna è la coppia di payoff relativi al profilo di strategie (R_i, C_j) . Ad esempio

	C_1	C_2
R_1	-1, 0	0, -1
R_2	-1, 1	1, -1

La nozione di strategia pura è troppo restrittiva e va estesa. Indichiamo quindi con $\Delta(C_i)$ l'insieme delle misure di probabilità sull'insieme C_i delle strategie pure del giocatore i . Ad esempio, se la cardinalità di C_i è 2 si ha

$$\begin{aligned} \Delta(C_i) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_k \geq 0, k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 p_k = p_1 + p_2 = 1\} \\ &= \{(p, 1 - p) \in \mathbb{R}^2 : p \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

mentre se la cardinalità di C_i è 3 si ha

$$\Delta(C_i) = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_k \geq 0, k = 1, 2, 3, \sum_{k=1}^3 p_k = p_1 + p_2 + p_3 = 1\}.$$

Questo insieme (un segmento nel primo caso, un triangolo nel secondo caso) è un $(n - 1)$ - simpleso in \mathbb{R}^n . Si ha in generale, se $|C_i| = k$,

$$\Delta(C_i) = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1\}.$$

Questo insieme è chiuso e limitato in \mathbb{R}^k , e quindi compatto, ed è convesso, ovvero se contiene due punti, contiene anche tutto il segmento che li unisce:

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta(C_i) \quad (1 - \lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q} \in \Delta(C_i), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Infatti, se $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta(C_i)$ vuole dire che $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i = 1$, dal che segue che $\sum_{i=1}^k ((1 - \lambda)p_i + \lambda q_i) = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k p_i + \lambda \sum_{i=1}^k q_i = (1 - \lambda) + \lambda = 1$.

Definizione 1.2.2. Si dice *strategia mista* per il giocatore i una misura di probabilità sull'insieme C_i delle sue strategie pure e la si indica con

$$\sigma_i \in \Delta(C_i).$$

Se $c_i \in C_i$ è una strategia pura del giocatore i , si indica con

$$\sigma_i(c_i) \in [0, 1]$$

la probabilità assegnata a questa strategia pura nella strategia mista $\sigma_i \in \Delta(C_i)$. In altri termini, $\sigma_i(c_i)$ è la probabilità che il giocatore i giochi la strategia pura c_i .

Ad esempio nel dilemma del prigioniero (PD) una strategia mista per il giocatore 1 è

$$\sigma_1 = (p, 1 - p), \quad p \in [0, 1]$$

dove p è la probabilità di cooperare e $1 - p$ è la probabilità di competere.

Osserviamo che una strategia mista può essere interpretata in due modi differenti: da una parte possiamo pensare ad uno stesso individuo che sceglie p volte la strategia 1 e $1 - p$ volte la strategia 2, dall'altra possiamo pensare ad una popolazione di individui dei quali una percentuale pari a p sceglie la strategia 1 e la restante $(1 - p)$ sceglie la strategia 2.

Un *profilo di strategie miste* è una lista di distribuzioni di probabilità, una per ciascun giocatore:

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \prod_{i \in \mathcal{N}} \Delta(C_i).$$

Analogamente a prima, dato un profilo di strategie miste $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ e un giocatore $i \in \mathcal{N}$, si scrive

$$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_N),$$

per la $(N - 1)$ -upla delle strategie di tutti gli altri giocatori.

Vogliamo ora definire il payoff atteso corrispondente ad un profilo di strategie miste.

Come ipotesi fondamentale supponiamo che i giocatori prendano le loro decisioni in modo indipendente. Segue che la probabilità che venga scelta un dato profilo di strategie è uguale al prodotto delle corrispondenti probabilità che i giocatori scelgano separatamente le due strategie componenti: dati due eventi indipendenti A e B ,

$$\text{Prob}(A \cap B) = \text{Prob}(A) \text{Prob}(B).$$

Supponiamo ad esempio di voler calcolare il valore atteso della funzione payoff per ciascun giocatore nel caso di un PD standardizzato (vedi dopo) considerando le strategie miste del giocatore riga $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e del giocatore colonna $\sigma_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Siamo nella situazione descritta dalla seguente tabella:

	$C (q = 1/3)$	$D (1 - q = 2/3)$
$C (p = 1/2)$	2,2	0,3
$D (1 - p = 1/2)$	3,0	1,1

Quindi in questo caso si ha

$$\text{Prob}(C, C) = \text{Prob}_1(C)\text{Prob}_2(C) = pq = 1/6,$$

$$\text{Prob}(C, D) = \text{Prob}_1(C)\text{Prob}_2(D) = p(1 - q) = 2/6,$$

$$\text{Prob}(D, C) = \text{Prob}_1(D)\text{Prob}_2(C) = (1 - p)q = 1/6,$$

$$\text{Prob}(D, D) = \text{Prob}_1(D)\text{Prob}_2(D) = (1 - p)(1 - q) = 2/6,$$

dove ad $\text{Prob}_1(\cdot)$ e $\text{Prob}_2(\cdot)$ sono le probabilità che 1 e 2 giochino una data strategia. Il payoff atteso del giocatore riga risulta

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

e per il giocatore colonna si ha

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Definizione 1.2.3. In generale, dato un profilo di strategie σ

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Delta(C_1) \times \dots \times \Delta(C_n)$$

il *payoff atteso* del giocatore i relativo al profilo di strategie σ è

$$u_i(\sigma) = \sum_{c \in C} \prod_{j \in \mathcal{N}} \sigma_j(c_j) u_i(c).$$

Quindi il payoff atteso è una funzione

$$u_i : \prod_{i \in \mathcal{N}} \Delta(C_i) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nella formula per il payoff atteso

- $\sigma_j(c_j)$ è la probabilità assegnata alla strategia pura c_j nella strategia mista σ_j del giocatore j ;
- $\prod_{j \in \mathcal{N}} \sigma_j(c_j)$ è la probabilità congiunta del profilo di strategie pure $c = (c_1, \dots, c_n)$, nell'ipotesi di indipendenza, ed è semplicemente il prodotto delle probabilità delle strategie pure di ciascun giocatore nel profilo c ;
- la sommatoria $\sum_{c \in C}$ è estesa a tutti i possibili profili di strategie pure, tenendo conto che il valore atteso di una variabile casuale (su un insieme finito) è appunto la somma dei valori possibili moltiplicati per la probabilità che vengano raggiunti.

Nel caso di due giocatori, useremo spesso la notazione vettoriale per le strategie miste, ovvero scriveremo, se $|C_1| = h$, $|C_2| = k$,

$$\sigma_1 = \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_h), \quad \sigma_2 = \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k).$$

In quest'ottica, le strategie pure sono i vettori delle basi canoniche di \mathbb{R}^h e \mathbb{R}^k , ovvero ad esempio scriveremo

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^h,$$

dove tutte le componenti sono nulle eccetto la i -esima, per la i -esima strategia pura del giocatore 1, e

$$\boldsymbol{\eta}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k,$$

dove tutte le componenti sono nulle eccetto la j -esima, per la j -esima strategia pura del giocatore 2.

In questo caso, il payoff atteso di ciascun giocatore è una forma bilineare, ovvero

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k p_{iqj} u_1(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j),$$

$$u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k p_{iqj} u_2(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j).$$

Notiamo che

$$A_{ij} := u_1(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j), \quad B_{ij} := u_2(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j),$$

non sono altro che le doppie entrate della matrice dei payoff: $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{hk}$ è la matrice dei payoff del giocatore riga, mentre $B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{hk}$ è la matrice dei payoff del giocatore colonna. Si può usare quindi la notazione matriciale per il calcolo dei payoff attesi di riga e colonna:

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{h1} & \cdots & A_{hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix},$$

$$u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{h1} & \cdots & B_{hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}.$$

1.3 Equilibrio di Nash: definizione e teorema di Nash

Un profilo di strategie è di equilibrio se a ciascun giocatore separatamente non conviene cambiare strategia, a patto che gli altri giocatori giochino le strategie del profilo. In generale l'equilibrio non ha nulla a che fare con l'ottimalità.

Definizione 1.3.1. Dato un gioco in forma strategica

$$\{\mathcal{N}, (C_i)_{i \in \mathcal{N}}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}}\},$$

un profilo di strategie miste $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, con $\sigma_i \in \Delta(C_i)$, si dice di *equilibrio di Nash* (NE) se

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad u_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau), \quad \forall \tau \in \Delta(C_i).$$

In sintesi un profilo di strategie è un equilibrio di Nash se ciascun giocatore i cambiando la sua strategia non può aumentare il suo payoff.

Definizione 1.3.2. Nel caso di due giocatori, la condizione precedente si semplifica: il profilo di strategie $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ è un equilibrio di Nash se

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &\geq u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*), & \forall \mathbf{p} \in \Delta(C_1), \\ u_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &\geq u_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}), & \forall \mathbf{q} \in \Delta(C_2), \end{aligned}$$

Un equilibrio di Nash non è necessariamente ottimale per i giocatori: all'equilibrio spesso questi guadagnano meno che se scegliessero altre strategie (ad esempio nel caso del dilemma del prigioniero).

Introduciamo ora una nozione fondamentale correlata alla condizione di equilibrio.

Definizione 1.3.3. Dato un profilo di strategie $\sigma_{-i} \in \prod_{j \in \mathcal{N}_{-i}} \Delta(C_j)$, una strategia $\tau_i \in \Delta(C_i)$ del giocatore i -esimo si dice *best reply* a σ_{-i} se

$$u_i(\sigma_{-i}, \tau_i) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau), \quad \forall \tau \in \Delta(C_i).$$

Indichiamo con $B_i(\sigma_{-i})$ l'insieme delle best replies del giocatore i contro σ_{-i} . Notiamo che in generale $B_i(\sigma_{-i})$ è un sottoinsieme di $\Delta(C_i)$.

Se ora consideriamo un profilo di strategie $\sigma \in \prod_{i \in \mathcal{N}} \Delta(C_i)$, ad ogni i possiamo associare il sottoinsieme $B_i(\sigma_{-i})$ di $\Delta(C_i)$. Otteniamo una mappa a valori insiemistici:

$$B : \prod_{i \in \mathcal{N}} \Delta(C_i) \longrightarrow \mathcal{P} \left(\prod_{i \in \mathcal{N}} \Delta(C_i) \right) \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sigma \longmapsto B(\sigma) = (B_1(\sigma_{-1}), \dots, B_n(\sigma_{-N})), \quad (1.1)$$

dove $\mathcal{P}(\cdot)$ è l'insieme delle parti.

Vediamo come si particularizza la nozione precedente nel caso di due giocatori: consideriamo una strategia fissata \mathbf{q}_0 del giocatore colonna. Una migliore risposta del giocatore riga a questa strategia è una strategia \mathbf{p} tale che

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \geq u_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}_0) \quad \forall \mathbf{p}' \in \Delta(C_1)$$

ovvero

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) = \max_{\mathbf{p}' \in \Delta(C_1)} u_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}_0).$$

Dato che ci possono essere molte strategie di riga che sono miglior risposta a \mathbf{q}_0 , si definisce

$$B_1(\mathbf{q}_0) = \{\mathbf{p} \in \Delta(C_1) : u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) = \max_{\mathbf{p}' \in \Delta(C_1)} u_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}_0)\}$$

che può essere un insieme con più di un elemento. Questo definisce una mappa a valori insiemistici

$$\mathbf{q}_0 \in \Delta(C_2) \mapsto B_1(\mathbf{q}_0) \subseteq \Delta(C_1).$$

Ripetendo il ragionamento per il giocatore colonna, e definendo la miglior risposta del giocatore colonna alla strategia \mathbf{p}_0 di riga come

$$B_2(\mathbf{p}_0) = \{\mathbf{q} \in \Delta(C_2) : u_2(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{q}' \in \Delta(C_2)} u_2(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}')\},$$

si ha

$$\mathbf{p}_0 \in \Delta(C_1) \mapsto B_2(\mathbf{p}_0) \subseteq \Delta(C_2).$$

Mettendo insieme le due definizioni precedenti si ottiene una mappa che associa ad ogni profilo di strategie $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ l'insieme di tutti i profili di strategie che sono miglior risposta a questi, ovvero

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) \mapsto B(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) := (B_1(\mathbf{q}_0), B_2(\mathbf{p}_0)) \subseteq \Delta(C_1) \times \Delta(C_2),$$

ovvero la mappa best reply definita sopra.

Possiamo calcolare esplicitamente la mappa best reply su un esempio: consideriamo il gioco

	S_1	S_2
S_1	$(1, 0)$	$(0, 1)$
S_2	$(0, 1)$	$(1, 0)$

Per un profilo di strategie miste (p, q) , il payoff atteso del giocatore 1 è

$$u_1(p, q) = pq + (1 - p)(1 - q) = (2q - 1)p + 1 - q.$$

Per calcolare la best reply del giocatore 1 contro la strategia q di 2, ovvero $B_1(q)$, dobbiamo massimizzare il payoff del giocatore 1 per q fissato, al variare di $p \in [0, 1]$. Si hanno tre casi:

- $0 \leq q < 1/2$, ovvero $2q - 1 < 0$: la funzione $u_1(p, q)$ è decrescente su $[0, 1]$, e il massimo si ha quindi per $p = 0$;
- $q = 1/2$, ovvero $2q - 1 = 0$: la funzione $u_1(p, q)$ è costante su $[0, 1]$, e ogni $p \in [0, 1]$ è un massimo;
- $1/2 < q \leq 1$, ovvero $2q - 1 > 0$: la funzione $u_1(p, q)$ è crescente su $[0, 1]$, e il massimo si ha quindi per $p = 1$.

Mettendo insieme le tre condizioni precedenti si ottiene che

$$B_1(q) = \begin{cases} 0 & q \in [0, 1/2) \\ [0, 1] & q = 1/2 \\ 1 & q \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Si vede bene che la mappa best reply è a valori insiemistici: la best reply di 1 a $q = 1/2$ è tutto l'insieme delle strategie miste del giocatore 1.

Analogamente, il payoff atteso del giocatore 2 è

$$u_2(p, q) = p(1 - q) + q(1 - p) = (1 - 2p)q + p.$$

e ragionando come prima si ottiene

$$B_2(p) = \begin{cases} 1 & p \in [0, 1/2) \\ [0, 1] & p = 1/2 \\ 0 & p \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Proprietá 1.3.1. *Ogni equilibrio di Nash σ è un punto fisso di B e viceversa, ovvero*

$$\sigma \text{ è NE} \iff \sigma \in B(\sigma).$$

Dimostrazione. Sappiamo per definizione di B che $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in B(\sigma)$ se e solo se

$$\forall i \quad u_i(\sigma_{-i}, \tau_i) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau'_i), \quad \forall \tau'_i \in \Delta(C_i)$$

e scegliendo $\tau = \sigma$ si ha che $\sigma \in B(\sigma)$ se e solo se

$$\forall i \quad u_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau'_i), \quad \forall \tau'_i \in \Delta(C_i)$$

che è la definizione di equilibrio di Nash. □

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di Nash. Si utilizza il seguente risultato

Teorema 1.3.1 (del punto fisso di Kakutani). *Data una mappa a valori insiemistici*

$$F := D \rightarrow \mathcal{P}(D) \\ x \mapsto F(x) \subseteq D$$

con D convesso e compatto di \mathbb{R}^n e $\mathcal{P}(D)$ è l'insieme delle parti di D , assumiamo che

- i) $F(x) \neq \emptyset$ e $F(x)$ è convesso per ogni $x \in D$;
- ii) F ha grafico chiuso, ovvero per ogni coppia di successioni

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y,$$

con $x_n, x \in D$ e $y_n \in F(x_n)$, si ha che

$$y \in F(x).$$

Allora la mappa ammette un punto fisso in D :

$$\exists x^* \in D \quad x^* \in F(x^*).$$

Teorema 1.3.2 (Esistenza dell'equilibrio di Nash). *Ogni gioco in forma strategica con un numero finito di giocatori e strategie ammette almeno un equilibrio di Nash.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso di due giocatori. E' necessario verificare che la mappa best reply soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani. Poniamo

$$D = \Delta(C_1) \times \Delta(C_2).$$

Se $|C_1| = h$ e $|C_2| = k$, allora $\Delta(C_1) \subset \mathbb{R}^h$ e $\Delta(C_2) \subset \mathbb{R}^k$, cosicché $D \subset \mathbb{R}^{k+h}$. Ora, D è compatto e convesso, perché prodotto cartesiano di semplici, che sono a loro volta compatti (perché chiusi e limitati) e convessi (per costruzione: i punti dei semplici sono combinazioni convesse dei loro vertici).

Inoltre, per ogni $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in D$, l'insieme $B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (B_1(\mathbf{q}), B_2(\mathbf{p}))$ non è vuoto. Infatti, consideriamo ad esempio l'insieme

$$B_1(\mathbf{q}),$$

che contiene le strategie miste del giocatore 1 che massimizzano il suo payoff contro \mathbf{q} , ovvero che massimizzano la funzione

$$\mathbf{x} \mapsto u_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})$$

al variare di \mathbf{x} in $\Delta(C_1)$ per \mathbf{q} fissato. Dato che $u_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ è una funzione continua di \mathbf{x} , e $\Delta(C_1)$ è compatto, questa ammette un massimo per il teorema di Weierstrass, cosicché l'insieme $B_1(\mathbf{q})$ non è vuoto. Questo ragionamento si applica anche al giocatore colonna e a $B_2(\mathbf{p})$, il che prova che $B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq \emptyset$.

Per dimostrare che l'insieme $B(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è convesso per \mathbf{p} e \mathbf{q} fissati, dimostriamo che $B_1(\mathbf{q})$ è convesso (analogo discorso per $B_2(\mathbf{p})$). La tesi poi segue dal fatto che il prodotto cartesiano di due insiemi convessi è convesso. A questo scopo, osserviamo che $u_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ è una funzione lineare di \mathbf{x} , basta ricordare l'espressione del payoff atteso mettendo in evidenza la dipendenza da \mathbf{x} :

$$u_1(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k x_i q_j u_1(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j).$$

Supponiamo che $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in B_1(\mathbf{q})$, e consideriamo il segmento $\lambda \mathbf{p}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_1$. Dato che $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in B_1(\mathbf{q})$, si ha che $u_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = u_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Per la linearità, $u_1(\lambda \mathbf{p}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_1, \mathbf{q}) = \lambda u_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) + (1 - \lambda) u_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}) = \lambda \max_{\mathbf{p}} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + (1 - \lambda) \max_{\mathbf{p}} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, il che significa che $\lambda \mathbf{p}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_1 \in B_1(\mathbf{q})$.

Dimostriamo ora che B_1 (stessa dimostrazione per B_2) ha grafico chiuso, il che implica che anche B ha grafico chiuso. Prendiamo una successione $\mathbf{q}_n \rightarrow \mathbf{q}$, e una successione $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$, con $\mathbf{p}_n \in B_1(\mathbf{q}_n)$ per ogni n . Per la definizione di best reply, si ha che per ogni n

$$u_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) \geq u_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}_n) \quad \forall \mathbf{p}' \in \Delta(C_1).$$

Dato che la u_1 è continua nei suoi argomenti, possiamo passare al limite per $n \rightarrow \infty$ ottenendo

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq u_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{p}' \in \Delta(C_1),$$

il che significa che $\mathbf{p} \in B_1(\mathbf{q})$. □

Definizione 1.3.4. Si dice *supporto* di una strategia mista σ_i e si indica con $\text{supp}(\sigma_i)$ l'insieme delle strategie pure $c \in C_i$ tale che $\sigma_i(c) > 0$. Talvolta identificheremo il supporto di una strategia mista con l'insieme degli *indici* delle strategie pure (e non le strategie pure) giocate con probabilità positiva.

Dimostriamo ora un risultato riguardante gli equilibri di Nash che è molto utile a livello operativo.

Proprietá 1.3.2. *Gli equilibri di Nash sono equalizzanti sul loro supporto, cioè se σ è un equilibrio di Nash, allora*

$$\forall i \quad u_i(\sigma_{-i}, c') = u_i(\sigma_{-i}, c), \quad \forall c, c' \in \text{supp}(\sigma_i).$$

Viceversa, dato un profilo di strategie σ equalizzante sul suo supporto, se

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, c) \quad \forall c \notin \text{supp}(\sigma_i),$$

allora σ è un equilibrio di Nash.

Nel caso di due giocatori, possiamo riformulare la proprietà come segue: se $(\mathbf{p}^, \mathbf{q}^*)$ è NE, allora \mathbf{q}^* è equalizzante per riga sul supporto di \mathbf{p}^* , e \mathbf{p}^* è equalizzante per colonna sul supporto di \mathbf{q}^* , ovvero*

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*) &= u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) & \forall \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \text{supp}(\mathbf{p}^*), \\ u_2(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\eta}_h) &= u_2(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\eta}_k) & \forall \boldsymbol{\eta}_h, \boldsymbol{\eta}_k \in \text{supp}(\mathbf{q}^*). \end{aligned}$$

Viceversa, dato un profilo di strategie equalizzanti sui loro supporti, se

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &\geq u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*) & \forall \mathbf{e}_i \notin \text{supp}(\mathbf{p}^*), \\ u_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &\geq u_2(\mathbf{p}^*, \boldsymbol{\eta}_k) & \forall \boldsymbol{\eta}_k \notin \text{supp}(\mathbf{q}^*), \end{aligned}$$

allora $(\mathbf{p}^, \mathbf{q}^*)$ è NE.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà nel caso di due giocatori. Supponiamo che $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ sia un equilibrio di Nash, e consideriamo ad esempio il giocatore 1. Ricordiamo che

$$\text{supp}(\mathbf{p}^*) = \{\mathbf{e}_i \in C_1 \mid p_i^* > 0\}.$$

Calcoliamo ora il payoff atteso del giocatore i rispetto al profilo di strategie $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$: si ha che

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i^* q_j^* u_1(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\eta}_j) = \sum_{i=1}^n p_i^* u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*),$$

ovvero il payoff atteso è lineare nelle componenti delle strategie di ciascun giocatore fissato. Poichè $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ è NE sappiamo che

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*), \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta(C_1).$$

Vogliamo dimostrare che nel caso particolare in cui $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)$ è una strategia pura nel supporto la disuguaglianza è verificata con l'uguale. Supponiamo per assurdo che $\exists \mathbf{e}_i \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)$ tale che

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) > u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*). \quad (1.2)$$

Sappiamo che per la condizione di equilibrio $\forall \mathbf{e}_j \in C_1$ con $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{e}_i$ risulta

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*). \quad (1.3)$$

Moltiplico la (1.2) per p_i^* (che per ipotesi è > 0), e la (1.3) per $p_j \geq 0$ ottenendo

$$\begin{aligned} p_i^* u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &> p_i^* u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*), \\ p_j^* u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &\geq p_j^* u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*). \end{aligned}$$

Sommando i membri sinistri delle relazioni precedenti si ottiene

$$\sum_{h=1}^n p_h^* u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*).$$

poichè $\sum_{h=1}^n p_h^* = 1$. Sommando invece a destra si ottiene

$$\sum_{h=1}^n p_h^* u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$$

per quanto osservato in precedenza. Si otterrebbe quindi la disuguaglianza stretta

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) > u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$$

che è assurda. Si ha quindi che

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*), \quad \forall \mathbf{e}_i \in \text{supp}(\mathbf{p}^*),$$

da cui segue che

$$u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*), \quad \forall \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \text{supp}(\mathbf{p}^*).$$

Analogo ragionamento vale per il giocatore 2.

Per dimostrare il viceversa, assumiamo che il profilo $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ sia equalizzante. Allora

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \sum_{h=1}^n p_h^* u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = \sum_{h \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_h^* u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*)$$

e poiché $u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*)$ sono tutte uguali tra loro per ogni $h, i \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)$ e $\sum_{h \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_h^* = 1$, si ha

$$u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*), \quad \forall \mathbf{e}_i \in \text{supp}(\mathbf{p}^*).$$

Quindi per ogni $\mathbf{p} \in \Delta(C_i)$ si ha, per l'ipotesi del teorema e per l'identità dimostrata sopra,

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) &= \sum_{h=1}^n p_h u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = \sum_{h \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_h u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \notin \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_k u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &\leq \sum_{h \in \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_h u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \notin \text{supp}(\mathbf{p}^*)} p_k u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*). \end{aligned}$$

Ripetendo l'argomento per il giocatore 2 si ottiene la tesi. □

1.4 Dominanza

Una strategia pura $c_i \in C_i$ del giocatore i si dice *debolmente dominata* se esiste un'altra strategia pura $c'_i \in C_i$ dello stesso giocatore tale che

$$u_i(c_{-i}, c_i) \leq u_i(c_{-i}, c'_i) \quad \forall c_{-i} \in C_{-i}.$$

Una strategia pura $c_i \in C_i$ del giocatore i si dice *strettamente dominata* se esiste un'altra strategia pura $c'_i \in C_i$ dello stesso giocatore tale che

$$u_i(c_{-i}, c_i) < u_i(c_{-i}, c'_i) \quad \forall c_{-i} \in C_{-i}.$$

Se una strategia è strettamente dominata, si può eliminare dal gioco ottenendo un gioco 'ridotto' i cui equilibri di Nash sono equilibri del gioco originario

(assegnando naturalmente probabilità nulla alle strategie strettamente dominate). Questa procedura è detta 'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate'. Analogamente, anche eliminando strategie debolmente dominate si ottiene un gioco ridotto i cui equilibri son equilibri del gioco originario, ma si possono perdere in questo modo degli equilibri. Inoltre, l'eliminazione iterata delle strategie debolmente dominate dipende dall'ordine in cui si eliminano le strategie.

Le considerazioni fatte sopra si basano su due proprietà, che formuliamo e dimostriamo nel caso di due giocatori.

Proprietá 1.4.1. *Le strategie strettamente dominate non vengono mai giocate all'equilibrio: se $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ è un equilibrio di Nash, ed $\mathbf{e}_i \in \Delta(C_1)$ è strettamente dominata da $\mathbf{e}_j \in \Delta(C_1)$, ovvero*

$$u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}) < u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}),$$

per ogni $\mathbf{q} \in \Delta(C_2)$, allora

$$p_i^* = 0.$$

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ un equilibrio di Nash, e assumiamo per assurdo che $p_i^* > 0$, ovvero la strategia \mathbf{e}_i sia giocata con probabilità positiva dal giocatore 1, ed \mathbf{e}_i sia strettamente dominata da \mathbf{e}_j . Consideriamo la strategia $\hat{\mathbf{p}}$ tale che

$$\hat{p}_i = 0, \quad \hat{p}_j = p_i^* + p_j^*, \quad \text{e} \quad \hat{p}_k = p_k^* \text{ per } k \neq i, j.$$

Allora

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &= \sum_{h=1}^n p_h^* u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = p_i^* u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*) + p_j^* u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k^* u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &< p_i^* u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + p_j^* u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k^* u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &= (p_i^* + p_j^*) u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k^* u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &= \sum_{h=1}^n \hat{p}_h u_1(\mathbf{e}_h, \mathbf{q}^*) = u_1(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}^*), \end{aligned}$$

il che implica che $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ non può essere Nash. □

Per formulare la seconda proprietà, per ogni gioco a due giocatori

$$\{\{1, 2\}, \{C_1, C_2\}, \{u_1, u_2\}\}$$

e una strategia pura fissata $\mathbf{e}_i \in C_1$, definiamo *gioco ridotto* il gioco

$$\{\{1, 2\}, \{\hat{C}_1, \hat{C}_2\}, \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}\}$$

ottenuto eliminando la strategia \mathbf{e}_i , ovvero

$$\hat{C}_1 = C_1 \setminus \{\mathbf{e}_i\}, \quad \hat{C}_2 = C_2,$$

ed $\hat{u}_1, \hat{u}_2 : \hat{C}_1 \times \hat{C}_2$ le restrizioni di u_1, u_2 ad $\hat{C}_1 \times \hat{C}_2$. Allora ogni strategia $\mathbf{p} \in \Delta(C_1)$ con $p_i = 0$ del gioco originario induce una strategia del gioco ridotto $\hat{\mathbf{p}} \in \Delta(\hat{C}_1)$ e viceversa, ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} + 0 \mathbf{e}_i + p_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \cdots + p_n \mathbf{e}_n, \\ \hat{\mathbf{p}} &= p_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} + p_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \cdots + p_n \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Vale la seguente proprietà.

Proprietá 1.4.2. *Se $\mathbf{e}_i \in \Delta(C_1)$ è debolmente dominata da $\mathbf{e}_j \in \Delta(C_1)$, ogni equilibrio di Nash $(\hat{\mathbf{p}}^*, \hat{\mathbf{q}}^*)$ del gioco ridotto ottenuto eliminando la strategia \mathbf{e}_i induce un equilibrio di Nash $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ del gioco originario, utilizzando la corrispondenza (1.4) (cosicché $p_i^* = 0$ e $\mathbf{q}^* = \hat{\mathbf{q}}^*$).*

Dimostrazione. Sia $(\hat{\mathbf{p}}^*, \hat{\mathbf{q}}^*)$ NE del gioco ridotto, e $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ il corrispondente profilo di strategie del gioco originario ottenuto mediante (1.4) (ricordiamo che $\mathbf{q}^* = \hat{\mathbf{q}}^*$). Vogliamo dimostrare che $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ è Nash. Consideriamo $\mathbf{p} \in \Delta(C_1)$ arbitrario:

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) &= p_i u_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{q}^*) + p_j u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &\leq p_i u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + p_j u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &= (p_i + p_j) u_1(\mathbf{e}_j, \mathbf{q}^*) + \sum_{k \neq i, j} p_k u_1(\mathbf{e}_k, \mathbf{q}^*) \\ &= \hat{u}_1(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}^*) \leq \hat{u}_1(\hat{\mathbf{p}}^*, \hat{\mathbf{q}}^*) = u_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*), \end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{p}} \in \Delta(\hat{C}_1)$ è definito da

$$\hat{\mathbf{p}} = p_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + (p_i + p_j) \mathbf{e}_j + \cdots + p_n \mathbf{e}_n.$$

□

Dalla Proprietà 1.4.1 segue immediatamente la seguente

Proprietà 1.4.3. Se $e_i \in \Delta(C_1)$ è strettamente dominata da $e_j \in \Delta(C_1)$, ogni equilibrio di Nash $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ è tale per cui $p_i^* = 0$, e induce mediante la corrispondenza (1.4) un equilibrio di Nash $(\hat{\mathbf{p}}^*, \hat{\mathbf{q}}^*)$ del gioco ridotto ottenuto eliminando la strategia e_i .

1.5 Esempi

Esempi notevoli di giochi in forma strategica sono

- **Il dilemma del prigioniero (PD).**

La matrice dei payoff è

	tace	confessa
tace	$(-1, -1)$	$(-7, 0)$
confessa	$(0, -7)$	$(-5, -5)$

E' facile verificare che la strategia in cui entrambi i contendenti confessano è l'unico equilibrio di Nash, che non corrisponde però al guadagno migliore ottenibile da entrambi i giocatori. Il problema è che la strategia 'ottimale' (tace,tace) richiederebbe la cooperazione tra i contendenti, ovvero una condizione aggiuntiva che a priori non è prevista dal gioco.

Il dilemma del prigioniero, così come "chicken" e la battaglia dei sessi (descritti dopo), rappresentano un interessante modello per studiare l'insorgenza della cooperazione in situazioni di conflitto. Se indichiamo la strategia in cui il prigioniero confessa (e tradisce il compagno) come strategia *competitiva*, indicata con D , in quanto il prigioniero agisce in base al proprio interesse, e la strategia in cui tace *cooperativa*, indicata con C , in quanto si evita di denunciare il compagno, si vede che un dilemma del prigioniero è caratterizzato dal fatto che ad ogni giocatore separatamente conviene competere, ma il payoff competitivo è inferiore a quello cooperativo. In unità arbitrarie, quindi un dilemma del prigioniero ha la struttura

	C	D
C	$(2, 2)$	\rightarrow $(0, 3)$
	\downarrow	\downarrow
D	$(3, 0)$	\rightarrow $(1, 1)$

e più in generale

$$\begin{array}{c|cc}
 & C & D \\
 \hline
 C & (R, R) \rightarrow (S, T) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 D & (T, S) \rightarrow (P, P)
 \end{array},$$

dove

$$T > R > P > S,$$

e

- T è la tentazione (temptation) al tradimento;
- R è il premio (reward) per la cooperazione;
- P è la punizione (punishment) per il mutuo tradimento;
- S è il guadagno del babbeo (sucker).

Ci sono molti esempi di dilemma del prigioniero motivati sia dalle scienze sociali ed economiche che dall'etologia. Ad esempio, la situazione in cui due ditte che commercializzano lo stesso tipo di prodotti devono decidere se abbassare i prezzi è un dilemma del prigioniero: la strategia cooperativa consiste nel non abbassare i prezzi, mentre la strategia competitiva consiste nell'abbassare i prezzi. Chiaramente se entrambe le ditte abbassano i prezzi il guadagno diminuisce per entrambe, mentre se una sola abbassa i prezzi, il suo guadagno aumenta. Altri esempi sono la cosiddetta "tragedy of commons", oppure le escalation tipiche delle corse agli armamenti.

Per quello che riguarda l'etologia, il dilemma del prigioniero è stato proposto ad esempio per descrivere il tipo di conflitto di interessi tra pesci pulitori e loro ospiti, o per descrivere alcune delle strategie di accoppiamento di alcuni primati, in cui i maschi non dominanti cooperano per distrarre il maschio dominante e accoppiarsi con le femmine.

- **La battaglia dei sessi (BoS)**. Identifichiamo riga e colonna coi due membri di una coppia che devono prendere una decisione riguardo a dove passare la serata. Supponiamo che colonna preferisca ascoltare jazz e riga preferisca andare all'opera. D'altra parte qualunque decisione venga presa preferiscono passare insieme la serata piuttosto che

separarsi. Le strategie pure per questo gioco sono per entrambi i giocatori (jazz) e (opera). Possiamo attribuire alla matrice dei payoff i valori seguenti:

	jazz	opera
jazz	(1, 2)	(0, 0)
opera	(0, 0)	(2, 1)

In questo caso ci sono due equilibri di Nash puri (jazz,jazz) e (opera,opera), oltre ad un equilibrio misto $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ con $\mathbf{p}^* = (p, 1 - p)$ e $\mathbf{q}^* = (q, 1 - q)$ con

$$p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}.$$

Verificare che ciò corrisponde alla situazione in cui entrambi i giocatori fanno quello che preferiscono due volte su tre.

La battaglia dei sessi si può riscrivere in modo da mettere in evidenza il conflitto tra cooperazione e competizione. Infatti, la strategia (opera) è in qualche senso competitiva per il giocatore riga in quanto corrisponde al suo interesse, mentre la strategia (jazz) per riga è di fatto cooperativa, perchè riga non fa il proprio interesse ma quello dell'avversario. Viceversa, (jazz) per colonna è competitiva, mentre (opera) per colonna è cooperativa. In questi termini, la battaglia dei sessi assume la forma standard

	compete (jazz)	coopera (opera)
compete (opera)	(0, 0)	(4, 1)
coopera (jazz)	(1, 4)	(0, 0)

- **Chicken.** Questo gioco descrive una situazione di conflitto con "sfida", e nella sua forma più popolare viene presentato come segue: due contendenti si lanciano ad alta velocità in automobile verso un dirupo. Quando si arriva al dirupo, il primo che sterza viene etichettato come vigliacco, mentre l'altro vince. Se entrambi sterzano, entrambi perdono e sono considerati vigliacchi, mentre se nessuno dei due sterza, entrambi perdono la vita. Schematicamente, la situazione è rappresentata dal gioco

	non sterza	sterza
non sterza	(0, 0)	(3, 1)
sterza	(1, 3)	(2, 2)

Anche in questo caso le due strategie possono essere interpretate come competitive (non sterza) e cooperative (sterza). Si ha in questi termini

	D		C
D	(0, 0)	→	(3, 1)
	↓		↑
C	(1, 3)	←	(2, 2)

Abbiamo anche qui due equilibri puri (D, C) e (C, D) e un equilibrio misto con

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}.$$

- **Stag hunt - la caccia al cervo.**

Due cacciatori decidono di appostarsi per cacciare un cervo, di valore 4 unità. Il cervo viene catturato solo se entrambi i cacciatori cooperano e si appostano. L'alternativa è cacciare una lepre di valore 1, che viene comunque catturata anche senza l'aiuto del compagno. Se però uno dei due cacciatori rimane da solo ad appostarsi per il cervo e l'altro non coopera, non cattura nulla. Chiamando C la strategia che corrisponde all'appostamento per il cervo, e D la strategia in cui il giocatore cattura la lepre, si ha

	C	D
C	(2, 2)	(0, 1)
D	(1, 0)	(1, 1)

che ha come equilibri puri (C, C) , (D, D) e come equilibrio misto $p^* = q^* = 1/2$.

- **Falco - Colomba.** Proposto da John Maynard Smith e Price, che furono i primi ad applicare i metodi della teoria dei giochi a modelli evolutivi. Ecco come Dawkins introduce l'idea.

*Supponiamo che una popolazione di una specie particolare ammetta solo due tipi di strategia di combattimento, chiamati **falco** e **colomba**. I nomi si riferiscono all'uso convenzionale che gli esseri umani ne fanno e non hanno alcuna relazione con le abitudini degli uccelli così chiamati; le colombe sono in realtà uccelli alquanto aggressivi. Ogni individuo della nostra ipotetica popolazione è classificato come falco o colomba. I falchi combattono sempre al limite delle proprie risorse, ritirandosi*

solo quando sono gravemente feriti. Le colombe si limitano a minacciare in modo dignitoso e convenzionale, senza mai attaccare il nemico. Se un falco aizza al combattimento una colomba, questa rapidamente si allontana, così non rischia di rimanere ferita, mentre se un falco combatte contro un altro falco, la lotta finisce soltanto quando uno dei due resta seriamente ferito o resta ucciso. Se una colomba incontra un'altra colomba, nessuna delle due viene ferita, ma esse continuano a fronteggiarsi a lungo (combattimento simbolico) fino a che una delle due si stanca o decide di lasciar perdere, e perciò si ritira.

Posto $V =$ risorsa; $D =$ danno; $P =$ display (costo del combattimento simbolico), le strategie sono

- comportamento aggressivo (falco);
- comportamento aggressivo simbolico (colomba).

e la matrice dei payoff è

	falco	colomba
falco	$\frac{1}{2}(V - D), \frac{1}{2}(V - D)$	$V, 0$
colomba	$0, V$	$\frac{1}{2}V - P, \frac{1}{2}V - P$

Si ottiene che se $V > D$, l'unico NE è (falco, falco), mentre se $V < D$, si ha un NE misto (simmetrico, vedi dopo):

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^* = \left(\frac{V + 2P}{D + 2P}, \frac{D - V}{D + 2P} \right),$$

e gli equilibri puri non simmetrici (F, C) , (C, F) .

- **Carta Forbice Sasso.** Le regole del gioco sono: carta vince contro sasso e perde contro forbice, sasso vince contro forbice e perde contro carta, forbice vince contro carta ma perde contro sasso. E' un gioco cosiddetto *a somma nulla* perché ciò che guadagna un giocatore perde il suo avversario. La matrice dei payoff è

	C	F	S
C	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
F	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
S	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

Si verifica facilmente che l'unico equilibrio di Nash è

$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{q}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

- **Voting game (Gioco delle votazioni).** Situazione: tre giocatori devono esprimere la propria preferenza in occasione delle elezioni e le possibili opzioni di voto sono α , β e γ .

Regole:

- vince la maggioranza stretta. Ad esempio se la terna delle preferenze è (α, α, γ) vince α ;
- se la votazione è pari, ovvero se ogni opzione riceve una preferenza come nel caso (β, α, γ) , allora decide il giocatore 1, e quindi in questo secondo caso vince β .

I payoff che ogni giocatore riceve in funzione del risultato della votazione sono espressi dalla seguente tabella:

	giocatore 1	giocatore 2	giocatore 3
opzione α	8	0	4
opzione β	4	8	0
opzione γ	0	4	8

Per scrivere il gioco sotto forma di matrice dobbiamo distinguere tre casi:

- Il giocatore 3 vota l'opzione α :

		Giocatore2		
		opzione α	opzione β	opzione γ
Giocatore1	opzione α	(8,0,4)	(8,0,4)	(8,0,4)
	opzione β	(8,0,4)	(4,8,0)	(4,8,0)
	opzione γ	(8,0,4)	(0,4,8)	(0,4,8)

- il giocatore 3 vota l'opzione β :

		Giocatore2		
		opzione α	opzione β	opzione γ
Giocatore1	opzione α	(8,0,4)	(4,8,0)	(8,0,4)
	opzione β	(4,8,0)	(4,8,0)	(4,8,0)
	opzione γ	(0,4,8)	(4,8,0)	(0,4,8)

- il giocatore 3 vota l'opzione γ :

		Giocatore2		
		opzione α	opzione β	opzione γ
Giocatore1	opzione α	(8,0,4)	(8,0,4)	(0,4,8)
	opzione β	(4,8,0)	(4,8,0)	(0,4,8)
	opzione γ	(0,4,8)	(0,4,8)	(0,4,8)

Quali sono gli equilibri di Nash di questo gioco?

- **Dilemma della pizzeria (Diner's dilemma).** Situazione: N giocatori scelgono una pizza dal menù, con possibili valori $\{1, \dots, M\}$. Una strategia per il giocatore k -esimo è una scelta

$$v_k \in \{0, 1, \dots, M\}$$

Poiché la spesa totale viene suddivisa equamente tra i partecipanti, il payoff del giocatore k -esimo è

$$u_k(v_1, \dots, v_N) = v_k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k = v_k - \bar{v}$$

dove v_k è ciò che spende il k -esimo giocatore e \bar{v} è la spesa media. Dimostrare usando la dominanza stretta che l'unico NE tra le strategie pure è

$$v_k = M, \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

- **Le sorelle gemelle.** Un padre decide di regalare una somma di denaro alle due figlie gemelle, che vivono in città diverse. La somma che intende donare è 101. Ciascuna sorella può chiedere al padre una certa cifra, con la seguente regola: se la somma delle cifre chieste dalle due gemelle è minore o uguale di 101, ciascuna avrà la cifra richiesta, altrimenti non avranno nulla. In questo caso si ha $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, le strategie sono

$$C_i = \{0, 1, \dots, 101\},$$

e i payoff

$$u_i(c_1, c_2) = \begin{cases} c_i & \text{se } c_1 + c_2 \leq 101, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora tutti i profili $(n, 101 - n)$ sono NE, per $n = 0, \dots, 101$. Infatti,

$$u_1(n, 101 - n) \geq u_1(n', 101 - n) \quad \forall n'$$

$$n \geq n' \quad \text{se } n' \leq n \text{ perché } n' + 101 - n \leq n + 101 - n = 101$$

$$n \geq 0 \quad \text{se } n' > n \text{ perché } n' + 101 - n > n + 101 - n = 101.$$

Questi equilibri sono gli unici tra quelli puri. Infatti, se consideriamo un profilo (c_1, c_2) con $c_1 + c_2 \neq 101$, si avrebbe

$$u_1(c_1, c_2) < u_1(c_1 + k, c_2)$$

per un qualche k , e quindi tale profilo non può essere Nash. Infatti, se $c_1 + c_2 < 101$, basta prendere $k = 1$ e si avrebbe

$$u_1(c_1, c_2) < u_1(c_1 + 1, c_2)$$

$$c_1 < c_1 + 1.$$

dato che $c_1 + c_2 + 1 \leq 101$. Se invece $c_1 + c_2 > 101$, con $c_2 < 101$, basta prendere $k = -c_1 + 1$ e si avrebbe

$$u_1(c_1, c_2) < u_1(1, c_2)$$

$$0 < 1.$$

dato che $c_2 + 1 \leq 101$.

- **El Farol: il bar di santa Fe.** A Santa Fe ci sono tre persone, che la sera hanno solo due opzioni: starsene a guardare le stelle oppure andare al bar. Il payoff di starsene a guardare le stelle è zero, mentre il costo di andare al bar è 1. Il payoff di andare al bar è $\frac{1}{2}$ se ci sono più di 2 persone al bar, e 2 se non ci sono più di due persone. Qui $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ e i payoff sono

	S	B
S	0, 0, 0	0, 1, 0
B	1, 0, 0	1, 1, 0

giocatore 3 sceglie S

	S	B
S	0, 0, 1	0, 1, 1
B	1, 0, 1	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

giocatore 3 sceglie B

dove il giocatore riga è 1 e il giocatore colonna è 2. Verificare che ci sono tre equilibri di Nash puri (B, B, S) , (B, S, B) , (S, B, B) e un equilibrio misto (a supporto pieno, equalizzante),

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = (p, 1 - p), \quad p = \frac{3-\sqrt{6}}{3}.$$

Infatti, posto

$$\sigma_1 = (p_1, 1 - p_1), \quad \sigma_2 = (p_2, 1 - p_2), \quad \sigma_3 = (p_3, 1 - p_3),$$

la condizione equalizzante per il giocatore 1 è

$$u_1(S, \sigma_2, \sigma_3) = u_1(B, \sigma_2, \sigma_3)$$

ovvero

$$\begin{aligned} & 0p_2p_3 + 0(1 - p_2)p_3 + 0p_2(1 - p_3) + 0(1 - p_2)(1 - p_3) \\ &= 1p_2p_3 + 1(1 - p_2)p_3 + 1p_2(1 - p_3) + \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - p_2)(1 - p_3) \end{aligned}$$

ovvero

$$-\frac{3}{2}p_2p_3 + \frac{3}{2}p_2 + \frac{3}{2}p_3 - \frac{1}{2} = 0.$$

Procedendo analogamente per gli altri giocatori, ovvero imponendo le condizioni di equalizzazione, si trova il sistema simmetrico

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}p_2p_3 + \frac{3}{2}p_2 + \frac{3}{2}p_3 - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}p_1p_3 + \frac{3}{2}p_1 + \frac{3}{2}p_3 - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}p_1p_2 + \frac{3}{2}p_1 + \frac{3}{2}p_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

che ammette un'unica soluzione in $(0, 1)$: $p_1 = p_2 = p_3 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

- **Il buon samaritano.** Ci sono N individui che passano davanti a una persona che chiede aiuto. Ciascun individuo ha due opzioni: aiutare o non aiutare. Se nessuno aiuta, il payoff è nullo per tutti. Se almeno un individuo aiuta il payoff è 1 per tutti, ma chi aiuta paga un prezzo $0 < \gamma < 1$.

Si ha $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, $C_i = \{H \text{ (help)}, R \text{ (refuse)}\}$, e i payoff sono

$$u_i(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c_j = R \forall j \\ 1 & \text{se } c_j = H \text{ per qualche } j \\ 1 - \gamma & \text{se } c_i = H \end{cases}$$

Gli equilibri puri sono evidenti. Cerchiamo NE misti simmetrici

$$\sigma_i = (p, 1 - p) \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

dove p = probabilità di NON aiutare (R). Si ha

$$u_i(R, \sigma_{-i}) = 0p^{n-1} + 1 \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-1-k}(1-p)^k \binom{n-1}{k} = 1 - p^{n-1}.$$

dove $p^{n-1-k}(1-p)^k$ è la probabilità che esattamente k giocatori aiutino, e $\binom{n-1}{k}$ è il numero di modi diversi di scegliere esattamente k che aiutano. Inoltre

$$u_i(H, \sigma_{-i}) = 1 - \gamma,$$

da cui imponendo la proprietà equalizzante,

$$p = \gamma^{\frac{1}{n-1}}$$

è l'equilibrio simmetrico. Notiamo che per $n \rightarrow \infty$ si ha $p \rightarrow 1$, ovvero l'effetto grande città in cui nessuno aiuta.

Possiamo anche calcolare la probabilità p_H che il richiedente venga effettivamente aiutato:

$$p_H := \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k = 1 - p^n = 1 - \gamma^{\frac{n}{n-1}}$$

cosicché per $n \rightarrow \infty$ si ha $p_H \rightarrow 1 - \gamma$.

1.6 Esercizi sugli equilibri di Nash

Esercizio. (Coordinazione pura) Due giocatori scelgono un numero da 1 a N . Se scelgono lo stesso numero, entrambi vincono una somma pari al numero stesso. Se invece i due numeri sono diversi tra loro, ciascun giocatore perde una somma pari al numero che ha scelto. Trovare gli equilibri di Nash puri.

Nel caso $N = 3$ determinare gli equilibri misti [$\mathbf{p}_1^* = (5/22, 8/22, 9/22)$, $\mathbf{p}_2^* = (1/2, 1/2, 0)$, $\mathbf{p}_3^* = (1/2, 0, 1/2)$, $\mathbf{p}_4^* = (0, 1/2, 1/2)$] e le strategie evolutivamente stabili [in questo caso sono gli equilibri simmetrici stretti puri].

Esercizio. Calcolare gli equilibri di Nash del gioco, usando sia la dominanza che il teorema equalizzante.

	C_1	C_2	C_3
R_1	0, 1	1, 2	2, 0
R_2	1, 0	2, 1	0, 2

(Soluzione: $\mathbf{p}^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{q}^* = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$).

Esercizio. Calcolare esplicitamente la mappa best reply per il gioco con matrice dei payoff

	C_1	C_2
R_1	(0, 1)	(1, 0)
R_2	(1, 0)	(0, 1)

Esercizio: lotteria. Viene estratto un elemento da una terna di elementi equiprobabili $\{a, b, c\}$. Prima dell'estrazione 6 giocatori pagano 1 per giocare e scelgono un elemento dalla terna. La puntata viene suddivisa equamente tra chi ha scelto il numero estratto. Due giocatori scelgono sempre a , e uno sceglie sempre b . Restringendo il gioco ai rimanenti tre giocatori, determinare gli equilibri di Nash puri e dimostrare che esiste un equilibrio misto simmetrico in cui nessun giocatore (tra i tre rimanenti) sceglie mai a (suggerimento: usare la dominanza debole). Dimostrare che gli equilibri puri sono (c, c, b) , (b, c, c) , (c, b, c) . Ricavare le matrici dei payoff, trascurando per semplicità il pagamaneto iniziale di ogni giocatore:

- Il giocatore 3 gioca a :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	(2/5, 2/5, 2/5)	(1/2, 1, 1/2)	(1/2, 2, 1/2)
	b	(1, 1/2, 1/2)	(2/3, 2/3, 2/3)	(1, 2, 2/3)
	c	(2, 1/2, 1/2)	(2, 1, 2/3)	(1, 1, 2/3)

- Il giocatore 3 gioca b :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	(1/2, 1/2, 1)	(2/3, 2/3, 2/3)	(2/3, 2, 1)
	b	(2/3, 2/3, 2/3)	(1/2, 1/2, 1/2)	(2/3, 2, 2/3)
	c	(2, 2/3, 1)	(2, 2/3, 2/3)	(1, 1, 1)

- Il giocatore 3 gioca c :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	$(1/2, 1/2, 2)$	$(2/3, 1, 2)$	$(2/3, 1, 1)$
	b	$(1, 2/3, 2)$	$(2/3, 2/3, 2)$	$(1, 1, 1)$
	c	$(1, 2/3, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(2/3, 2/3, 2/3)$

Esercizio: i cappelli di Littlewood. In una stanza c'è un gruppo di uomini, ciascuno dei quali ha un cappello in testa. I cappelli possono essere di due colori: neri o bianchi. Ciascun uomo nella stanza vede il colore dei cappelli degli altri ma non vede il colore del proprio. A un certo punto un estraneo entra nella stanza e dice: "Qualcuno di voi ha un cappello bianco: io ora inizierò a contare: ogni volta che avrò pronunciato un numero, chi di voi sa di avere un cappello bianco dovrà uscire dalla stanza". Nulla succede finché dopo che l'estraneo ha detto il numero k un certo numero di uomini esce dalla stanza. Quanti escono, e perché?

Esercizio. Il giocatore T ha il controllo di una risorsa di interesse comune per sé e per il giocatore W . Il giocatore T può scegliere se ingannare il giocatore W oppure se essere onesto. A sua volta il giocatore W può scegliere se essere fiducioso o sospettoso. Si assuma che

-) i payoff di base del profilo di strategie (fiducioso, onesto) siano $(0, 0)$;
-) il costo di essere sospettoso per il giocatore W è 2;
-) la probabilità che il giocatore T , se decide di ingannare, sia scoperto dal giocatore W che decide di essere sospettoso, è 0.8;
-) la perdita del giocatore W , se viene ingannato è 5;
-) il guadagno del giocatore T che riesce ad ingannare senza essere scoperto è 5
-) la perdita del giocatore T che viene scoperto è 2.

Studiare gli equilibri di Nash del problema.

	F	S
O	$(0, 0)$	$(0, -2)$
I	$(5, -5)$	$(-0.6, -3)$

Esercizio: morra semplificata / Matching Pennies. Due persone giocano alla morra semplificata: aprono contemporaneamente una mano con una

o due dita aperte: se la somma è pari, il giocatore 1 vince 1 euro dal giocatore 2, altrimenti il giocatore 2 vince 1 euro dal giocatore 1. Determinare gli equilibri di Nash.

Esercizio: madre e figlio. Una madre vuole aiutare finanziariamente il figlio disoccupato, ma non vuole contribuire alla sua pigrizia lasciando che passi tutto il tempo su facebook. Quindi, gli annuncia che potrebbe aiutarlo nel periodo corrente se non trova lavoro. Il figlio, tuttavia, cerca lavoro solo se non può contare sull'aiuto della madre, e potrebbe non trovare lavoro anche se lo cerca. La matrice dei payoff è la seguente. Determinare gli equilibri di Nash.

	cerca lavoro	facebook
aiuta il figlio	3, 2	-1, 3
non lo aiuta	-1, 1	0, 0

Esercizio: leoni ed antilopi. Due leoni stanno cacciando e vedono Grossa Antilope e Piccola Antilope in lontananza. I leoni in ogni caso cattureranno qualsiasi preda decidano di cacciare, sia da soli che insieme. Tuttavia, se scelgono di cacciare due prede diverse, non c'è bisogno di dividere, mentre se cacciano la stessa antilope, dovranno dividersele, e l'altra scapperà. Supponendo che le loro decisioni siano indipendenti, il valore calorico di Grande Antilope sia c_b , il valore calorico di Piccola Antilope sia c_l , e $0 < c_l < c_b$.

- Determinare le condizioni su c_l, c_b per cui c'è almeno un equilibrio di Nash puro.

- Dimostrare che se non è vantaggioso per i leoni cacciare Grande Antilope, allora c'è un equilibrio misto. Trovare la probabilità che entrambi i leoni caccino Grande Antilope in questo equilibrio.

- Il payoff all'equilibrio misto può superare il payoff di cacciare Grande Antilope in un equilibrio puro?

Esercizio: strategie di tennis. Nel tennis, il giocatore che serve può servire o su dritto o sul rovescio dell'avversario. Chi riceve può prevedere se la palla verrà sul dritto o sul rovescio. Se prevede correttamente è più probabile che riesca a rimandare la palla. D'altro canto, chi serve la palla la manda con più forza sul rovescio dell'avversario. Quindi, chi riceve avrà il 60 % di probabilità di rimandare la palla se prevede correttamente un servizio sul suo rovescio, mentre avrà il 90 % di probabilità di rimandare la palla se prevede correttamente un servizio sul suo dritto. Un giocatore che prende di rovescio una palla servita sul dritto riesce a rimandarla il 20% delle volte,

mentre se prende la palla di diritto ma questa era servita sul rovescio riesce a rimandarla il 30% delle volte.

- Determinare gli equilibri di Nash.
- Dimostrare che se il rovescio del giocatore ricevente migliora un poco, cioè un rovescio previsto correttamente viene rimandato il 65% delle volte, invece del 60%, allora chi effettua il servizio gioca sul diritto più spesso, e chi riceve prevederà un servizio sul diritto più spesso.

Morale: se si migliora un colpo si usa meno spesso ma si vince di più.

Esercizio: escalation. Due persone partecipano ad un'asta. Il battitore mette una posta di 3 euro e due giocatori a turno possono o uscire dall'asta oppure aumentare di 1 euro l'ultima offerta (la prima offerta di chi non decide di uscire subito dal gioco è di 1 euro). In ogni caso ciascun giocatore paga al battitore la sua ultima offerta. Una strategia per un giocatore è decidere a priori una offerta massima s , e rimanere nel gioco finché questa non viene superata oppure finché l'altro giocatore non abbandona.

- Dimostrare che gli equilibri di Nash puri corrispondono a un giocatore che gioca $s \geq 3$, e l'altro che punta $s = 0$, ovvero esce subito dal gioco, in modo che il giocatore che punta prende la posta e paga solo 1 euro.
- La situazione cambia se ci sono più di due giocatori?
- che succederebbe se entrambi i giocatori puntassero, ovvero se le loro strategie fossero (s_1, s_2) con $s_1, s_2 > 0$? Si arriverebbe ad un'escalation per cui entrambi perderebbero denaro?

Esercizio: lotteria. Viene estratto un elemento da una terna di elementi equiprobabili $\{a, b, c\}$. Prima dell'estrazione 6 giocatori pagano 1 per giocare e scelgono un elemento dalla terna. La puntata viene suddivisa equamente tra chi ha scelto il numero estratto. Due giocatori scelgono sempre a , e uno sceglie sempre b . Restrungendo il gioco ai rimanenti tre giocatori, determinare gli equilibri di Nash puri e dimostrare che esiste un equilibrio misto simmetrico in cui nessun giocatore (tra i tre rimanenti) sceglie mai a (suggerimento: usare la dominanza debole). Dimostrare che gli equilibri puri sono (c, c, b) , (b, c, c) , (c, b, c) . Ricavare le matrici dei payoff, trascurando per semplicità il pagamento iniziale di ogni giocatore:

- Il giocatore 3 gioca a :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	$(2/5, 2/5, 2/5)$	$(1/2, 1, 1/2)$	$(1/2, 2, 1/2)$
	b	$(1, 1/2, 1/2)$	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(1, 2, 2/3)$
	c	$(2, 1/2, 1/2)$	$(2, 1, 2/3)$	$(1, 1, 2/3)$

- Il giocatore 3 gioca b :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	$(1/2, 1/2, 1)$	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(2/3, 2, 1)$
	b	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(1/2, 1/2, 1/2)$	$(2/3, 2, 2/3)$
	c	$(2, 2/3, 1)$	$(2, 2/3, 2/3)$	$(1, 1, 1)$

- Il giocatore 3 gioca c :

		Giocatore2		
		a	b	c
Giocatore1	a	$(1/2, 1/2, 2)$	$(2/3, 1, 2)$	$(2/3, 1, 1)$
	b	$(1, 2/3, 2)$	$(2/3, 2/3, 2)$	$(1, 1, 1)$
	c	$(1, 2/3, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(2/3, 2/3, 2/3)$

Capitolo 2

Giochi in forma estesa

2.1 Un esempio

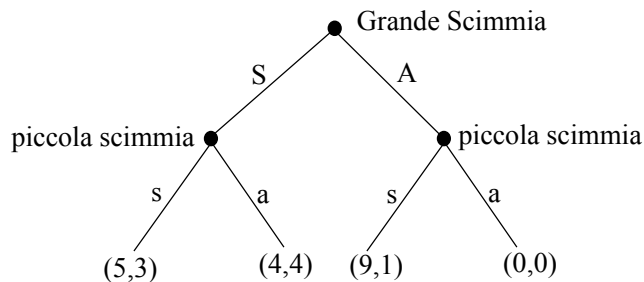
In molte situazioni è conveniente descrivere un gioco a due o più giocatori mediante un diagramma ad albero che rappresenti in modo esplicito le alternative che si pongono a ciascun giocatore. Un tale diagramma viene detto *gioco in forma estesa*, e si utilizza ad esempio quando

- le scelte dei giocatori non sono contemporanee;
- oppure quando le scelte e i payoff dipendono da fatti casuali come ad esempio l'estrazione di una carta
- oppure quando il gioco si svolge in vari turni in cui gli stessi individui giocano più volte.

Consideriamo ad esempio il seguente problema decisionale, in cui ci sono due individui in competizione per una risorsa, ma uno dei due ha un evidente vantaggio sull'altro nel senso che la risorsa gli frutta una fitness maggiore rispetto all'altro giocatore. Supponiamo che una scimmia grande G ed una scimmia piccola P cerchino di accaparrarsi un frutto che si trova su di un albero. Ciascuna delle due scimmie può salire sull'albero e cercare di accaparrarsi il frutto, ma questo inevitabilmente cade a terra se staccato dall'albero, anche se la scimmia che è salita sull'albero riesce a mangiarne una parte. Supponiamo inoltre che il costo della salita sia 2 unità di fitness per la scimmia grande, e nullo per la scimmia piccola, e che il valore energetico del frutto sia 10 unità di fitness. Infine, supponiamo che se la grande

scimmia sale sull'albero, riesca a mangiare un pezzo più grande del frutto rispetto a quanto mangerebbe la piccola scimmia nella analoga situazione.

Se assumiamo che la grande scimmia prenda la sua decisione prima della piccola scimmia, il problema decisionale si può riassumere nel diagramma ad albero in figura:



Quindi un gioco in forma estesa si può rappresentare come un diagramma ad albero i cui nodi corrispondono ai giocatori, e i cui rami uscenti da un nodo corrispondono alle mosse o azioni disponibili al giocatore a cui corrisponde il nodo. Ai nodi terminali corrispondono i payoff relativi alle scelte effettuate: il primo numero è il payoff del primo giocatore, in questo caso G , e il secondo è il payoff del secondo giocatore P .

Il fatto che sia G a scegliere per prima si riflette nel fatto che la sua avversaria P ha due nodi decisionali distinti: P quando deve decidere se G ha scelto A oppure S .

Diciamo che quindi P può trovarsi in due *stati di informazione* distinti, appunto se G ha scelto A oppure S . I due nodi decisionali di P corrispondono ai due stati di informazione. Se P non sapesse in anticipo la decisione di G , come vedremo tra poco, allora avrebbe un unico stato di informazione, cioè non saprebbe nulla. Per quello che riguarda G , questa decide per prima e quindi ha un unico stato di informazione possibile, corrispondente al suo unico nodo decisionale.

2.2 Definizioni

Definizione 2.2.1. Un *grafo* è un insieme formato da un insieme di nodi $V = \{x, y, \dots, z\}$ e da un insieme di archi E , ovvero coppie di nodi, quindi elementi dell'insieme $V \times V$. In questo capitolo assumiamo che il grafo non sia direzionato, ovvero che la relazione E sia simmetrica: se $(x, y) \in E$ allora $(y, x) \in E$: in questo caso, (x, y) e (y, x) vengono identificati tra loro.

Definizione 2.2.2. Si dice *cammino* tra i nodi x, y un insieme di archi della forma

$$\{(x, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-2}, x_{k-1}), (x_{k-1}, y)\}.$$

Con abuso di notazione, utilizzeremo la parola cammino anche per la successione di nodi ed archi corrispondente, ovvero

$$\{x, (x, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_2, \dots, x_{k-2}, (x_{k-2}, x_{k-1}), x_{k-1}, (x_{k-1}, y), y\}.$$

Definizione 2.2.3. Si dice *albero* un grafo in cui esiste un unico cammino che connette ciascuna coppia di nodi, oppure, equivalentemente, in cui non ci sono cicli (ovvero cammini il cui nodo iniziale coincide con quello finale).

Definizione 2.2.4. Si dice *albero con radice* un albero in cui un nodo è privilegiato, detto radice.

Definizione 2.2.5. Dato un nodo x si dice *storia* di x l'unico cammino che connette x alla radice.

Definizione 2.2.6. Si dice che un nodo y *segue* un nodo x se x appartiene alla storia di y . Analoga definizione vale per gli archi.

Definizione 2.2.7. Si dice *alternativa* in x un arco che segue immediatamente x , ovvero della forma (x, y) per qualche y che segue x . Denotiamo con $A(x)$ l'insieme delle alternative in x .

Definizione 2.2.8. Un nodo x si dice *terminale* se $A(x) = \emptyset$, ovvero se non esistono alternative in x . Indichiamo con Z l'insieme dei nodi terminali.

Definizione 2.2.9. Si dice *gioco in forma estesa* e si indica con Γ_e un albero con radice con insieme dei nodi X , e una lista di oggetti definiti come segue:

- un insieme di giocatori $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$;
- una funzione 'giocatore' P che associa ad ogni nodo non terminale una etichetta $P(x) \in \{0, 1, \dots, N\}$, con $P(x) \in \{1, \dots, N\}$ se il nodo è un nodo decisionale, ovvero se è controllato dal giocatore $P(x)$, oppure $P(x) = 0$ se il nodo è un nodo casuale, ovvero controllato dal giocatore natura:

$$P : X \setminus Z \rightarrow \{0\} \cup \mathcal{N};$$

- una distribuzione di probabilità $q \in \Delta(A(x))$ sulle alternative nei nodi casuali x ;
- per ogni $i \in \mathcal{N}$, una partizione $\mathcal{I}_i = \{\mathcal{I}_i^1, \dots, \mathcal{I}_i^k\}$ dei nodi decisionali del giocatore i . Ciascun insieme \mathcal{I}_i^h (che è quindi un insieme di nodi decisionali del giocatore i), si dice *stato di informazione* del giocatore i . Spesso indicheremo con s un generico stato di informazione.
- una funzione che associa ad ogni alternativa in un nodo decisionale x una etichetta detta *mossa*, tale che se x e x' sono due nodi controllati dallo stesso giocatore e che appartengono allo stesso stato di informazione, allora per ogni alternativa in x che corrisponde ad una certa mossa d esiste un'unica alternativa in x' che ha la stessa mossa d . In altre parole la mossa dipende solo dallo stato di informazione, e scriviamo

$$D_s$$

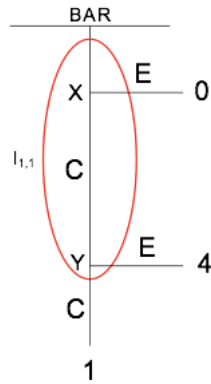
per l'insieme delle mosse disponibili nello stato di informazione s .

- una funzione payoff del giocatore i definita sull'insieme dei nodi terminali

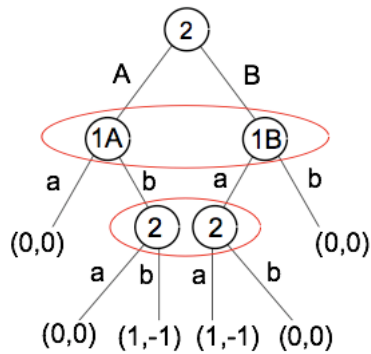
$$v_i : Z \rightarrow \mathbb{R}.$$

- si richiede infine che il gioco abbia *memoria perfetta*: consideriamo $x, y \in s$ nodi decisionali del giocatore i che appartengono allo stesso stato di informazione s , e x' è un nodo decisionale dello stesso giocatore i che precede x ; per definizione la storia di x passa per x' . Quindi una delle alternative in x' deve appartenere alla storia di x . Supponiamo che d sia l'etichetta della mossa corrispondente a questa alternativa e s' sia lo stato di informazione di x' . Il gioco si dice a memoria perfetta se esiste un altro nodo $y' \in s'$ che appartiene alla storia di y , e tale che l'alternativa in y' che appartiene alla storia abbia etichetta d .

Un esempio prototipico di gioco a memoria imperfetta è il paradosso del guidatore smemorato. Un guidatore deve tornare a casa dal bar ed entra in autostrada. L'autostrada ha due uscite: una porta in una zona malfamata della città (payoff 0) e l'altra porta a casa (payoff 4). Se il guidatore continua, finisce in un motel (payoff 1). Il fatto è che il guidatore appena entrato in autostrada non è in grado di stabilire a quale uscita si trova: i due nodi decisionali appartengono allo stesso stato di informazione.



Un altro esempio di gioco a memoria imperfetta è il seguente:



In effetti, quando il giocatore 2 si trova nel suo secondo stato di informazione, non può stabilire se ci sia arrivato giocando A o B al primo turno.

Definizione 2.2.10. Una **strategia per un gioco in forma estesa** è una funzione che associa ad ogni stato di informazione di ciascun giocatore una mossa disponibile in quello stato di informazione.

Se la cardinalità di \mathcal{I}_i (insieme degli stati di informazione del giocatore i) è k , allora una strategia per il giocatore i è un elemento dell'insieme

$$D_i = \prod_{s \in \mathcal{I}_i} D_s = D_{\mathcal{I}_i^1} \times D_{\mathcal{I}_i^2} \times \cdots \times D_{\mathcal{I}_i^k},$$

ovvero una lista di mosse, una per ciascuno stato di informazione.

Definizione 2.2.11. Un gioco in forma estesa si dice **ad informazione perfetta** se ogni stato di informazione contiene un solo nodo decisionale.

Proposizione 2.2.1. *Ad ogni gioco in forma estesa con un numero finito di giocatori e con un albero finito (ovvero con un numero finito di nodi) è associato un gioco in forma strategica detto **forma normale** Γ_s definito come segue:*

$$\Gamma_s = \{\mathcal{N}, (C_i)_{i \in \mathcal{N}}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}}\}$$

dove:

- \mathcal{N} è lo stesso insieme di giocatori del gioco in forma estesa;
- $C_i = D_i$;
- i payoff

$$u_i : C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \rightarrow \mathbb{R}$$

sono definiti da

$$u_i(c) = \sum_{z \in Z} p(z|c) v_i(z)$$

dove $c = (c_1, \dots, c_N) \in C$ è un profilo di strategie pure, v_i sono le funzioni payoff del gioco in forma estesa e $p(x|c)$ è la probabilità che il cammino del gioco passi per x ed è definita per induzione come segue:

- se x è la radice allora $p(x|c) = 1$;
- se x segue y con $P(y) = 0$, cioè se x segue un nodo casuale, allora

$$p(x|c) = q p(y|c)$$

dove q è la probabilità dell'alternativa yx ;

- se x segue y con $P(y) = i \in \mathcal{N}$, cioè se x segue un nodo decisionale controllato dal giocatore i , e $y \in s \in \mathcal{I}^i$ appartiene allo stato di informazione s , allora

$$p(x|c) = \begin{cases} p(y|c) & \text{se la mossa associata all'alternativa } yx \\ & \text{è effettivamente assegnata dalla strategia } c_i \\ & \text{allo stato di informazione } s: c_i(s) = d(yx) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La riduzione di un gioco in forma estesa alla sua rappresentazione normale permette di analizzarlo con gli strumenti introdotti nel capitolo precedente. In particolare, hanno senso le nozioni di strategia mista e di equilibrio di Nash.

2.3 Strategie comportamentali

Per la natura stessa della rappresentazione in forma estesa, la nozione di strategia mista non è la più naturale per analizzare gli equilibri di Nash misti. Sembra infatti operativamente più utile definire una strategia come una assegnazione di una distribuzione di probabilità sulle mosse disponibili in ogni stato di informazione. Queste sono dette strategie comportamentali.

Ricordiamo che una strategia del giocatore i per un gioco in forma estesa è una funzione

$$C_i \ni c_i : s \in \mathcal{I}_i \mapsto c_i(s) \in D_s$$

dove D_s è l'insieme delle mosse disponibili nello stato di informazione s , e si identifica con una lista di mosse

$$(c_i(\mathcal{I}_i^1), \dots, c_i(\mathcal{I}_i^k)) \in \prod_{s \in \mathcal{I}_i} D_s.$$

Una strategia mista del giocatore i , come sappiamo, è una distribuzione di probabilità su C_i :

$$\sigma_i \in \Delta(C_i) = \Delta\left(\prod_{s \in \mathcal{I}_i} D_s\right).$$

Definizione 2.3.1. Una *strategia comportamentale* del giocatore i è una legge che assegna una distribuzione di probabilità sulle mosse disponibili in ciascun suo stato di informazione:

$$p_i : s \in \mathcal{I}_i \mapsto p_i(s) \in \Delta(D_s),$$

dove

$$p_i(s) = (\pi_1, \dots, \pi_h), \quad \text{con } h = |D_s| \text{ e } \sum_{a=1}^h \pi_a = 1, \pi_a \geq 0.$$

Come tale, una strategia comportamentale è completamente identificata da una lista di distribuzioni di probabilità

$$(p_i(\mathcal{I}_i^1), \dots, p_i(\mathcal{I}_i^k)) \in \prod_{s \in \mathcal{I}_i} \Delta(D_s).$$

Ad ogni strategia mista σ_i di può associare una strategia comportamentale p_i come segue. Fissiamo un giocatore i ed un suo stato di informazione $s \in \mathcal{I}_i$. Poniamo

$$C_i(s) = \{c_i \in C_i : \exists c_{-i} \in C_{-i}, \exists x \in s \text{ tale che } p(x|c) > 0\}$$

per l'insieme delle strategie pure del giocatore i che raggiungono lo stato di informazione s con probabilità positiva per un qualche profilo di strategie degli avversari, e dove $p(x|c)$ è stata definita nella sezione precedente (per induzione).

Inoltre, per ogni mossa $d \in D_S$, definiamo

$$C_i(d, s) = \{c_i \in C_i(s) : c_i(s) = d\}$$

per l'insieme delle strategie pure del giocatore i che raggiungono lo stato di informazione s con probabilità positiva per un qualche profilo di strategie degli avversari, e che effettivamente assegnano la mossa d allo stato di informazione s .

Ricordiamo infine che $\sigma_i(c_i)$ è la probabilità assegnata alla strategia pura c_i nella strategia mista σ_i .

Concludendo, se si pone

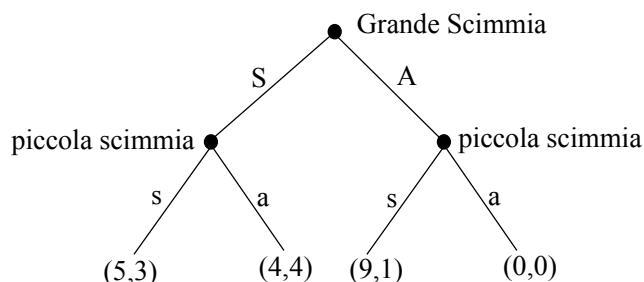
$$p_i(d) = \frac{\sum_{c_i \in C_i(d, s)} \sigma(c_i)}{\sum_{c'_i \in C_i(s)} \sigma(c'_i)}$$

ci verifica (farlo per esercizio) che la $p_i \in \Delta(s)$ definisce una strategia comportamentale. La formula precedente assegna alla mossa d la probabilità assegnata dalla strategia mista σ_i alle strategie pure che assegnano la mossa d , condizionata al fatto che lo stato di informazione s sia raggiungibile da una qualche realizzazione del gioco in cui il giocatore i gioca la strategia σ_i (ricordiamo infatti che una strategia in generale assegna mosse anche negli stati di informazione che non possono essere raggiunti utilizzando quella strategia).

2.4 Induzione all'indietro ed equilibri subgame perfect: minacce e promesse non credibili.

2.4.1 Grande Scimmia vs. Piccola Scimmia

Ritorniamo al gioco Grande Scimmia contro Piccola Scimmia descritto all'inizio del capitolo: come abbiamo visto, una strategia di un dato giocatore si definisce come una funzione che associa ad ogni stato di informazione una azione disponibile per quello stato di informazione.



In questo caso quindi G , che si può trovare in un unico stato di informazione, ha due possibili strategie, S ed A .

Per quello che riguarda P , invece, assegnare una strategia significa assegnare una scelta ad ogni sua possibile informazione. P quindi ha quattro strategie possibili:

aa : se G sale allora P aspetta, e se G aspetta allora P aspetta, ovvero P aspetta sempre sotto l'albero.

sa : se G sale allora P sale, e se G aspetta allora P aspetta, ovvero P imita quello che fa il suo avversario.

as : se G sale allora P aspetta, e se G aspetta allora P sale, ovvero P fa il contrario di quello che fa il suo avversario.

ss : se G sale allora P sale, e se G aspetta allora P sale, ovvero P sale sempre sull'albero.

Avendo definito le strategie di ciascun giocatore, possiamo riscrivere il gioco in forma estesa sotto forma di un gioco in forma strategica, del tipo di quelli studiati nei capitoli precedenti. Nel caso in questione, il gioco in forma strategica associato al gioco esteso in cui la prima a decidere è Grande Scimmia, è

	ss	sa	as	aa
S	(5, 3)	(5, 3)	(4, 4)	(4, 4)
A	(9, 1)	(0, 0)	(9, 1)	(0, 0)

dove il giocatore riga è G , e il giocatore colonna P .

Gli equilibri di Nash di questo gioco, considerando solo strategie pure, sono

$$(A, ss), \quad (A, as), \quad (S, aa).$$

Esaminiamo separatamente i tre equilibri:

• (A, ss) : Grande Scimmia decide di aspettare, mentre piccola scimmia decide di salire sempre sull'albero, indipendentemente da quello che fa Grande

Scimmia. Per raggiungere questo equilibrio, tuttavia, piccola scimmia ricorre ad una *promessa non credibile*: infatti, se P vuole convincere G a scegliere A , gli promette di scegliere s in ogni caso: è chiaro che in questo caso al giocatore G conviene scegliere A perchè in questo modo il suo payoff aumenta da 5 a 9. Questa promessa è non credibile perché se P sceglie s (mantenendo la promessa) invece che a quando il giocatore G sceglie S , diminuirebbe il suo stesso payoff da 4 a 3. Questo equilibrio di Nash quindi è in qualche modo indesiderabile.

- (S, aa) : Grande Scimmia decide di salire, mentre piccola scimmia decide di aspettare sempre sotto l'albero, indipendentemente da quello che fa Grande Scimmia. Per raggiungere questo equilibrio, tuttavia, piccola scimmia ricorre ad una *minaccia non credibile*: infatti, se P vuole forzare G a scegliere S , la minaccia di scegliere a in ogni caso: questo costituisce una minaccia, perchè se G sceglie A e P sceglie a allora G avrebbe payoff 0, ovvero il minimo possibile. D'altra parte, questa minaccia è non credibile perché se P scegliesse a (la minaccia) invece che s quando il giocatore G sceglie A , diminuirebbe il suo stesso payoff da 1 a 0. Anche questo equilibrio di Nash quindi è in qualche modo indesiderabile.

- (A, as) : Grande Scimmia decide di aspettare, mentre piccola scimmia decide di fare il contrario di Grande Scimmia. Questo equilibrio non coinvolge promesse e minacce non credibili: in realtà è un equilibrio cosiddetto *subgame perfect*, come vedremo tra poco.

Per comprendere cosa c'è di speciale nell'equilibrio (A, as) , consideriamo una procedura di risoluzione di un gioco in forma estesa detta *induzione all'indietro*. Questa procedura è illustrata nella figura 2.1. Si tratta di considerare ogni sottogioco (ovvero i rami che partono da un nodo) ed eliminarlo all'indietro, procedendo verso la radice dell'albero decisionale, scegliendo come payoff quello ottimale per il giocatore corrispondente al nodo decisionale in questione. Questa procedura fornisce un equilibrio di Nash, che viene detto appunto subgame perfect, e per costruzione non coinvolge minacce o promesse non credibili. E' interessante notare che in psicologia umana, le minacce o promesse non credibili sono all'ordine del giorno: un giocatore è disposto a rimetterci pur di imporre un dato comportamento nell'avversario. Questo fatto si può spiegare in termini di reciprocità e giochi ripetuti.

Esercizio. Discutere il caso in cui piccola scimmia decide prima di grande scimmia. Identificare l'equilibrio subgame perfect e le minacce e le promesse

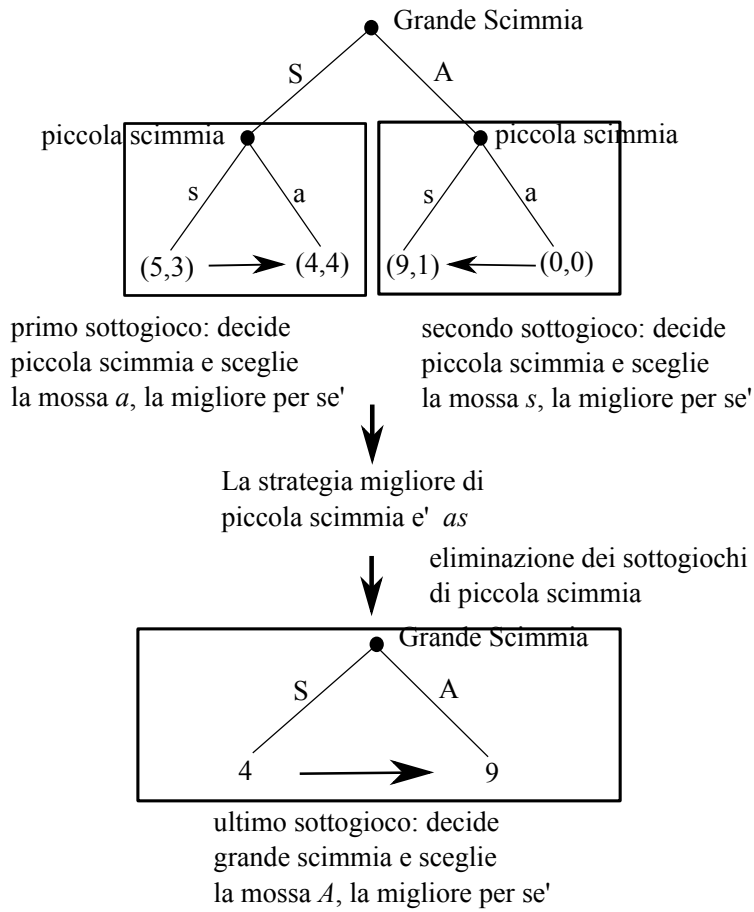
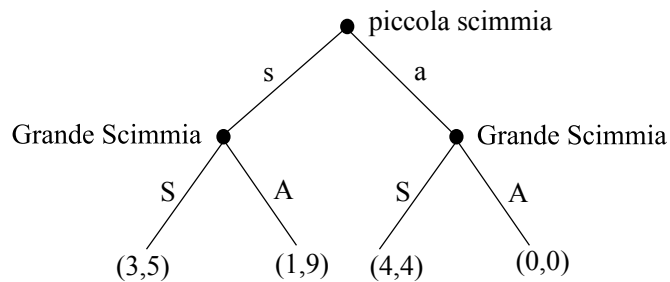


Figura 2.1: L'induzione all'indietro applicata al gioco di figura 2.1 fornisce l'equilibrio subgame perfect (*A, as*)

non credibili. Il gioco in forma strategica associato al gioco esteso

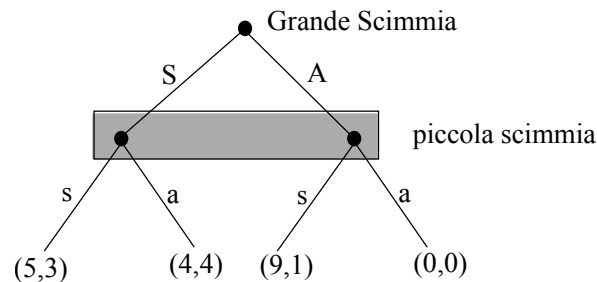


in cui la prima a decidere è la piccola scimmia, risulta essere

	<i>SS</i>	<i>SA</i>	<i>AS</i>	<i>AA</i>
<i>s</i>	(3, 5)	(3, 5)	(1, 9)	(1, 9)
<i>a</i>	(4, 4)	(0, 0)	(4, 4)	(0, 0)

dove ora il giocatore riga è piccola scimmia, e il giocatore colonna grande scimmia.

Consideriamo ora il caso in cui i giocatori devono decidere contemporaneamente. Dato che nessuno dei due sa che cosa sceglie il suo avversario, entrambi hanno un unico stato di informazione possibile (non sanno nulla). Da un punto di vista notazionale, i due nodi decisionali del giocatore *P* ora vanno identificati, il che si ottiene includendoli in un unico riquadro, che denota lo stato di informazione corrispondente. Per quello che riguarda le strategie possibili, dato che piccola scimmia ha solo uno stato di informazione, le sue strategie sono *s* oppure *a*.



Il gioco in forma strategica associato a questo gioco esteso, in cui entrambe le scimmie prendono le loro decisioni contemporaneamente, risulta quindi essere

	<i>s</i>	<i>a</i>
<i>S</i>	(5, 3)	(4, 4)
<i>A</i>	(9, 1)	(0, 0)

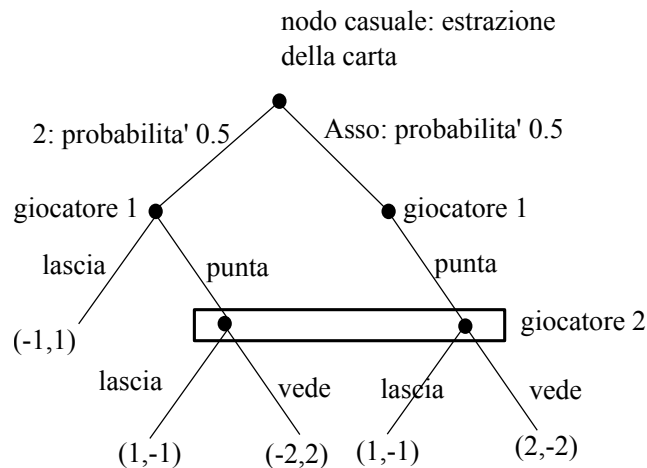
dove il giocatore riga è grande scimmia, e il giocatore colonna piccola scimmia.

2.5 Un esempio: il poker semplificato

In molte situazioni è necessario tenere conto di effetti casuali sull'ambiente o sullo stato dell'individuo che deve effettuare le decisioni. Si tiene conto di tali

effetti mediante nodi cosiddetti *casuali*, in cui i rami uscenti dal nodo corrispondono ad eventi distinti che possono avvenire con probabilità assegnate. Si parla anche di giochi contro la natura. Tali eventi possono essere legati alla distribuzione di cibo nell'ambiente (competizione per risorse trofiche), qualità del partner (competizione per l'accoppiamento) e così via.

Un classico esempio è il *poker semplificato*, già visto nel capitolo sui giochi a somma nulla, il cui albero decisionale è rappresentato sotto. In questo caso l'evento casuale è l'estrazione della carta da parte del giocatore 1. Inoltre, il giocatore 2 ha un solo stato di informazione possibile, dato che non sa quale carta è stata estratta dal giocatore 1.



La forma normale è

	lascia	vede
LP	(0, 0)	(0.5, -0.5)
PP	(1, -1)	(0, 0)

dove $LP =$ (lascia se ha 2, punta se ha asso) e $PP =$ (punta se ha 2, punta se ha asso). Possiamo interpretare le strategie come segue: $LP =$ sincero, $PP =$ bugiardo, lascia = crede, vede = non crede.

Per calcolare i payoff del gioco in forma strategica si tiene conto dell'effetto del nodo casuale prendendo il valore atteso del payoff corrispondente alle strategie considerate. Ad esempio

$$u_1(LP, \text{lascia}) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0.$$

L'unico NE è misto:

$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{q}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

In altri termini, la strategia del giocatore 1 è scegliere LP (strategia onesta) con probabilità $\frac{2}{3}$ e PP (bluffare) con probabilità $\frac{1}{3}$, mentre la strategia del giocatore 2 è scegliere 'lascia' con probabilità $\frac{1}{3}$ e 'vede' (cioè è fiducioso) con probabilità $\frac{2}{3}$, ovvero

$$\sigma_1(LP) = \frac{2}{3}, \quad \sigma_1(PP) = \frac{1}{3}, \quad \sigma_2(\text{lascia}) = \frac{1}{3}, \quad \sigma_2(\text{vede}) = \frac{2}{3}.$$

Per determinare le strategie comportamentali, consideriamo prima di tutto il giocatore 1: i suoi stati di informazione sono $\{2, \text{asso}\}$. In entrambi gli stati abbiamo

$$C_1(2) = C_1(\text{asso}) = C_1 = \{LP, PP\}$$

dato che tutte le strategie del giocatore 1 passano da $s = 2$ o $s = \text{asso}$ con probabilità positiva. Ora abbiamo

$$C_1(L, 2) = \{LP\}, \quad C_1(P, 2) = \{PP\}, \quad C_1(P, \text{asso}) = \{LP, PP\},$$

e applicando la formula

$$\begin{aligned} s = \{2\} \rightarrow p_1(L) &= \frac{\sigma_1(LP)}{\sigma_1(LP) + \sigma_1(PP)} = \frac{2}{3}, \\ p_1(P) &= \frac{\sigma_1(PP)}{\sigma_1(LP) + \sigma_1(PP)} = \frac{1}{3}, \\ s = \{\text{asso}\} \rightarrow p_1(P) &= \frac{\sigma_1(LP) + \sigma_1(PP)}{\sigma_1(LP) + \sigma_1(PP)} = 1, \end{aligned}$$

Consideriamo ora il giocatore 2: Ha un unico stato di informazione s (il gioco è a informazione imperfetta). Abbiamo

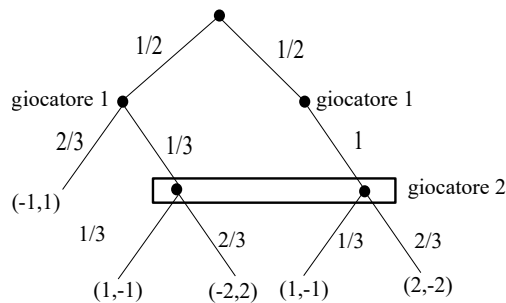
$$C_2(s) = C_2 = \{\text{lascia}, \text{vede}\}$$

dato che il giocatore si trova nei suoi nodi decisionali con probabilità positiva. Ora abbiamo

$$C_2(\text{lascia}, s) = \{\text{lascia}\}, \quad C_2(\text{vede}, s) = \{\text{vede}\},$$

e applicando la formula si ottengono le strategie comportamentali:

$$\begin{aligned} p_2(\text{lascia}) &= \frac{\sigma_2(\text{lascia})}{\sigma_2(\text{vede}) + \sigma_2(\text{lascia})} = \frac{1}{3} \\ p_2(\text{vede}) &= \frac{\sigma_2(\text{vede})}{\sigma_2(\text{vede}) + \sigma_2(\text{lascia})} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



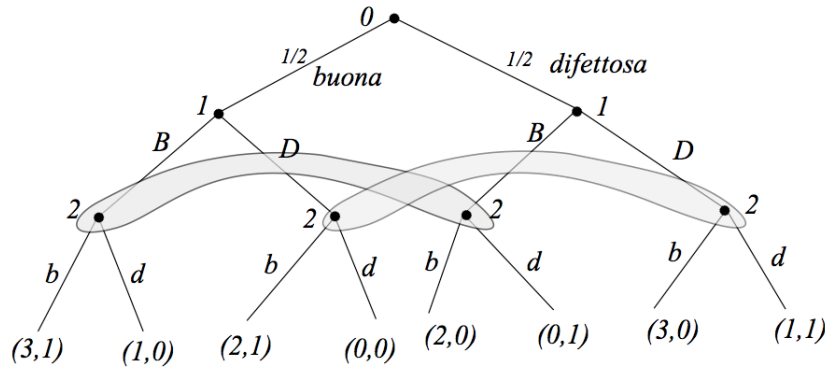
2.6 Esercizi

Esercizio. (Poker semplificato II). Nel poker semplificato, con solo 2 carte, assumere che anche il secondo giocatore estragga una carta e che, se entrambi non escono dal gioco, vinca quello che ha la carta più alta (la carta estratta dal primo giocatore viene reintrodotta nel mazzo prima che il giocatore 2 estragga a sua volta). Scrivere il corrispondente gioco in forma estesa e studiarne la rappresentazione normale (NE misti, puri e rappresentazioni comportamentali).

Esercizio. (Competizione). La ditta B ha un mercato che le frutta 4. La ditta A sceglie se entrare nel mercato a un costo 1 oppure stare fuori e non guadagnare niente. Se A entra nel mercato B ha due opzioni: o tollera la presenza di A e divide i guadagni a metà oppure combatte e vende i suoi prodotti al prezzo di costo, non guadagnando nulla. Studiare il gioco corrispondente in forma strategica ed estesa, e determinare gli equilibri, stabilendo quali sono subgame perfect.

Esercizio. (The truth game). Un venditore di automobili deve vendere auto da un lotto. Metà delle auto sono buone, le altre sono in qualche modo difettose. Il venditore vuole vendere un'auto ma ha interesse a non mentire troppo per rovinarsi la reputazione e perdere clienti. Il venditore dichiara la qualità presunta dell'auto al cliente e può mentire. Il cliente può scegliere di credere o no al venditore e acquista l'auto solo se crede che sia di buona qualità.

Supponiamo che il guadagno del venditore se vende un'auto sia 2, e che abbia un vantaggio di immagine di valore 1 se dice la verità. Da parte sua, il cliente guadagna 1 solo se stabilisce correttamente il valore dell'auto.



Il venditore di automobili è una figura mitica e paradigmatica nell'immaginario americano: non è in generale un truffatore ma vende dei beni di cui è impossibile stabilire a priori la qualità, il che lo rende oggetto di ragionevoli sospetti.. e spesso cerca di imbonire il cliente decantando la qualità del bene: è l'impersonificazione del problema della fiducia nei contratti sociali.

Esercizio. (Real men don't eat quiche). Una variante del gioco di segnalazione (truth game) in un contesto di minaccia e conflitto alla spaghetti western. Jess è al saloon e può essere in due stati: tough (duro) o wimp (debole). I duri amano la birra, se i deboli invece apprezzano la quiche. Lo straniero solitario arriva nel saloon e deve decidere se attaccare briga con Jess per prendergli il posto al bancone. Se Jess è un duro tiene testa allo straniero e non si fa scacciare (e guadagna 2 perché mantiene il suo posto), mentre se è un debole cede il posto allo straniero. Jess ha un ulteriore payoff di 1 se consuma quello che gli piace al bancone. Lo straniero solitario guadagna 1 se indovina correttamente la natura del suo avversario. Analizzare il gioco determinando la rappresentazione normale, gli equilibri puri e misti, e quelli subgame perfect (usare anche l'eliminazione delle strategie dominate).

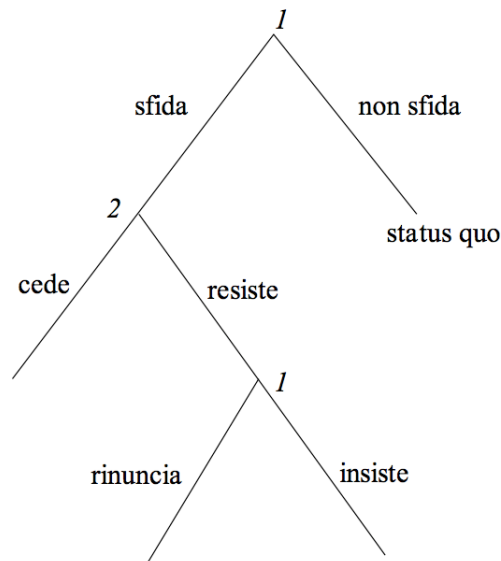
Esercizio. (Il centopiedi). Due giocatori hanno inizialmente un capitale di 2 unità ciascuno. Ciascun giocatore a turno deve decidere se uscire dal gioco e guadagnare 2 unità dall'avversario, oppure rimanere nel gioco e guadagnare un premio di 1 unità. Il gioco continua fino a che uno dei due esce oppure arriva al capitale N (nel gioco classico $N = 100$). Determinare gli equilibri subgame perfect e scrivere la rappresentazione normale e studiarla nel caso $N = 5$.

1	2	1	2	1	$(N, N-1)$
S	S	S	S		S	
E	E	E	E		E	
$(4, 0)$	$(1, 4)$	$(5, 1)$	$(2, 5)$		$(N+1, N-3)$	

Esercizio. Tu scegli un numero da 1 a 3, che io devo indovinare. Tu rispondi sinceramente dicendo 'alto', 'basso', oppure 'giusto'. Il gioco continua finché io non indovino correttamente. Tu ricevi da me un ammontare di euro pari al numero di miei tentativi. Quali sono gli equilibri di Nash e il payoff atteso all'equilibrio? $[p^* = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0), q^* = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}), u_R(p^*, q^*) = -\frac{44}{25}]$

	1	2	3
12	-1, 1	-2, 2	-3, 3
13	-1, 1	-3, 3	-2, 2
2	-2, 2	-1, 1	-2, 2
31	-2, 2	-3, 3	-1, 1
32	-3, 3	-2, 2	-1, 1

Esercizio. (Crisi dei missili) Studiare il gioco seguente, a due giocatori e a memoria perfetta, assegnando payoff opportuni a ciascun nodo terminale. Come dipende il risultato dalla scelta dei payoff?



Capitolo 3

Giochi evolutivi

3.1 Strategie evolutivamente stabili

Un gioco a due giocatori si dice *simmetrico* se i due giocatori sono intercambiabili, ovvero se

- $C_1 = C_2 =: C$, cioè i due giocatori hanno le stesse strategie pure;
- e inoltre

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = u_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta := \Delta(C).$$

Quindi in un gioco simmetrico è sufficiente assegnare la matrice dei payoff di uno dei due giocatori, ad esempio il giocatore riga, e si pone

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Il giocatore riga viene detto *giocatore focale*, e il giocatore colonna *popolazione*.

Ad esempio, PD e Chicken sono simmetrici, mentre BoS non lo è.

Se supponiamo che ciascun giocatore abbia a disposizione $|C| = n$ strategie pure, identifichiamo le strategie pure con i vettori di probabilità corrispondenti alla base canonica di \mathbb{R}^n :

$$c_i \equiv \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

cosicché il payoff si scrive come una forma bilineare sulle strategie miste:

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} p_i q_j, \quad \begin{aligned} A_{ij} &= u(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), & \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{q} &= \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Un *equilibrio di Nash simmetrico* di un gioco simmetrico è una strategia $\mathbf{p}^* \in \Delta$ tale che

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) \geq u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta. \quad (3.1)$$

Consideriamo un gioco simmetrico a 2 giocatori con n strategie e funzione dei payoff di riga $u(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, definita sull'insieme dei profili di strategie miste $\Delta \times \Delta$. Una strategia $\mathbf{p}^* \in \Delta$ è *evolutiveamente stabile* (ESS) se

$$\begin{aligned} i) \quad & u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) \geq u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta \\ ii) \quad & \text{se esiste } \mathbf{p}' \text{ tale che } u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) = u(\mathbf{p}', \mathbf{p}^*) \\ & \text{allora } u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}') > u(\mathbf{p}', \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (3.2)$$

La prima condizione è che \mathbf{p}^* sia un equilibrio di Nash simmetrico, mentre la seconda condizione viene detta 'resistenza all'invasione'.

Equivalentemente, \mathbf{p}^* è evolutiveamente stabile se $\forall \mathbf{p} \in \Delta, \exists \epsilon_0(\mathbf{p}) > 0$ tale che $\forall \epsilon$ tale che $0 < \epsilon < \epsilon_0(\mathbf{p})$, allora

$$u(\mathbf{p}^*, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}) > u(\mathbf{p}, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}). \quad (3.3)$$

Se \mathbf{p} si interpreta come 'invasore', la strategia $(1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}$ corrisponde ad una popolazione mista in cui c'è una minoranza di mutanti (ϵ) in una maggioranza di residenti ($1 - \epsilon$). La (3.3) richiede che il payoff di un giocatore focale 'residente' sia comunque strettamente maggiore di quello di un mutante, quando questi giocano contro ad una popolazione mista leggermente mutata.

Per dimostrare che le due definizioni (3.2) e (3.3) sono equivalenti, basta osservare che

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}^*, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}) &= \\ = u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) - \epsilon[(u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)) - (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}))] \end{aligned}$$

Ad esempio, per dimostrare che la (3.2) implica la (3.3), si può scegliere

$$\epsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)}{[(u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)) - (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}))]}$$

se $u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) > 0$ e $[(u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)) - (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}))] > 0$, e

$$\epsilon_0(\mathbf{p}) = 1$$

altrimenti.

Proprietà. *In un gioco simmetrico 2×2 senza equilibri di Nash puri simmetrici, l'equilibrio misto è ESS.*

Se la matrice dei payoff del giocatore focale è

	S_1	S_2
S_1	a	b
S_2	c	d

allora se fosse $a \geq c$ oppure $d \geq b$ si avrebbe che S_1 oppure S_2 sarebbero NE simmetrici (verificarlo!). Quindi deve essere $c > a$ e $b > d$. Calcolando l'equilibrio misto utilizzando la proprietà equalizzante, si trova

$$\mathbf{p}^* = (p^*, 1 - p^*), \quad \text{con} \quad p^* = \frac{b-d}{c-a+b-d} \in (0, 1).$$

Poiché \mathbf{p}^* è equalizzante e a supporto pieno,

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) = u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \quad \forall \mathbf{p},$$

cosicché bisogna verificare che

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) > u(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p}.$$

Ora, si ha che per la bilinearità

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = u(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}, \mathbf{p}) = -u(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}, \mathbf{p}^* - \mathbf{p}),$$

in cui si è sottratto il termine nullo $u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)$. Quindi è necessario dimostrare che

$$-u(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}, \mathbf{p}^* - \mathbf{p}) > 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*.$$

Posto $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{p}^* - \mathbf{p}$, notiamo che $\boldsymbol{\xi}$ ha la forma $\boldsymbol{\xi} = (\xi, -\xi)$, con $\xi = 0$ se e solo se $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$, cosicché si calcola direttamente

$$-u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = (c - a + b - d)\xi^2 > 0, \quad \forall \xi \neq 0,$$

il che prova la tesi.

Il seguente teorema è una caratterizzazione delle strategie evolutivamente stabili utile nel capitolo successivo.

Proprietá 3.1.1. *In un gioco simmetrico a due giocatori, la strategia \mathbf{p}^* è ESS se e solo se esiste un intorno V di \mathbf{p}^* in Δ (simpleso delle strategie miste) tale che*

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) > u(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in V. \quad (3.4)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la (3.4) è una condizione necessaria per la ESS. Sappiamo che se \mathbf{p}^* è ESS, vale la (3.3), ovvero $\forall \mathbf{p} \in \Delta, \exists \epsilon_0(\mathbf{p}) > 0$ tale che $\forall \epsilon < \epsilon_0(\mathbf{p})$

$$u(\mathbf{p}^*, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}) > u(\mathbf{p}, (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}).$$

Vogliamo prima di tutto dimostrare che nella disuguaglianza qui sopra possiamo prendere $\epsilon_0(\mathbf{p}) = \bar{\epsilon}$ costante e indipendente da \mathbf{p} . Considero la disuguaglianza equivalente alla (3.3), ovvero $\exists \epsilon_0(\mathbf{p}) > 0$ tale che, per $\forall \epsilon < \epsilon_0(\mathbf{p})$,

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) - \epsilon[(u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)) - (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}))] > 0. \quad (3.5)$$

Poniamo $U = \partial B_\eta(\mathbf{p}^*) \cap \Delta$ con $\eta > 0$ piccolo (si indica con $B_\eta(\mathbf{p}^*)$ l'intorno sferico di raggio η centrato in \mathbf{p}^*). Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*), \\ g(\mathbf{p}) &= (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*)) - (u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p})), \end{aligned}$$

cosicché la (3.5) diventa

$$f(\mathbf{p}) - \epsilon g(\mathbf{p}) > 0. \quad (3.6)$$

Osserviamo che poiché $f(\mathbf{p}) \geq 0$, se $g(\mathbf{p}) < 0$ la disuguaglianza (3.6) sopra è sicuramente soddisfatta per tutti gli $\epsilon \leq 1$. Consideriamo quindi l'insieme $W = \{\mathbf{p} \in U : g(\mathbf{p}) \geq 0\}$. Questo insieme è chiuso perché g è continua, ed è anche compatto essendo limitato. La funzione g ammette quindi un massimo nonnegativo su W (in realtà strettamente positivo - dimostrarlo), mentre la funzione f ammette un minimo positivo su W . Infatti, se fosse $f(\bar{\mathbf{p}}) = 0$ in qualche punto $\bar{\mathbf{p}} \in W$, allora $u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) - u(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}^*) = 0$, e quindi per la definizione di ESS, si avrebbe $g(\bar{\mathbf{p}}) = -u(\mathbf{p}^*, \bar{\mathbf{p}}) + u(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}) < 0$, quindi $\bar{\mathbf{p}} \notin W$ assurdo.

In definitiva, posto

$$\bar{\epsilon} < \frac{\min_W f(\mathbf{p})}{\max_W g(\mathbf{p})},$$

si ha che per $\epsilon < \bar{\epsilon}$ e $\mathbf{p} \in W$ la disuguaglianza (3.6) è soddisfatta, infatti

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) - \epsilon g(\mathbf{p}) &\geq \min_W f(\mathbf{p}) - \epsilon \max_W g(\mathbf{p}) \\ &> \min_W f(\mathbf{p}) - \bar{\epsilon} \max_W g(\mathbf{p}) > 0. \end{aligned}$$

Poiché per $\mathbf{p} \in U \setminus W$ la disuguaglianza è soddisfatta per $\epsilon \leq 1$, basta prendere quindi

$$\epsilon < \bar{\epsilon}$$

e la disuguaglianza (3.6) è soddisfatta in tutto U .

Definiamo ora $V = \{\mathbf{q} \in \Delta : \mathbf{q} = (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}, \epsilon < \bar{\epsilon}, \mathbf{p} \in \partial B_\eta(\mathbf{p}^*) \cap \Delta\}$, e notiamo che $V \subset B_\eta(\mathbf{p}^*) \cap \Delta$ è un intorno di \mathbf{p}^* in Δ .

Per quanto visto sopra, $\forall \mathbf{q} = (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p} \in V$, si ha

$$u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) > u(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Moltiplicando questa relazione per ϵ e sommando ad entrambi i membri $(1 - \epsilon)u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q})$ si trova

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) &= (1 - \epsilon)u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) + \epsilon u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) > (1 - \epsilon)u(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) + \epsilon u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &= u((1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}, \mathbf{q}) = u(\mathbf{q}, \mathbf{q}), \end{aligned}$$

ovvero la tesi. □

Per dimostrare il viceversa si opera analogamente, ponendo $\mathbf{q} = (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}$ e ripercorrendo all'indietro i passi precedenti.

3.2 La dinamica del replicatore

La *dinamica del replicatore* è il sistema dinamico (sistema di n equazioni differenziali ordinarie del I ordine in forma normale, autonome, non lineari)

$$\dot{p}_i = p_i(u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p})), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

nelle incognite $p_i(t)$, con $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{e}_i$.

Proprietà.

Il semplice Δ è invariante rispetto alla dinamica del replicatore, ovvero

se $\mathbf{p}(0) \in \Delta$, allora $\mathbf{p}(t) \in \Delta$

per tutti i t nell'intervallo di definizione di $\mathbf{p}(t)$, e dove $\mathbf{p}(t)$ è la soluzione del sistema (3.7) con condizioni iniziali $\mathbf{p}(0)$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$S(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t).$$

Dato che $\mathbf{p}(0) \in \Delta$, ci ha che $S(0) = 1$. Inoltre (omettendo il tempo)

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i = \sum_{i=1}^n [p_i(u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}))] = (1 - S)u(\mathbf{p}, \mathbf{p}).$$

Se $\mathbf{p}(t)$ è assegnato, l'equazione sopra scritta è una ODE nella incognita $S(t)$ che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Per l'unicità si ha che quindi $S(t) \equiv 1$, cioè la soluzione sta nel piano $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Inoltre tutte le k - facce del simpleso sono invarianti. Infatti, se per qualche \bar{t} si ha $p_i(\bar{t}) = 0$ per qualche i , allora $\dot{p}_i(\bar{t}) = 0$ per la (3.7) e di nuovo per l'unicità $p_i(t) \equiv 0$ per ogni $t > \bar{t}$ nell'intervallo di definizione della soluzione. \square

Proprietá 3.2.1. *Gli equilibri di Nash simmetrici sono punti critici della dinamica del replicatore.*

Dimostrazione. Sappiamo che gli equilibri di Nash sono equalizzanti sul supporto. Più precisamente, se $(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*)$ è NE, allora

$$\begin{aligned} \forall i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*) & \quad u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}^*) = u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*), \\ \forall i \notin \text{Supp}(\mathbf{p}^*) & \quad p_i^* = 0 \end{aligned}$$

Quindi per ogni i il secondo membro della (3.7) si annulla in corrispondenza di \mathbf{p}^* . \square

Proprietá. *I punti critici della dinamica del replicatore stabili secondo Liapunov sono equilibri di Nash simmetrici del gioco soggiacente.*

Dimostrazione. Prendiamo \mathbf{p}^* punto critico di (3.7) stabile secondo Liapunov. Assumiamo che non sia NE. Allora esiste $\hat{\mathbf{p}}$ ed $\eta > 0$ per cui

$$u(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) > \eta.$$

Questo implica che esiste una strategia pura con indice i per cui

$$u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}^*) - u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*) > \eta.$$

[Infatti, se non fosse così, ovvero se per tutti gli i fosse $u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}^*) \leq u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*)$, allora posto $\hat{\mathbf{p}} = \sum \hat{p}_i \mathbf{e}_i$, moltiplicando questa relazione per \hat{p}_i e sommando, si otterrebbe $u(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}^*) \leq u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*)$]. Poichè la funzione payoff è continua (è un polinomio omogeneo nelle componenti delle \mathbf{p}), esiste un intorno $U \in \mathbf{p}^*$ in Δ tale che

$$u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p}) > \eta \quad \forall \mathbf{p} \in U,$$

e quindi

$$\dot{p}_i = p_i(u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p})) > \eta p_i, \quad \forall \mathbf{p} \in U.$$

Quindi

$$p_i(t) > p_i(0)e^{\eta t},$$

da cui segue che

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*\| \geq |p_i(t) - p_i^*| > |p_i(0)e^{\eta t} - p_i^*|.$$

Ma per ipotesi \mathbf{p}^* è stabile secondo Liapunov, quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|\mathbf{p}(0) - \mathbf{p}^*\| < \delta$, allora $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*\| < \epsilon$. Ma se ϵ è sufficientemente piccolo, esiste un \bar{t} tale che $|p_i(0)e^{\eta \bar{t}} - p_i^*| \geq \epsilon$, il che è assurdo. \square

Disuguaglianza di Jensen. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, ovvero se $\forall x, y$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

allora per ogni insieme finito di punti $\{x_i\}_{i \in I}$ e ogni lista $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ con $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ (con I insieme finito di indici), si ha

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i),$$

e viceversa. La funzione è strettamente convessa se la disuguaglianza è stretta eccetto quando uno dei $\lambda_i = 1$ e gli altri sono nulli.

Il seguente teorema è fondamentale e giustifica l'applicazione della teoria dei giochi all'evoluzione del comportamento. Esso afferma che gli individui

di una popolazione in competizione per una risorsa scelgono strategie di equilibrio (più propriamente equilibri di Nash evolutivamente stabili) senza essere necessariamente razionali e intelligenti. E' sufficiente che i payoff del gioco che rappresenta il problema decisionale siano proporzionali alla loro fitness, ovvero al loro successo riproduttivo.

Teorema 3.2.1. *Le strategie evolutivamente stabili sono attrattori della dinamica del replicatore.*

Dimostrazione. Sia \mathbf{p}^* una ESS. Dimostriamo che la funzione

$$V(\mathbf{p}) = \prod_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^{-p_i^*}$$

è di Liapunov per la dinamica del replicatore. La funzione è differenziabile in un intorno di \mathbf{p}^* in Δ dato che, se \mathbf{p}^* appartiene ad una k -faccia di Δ , allora le sue componenti che sono nulle non compaiono nell'espressione di V , e la funzione è quindi ben definita e differenziabile. Per dimostrare che V ha un minimo locale stretto in \mathbf{p}^* , dimostriamo che

$$\log V(\mathbf{p}) - \log V(\mathbf{p}^*) > 0, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*.$$

Infatti, con la convenzione che $0 \log 0 = 0$ e usando il fatto che la funzione $-\log x$ è convessa, e usando la disuguaglianza di Jensen con $\lambda_i = p_i^*$ e $x_i = p_i/p_i^*$, con $I = \text{Supp}(\mathbf{p}^*)$,

$$\begin{aligned} \log V(\mathbf{p}) - \log V(\mathbf{p}^*) &= - \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* \log p_i + \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* \log p_i^* \\ &= - \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* \log \frac{p_i}{p_i^*} \\ &\geq - \log \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} \frac{p_i^* p_i}{p_i^*} = - \log \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i \geq 0 \end{aligned}$$

dato che $\sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i \leq 1$. E' facile vedere che il minimo è stretto per la convessità stretta di $-\log(x)$.

Dimostriamo ora che $V(\mathbf{p}(t))$ è una funzione strettamente decrescente del tempo, se $\mathbf{p}(t)$ è una soluzione di (3.7).

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \log(V(\mathbf{p}(t))) = \frac{d}{dt} \left(- \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* \log p_i \right) \\ &= - \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* \frac{\dot{p}_i}{p_i} = - \sum_{i \in \text{Supp}(\mathbf{p}^*)} p_i^* (u(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \\ &= -(u(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}) - u(\mathbf{p}, \mathbf{p})) < 0 \end{aligned}$$

in un intorno di \mathbf{p}^* per il teorema di caratterizzazione delle ESS. \square

3.3 Esercizi

Esercizio. Dimostrare che se \mathbf{p}^* è un equilibrio simmetrico allora $(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*)$ è un equilibrio di Nash nel senso usuale.

Esercizio. Dimostrare che un gioco simmetrico a 2 giocatori con un numero di strategie finito ammette sempre un equilibrio di Nash simmetrico.

Esercizio. Stabilire se l'equilibrio di Nash di CFS è ESS.

Esercizio. Dimostrare che il sistema dinamico corrispondente alla dinamica del replicatore soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, e determinare l'intervallo massimale di definizione delle soluzioni.

Esercizio. Studiare la dinamica del replicatore per il dilemma del prigioniero. Discutere la relazione tra i punti critici e gli equilibri di Nash simmetrici e le eventuali ESS.

Esercizio. Studiare la dinamica del replicatore per il dilemma del prigioniero. Discutere la relazione tra i punti critici e gli equilibri di Nash simmetrici e le eventuali ESS.

Esercizio. Studiare la dinamica del replicatore per stag hunt. Discutere la relazione tra i punti critici e gli equilibri di Nash simmetrici e le eventuali ESS.

Esercizio. Studiare la dinamica del replicatore per CFS (usando il criterio di stabilità di Liapunov). Discutere la relazione tra i punti critici e gli equilibri di Nash simmetrici e le eventuali ESS.

Esercizio. Sudiare il seguente gioco, determinarne le eventuali ESS, scrivere la dinamica del replicatore e stabilire se ammette funzioni di Liapunov.

	S_1	S_2	S_3
S_1	0, 0	5, 4	4, 5
S_2	4, 5	0, 0	5, 4
S_3	5, 4	4, 5	0, 0

3.4 Richiami sui sistemi dinamici

Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione a valori vettoriali, si dice *sistema dinamico* il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{p}),$$

nella funzione incognita $\mathbf{p} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

esiste ed è unica in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ se la funzione \mathbf{F} è C^1 . Tale soluzione si indica con

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0).$$

Un punto $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ è detto *punto critico* se $\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$. La soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale un punto critico $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*$ è costante nel tempo, e viene detta *soluzione di equilibrio*

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \quad \forall t.$$

Un punto critico è detto *stabile secondo Liapunov* se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \text{ tale che se } \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}(t, \mathbf{p}^*)\| < \epsilon \forall t.$$

Un punto critico \mathbf{p}^* è detto *asintoticamente stabile*, o *attrattore*, se è stabile secondo Liapunov ed inoltre

$$\forall \mathbf{p}_0 \text{ in un intorno di } \mathbf{p}^* \text{ si ha che } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}^*.$$

Una funzione $V = V(\mathbf{p})$ si dice *funzione di Liapunov* se è differenziabile e inoltre

i) ha un minimo locale stretto in \mathbf{p}^* , ovvero esiste un intorno U di \mathbf{p}^* tale che $V(\mathbf{p}) > V(\mathbf{p}^*)$ per $\mathbf{p} \in U$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*$.

ii) è non crescente sulle soluzioni $\mathbf{p}(t)$ del sistema dinamico, ovvero

$$V(\mathbf{p}(t)) \geq V(\mathbf{p}(t')) \quad \text{se } t < t',$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{p}(t)) \leq 0.$$

Vale il seguente

Teorema 3.4.1. *Se esiste una funzione di Liapunov, il punto critico \mathbf{p}^* è stabile secondo Liapunov. Se la funzione di Liapunov è strettamente decrescente sulle soluzioni del sistema dinamico, allora il punto critico è un attrattore.*

Capitolo 4

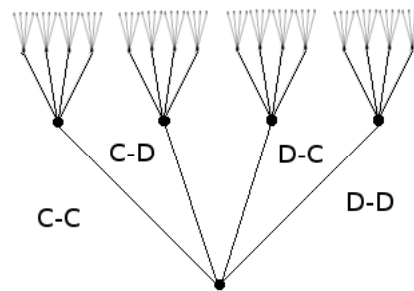
Giochi iterati

I giochi iterati sono giochi in forma estesa in cui ad ogni nodo decisionale corrisponde un round di un determinato gioco in forma strategica, detto *stage game*. Ad ogni round i giocatori giocano contemporaneamente e ricevono la ricompensa stabilita nella matrice dei payoff. Assumiamo che i giocatori possano solo scegliere strategie pure ad ogni round, e ci restringiamo a giochi a due giocatori.

In questo capitolo consideriamo un gioco iterato in cui in ogni turno si gioca un PD con matrice dei payoff

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	<i>R, R</i>	<i>S, T</i>
<i>D</i>	<i>T, S</i>	<i>P, P</i>

L'albero del gioco iterato avrà allora la forma:



Se indichiamo con

$$t = 0, 1, \dots, T$$

i turni di gioco, T viene detto orizzonte: il gioco può essere iterato un numero finito o infinito di volte a seconda che l'orizzonte sia finito o infinito.

L'albero decisionale corrispondente ad un gioco iterato ha caratteristiche particolari:

- Se l'orizzonte è infinito, il gioco prosegue all'infinito, e l'albero non ha nodi terminali.
- Ogni nodo corrisponde ad un round di gioco: le alternative in quel nodo (ovvero i rami uscenti da quel nodo) sono date da tutti i possibili profili di strategie $c \in C_1 \times C_2$;
- Scelto un nodo qualunque dell'albero, sappiamo che c'è un solo cammino che congiunge il nodo alla radice (ovvero al primo match giocato). Per l'osservazione precedente, questo cammino, detto *storia*, è completamente identificato dalla successione delle mosse scelte da entrambi i contendenti nei turni precedenti al nodo stesso. Quindi una *storia* è una successione di profili di strategie pure della forma

$$\{(c_1^k, c_2^k)\}_{k=0, \dots, t} = \{(c_1^0, c_2^0), (c_1^1, c_2^1), \dots, (c_1^t, c_2^t)\}$$

dove $c_1^k \in C_1$ e $c_2^k \in C_2$.

- I giochi ripetuti sono giochi ad informazione perfetta, cosicché ogni stato di informazione corrisponde ad una storia, determinata dalle scelte fatte dagli avversari e dai giocatori stessi nei turni passati.

Si definisce quindi una *strategia* σ_i del giocatore i come una funzione che associa ad ogni possibile storia una mossa di quel giocatore, ovvero

$$\sigma_i : \{(c_1^0, c_2^0), (c_1^1, c_2^1), \dots, (c_1^t, c_2^t)\} \mapsto c_i^{t+1} \in C_i.$$

Un profilo di strategie (σ_1, σ_2) determina univocamente una storia: infatti, indicando con \emptyset la storia nulla, si pone

$$c_1^0 = \sigma_1(\emptyset), \quad c_2^0 = \sigma_2(\emptyset),$$

e ricorsivamente

$$c_1^{t+1} = \sigma_1(\{(c_1^k, c_2^k)\}_{k=0, \dots, t}), \quad c_2^{t+1} = \sigma_2(\{(c_1^k, c_2^k)\}_{k=0, \dots, t}).$$

Per determinare i payoff in un gioco iterato, consideriamo prima di tutto un gioco ad orizzonte finito T . In questo caso ha senso definire il payoff come la somma dei payoff ad ogni turno:

$$w_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{t=0}^T u_i(c_1^t, c_2^t)$$

dove $\{(c_1^t, c_2^t)\}_{t=0, \dots, T}$ è la storia associata al profilo di strategie (σ_1, σ_2) .

Esercizio. Utilizzando l'induzione all'indietro dimostrare che l'unico equilibrio subgame perfect del dilemma del prigioniero iterato con orizzonte finito è il profilo (ALLD, ALLD), ovvero entrambi i giocatori giocano D ad ogni turno.

Se invece il gioco ha orizzonte infinito $T = +\infty$, ci sono varie possibilità per definire il payoff. Utilizziamo qui il *criterio di sconto*:

$$w_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t u_i(c_1^t, c_2^t), \quad \delta \in (0, 1),$$

dove δ può venire associato con

- i) la 'lungimiranza' dei giocatori: se δ è vicino a 1, i payoff futuri contano molto, se invece δ è piccolo, conta essenzialmente solo il guadagno al primo turno di gioco.
- ii) la probabilità di reincontro e quindi di ripetizione del gioco.

La serie che determina i payoff è convergente per il criterio del confronto: i payoff delle strategie pure sono limitati (necessariamente) cosicché la serie dei valori assoluti è dominata da una serie geometrica di ragione δ .

In ogni caso, utilizzando il criterio di sconto, i guadagni ottenuti nei primi round di gioco hanno importanza molto maggiore rispetto ai guadagni ottenibili in un futuro lontano, anche se questi fossero ingenti.

4.1 Automi decisionali

Come abbiamo visto la strategia di un giocatore dipende dalla storia del gioco fino a quel nodo, il che aumenta di molto la complessità e la memoria richiesta per implementarla.

Una semplificazione notevole della nozione di strategia nasce spontanea guardando alcuni esempi di giochi iterati: un giocatore sceglie la mossa da

giocare non in base a tutta la sua storia ma solo grazie ad alcune informazioni che si ricavano dalla storia. Come già accennato nelle pagine precedenti, un giocatore che gioca la strategia del “Tit for Tat” ha bisogno di ricordarsi solo della strategia giocata dal suo avversario all’istante precedente, un giocatore che voglia sempre collaborare a priori non ha bisogno di alcuna informazione, la sua mossa è stabilita a priori.

Ha senso dare la seguente

Definizione 4.1.1. Si dice *automa decisionale* o *macchina* per il giocatore i -esimo una collezione

$$\{\mathcal{Q}, q^0, A, f\}$$

tali che:

- \mathcal{Q} è l’insieme degli stati possibili del giocatore i -esimo
- $q^0 \in \mathcal{Q}$ è lo stato iniziale
- $A : \mathcal{Q} \rightarrow C_i$ è la funzione che associa ad un particolare stato una mossa del giocatore i :

$$A(q) = c_i \in C_i.$$

- $f : \mathcal{Q} \times (C_1 \times C_2) \rightarrow \mathcal{Q}$ è la legge di cambiamento di stato

$$f(q, (c_1, c_2)) = q'$$

con q' nuovo stato.

Osserviamo che maggiore è il numero degli stati, maggiore saranno le informazioni che il giocatore usa per decidere la mossa successiva (un automa con un numero alto di stati ha molta memoria). Automi con molti stati possibili danno origine ad algoritmi molto pesanti.

Inoltre osserviamo che q' è funzione di $c = (c_1, c_2)$, per cui il comportamento dell’automa è influenzato sia dalle mosse del giocatore che da quelle dei suoi avversari.

- **GRIM.**

Questo automa inizialmente sceglie la strategia collaborativa (gli automi che al primo passo sono collaborativi vengono generalmente detti “*nice*“, gentili); continua la collaborazione fino al primo tradimento dell’avversario. Da quel momento in poi GRIM utilizza sempre la strategia competitiva.

Si ha:

- gli stati possibili di GRIM sono $Q = \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$.
- GRIM è "nice" per cui $q^0 = \mathcal{C}$.
- In questo caso molto semplice, ai due stati corrispondono le due possibili mosse del giocatore:

$$A(\mathcal{C}) = C, \quad A(\mathcal{D}) = D.$$

cosicché \mathcal{C} è lo stato cooperativo e \mathcal{D} è quello competitivo.

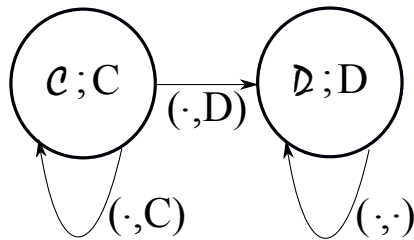
- la funzione di transizione è:

$f(\mathcal{C}, (\cdot, C)) = \mathcal{C}$ fintanto che l'avversario collabora il grim collabora e rimane nello stato \mathcal{C} ;

$f(\mathcal{C}, (\cdot, D)) = \mathcal{D}$: nel momento in cui viene tradito GRIM passa allo stato \mathcal{D} , ovvero punisce con il tradimento.

$f(\mathcal{D}, (\cdot, \cdot)) = \mathcal{D}$: da quando viene tradito GRIM entra nello stato \mathcal{D} da cui non esce, indipendentemente dalle mosse dell'avversario.

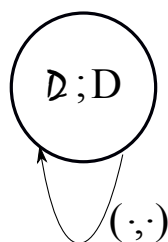
Costruiamo un diagramma per schematizzare il comportamento di questo automa, tenendo conto che per convenzione l'automa che si studia è il giocatore 1 e che il comportamento nel nodo iniziale è sempre quello nel blocco più a sinistra.



- **AllD** (il traditore)

Questo automa gioca sempre la strategia competitiva, indipendentemente dal comportamento dell'avversario.

Questo automa ha dunque un solo stato che lo spinge sempre a competere. Il suo diagramma è, banalmente:



- **Tit for Tat**

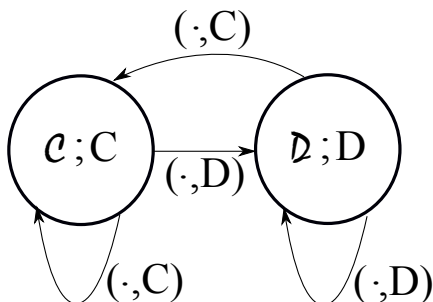
Abbiamo già parlato di questo automa, che risulta vincente nel torneo di Axelrod.

L'automa TFT che prendiamo in esame è "nice", inizialmente collaborativo, per cui nel primo nodo collabora.

Dal secondo nodo l'automa risponderà alle mosse del suo avversario secondo la regola che si potrebbe sintetizzare in "occhio per occhio, dente per dente": compete davanti ad un competitivo, collabora se il suo avversario collabora.

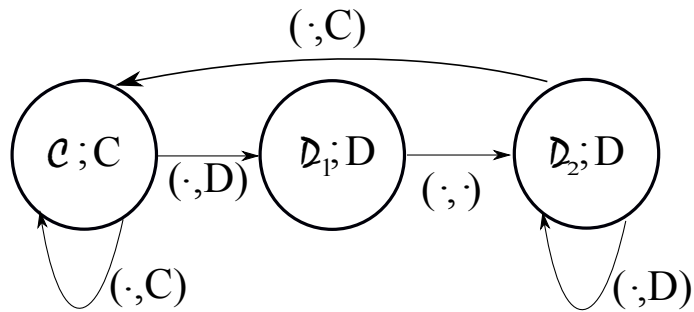
Il giocatore TFT ha due stati ed un diagramma simile a quello del grim, ma a differenza quest'ultimo automa non solo è in grado di punire l'avversario ma è anche in grado di perdonare, ovvero tornare allo stato collaborativo quando veda collaborazione nell'avversario.

Il diagramma del Tit for Tat è:



- **TfT punitivo**

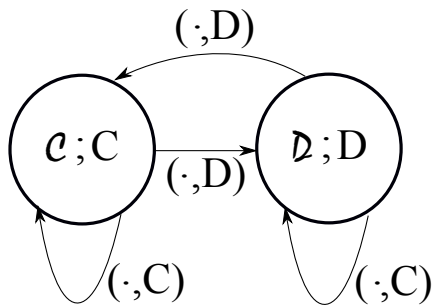
In questo caso la defezione dell'avversario viene punita per due turni consecutivi.



• **Win-Stay/Lose-Switch (Pavlov)**

Il giocatore che sceglie questa strategia distingue in guadagni bassi e guadagni alti: i guadagni bassi sono S e P , i guadagni alti sono R e T . L'idea dell'automa è che “mossa che vince non si cambia” ovvero: fintanto che una strategia mi fa avere un guadagno alto continuo a giocarla; quando da quella strategia ottengo guadagni bassi la cambio. Anche questo automa è inizialmente collaborativo.

Il diagramma di WSLS è dunque il seguente:



Spieghiamolo partendo dalla prima mossa, per convenzione la prima casella sulla sinistra: WSLS inizialmente collabora, trovandosi davanti un avversario che collabora guadagna R , un buon punteggio, e non vede motivo di modificare la sua strategia, per cui continua a collaborare.

Se l'avversario sceglie la strategia competitiva mentre WSLS collabora allora questo guadagna S , cosa che lo convince a cambiare in favore della competizione.

Fin qui il comportamento di questo automa è simile a quello di TFT, ma osserviamo che se sia WSLS che il suo avversario competono WSLS

guadagna P , per cui, visto che il guadagno è basso, torna sulla strategia collaborativa. A differenza dell'automa TFT inoltre WSLs sfrutta gli ingenui: se WSLs è scivolato per qualche motivo nel secondo blocco del diagramma (quello competitivo) ed il suo avversario comincia a cooperare WSLs guadagna T punti ad ogni round, che sono chiaramente un ottimo guadagno, per cui non si sposta e continua ad essere competitivo.

Come applicazione di quanto visto in questa sezione, dimostriamo il seguente

Teorema 4.1.1. *Se $T + P < 2R$ e $\frac{T-R}{R-P} < \delta < 1$, TfT è un equilibrio di Nash per la il dilemma del prigioniero iterato.*

Dimostrazione. Consideriamo prima di tutto il payoff ad esempio del giocatore riga che gioca TFT contro TfT: la storia del gioco corrispondente a questo profilo di strategie è

$$(C, C), (C, C), \dots, (C, C), \dots$$

con payoff

$$(R, R), (R, R), \dots, (R, R), \dots$$

da cui si ottiene

$$w_1(TfT, TfT) = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t R = \frac{R}{1-\delta}.$$

Consideriamo ora una strategia ALT deviante per il giocatore 1: esiste un turno \bar{t} in cui questa devia da TfT :

$$\begin{array}{ccccccc} (C, C), & (C, C), & \dots, & (C, C), & (D, C), & (? , D) & \dots \\ t = 0, & t = 1, & & t = \bar{t} - 1, & \bar{t}, & \bar{t} + 1 & \end{array}$$

Al turno $\bar{t} + 1$ ci sono due possibilità:

$$\begin{array}{ccc} (D, C), & (D, D) & \dots \\ \bar{t}, & \bar{t} + 1 & \end{array}$$

oppure

$$\begin{array}{ccc} (D, C), & (C, D) & \dots \\ \bar{t}, & \bar{t} + 1 & \end{array}$$

I cui payoff sono

$$(T, S), (P, P) \dots$$

$$\bar{t}, \quad \bar{t} + 1$$

oppure

$$(T, S), (S, T) \dots$$

$$\bar{t}, \quad \bar{t} + 1$$

Ovvero ad ogni defezione del giocatore 1 segue necessariamente una defezione del giocatore 2 (che gioca TfT) e quindi i payoff del giocatore 1 dopo una qualsiasi defezione sono per forza

- T seguito da P oppure
- T seguito da S oppure
- R

I turni in cui il giocatore 1 guadagna R danno lo stesso payoff che se lui giocasse TfT , mentre nelle sequenze di turni in cui guadagna T e S il suo payoff è strettamente minore di quello che ottiene quando guadagna T e P in successione (perchè $S < P$). Quindi per stabilire se

$$w_1(ALT, TfT) \leq w_1(TfT, TfT),$$

dato che

$$w_1(ALT, TfT) \leq \sum_{t=0}^{\bar{t}-1} \delta^t R + \delta^{\bar{t}} T + \delta^{\bar{t}+1} P + \dots = \sum_{t=0}^{\bar{t}-1} \delta^t R + \delta^{\bar{t}} (T + \delta P) + \dots$$

$$w_1(TfT, TfT) = \sum_{t=0}^{\bar{t}-1} \delta^t R + \delta^{\bar{t}} R + \delta^{\bar{t}+1} R + \dots = \sum_{t=0}^{\bar{t}-1} \delta^t R + \delta^{\bar{t}} (R + \delta R) + \dots$$

è sufficiente stabilire che

$$T + \delta P \leq R + \delta R.$$

La condizione precedente è verificata se

$$\delta \geq \frac{T - R}{R - P}.$$

Affinchè questa relazione abbia senso deve essere

$$\frac{T - R}{R - P} < 1,$$

ovvero

$$T + P < 2R.$$

□

4.2 I teoremi folk di Nash

Cerchiamo di caratterizzare gli equilibri di Nash per i giochi iterati: la prima domanda che ci poniamo è quali siano i payoff ottenibili da un equilibrio.

Definizione 4.2.1. Un profilo di payoff (v_1, v_2) per il dilemma del prigioniero si dice *fattibile* se è combinazione convessa a coefficienti razionali dei profili di payoff delle strategie pure, ovvero

$$(v_1, v_2) = \frac{p}{n}(R, R) + \frac{q}{n}(T, S) + \frac{r}{n}(S, T) + \frac{s}{n}(P, P),$$

con $n = p + q + r + s$ e p, q, r, s interi opportuni.

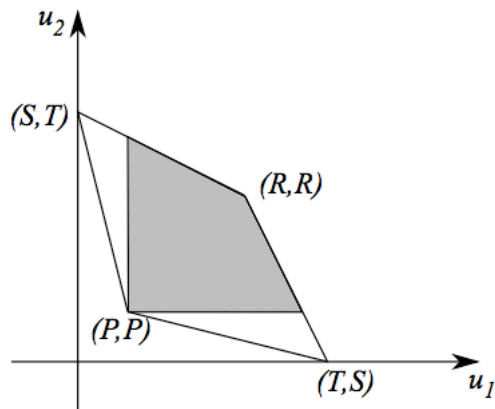
Definizione 4.2.2. In generale, dato $\Gamma = \{\mathcal{N}, (C_i)_{i \in \mathcal{N}}, (u_i)_{i \in \mathcal{N}}\}$ gioco in forma strategica, un profilo di payoff fattibile $(\bar{v}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ è tale che

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad v_i = \sum_{c \in C} \frac{\beta(c)}{\gamma} u_i(c)$$

con

$$\beta(c), \gamma \in \mathbb{N}, \quad \gamma = \sum_{c \in C} \beta(c)$$

In altre parole $(v_i)_{i \in \mathcal{N}}$ è fattibile se è combinazione convessa a coefficienti razionali dei payoff delle strategie pure $c \in C$. Nel caso di due giocatori, i payoff fattibili riempiono il cosiddetto *poligono dei payoff*, ovvero il poligono convesso nel piano dei profili di payoff, i cui vertici sono i profili corrispondenti ai profili di strategie pure.



Osserviamo che un payoff fattibile non è necessariamente ottenibile nel gioco in forma strategica con un profilo di strategie miste. Il teorema folk di Nash afferma che un payoff fattibile si può ottenere in un gioco iterato con orizzonte infinito.

Definizione 4.2.3. Dato un gioco in forma strategica (qui lo stage game) a due giocatori, si definisce *payoff di minimax* o *payoff punitivo* del giocatore 1 il payoff minimo che può essergli imposto dal giocatore 2, ovvero

$$\bar{v}_1 = \min_{c_2 \in C_2} \max_{c_1 \in C_1} u_1(c_1, c_2),$$

e analogamente per il giocatore 2:

$$\bar{v}_2 = \min_{c_1 \in C_1} \max_{c_2 \in C_2} u_2(c_1, c_2).$$

Per il dilemma del prigioniero, i payoff di minimax sono chiaramente P . In generale, si ha

Definizione 4.2.4. Si dice profilo di payoff di minimax il profilo $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N)$ con

$$\bar{v}_i = \min_{c_{-i} \in C_{-i}} \max_{c_i \in C_i} u_i(c_{-i}, c_i).$$

Il teorema seguente è un caso particolare di una serie di teoremi, detti 'folk' che mostrano come un gioco iterato ad orizzonte infinito abbia in generale infiniti equilibri di Nash. Un ruolo fondamentale giocano le strategie trigger, ovvero che innescano la punizione (imponendo i payoff di minimax) se uno dei giocatori devia dall'equilibrio,

Teorema 4.2.1. Teorema Folk di Nash. *Dato un profilo di payoff (v_1, v_2) fattibile e maggiore del minimax*

$$v_i > \bar{v}_i = P, \quad i = 1, 2,$$

esiste un equilibrio di Nash che lo realizza (a meno di $\frac{1}{1-\delta}$ e di un termine infinitesimo per $\delta \rightarrow 1^-$), ovvero esiste un profilo di strategie (σ_1^, σ_2^*) , equilibrio di Nash, tale che*

$$(1 - \delta)(w_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*), w_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)) = (v_1, v_2) + o(1),$$

dove $o(1)$ è una quantità infinitesima per $\delta \rightarrow 1^-$.

Dimostrazione. Consideriamo un profilo di payoff fattibile, ovvero una combinazione convessa a coefficienti razionali dei payoff delle strategie pure del PD

$$(v_1, v_2) = \frac{p}{n}(R, R) + \frac{q}{n}(T, S) + \frac{r}{n}(S, T) + \frac{s}{n}(P, P),$$

con $n = p+q+r+s$ e $p, q, r, s \geq 0$ interi opportuni. Per costruire un profilo di strategie (σ_1, σ_2) che implementi questi payoff, consideriamo strategie cicliche come segue:

- si incomincia giocando (C, C) p volte;
- poi si gioca (D, C) q volte;
- poi si gioca $C, D)$ r volte;
- quindi si gioca (D, D) s volte;
- si ricomincia da capo.

Consideriamo il giocatore 1 (per l'avversario il discorso è del tutto analogo): il payoff nei primi n round di gioco è

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{p-1} \delta^t R + \sum_{t=p}^{p+q-1} \delta^t T + \sum_{t=p+q}^{p+q+r-1} \delta^t S + \sum_{t=p+q+r}^{p+q+r+s-1} \delta^t P \\ &= \sum_{t=0}^{p-1} \delta^t R + \delta^p \sum_{t=0}^{q-1} \delta^t T + \delta^{p+q} \sum_{t=0}^{r-1} \delta^t S + \delta^{p+q+r} \sum_{t=0}^{s-1} \delta^t P \\ &= \frac{1-\delta^p}{1-\delta} R + \delta^p \frac{1-\delta^q}{1-\delta} T + \delta^{p+q} \frac{1-\delta^r}{1-\delta} S + \delta^{p+q+r} \frac{1-\delta^s}{1-\delta} P \end{aligned}$$

Ora, per $\delta \rightarrow 1$,

$$\delta^k = 1 + k(\delta - 1) + o(|1 - \delta|),$$

ovvero

$$1 - \delta^k = k(1 - \delta) + o(|1 - \delta|),$$

e quindi sostituendo si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{p-1} \delta^t R + \sum_{t=p}^{p+q-1} \delta^t T + \sum_{t=p+q}^{p+q+r-1} \delta^t S + \sum_{t=p+q+r}^{p+q+r+s-1} \delta^t P \\ &= pR + qT + rS + sP + o(1). \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto del fatto che la strategia è ciclica, possiamo scrivere

$$t = 0 + 0, 1 + 0, 2 + 0, (n - 1) + 0, 0 + n, 1 + n, \dots, h + kn, \dots$$

e quindi

$$\delta^t = \delta^h \delta^{kn}$$

con $h = 0, \dots, n - 1$ e $k = 0, \dots, +\infty$, da cui

$$\begin{aligned} w_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t u_1(c_1^t, c_2^t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^{kn} \sum_{h=0}^{n-1} \delta^h u_1(c_1^h, c_2^h) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^{kn} (pR + qT + rS + sP + o(1)) \\ &= \frac{1}{1 - \delta^n} (pR + qT + rS + sP + o(1)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (1 - \delta)w_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1 - \delta}{1 - \delta^n} (pR + qT + rS + sP + o(1)) \\ &= \frac{p}{n}R + \frac{q}{n}T + \frac{r}{n}S + \frac{s}{n}P + o(1) \\ &= v_1 + o(1). \end{aligned}$$

Infatti

$$\frac{1 - \delta}{1 - \delta^n} = \frac{1 - \delta}{n(1 - \delta) + o(|1 - \delta|)} = \frac{1}{n + o(1)} = \frac{1}{n} + o(1).$$

Quindi il profilo di strategie cicliche descritto sopra permette di raggiungere approssimativamente qualsiasi profilo di payoff nel poligono dei payoff.

Consideriamo ora la trigger strategy (σ_1^*, σ_2^*) consistente nel giocare il profilo precedente (σ_1, σ_2) finché un dei due giocatori non devia, e in caso di deviazione punirlo giocando D per sempre.

In assenza di deviazione,

$$(1 - \delta)w_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = (1 - \delta)w_i(\sigma_1, \sigma_2) = v_i + o(1).$$

Se uno dei due giocatori devia, possiamo supporre che ciò avvenga a $t_0 = 0$ e che il giocatore che devia sia il giocatore 1. Se ALT è la strategia deviante, dobbiamo dimostrare che (σ_1^*, σ_2^*) è Nash, ovvero che

$$w_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq w_1(ALT, \sigma_2^*).$$

Poichè σ_2 è trigger, dal secondo turno punisce sempre e si avrebbe la seguente storia:

$$(D, C), (? , D), (? , D), (? , D), \dots$$

dove ? sta per una qualsiasi strategia pura del giocatore 1. Il payoff del giocatore 1 è T al primo turno, e successivamente è P o S , e quindi è minore o uguale a P . Si ha quindi

$$w_1(ALT, \sigma_2^*) \leq T + \frac{\delta}{1-\delta}P \quad \Rightarrow \quad (1-\delta)w_1(ALT, \sigma_2^*) \leq P + (1-\delta)(T-P).$$

Poiché

$$(1-\delta)w_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 + o(1),$$

per dimostrare che (σ_1^*, σ_2^*) è NE dobbiamo dimostrare che per δ sufficientemente vicino a 1,

$$P + (1-\delta)(T-P) \leq v_1 + o(1)$$

che, unendo i termini infinitesimi per $\delta \rightarrow 1$, possiamo scrivere nella forma

$$P \leq v_1 + o(1).$$

Ora, poiché $P = \bar{v}_1$ è il payoff di minimax, si ha che $P = \bar{v}_1 < v_1$, e quindi per δ sufficientemente vicino a 1 il termine infinitesimo $o(1)$ si può scegliere piccolo a piacere e la disuguaglianza precedente è vera.

□

Corollario 4.2.2. *Il profilo di payoff cooperativo (R, R) è raggiungibile (a meno di $\frac{1}{1-\delta}$ e di un termine infinitesimo per $\delta \rightarrow 0$) da un equilibrio di Nash del dilemma del prigioniero iterato.*

Esercizio. Descrivere almeno tre strategie che realizzano il payoff cooperativo del corollario precedente.

Esercizio. Dimostrare direttamente (senza usare il teorema folk) che il profilo dei payoff (T, S) non si può ottenere come equilibrio di Nash nell' IPD. Spiegare perché non si può applicare il teorema folk.

Esercizio. Dimostrare direttamente che il profilo di strategie (GRIM, GRIM) è Nash.

Esercizio. Il profilo di strategie (AllD, AllD) è Nash?

Esercizio. Costruire una strategia trigger basata su GRUDGE e dimostrare che è un equilibrio di Nash. GRUDGE corrisponde al profilo di strategie $\{(D, C), (C, D), (D, C), (C, D), \dots\}$.

Capitolo 5

L'algoritmo PageRank

5.1 Digrafi

Un grafo direzionato o digrafo è una coppia $G = (V, E)$, con V insieme dei vertici ed E , insieme degli archi, un sottoinsieme di $V \times V$. Denotiamo da ora in poi con $i \in \{1, \dots, n\}$ i vertici del grafo, con $n = |V|$ l'ordine del grafo. La relazione che definisce E non è simmetrica, cosicchè se $ij \in E$, non necessariamente $ji \in E$. Per convenzione, si assume che l'arco ij sia diretto da i a j . Un arco del tipo ii viene detto *loop*.

Si dice *indegree* di un vertice $i \in V$ il numero di archi il cui secondo estremo è i , ovvero

$$\deg^-(i) = |\{ji \in E : j \neq i\}|,$$

e si dice *outdegree* di $i \in V$ il numero di archi il cui primo estremo è i , ovvero

$$\deg^+(i) = |\{ij \in E : j \neq i\}|,$$

e si definiscono di conseguenza gli intorni entranti e uscenti di i come

$$N^-(i) = \{j \neq i : ji \in E\}, \quad N^+(i) = \{j \neq i : ij \in E\}.$$

Dato un sottoinsieme $S \subset V$ di nodi, si dice *sottografo* indotto da S il grafo $\langle S \rangle_G$ i cui vertici sono gli elementi di S e i cui archi sono gli archi di G i cui estremi sono elementi di S . In altri termini, per ogni $i, j \in S$, $ij \in E(\langle S \rangle_G)$ se e solo se $ij \in E(G)$.

Un *cammino direzionato* γ_{ij} da $i \in V$ a $j \in V$ di lunghezza k è una successione di k archi adiacenti del tipo

$$\gamma_{ij} = (ii_1, i_1i_2, \dots, i_{k-1}j),$$

e si scrive

$$|\gamma_{ij}| = k,$$

per la sua lunghezza. Il diametro di un digrafo è la lunghezza del più lungo cammino minimo tra due punti del grafo.

La *matrice di adiacenza* di un digrafo è la matrice $n \times n$ tale che

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } ij \in E \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La matrice di adiacenza non è in generale simmetrica, e può avere righe nulle. In generale, la somma degli elementi della riga i -esima è $\text{deg}^+(i)$, mentre la somma degli elementi della colonna j -esima è $\text{deg}^-(j)$.

5.1.1 Irriducibilità

Due vertici $i, j \in V$ si dicono *fortemente connessi* se esiste un cammino direzionato da i a j ed un cammino direzionato da j a i . Ciò definisce una relazione di equivalenza, le cui classi si dicono *componenti fortemente connesse* del digrafo. Un digrafo è *fortemente connesso* se tutti i suoi vertici sono tra loro equivalenti, ovvero se ogni vertice può essere raggiunto da qualsiasi altro su un cammino direzionato.

Si ha la seguente

Proprietà 5.1.1. *L'elemento ij -esimo della matrice*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ volte}}$$

è il numero di cammini direzionati di lunghezza k che uniscono il vertice i al vertice j .

Dimostrazione. Esercizio: per induzione. □

Quindi un grafo è fortemente connesso se e solo se

$$\forall i, j \quad \exists k \quad : \quad A_{ij}^k > 0$$

(tale k in generale dipende da i, j). Questa proprietà si può riformulare in termini della *matrice di raggiungibilità*

$$R^k = (I + A)^k.$$

Lo sviluppo della potenza di $I + A$ contiene tutte le potenze di A fino a k , cosicché possiamo affermare che un grafo è fortemente connesso se e solo se

$$\exists k : R^k > 0.$$

La connessione forte si può anche caratterizzare in termini di irriducibilità: una matrice quadrata A si dice *riducibile* se esiste una matrice di permutazione P tale che

$$P^T A P = \tilde{A} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

con X, Z matrici quadrate. In caso contrario la matrice si dice *irriducibile*. Si nota che se A è la matrice di adiacenza di un digrafo, allora $P^T A P$ è la matrice di adiacenza dello stesso grafo in cui gli indici dei nodi sono permutati mediante la permutazione P . Quindi la proprietà di irriducibilità della matrice di adiacenza è una proprietà intrinseca di un grafo. La forma \tilde{A} si dice *forma di Frobenius* della matrice A .

Il risultato seguente identifica la riducibilità con la connessione forte del grafo.

Proprietá 5.1.2. *Un digrafo è fortemente connesso se e solo se la sua matrice di adiacenza è irriducibile.*

Dimostrazione. Assumiamo che A sia riducibile. Consideriamo la matrice \tilde{A} . Tutte le sue potenze hanno il blocco in basso a sinistra nullo, cosicché esistono indici i, j tali che $\tilde{A}_{ij}^k = 0$ per ogni k . Quindi riducibile implica non fortemente connesso.

Viceversa, supponiamo che il grafo non sia fortemente connesso, e consideriamo le sue componenti fortemente connesse G_1, \dots, G_r . Mediante una permutazione possiamo rinominare i nodi del grafo in modo che i nodi di G_1 abbiano indice inferiore a quelli di G_2 eccetera, e in modo i nodi di G_p siano connessi solo a nodi di $G_{p'}$ con $p' \geq p$. La matrice di adiacenza di questo grafo è riducibile.

□

La forma di Frobenius è utile per identificare la struttura gerarchica del grafo: le componenti fortemente connesse sono a loro volta connesse tra loro da cammini unidirezionali.

La forma di Frobenius di una matrice di adiacenza riducibile può essere utile per determinare la struttura gerarchica di un grafo. Consideriamo infatti il grafo in Figura 5.1. La sua matrice di adiacenza è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, effettuando la permutazione di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che corrisponde al relabeling dei nodi

$$1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 7,$$

si ha che la sua forma di Frobenius è

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla forma di Frobenius si nota che la matrice ha 4 blocchi diagonali, corrispondenti ai 4 cluster in Figura 5.1.

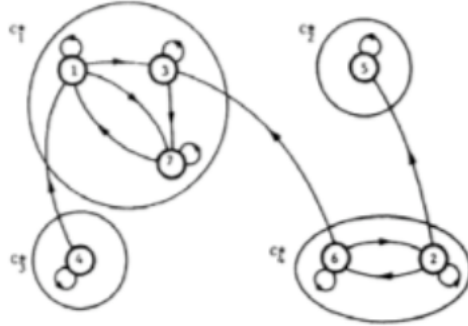


Figura 5.1: Struttura gerarchica di un grafo usando la forma di Frobenius.

5.1.2 Primitività

La nozione di primitività della matrice di adiacenza di un grafo è correlata con l'aperiodicità dei suoi nodi, ovvero con l'esistenza di cicli di lunghezza k e $k + 1$ basati sui nodi del grafo.

Una matrice quadrata A si dice *primitiva* se è nonnegativa (ovvero $A_{ij} \geq 0 \forall i, j$) ed esiste un intero k tale che A^k sia positiva:

$$A^k > 0 \quad (\text{ovvero } A_{ij}^k > 0 \forall i, j).$$

In realtà questo è un test di primitività, ma qui lo prendiamo come definizione. Una matrice primitiva è irriducibile, ma non vale il viceversa, a meno che non siano soddisfatte ulteriori condizioni. Ad esempio, il grafo a sinistra in Figura 5.2 è fortemente connesso, la sua matrice di adiacenza è irriducibile e le sue potenze sono

$$A = A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi per ogni coppia i, j di nodi esiste una potenza della matrice di adiacenza che ha quella componente positiva, ma non esiste k tale che tutte le componenti di A^k sono contemporaneamente positive. Invece, la matrice di

adiacenza e le sue potenze del grafo a destra in Figura 5.2 sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice è quindi primitiva.

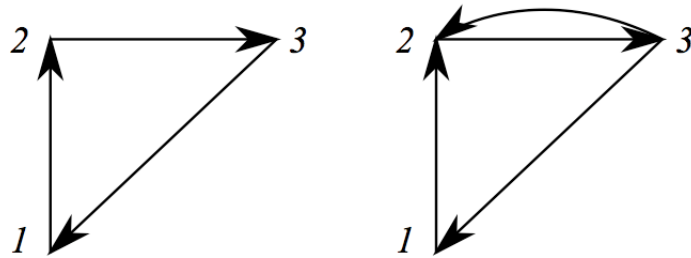


Figura 5.2: Il grafo a sinistra ha matrice di adiacenza irriducibile ma non primitiva (è fortemente connesso ma non aperiodico), mentre il grafo a destra ha matrice di adiacenza primitiva (è fortemente connesso ma anche aperiodico).

Consideriamo ora un nodo $i \in G$. Questo si dice avere *periodo* d_i se

$$d_i = \text{MCD}(|\gamma_{ii}|) = \text{MCD}(n : A_{ii}^n > 0),$$

ovvero se d_i è il massimo comun divisore delle lunghezze di tutti i cicli che contengono il nodo i . Se $\text{MCD}(|\gamma_{ii}|) = 1$, il nodo si dice *aperiodico*.

E' utile la seguente proprietà, che enunciamo senza dimostrazione:

Proprietá 5.1.3. *Dati due naturali p, q coprimi, allora per ogni $k \geq pq$ esistono interi positivi m, n tali che*

$$mp + nq = k.$$

Generalizzando, dati due numeri naturali p, q con $\text{MCD}(p, q) = c$, allora esiste un k_0 tale che per ogni $k > k_0$ esistono interi positivi m, n tali che

$$mp + nq = kc.$$

Dalla proprietà precedente segue che se il periodo di un nodo è d , allora tutti i cicli basati in quel nodo hanno lunghezza multipla di d (non necessariamente esiste un ciclo di lunghezza d).

Proprietá 5.1.4. *Se due nodi sono fortemente connessi hanno lo stesso periodo.*

Dimostrazione. Supponiamo i, j siano fortemente connessi: esistono cammini γ_{ij} e γ_{ji} che li uniscono, e $\gamma_{ij}\gamma_{ji}$ è un ciclo (si percorre prima γ_{ij} e poi γ_{ji}) di lunghezza diciamo r . Ora, per ogni ciclo γ_{jj} basato in j di lunghezza q , si ha che $\gamma_{ij}\gamma_{jj}\gamma_{ji}$ è un ciclo basato in i di lunghezza $r + q$, cosicché d_i divide sia r che $r + q$, ovvero divide anche q . Quindi $d_i \leq d_j$. Analogamente si dimostra che $d_j \leq d_i$. □

Quindi in un grafo fortemente connesso tutti i nodi hanno lo stesso periodo. Il grafo si dice aperiodico se tutti i suoi nodi sono aperiodici.

Vale la seguente caratterizzazione:

Proprietá 5.1.5. *Un grafo fortemente connesso è aperiodico se e solo se la sua matrice di adiacenza è primitiva.*

Dimostrazione. Se la matrice di adiacenza è primitiva, è anche irriducibile e quindi il grafo è fortemente connesso. Inoltre esiste k tale che $A^k > 0$, e quindi anche $A^{k+1} > 0$. In particolare, per tutti gli i , si ha $A_{ii}^k > 0$ e $A_{ii}^{k+1} > 0$, ovvero esistono cicli di lunghezza k e $k + 1$. Quindi $d_i = MCD(k, k + 1) = 1$ e i è aperiodico.

Viceversa dato che il grafo è fortemente connesso, data una coppia di nodi i e j , consideriamo la lunghezza ℓ_{ij} del minimo cammino che unisce i a j . Chiaramente ℓ_{ij} è superiormente limitata dal diametro di G . Ora, Consideriamo ad esempio due cicli di lunghezza p_j, q_j basati in j : dato che G è aperiodico, per la proprietà precedente esistono cicli basati in j di lunghezza qualsiasi maggiore di $p_j q_j$. Unendo il cammino tra i e j a uno qualsiasi di questi cicli, si ottengono cammini tra i e j di lunghezza arbitraria maggiore di $\ell_{ij} + p_j q_j$. Ora, dato che il grafo è finito, esiste $k = \max_{i,j}(\ell_{ij} + p_j q_j)$ finito, e di conseguenza esistono cammini di lunghezza h qualsiasi maggiore di k tra ogni coppia di nodi. Ciò implica che $A^h > 0$ per ogni $h \geq k$. □

Inoltre,

Proprietá 5.1.6. *Se una matrice di adiacenza irriducibile non negativa ha almeno un elemento diagonale positivo, allora è primitiva.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che un elemento diagonale positivo corrisponde a un cappio nel grafo associato alla matrice. Quindi, per la connessione forte, esistono sicuramente cicli di lunghezza opportuna k basati nel nodo in questione. Per ottenere un ciclo di lunghezza $k + 1$ basta percorrere il ciclo e dopo il cappio. Quindi il grafo è aperiodico e la sua matrice di adiacenza è primitiva. \square

5.2 Richiami sulle catene di Markov a stati finiti

Una variabile casuale discreta a stati finiti X è una funzione misurabile $X : \Omega \rightarrow \Gamma$, con $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$. Un *processo stocastico* a tempo discreto e stati finiti è una successione $(X_k)_{k=0, \dots, +\infty}$ di variabili casuali a stati finiti. Qui l'indice k gioca il ruolo del tempo.

Una catena di Markov a stati finiti è un processo stocastico a tempo discreto per cui vale la proprietà di Markov

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i),$$

ovvero la probabilità che la variabile casuale assuma il valore j al tempo $k+1$ se negli istanti precedenti $k, k-1, \dots, 0$ ha assunto i valori i, i_{k-1}, \dots, i_0 dipende solo dal valore assunto all'istante immediatamente precedente k . Una catena di Markov si dice *omogenea* se

$$\mathbb{P}(X_{h+1} = j | X_h = i) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i), \quad \forall h, k.$$

Una catena di Markov omogenea a stati finiti è completamente determinata dalla *matrice di transizione*

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i) \geq 0,$$

che misura la probabilità che il processo si trovi nello stato j nell'istante $k+1$ se all'istante k si trovava nello stato i . Si ha che

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

ovvero P_{ij} è una *matrice stocastica*.

Vale la

Proprietá 5.2.1. *Se P_{ij} è la matrice di transizione di una catena di Markov omogenea a stati finiti, si ha*

$$P_{ij}^m = \mathbb{P}(X_{k+m} = j | X_k = i) \quad \forall k,$$

ovvero basta prendere le potenze della matrice P_{ij} per determinare le probabilità di transizione a m passi.

Dimostrazione. Omessa. □

Ad ogni catena di Markov a stati finiti si può associare un grafo direzionato, i cui nodi sono gli stati della catena, ovvero $V = \Gamma = \{1, \dots, n\}$, e la cui matrice di adiacenza è tale per cui

$$A_{ij} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_{ij} > 0.$$

In altri termini, una catena di Markov a stati finiti definisce un *camminatore casuale* sul grafo la cui matrice di adiacenza è la matrice A definita sopra.

Viceversa, dato un grafo con matrice di adiacenza A , una famiglia di distribuzioni di probabilità su $N^+(i)$ per ogni nodo i definisce una catena di Markov e quindi un camminatore casuale sul grafo.

Consideriamo ora le distribuzioni di probabilità della variabile casuale X_k :

$$\sigma_i^{(k)} = \mathbb{P}(X_k = i).$$

I vettori $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = (\sigma_1^{(k)}, \dots, \sigma_n^{(k)}) \in \Delta(\Gamma)$ sono vettori di probabilità, e vale la

Proprietá 5.2.2. *Si ha*

$$\sigma_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n P_{ij} \sigma_i^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = P^\top \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = (P^\top)^k \boldsymbol{\sigma}^{(0)}.$$

Dimostrazione. Omessa. □

La proprietà precedente definisce una formula iterativa che permette di calcolare come evolve la distribuzione del processo nel tempo.

Dati due stati $i, j \in \Gamma$, questi si dicono *comunicanti* se

$$\exists n : P_{ij}^n > 0, \quad \text{e} \quad \exists m : P_{ji}^m > 0.$$

Chiaramente, due stati sono comunicanti se e solo se i nodi corrispondenti del grafo associato alla catena sono fortemente connessi. La relazione 'essere comunicanti' è di equivalenza, e una catena tutti i cui stati sono comunicanti si dice *irriducibile* (e il grafo associato è fortemente connesso).

Ne segue che una catena di Markov è irriducibile se e solo se la sua matrice di transizione è una matrice irriducibile.

Le definizioni di periodo di uno stato e di aperiodicità di una catena di Markov sono del tutto analoghe a quelle per i digrafi, a patto di sostituire la matrice di adiacenza con la matrice di transizione. Abbiamo quindi che

$$d_i = \text{MCD}(n : P_{ii}^n > 0), \quad i \in \Gamma,$$

è il periodo dello stato i , e si ha che

Proprietá 5.2.3. *Se $i, j \in \Gamma$ sono comunicanti allora $d_i = d_j$.*

Generalmente, una catena irriducibile viene anche detta *ergodica*, ed una catena la cui matrice di transizione è primitiva viene detta *regolare* (in letteratura si possono trovare definizioni differenti). Un esempio di catena di Markov ergodica ma non regolare è dato da

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente al caso dei grafi, per una catena di Markov a stati finiti si ha

Proprietá 5.2.4. *P_{ij} è irriducibile e aperiodica allora P_{ij} è primitiva (ovvero la catena è regolare) e viceversa.*

Proprietá 5.2.5. *P_{ij} è irriducibile ed esiste $i \in \Gamma$ tale che $P_{ii} > 0$, allora P_{ij} è primitiva (la catena è regolare).*

Vale il seguente importantissimo

Teorema 5.2.1. [di Markov]. *Una catena di Markov a stati finiti regolare ammette un'unico vettore di probabilità stazionaria $\sigma \in \Delta(\Gamma)$ tale che*

i) σ è lasciato invariato dalla matrice di transizione (ovvero è autovettore di P^\top con autovalore 1)

$$\sigma = P^\top \sigma,$$

ii) Per un qualsiasi vettore di probabilità iniziale $\sigma^{(0)}$ la distribuzione del processo $\sigma^{(k)}$ all'istante k tende a σ al crescere di k :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (P^\top)^k \sigma^{(0)} = \sigma \quad \forall \sigma_0 \in \Delta(\Gamma).$$

Ad esempio, nel caso in cui

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la catena è ergodica ma non regolare, esiste la probabilità stazionaria $\sigma = (1/2, 1/2)$, ma non è vero che per ogni condizione iniziale $\lim_{k \rightarrow \infty} (P^\top)^k \sigma^{(0)} = \sigma$. In effetti, ad esempio se $\sigma^{(0)} = (1, 0)$, la successione $\sigma^{(k)}$ non ammette limite.

5.3 La matrice di Google

Il nucleo del motore di ricerca Google è rappresentato da un algoritmo che assegna un punteggio (detto *PageRank*) alle pagine web che contengono ad esempio una data parola chiave, in modo che sia proporzionale alla rilevanza o importanza della pagine stesse.

Brin e Page proposero una soluzione basata sulle catene di Markov: in sostanza, considerando un navigatore casuale sul grafo web (più propriamente sul sottografo i cui nodi sono le pagine che contengono la parola chiave di una ricerca), assunsero che PageRank fosse proporzionale alla probabilità che il navigatore casuale si trovi nella data pagina dopo un numero molto grande di mosse.

Poichè un navigatore casuale su un grafo determina una catena di Markov a stati finiti, il problema si riduce quindi a determinare la distribuzione stazionaria della catena.

Consideriamo un grafo $G = (V, E)$, con $|V| = n$, e costruiamo una matrice $n \times n$ T_{ij} come segue:

$$T_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg^+(i)} & \text{se } ij \in E, \text{ ovvero se } j \in N^+(i) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Diciamo che un nodo $i \in V$ è *dangling* se

$$N^+(i) = \emptyset,$$

ovvero se non ci sono archi che partono da i . Allora si ha che, per ogni nodo non dangling,

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} = \sum_{j \in N^+(i)} \frac{1}{\deg^+(i)} = 1.$$

Se vogliamo interpretare la matrice T come matrice di transizione di un navigatore casuale, si assume qui che, quando il navigatore si vuole spostare dal nodo i , tutti i nodi ad esso connessi siano equiprobabili. Tuttavia, la matrice T non è stocastica, proprio per la presenza di righe nulle, corrispondenti ai nodi dangling. Un modo per renderla stocastica è il teleport, cioè assumere che quando il navigatore casuale si trova in un nodo dangling decida di spostarsi casualmente in una qualsiasi delle pagine disponibili (compresa quella di origine), ovvero modificando la matrice T come segue

$$\tilde{T}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg^+(i)} & \text{se } N^+(i) \neq \emptyset \text{ e } j \in N^+(i) \\ 0 & \text{se } N^+(i) \neq \emptyset \text{ e } j \notin N^+(i) \\ \frac{1}{n} & \text{se } N^+(i) = \emptyset \end{cases}$$

Ad esempio, per il grafo G in Figura 5.3 si ha

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matrice \tilde{T} è stocastica, e quindi è la matrice di transizione di un cam-

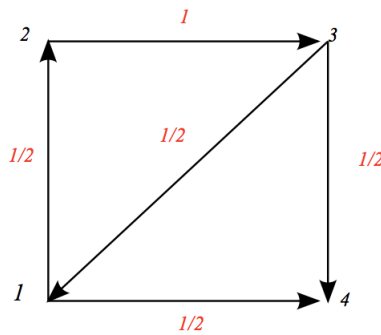


Figura 5.3: Un digrafo G .

minatore casuale sul nuovo grafo \tilde{G} , che ha gli stessi vertici di G ma in cui il nodo 4 è stato connesso a tutti gli altri e a se stesso. Formalmente, introducendo il vettore \mathbf{w} di componenti $w_i = 1/n$, per tutti gli $i = 1, \dots, n$, e il vettore \mathbf{d} che ha componente 1 negli indici dei nodi dangling e zero altrimenti, possiamo scrivere

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} + d_i w_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

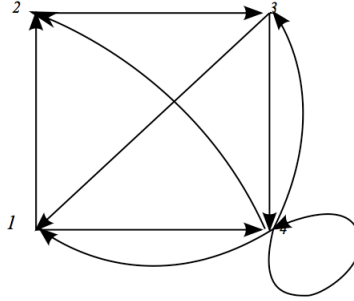


Figura 5.4: Il digrafo \tilde{G} in cui il nodo dangling è stato medicato.

In generale la matrice \tilde{T} non è né irriducibile né primitiva. Inoltre, da un punto di vista modellistico, un navigatore casuale deve poter navigare non solamente seguendo link su pagine che sta visitando, ma anche digitando un indirizzo nella barra degli indirizzi. Denotiamo con α la probabilità che il navigatore scelga questa modalità di navigazione (α viene detto *damping*). Introduciamo un *vettore di personalizzazione* fissato \mathbf{v} (quello di Google non è noto), e il vettore \mathbf{u} le cui componenti sono tutte 1, la *matrice di Google* si definisce come

$$G_{ij} = (1 - \alpha)\tilde{T}_{ij} + \alpha u_i v_j.$$

In pratica, le righe della matrice $u_i v_j$ sono tutte uguali e coincidono con il vettore (riga) \mathbf{v} . Un navigatore che si muove usando questa matrice di transizione parte da una qualsiasi pagina i presa a caso e si muove su una altra pagina j con una certa fissata probabilità v_j . La matrice di Google combina quindi, mediante i pesi α e $1 - \alpha$, queste due modalità di navigazione.

Ad esempio, nel grafo in Figura 5.3, ponendo ad esempio $p_i = 1/n$ per le componenti del vettore di personalizzazione, la matrice di Google è

$$\begin{aligned} G_{ij} &= (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha/4 & 1/2 - \alpha/4 & \alpha/4 & 1/2 - \alpha/4 \\ \alpha/4 & \alpha/4 & 1 - 3/4\alpha & \alpha/4 \\ 1/2 - \alpha/4 & \alpha/4 & \alpha/4 & 1/2 - \alpha/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se il vettore di personalizzazione ha tutte le componenti positive, la matrice di Google è

- i) stocastica
- ii) primitiva, perché positiva.

La dimostrazione di queste due affermazioni è lasciata per esercizio.

Sotto queste ipotesi la matrice di Google definisce una catena di Markov regolare. Esiste quindi un vettore di probabilità stazionaria, tale che

$$\boldsymbol{\sigma} = G^\top \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (G^\top)^k \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \in \Delta(V).$$

Quindi, se il navigatore casuale parte da una data distribuzione di probabilità sulle pagine, dopo un tempo sufficientemente grande la probabilità che si trovi ad esempio nella pagina i è approssimativamente σ_i .

Ha senso quindi prendere σ_i come una misura della popolarità della pagina i , e quindi definire il *PageRank* della pagina come il valore della distribuzione stazionaria $\boldsymbol{\sigma}$ nella pagina i .

Il problema si pone di come calcolare effettivamente il PageRank, ovvero la distribuzione stazionaria della matrice di Google. Dato che il numero di nodi in questione è enorme (google \sim googol), e la matrice è positiva e quindi non sparsa, calcolare $\boldsymbol{\sigma}$ come autovettore risolvendo la $\boldsymbol{\sigma} = G^\top \boldsymbol{\sigma}$ è impensabile.

SI può quindi pensare a un metodo approssimato, basato sul calcolo di alcuni termini della successione $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = (G^\top)^k \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = (G^\top) \boldsymbol{\sigma}^{(k-1)}$: il metodo è detto *power method*. Questo calcolo in effetti è ragionevole: infatti, posto $\mathbf{z} = \boldsymbol{\sigma}^{(k-1)}$, al k -esimo passo iterativo si ha

$$\sum_i G_{ij} z_i = (1 - \alpha) \sum_i T_{ij} z_i + (1 - \alpha) \left(\sum_i d_i z_i \right) w_j + \alpha v_j.$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sum_i u_i z_i = 1$ dato che tutte le componenti di \mathbf{u} sono uguali a 1. Ora, il primo termine della somma precedente coinvolge solo la matrice T_{ij} , che è sparsa, dato che ogni pagina punta a un numero relativamente piccolo di altre pagine. Il secondo termine è un prodotto scalare per un vettore costante, con relativamente poche operazioni da effettuare. Il terzo termine è addirittura costante. In alcuni casi, il metodo iterativo fornisce buoni risultati dopo relativamente poche operazioni.

Esempi. Nel caso di figura (5.3), consideriamo dapprima il caso senza damping, ovvero $\alpha = 0$, e con vettore di personalizzazione uniforme $\mathbf{v} =$

$(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. La probabilità stazionaria è

$$\sigma = (8/37, 7/37, 10/37, 12/37).$$

Quindi in questo caso l'ordinamento delle pagine in ordine di importanza è $(4, 3, 1, 2)$. Introducendo un po' di damping, $\alpha = 0.15$, si ha

$$\sigma = (0.2192, 0.1970, 0.2713, 0.3123),$$

che corrisponde allo stesso ordinamento. Consideriamo ora il grafo in Figura 5.5, e prendiamo un vettore di personalizzazione uniforme. La matrice di adiacenza è

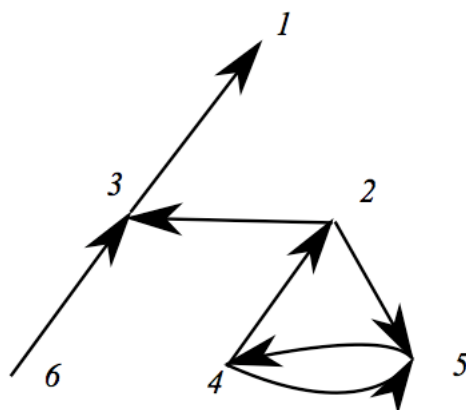


Figura 5.5: Esempio 1.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di Google

$$A := \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ \alpha/6 & \alpha/6 & 1/2 - \alpha/3 & \alpha/6 & 1/2 - \alpha/3 & \alpha/6 \\ 1 - 5\alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 \\ \alpha/6 & 1/2 - \alpha/3 & \alpha/6 & \alpha/6 & 1/2 - \alpha/3 & \alpha/6 \\ \alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 & 1 - 5\alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 \\ \alpha/6 & \alpha/6 & 1 - 5\alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 & \alpha/6 \end{pmatrix}$$

In assenza di damping, il PageRank è

$$\sigma = (0.1621, 0.1621, 0.1351, 0.2702, 0.2432, 0.0270),$$

mentre per $\alpha = 0.15$ si ha

$$\sigma = (0.1871, 0.1512, 0.1596, 0.2347, 0.2156, 0.0515),$$

ed infine per $\alpha = 0.5$ si ha

$$\sigma = (0.1922, 0.1471, 0.1858, 0.1913, 0.1839, 0.0993).$$

come si interpretano questi risultati?

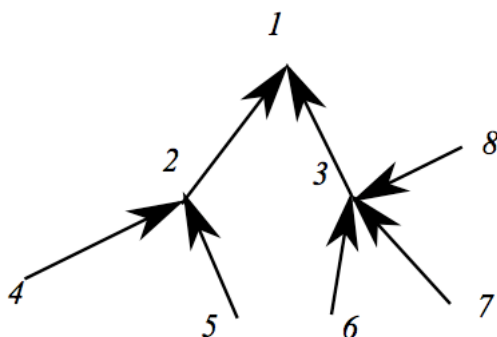


Figura 5.6: Esempio 2.

Consideriamo infine il grafo in Figura 5.6, e prendiamo un vettore di personalizzazione uniforme. La matrice di adiacenza è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di Google è

$$G := \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ \alpha/8 & 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ \alpha/8 & 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ \alpha/8 & \alpha/8 & 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ \alpha/8 & \alpha/8 & 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \\ \alpha/8 & \alpha/8 & 1 - 7\alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 & \alpha/8 \end{pmatrix}$$

In assenza di damping, si ha

$$\sigma = (0.4, 0.15, 0.2, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05),$$

per $\alpha = 0.15$ si ha

$$\sigma = (0.3594, 0.1537, 0.2021, 0.0569, 0.0569, 0.0569, 0.0569, 0.0569),$$

mentre per per $\alpha = 0.5$ si ha

$$\sigma = (0.2549, 0.1568, 0.1960, 0.0784, 0.0784, 0.0784, 0.0784, 0.0784).$$

Capitolo 6

Modelli generativi per il web

6.1 Grafi casuali

Intuitivamente, un *grafo casuale* è un insieme di grafi $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\}$ su cui si assegna una misura di probabilità \mathbb{P} su \mathcal{G} , tale che $\mathbb{P}(G) \in [0, 1]$ per $G \in \mathcal{G}$. In maniera più precisa, supponiamo che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia uno spazio di probabilità, e \mathcal{G} un insieme di grafi: un grafo casuale è una variabile casuale a valori in \mathcal{G} .

Due esempi famosi di grafi casuali sono i seguenti:

- **Il modello di Gilbert**

Il grafo casuale $G(n, p)$ è l'insieme di tutti i grafi semplici (non direzionati, senza archi multipli e senza cappi) che hanno n nodi. La misura \mathbb{P} viene assegnata assumendo che la probabilità che un certo arco appartenga al grafo sia $p \in [0, 1]$, e l'evento che un dato arco appartenga al grafo è indipendente da quello che un altro qualsiasi arco appartenga allo stesso grafo. Quindi, la probabilità di un grafo $G \in G(n, p)$ che ha N archi è

$$\mathbb{P}(G) = p^N (1 - p)^{M-N},$$

dove

$$M = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

è il numero massimo di archi che può avere un grafo semplice (è il numero di archi di un grafo completo con n nodi).

- **Il modello di Erdos-Renyi** Il grafo casuale $G(n, N)$, costituito da tutti i grafi che hanno n vertici e N archi, con una distribuzione di probabilità uniforme. Dato che ci sono

$$\binom{M}{N}$$

grafi di questo tipo, si ha che per ogni $G \in G(n, N)$

$$\mathbb{P}(G) = \frac{1}{\binom{M}{N}}.$$

Quindi in un grafo casuale gli eventi elementari sono grafi: ogni funzione che dipende da un grafo diventa quindi in questo contesto una variabile casuale. Ad esempio, il grado, (per un digrafo l'indegree e l'outdegree), il diametro, e così via, sono variabili casuali.

Consideriamo ad esempio il grado nel modello di Gilbert $G(n, p)$: per un qualsiasi nodo $i \in V(G)$, si ha che

$$\mathbb{P}(\text{deg}(i) = d) = \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d},$$

dato che ogni nodo appartiene al massimo a $n-1$ archi, e ci sono $\binom{n-1}{d}$ modi di scegliere d archi su $n-1$ possibili. Quindi la distribuzione dei gradi è binomiale e il grado atteso è

$$\bar{d} = \sum_{d=0}^{n-1} d \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d} = p(n-1).$$

Analogamente, si può calcolare il numero di archi atteso nel grafo. Infatti, la probabilità che il grafo abbia N archi è data da

$$\mathbb{P}(\text{size}(G) = N) = \binom{M}{N} p^N (1-p)^{M-N},$$

dove $\text{size}(G)$ è il numero di archi totali di G , cosicché il numero di archi atteso in un grafo di Gilbert è

$$\bar{N} = \sum_{N=0}^M N \binom{M}{N} p^N (1-p)^{M-N} = pM = \frac{n(n-1)}{2} p.$$

Se consideriamo grafi molto grandi, e facciamo tendere $n \rightarrow \infty$, abbiamo vari casi:

- se vogliamo che il grado atteso sia finito dobbiamo richiedere che $p \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$; in questo caso la distribuzione dei gradi diventa Poisson

$$\mathbb{P}(\text{deg}(i) = d) = \frac{\lambda^d e^{-\lambda}}{d!}$$

con $\lambda = p(n - 1)$;

- se vogliamo che il numero di archi atteso sia finito dobbiamo richiedere che $p \sim \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$.

6.2 Leggi di potenza

Una delle proprietà globali più note del grafo web è il fatto che la distribuzione degli indegree segue una legge di potenza. In modo non rigoroso, denotando con $f(i)$ il numero di pagine (o la frequenza relativa) il cui indegree è i , si ha che

$$f(i) \sim \frac{1}{i^\alpha},$$

con $\alpha > 1$. Una distribuzione di questo tipo, detta anche 'a coda pesante', implica che ci sono più pagine con indegree alto di quante se ne potrebbero aspettare se il grafo fosse 'casuale'. Nelle sezioni che seguono daremo un significato rigoroso a queste affermazioni, dimostrando che una legge di potenza per gli indegree può essere sintomo di un processo di aggregazione del web detto attaccamento preferenziale, in cui le nuove pagine che vengono create si collegano preferibilmente a pagine già esistenti con indegree alto.

6.3 Modelli online

Si dice *modello online* per il web una successione di grafi casuali direzionati semplici $\{\mathcal{G}_t\}_{t=0,1,\dots,+\infty}$ (senza cappi e archi multipli) che gode delle seguenti proprietà:

- $G_0 = \{0\}$, dove $\mathcal{G}_0 = \{G_0\}$;
- $|V(G_{t+1})| = |V(G_t)| + 1$ per ogni $G_t \in \mathcal{G}_t$ e $G_{t+1} \in \mathcal{G}_{t+1}$;
- $|E(G_{t+1})| = |E(G_t)| + 1$ per ogni $G_t \in \mathcal{G}_t$ e $G_{t+1} \in \mathcal{G}_{t+1}$,

da cui segue che $|V(G_t)| = t + 1$ e $|E(G_t)| = t$ per ogni $G_t \in \mathcal{G}_t$.

Quindi in un modello online si parte dal grafo G_0 che contiene solo il nodo 0, poi ad ogni passo t si aggiunge un nuovo nodo, e si assume che questo si connetta con una certa legge ad uno dei nodi preesistenti. Quindi al passo t il grafo (casuale) G_t ha $t + 1$ nodi e t archi direzionati. Indichiamo con

$$\deg_t^-(k), \quad k \leq t,$$

l'indegree del nodo k pensato come nodo di un grafo G_t , che come abbiamo detto è una variabile casuale, anzi, al variare di t è una successione di variabili casuali. Indichiamo inoltre con

$$f(i, t)$$

il numero di nodi di un grafo G_t che hanno indegree i . Anche questa è una successione di variabili casuali. Come tali, ha senso calcolare le attese condizionate

$$\mathbb{E}(f(i, t + 1)|G_t), \quad \mathbb{E}(f(i, t)|G_t) \equiv f(i, t).$$

Un modello online è completamente determinato da una legge che assegna la probabilità che, al passo $t + 1$, il nuovo nodo $t + 1$ si connetta con un nodo preesistente, ovvero assegnando

$$\mathbb{P}((t + 1, s) \in E(G_{t+1})|G_t), \quad s \in V(G_t).$$

Assegnare una relazione di questo tipo equivale ad assegnare una probabilità di transizione

$$\mathbb{P}(G_{t+1}|G_t).$$

Notiamo che se $\mathbb{P}(G_{t+1}|G_t) > 0$ allora il grafo G_{t+1} si ottiene da G_t aggiungendo un nodo e un arco, cosicché G_t è un sottografo indotto di G_{t+1} .

6.4 Attaccamento casuale

Consideriamo un grafo online e supponiamo che ad ogni passo $t + 1$, il nodo (pagina) che viene aggiunto (denotato con $t + 1$) si connetta mediante un arco direzionato ad un nodo preesistente del grafo G_t , in modo che la probabilità di attaccamento sia uniforme, ovvero che tutti i nodi siano equiprobabili. In altri termini,

$$\mathbb{P}((t + 1, s) \in E(G_{t+1})|G_t) = \frac{1}{t + 1}.$$

Si ha chiaramente

$$\sum_{s \in V(G_t)} \mathbb{P}((t+1, s) \in E(G_{t+1}) | G_t) = 1.$$

Consideriamo ora la variabile casuale $f(i, t)$ che misura il numero di pagine nel grafo G_t che ha indegree i : si ha

$$f(i, t+1) = f(i, t) + \begin{cases} 1 & \text{con prob. } \frac{1}{t+1} f(i-1, t) \\ -1 & \text{con prob. } \frac{1}{t+1} f(i, t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{se } i > 0,$$

e

$$f(0, t+1) = f(0, t) + \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1 - \frac{1}{t+1} f(0, t) \\ 0 & \text{con prob. } \frac{1}{t+1} f(0, t) \end{cases}$$

Passando al valore atteso si ha

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{E}(f(i, t+1) | G_t) = f(i, t) + \frac{1}{t+1} (f(i-1, t) - f(i, t)) & i > 0 \\ \mathbb{E}(f(0, t+1) | G_t) = f(0, t) + 1 - \frac{1}{t+1} f(0, t) \end{cases}} \quad (6.1)$$

Questa è l'equazione fondamentale del modello ad attaccamento casuale.

Assumiamo che $f(i, t)$ sia una variabile casuale definita anche per $i > t$, e cerchiamo soluzioni stazionarie della (6.1), ovvero tali che

$$\frac{f(i, t)}{t} = \frac{f(i, t+1)}{t+1},$$

per ogni t (sufficientemente grande). Poniamo

$$f^*(i) = \frac{f(i, t)}{t},$$

e sostituendo nella (6.3) si ottiene

$$\begin{cases} (t+1)\mathbb{E}(f^*(i) | G_t) = t f^*(i) + \frac{t}{t+1} (f^*(i-1) - f^*(i)) & i > 0 \\ (t+1)\mathbb{E}(f^*(0) | G_t) = t f^*(0) + 1 - \frac{t}{t+1} f^*(0) \end{cases}$$

e dato che, se esiste la soluzione stazionaria, questa è deterministica, dato che è completamente determinata dalle condizioni iniziali, il valore atteso coincide col valore della funzione, e possiamo scrivere

$$\begin{cases} (t+1)f^*(i) = t f^*(i) + \frac{t}{t+1} (f^*(i-1) - f^*(i)) & i > 0 \\ (t+1)f^*(0) = t f^*(0) + 1 - \frac{t}{t+1} f^*(0) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f^*(i) = \frac{t}{2t+1} f^*(i-1), & i > 0 \\ f^*(0) = \frac{t+1}{2t+1} \end{cases} \quad (6.2)$$

Questa è un'equazione iterativa deterministica che possiamo risolvere:

$$f^*(i) = \left(\frac{t}{2t+1} \right)^i f^*(0),$$

che, dato che $0 < \frac{t}{2t+1} < 1$, è una distribuzione esponenziale a decrescita molto rapida. Quindi se il web si aggregasse in modo completamente casuale in numero di pagine con indegree grande sarebbe trascurabile, il che non si verifica sperimentalmente.

6.5 Attaccamento preferenziale

Consideriamo un grafo online come nella sezione precedente e supponiamo che ad ogni passo $t+1$, il nodo (pagina) che viene aggiunto (denotato con $t+1$) si connetta mediante un arco direzionato ad un nodo preesistente del grafo G_t , in modo che la probabilità di attaccamento sia proporzionale al numero di pagine connesse al nodo, ovvero sia proporzionale al suo indegree. Inoltre, supponiamo che con probabilità fissata $\alpha > 0$ la nuova pagina si connetta ad una pagina con indegree nullo. In altri termini,

$$\mathbb{P}((t+1, s) \in E(G_{t+1}) | G_t) = \begin{cases} \gamma \deg_t^-(s) & \text{se } \deg_t^-(s) > 0 \\ \frac{\alpha}{f(0,t)} & \text{se } \deg_t^-(s) = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $f(0,t)$ il numero di pagine con indegree zero al passo t e γ è una costante di normalizzazione. Imponendo la condizione di normalizzazione, si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_s \mathbb{P}((t+1, s) \in E(G_{t+1}) | G_t) \\ &= \gamma \sum_{s: \deg_t^-(s) > 0} \deg_t^-(s) + \sum_{s: \deg_t^-(s) = 0} \frac{\alpha}{f(0,t)} \\ &= \gamma t + \alpha, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sum_{s:\deg_t^-(s)>0} \deg_t^-(s) = |E(G_t)| = t$, cosicch 

$$\gamma = \frac{1 - \alpha}{t}.$$

Consideriamo ora la variabile casuale $f(i, t)$ che misura il numero di pagine nel grafo G_t che ha indegree i : si ha

$$f(i, t + 1) = f(i, t) + \begin{cases} 1 & \text{con prob. } \frac{1-\alpha}{t}(i-1)f(i-1, t) \\ -1 & \text{con prob. } \frac{1-\alpha}{t}if(i, t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{se } i > 1,$$

e

$$f(1, t + 1) = f(1, t) + \begin{cases} 1 & \text{con prob. } \alpha \\ -1 & \text{con prob. } \frac{1-\alpha}{t}f(1, t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{se } i = 1.$$

Passando al valore atteso si ha

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{E}(f(i, t + 1)|G_t) = f(i, t) + \frac{1-\alpha}{t}((i-1)f(i-1, t) - if(i, t)) & i > 1 \\ \mathbb{E}(f(1, t + 1)|G_t) = f(1, t) + \alpha - \frac{1-\alpha}{t}f(1, t) \end{cases}} \quad (6.3)$$

Questa   l'equazione fondamentale del modello ad attaccamento preferenziale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie della (6.3), ovvero tali che

$$\frac{f(i, t)}{t} = \frac{f(i, t + 1)}{t + 1},$$

per ogni t (sufficientemente grande). Poniamo

$$f^*(i) = \frac{f(i, t)}{t},$$

e sostituendo nella (6.3) si ottiene

$$\begin{cases} (t + 1)\mathbb{E}(f^*(i)|G_t) = tf^*(i) + (1 - \alpha)((i - 1)f^*(i - 1) - if^*(i)) & i > 1 \\ (t + 1)\mathbb{E}(f^*(1)|G_t) = tf^*(1) + \alpha - (1 - \alpha)f^*(1) \end{cases}$$

e dato che, se esiste la soluzione stazionaria, questa   deterministica, dato che   completamente determinata dalle condizioni iniziali, il valore atteso coincide col valore della funzione, e possiamo scrivere

$$\begin{cases} (t + 1)f^*(i) = tf^*(i) + (1 - \alpha)((i - 1)f^*(i - 1) - if^*(i)) & i > 1 \\ (t + 1)f^*(1) = tf^*(1) + \alpha - (1 - \alpha)f^*(1) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f^*(i) = \frac{(1-\alpha)(i-1)}{1+(1-\alpha)i} f^*(i-1) \\ f^*(1) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \end{cases} \quad (6.4)$$

Questa è un'equazione iterativa deterministica che possiamo risolvere. In realtà deriviamo solo una stima della soluzione per i grande, per dimostrare che la f^* segue una distribuzione a legge di potenza.

Prima di tutto notiamo che la (6.4)₁ ha come soluzione (dimostrarlo)

$$f^*(i) = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{k}{\beta + 1 + k} f^*(1),$$

dove abbiamo posto $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$. Ora, passando ai logaritmi, si ha

$$\begin{aligned} \ln \frac{f^*(i)}{f^*(1)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \ln \frac{k}{\beta + 1 + k} \sim \int_1^{i-1} \ln \frac{xdx}{\beta + 1 + x} \\ &= [x \ln x - x - (\beta + 1 + x) \ln(\beta + 1 + x) + (\beta + 1 + x)]_1^{i-1} \\ &= (i-1) \ln(i-1) - (\beta + i) \ln(\beta + i) + c \\ &= -(\beta + 1) \ln(i) + (i-1) \ln\left(1 - \frac{1}{i}\right) - (\beta + i) \ln\left(1 + \frac{\beta}{i}\right) + c \end{aligned}$$

dove c è una costante. Esponenziando l'espressione precedente, si trova, modulo una costante moltiplicativa, e usando i limiti notevoli,

$$\begin{aligned} &\exp \left[-(\beta + 1) \ln(i) + (i-1) \ln\left(1 - \frac{1}{i}\right) - (\beta + i) \ln\left(1 + \frac{\beta}{i}\right) + c \right] \\ &= \frac{1}{i^{\beta+1}} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{i-1} \left(1 + \frac{\beta}{i}\right)^{-(\beta+i)} \rightarrow \frac{1}{i^{\beta+1}} \end{aligned}$$

per $i \rightarrow +\infty$. Concludendo, si ha

$$f^*(i) \sim \frac{f^*(1)}{i^{1+\beta}}, \quad \beta = \frac{1}{1-\alpha},$$

la relazione \sim significa che i due membri sono asintotici per $i \rightarrow +\infty$. Quindi asintoticamente per $i \rightarrow +\infty$, la distribuzione degli indegree per un grafo che si aggrega mediante la legge di attaccamento preferenziale segue una legge di potenza.

6.6 Il modello di Miller

Una distribuzione a legge di potenza non è necessariamente associata ad una legge di attaccamento preferenziale. Ad esempio testi generati casualmente possono avere una distribuzione del rango a legge di potenza.

Consideriamo un alfabeto costituito da un numero $N \in \mathbb{N}$ lettere distinte, e da un carattere spazio. Una parola in questo alfabeto è una successione finita di lettere seguita da uno spazio. E' chiaro che si possono formare N^ℓ parole di lunghezza ℓ . Un testo è una successione finita di parole.

Supponiamo ora che un meccanismo (la scimmia di Miller) prema i tasti di una tastiera con le lettere dell'alfabeto in modo casuale, e supponiamo che la probabilità di premere una lettera dell'alfabeto sia uniforme, mentre denotiamo con β la probabilità di premere il tasto spazio. Questa procedura genera testi casuali.

La probabilità che venga generata una specifica parola di lunghezza ℓ è, per l'indipendenza

$$\mathbb{P}(\ell) = \left(\frac{1-\beta}{N}\right)^\ell \beta.$$

Ordiniamo ora le parole per rango, ovvero assegnamo un numero d'ordine ad ogni parola dalle più corte alle più lunghe. Si ha che rango e lunghezza di una parola sono collegati dalla catena di disuguaglianze

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} N^k \leq r < \sum_{k=1}^{\ell} N^k,$$

dove r è il rango di una parola di lunghezza ℓ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} -1 + \sum_{k=0}^{\ell-1} N^k &\leq r < -1 + \sum_{k=0}^{\ell} N^k, \\ -1 + \frac{N^\ell - 1}{N - 1} &\leq r < -1 + \frac{N^{\ell+1} - 1}{N - 1}, \\ N^\ell - 1 &\leq (N - 1)(r + 1) < N^{\ell+1} - 1, \\ N^\ell &\leq (N - 1)r + N < N^{\ell+1}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\ell \leq \log_N r + \text{cost.} + R(r) < \ell + 1,$$

con $R(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow +\infty$. Quindi, per $r \rightarrow \infty$,

$$\ell \sim \log_N r.$$

Sostituendo nell'espressione per la probabilità si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r) &\sim \left(\frac{1-\beta}{N} \right)^{\log_N r} = N^{\log_N r \log_N \left(\frac{1-\beta}{N} \right)} = N^{\log_N r (\log_N(1-\beta) - 1)} \\ &= r^{\log_N(1-\beta) - 1} = \frac{1}{r^{(1 - \log_N(1-\beta))}} = \frac{1}{r^\alpha}, \end{aligned}$$

con $\alpha = 1 - \log_N(1-\beta) > 1$. Questa distribuzione ricorda la cosiddetta *Legge di Zipf*: la distribuzione della frequenza delle parole in un testo in funzione del rango segue una legge di potenza.

In definitiva, abbiamo dimostrato che anche un meccanismo di generazione casuale di testi porta ad una distribuzione che segue una legge di potenza: questa quindi non è necessariamente una prova che sia in atto un meccanismo di attaccamento preferenziale.

Capitolo 7

Cenni sulle reti sociali

In questo capitolo consideriamo grafi semplici non direzionati $G = (V, E)$.

7.1 Centralità

Introduciamo prima di tutto alcune misure, cosiddette di centralità, che permettono di stabilire l'importanza dei singoli nodi in base ad opportuni criteri.

Dati due nodi $u, v \in V$ la loro *distanza* $d(u, v)$ è la lunghezza (ovvero il numero di archi che lo compongono) del cammino minimo che li unisce. Se non esistono cammini tra i due nodi la distanza si assume essere infinita.

Dato un nodo $u \in V$, la sua *eccentricità* $\epsilon(u)$ è definita da

$$\epsilon(u) = \max_{v \in V} d(u, v),$$

e il raggio r di un grafo è la minima eccentricità, ovvero

$$r = \min_{u \in V} \epsilon(u).$$

Il *centro* di G è l'insieme dei vertici con eccentricità minima, ovvero con eccentricità uguale al raggio del grafo.

Questo suggerisce una prima definizione di centralità riferita ai nodi (detta *vertex centrality*), ovvero

$$c_V(u) = \frac{1}{\epsilon(u)}.$$

Questa misura valuta la massima distanza del nodo in esame da tutti gli altri. Come tale è appropriata per situazioni in cui è necessario minimizzare questa distanza, ad esempio per decidere dove disporre una stazione dei pompieri, in modo che partendo dal nodo in questione si possa raggiungere in un tempo breve tutti i nodi della rete.

Una seconda misura di centralità (detta *closeness*) è invece riferita alla distanza media da tutti i nodi del grafo

$$c_C(u) = \frac{1}{\sum_{w \in V} d(u, w)}.$$

Questa misura è appropriata ad esempio per disporre un ospedale, ovvero un servizio usato da un grande numero di nodi, in cui il problema è minimizzare la distanza media dai nodi della rete.

Infine, una terza misura di centralità (detta *betweenness centrality*) è riferita a quanti cammini minimi (geodetici) passano per il nodo in questione:

$$c_B(u) = \sum_{v, w \in V} \frac{N(v, u, w)}{N(v, w)},$$

dove $N(v, w)$ è il numero di cammini minimi che uniscono i nodi v, w , e $N(v, u, w)$ è il numero di tali cammini che passano per u . In questo caso, nodi con alta *betweenness centrality* sono importanti per il trasferimento ad esempio di informazione tra i nodi: l'eliminazione di un tale nodo aumenta i costi di trasferimento sul sistema in quanto sono necessari cammini più lunghi per passare da un nodo ad un altro.

7.2 Raggruppamento

Per misurare il raggruppamento dei nodi in ammassi, e quindi identificare componenti iperconnesse di un grafo, Watts e Strogatz introdussero il cosiddetto coefficiente di raggruppamento (*clustering coefficient*), che misura di quanto i primi vicini di un dato nodo sono connessi tra loro. Per definire questo coefficiente, consideriamo la *n-clique* K_n , ovvero il grafo completo su n vertici, che ha tutti gli archi possibili, ovvero $n(n-1)/2$. Consideriamo ora un vertice v di K_n , e il suo intorno $N(v)$. Il sottografo di K_n indotto da $N(v)$ è ancora una $(n-1)$ -clique, ovvero un grafo completo di K_{n-1} .

Se ora consideriamo un grafo qualsiasi G e un suo vertice v , e poniamo $n_v = |N(v)| = \deg(v)$ per il numero dei suoi primi vicini, possiamo definire

il coefficiente di raggruppamento in v come il rapporto tra gli archi effettivi che connettono tra loro nodi vicini a v , e il numero massimo possibile di tali archi, ovvero $n_v(n_v - 1)/2$. Quindi, ponendo m_v per il numero di archi del sottografo indotto da $N(v)$, ovvero il numero di archi tra i vicini di v , si ha

$$cc(v) = \frac{m_v}{n_v(n_v - 1)/2}.$$

7.3 Comunità

Se si pone il problema di identificare sottostrutture strettamente connesse di un grafo G , il primo approccio è quello di stabilire se G contiene k -cliques, ovvero sottografi indotti con il numero massimo possibile di archi. La nozione di clique è però troppo restrittiva in molti casi, anche perchè in una comunità anche strettamente connessa non è detto che tutti i membri siano in contatto tra loro. Una estensione della nozione di clique abbastanza utile è la cosiddetta *k-clique community*, ovvero un insieme di k -cliques \mathcal{C} tale che, per ogni $K, K' \in \mathcal{C}$, esiste una successione (K_1, \dots, K_M) tale che

- $K_1 = K, K_M = K'$,
- K_i e K_{i+1} sono adiacenti, ovvero la loro intersezione contiene esattamente $k - 1$ vertici:

$$|V(K_i) \cap V(K_{i+1})| = k - 1.$$

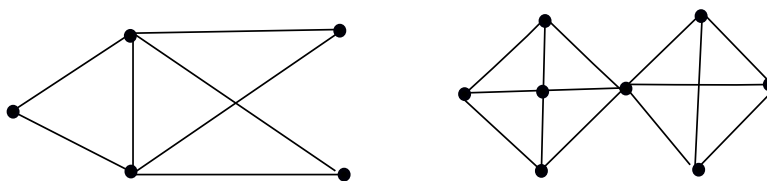


Figura 7.1: Due grafi test.

Questa nozione è molto meno restrittiva della nozione di clique, e permette di identificare alcune delle comunità presenti in un grafo di interazioni sociali.

A titolo di esercizio, si calcolino le misure di centralità, il coefficiente di raggruppamento e le comunità di k -clique per ogni k per i grafi nelle Figure 7.2 e 7.1.

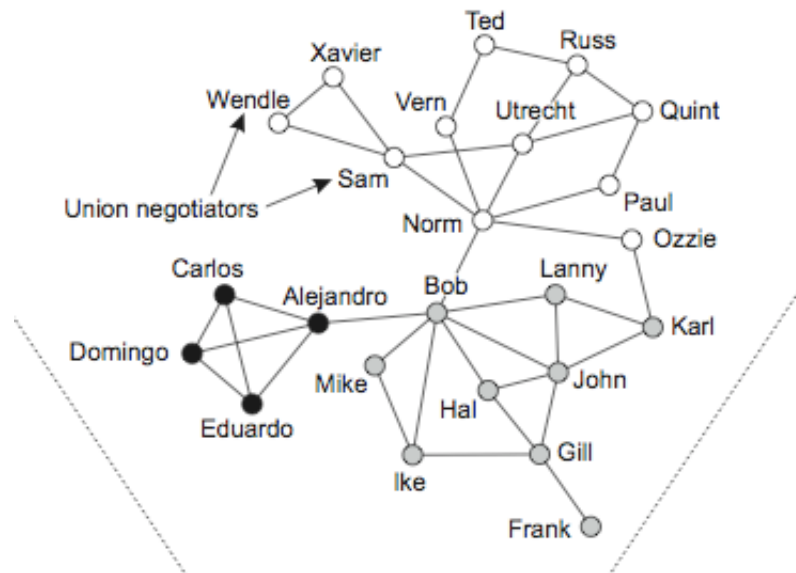


Figura 7.2: Una rete sociale di lavoratori di una piccola azienda. Da: M. Van Steen, *An Introduction to Graph Theory and Complex Networks*, Cambridge University Press

Capitolo 8

Alcuni problemi di selfish routing

8.1 Il paradosso di Braess

Il cosiddetto paradosso di Braess non è un vero paradosso, ma piuttosto un risultato controintuitivo relativo alla ottimizzazione di flussi su grafi.

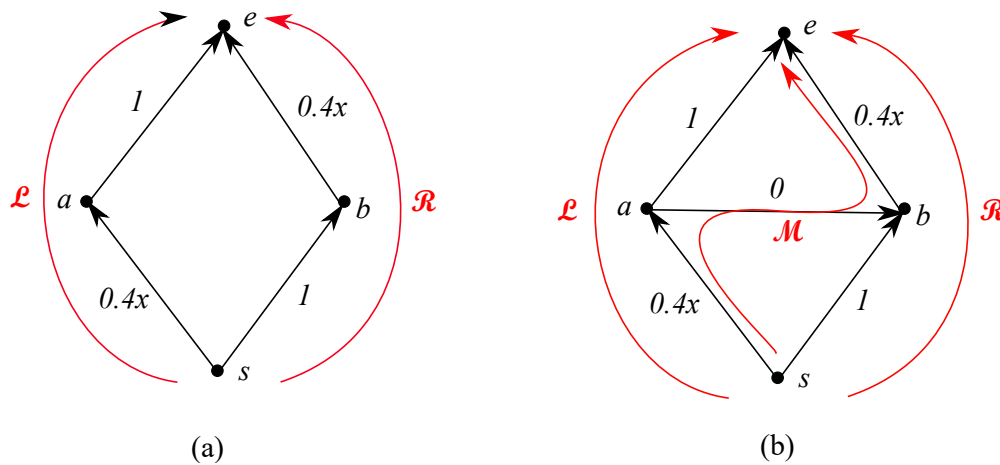


Figura 8.1: I digrafi in cui si manifesta il paradosso di Braess.

Consideriamo il digrafo a sinistra (a) in figura 8.1, e supponiamo che due agenti (automobili) debbano percorrerlo dal nodo s (start) al nodo e (end). Ogni agente ha due possibilità: seguire il cammino $\mathcal{L} = (sa, ae)$

oppure il cammino $\mathcal{R} = (sb, be)$. Ad ogni arco del grafo è associato un tempo di percorrenza (latenza). Sugli archi ae e sb il tempo di percorrenza è costante uguale a 1, indipendentemente dal numero di individui che utilizzano quell'arco, mentre sugli archi sa e be il tempo di percorrenza è proporzionale al numero x di individui che percorrono l'arco stesso.

Possiamo formulare il problema come un gioco in forma strategica, in cui i due agenti sono i giocatori, le strategie pure sono i cammini, e i payoff i tempi di percorrenza totali cambiati di segno:

	\mathcal{L}	\mathcal{R}
\mathcal{L}	-1.8, -1.8	-1.4, -1.4
\mathcal{R}	-1.4, -1.4	-1.8, -1.8

Ad esempio il tempo di percorrenza del giocatore 1 che usa il cammino \mathcal{L} quando il giocatore 2 usa il cammino \mathcal{R} è la somma dei tempi di percorrenza sull'arco sa , ovvero $0.4 \cdot 1$, e quello sull'arco ae , ovvero 1. E' chiaro che ci sono due equilibri di Nash puri, $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ e $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. In altri termini, i due agenti si distribuiscono equamente sui due cammini, e la latenza totale di entrambi i cammini è 1.4.

Assumiamo ora che venga aggiunto un arco con latenza 0, sia questo ab . Questo arco è preferibile perché ha latenza nulla, ma la struttura del problema cambia: consideriamo il digrafo a destra (b) in figura 8.1; ora i due giocatori hanno a disposizione tre cammini da s a e : \mathcal{L} , \mathcal{R} e $\mathcal{M} = (sa, ab, be)$. La matrice dei payoff è ora

	\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{M}
\mathcal{L}	-1.8, -1.8	-1.4, -1.4	-1.8, -1.2
\mathcal{R}	-1.4, -1.4	-1.8, -1.8	-1.8, -1.2
\mathcal{M}	-1.2, -1.8	-1.2, -1.8	-1.6, -1.6

In questo caso si ha un unico equilibrio di Nash puro, ovvero $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$: tutti gli individui si concentrano sul cammino che contiene l'arco più veloce.

Il paradosso di Braess consiste nel fatto che la latenza sul cammino di equilibrio è 1.6, che è strettamente maggiore della latenza all'equilibrio nel caso del grafo (a), in cui non è presente l'arco più veloce: aggiungere tratti veloci a reti preesistenti non sempre diminuisce il tempo di percorrenza!

Per formalizzare il problema nella sua massima generalità, è necessario definire le nozioni di flusso e latenza con maggior precisione.

Dato un digrafo $G = (V, E)$ e due nodi fissati $s, e \in V$, denotiamo con \mathcal{P} l'insieme di tutti i cammini direzionati (non necessariamente minimi) tra s ed e . Si definisce *flusso* su G una funzione a valore reali nonnegativi definita su \mathcal{P} ;

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow f_P. \end{aligned}$$

Il flusso, che è la variabile fondamentale del problema, è una funzione dei cammini, ma definisce una funzione sugli archi (indicata ancora con f con abuso di notazione) mediante la seguente relazione:

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ E \ni e &\rightarrow f_e = \sum_{P:e \in P} f_P. \end{aligned}$$

In altri termini, il flusso su un arco è la somma dei flussi di tutti i cammini che contengono quell'arco.

Infine, dato $r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$, un flusso si dice *fattibile* se

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} f_P = r.$$

D'ora in poi assumiamo che tutti i flussi siano fattibili.

Il secondo ingrediente fondamentale è la *latenza*, una legge che associa ad ogni arco una funzione del flusso su quell'arco:

$$\forall e \in E, \quad \ell_e : f_e \rightarrow \ell_e(f_e) \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione a sua volta permette di definire la latenza di un cammino, una funzione del flusso totale, mediante la relazione

$$\ell_P(f) = \sum_{e \in P} \ell_e(f_e).$$

- Consideriamo ad esempio il grafo (a) in figura 8.2: si ha $\mathcal{P} = (\mathcal{L}, \mathcal{R})$ e un flusso fattibile è un vettore di \mathbb{R}^2 :

$$f = (f_{\mathcal{L}}, f_{\mathcal{R}}), \quad f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{R}} = r,$$

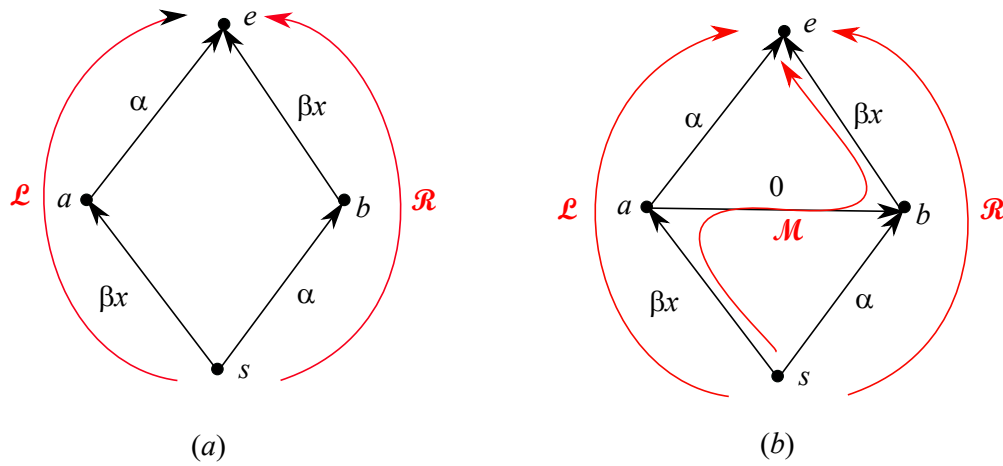


Figura 8.2: Digrafi con latenze lineari nei flussi

e quindi il flusso sugli archi diventa

$$f_{sa} = f_{ae} = f_{\mathcal{L}}, \quad f_{sb} = f_{be} = f_{\mathcal{R}}.$$

Per quello che riguarda la latenza sugli archi, poniamo per fissare le idee

$$\ell_{sa} = \beta f_{sa}, \quad \ell_{ae} = \alpha, \quad \ell_{sb} = \alpha, \quad \ell_{be} = \beta f_{be},$$

e quindi la latenza sui cammini diventa

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{L}}(f) &= \alpha + \beta f_{\mathcal{L}}, \\ \ell_{\mathcal{R}}(f) &= \alpha + \beta f_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

- Se consideriamo ora il grafo (b) in figura 8.2: si ha $\mathcal{P} = (\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{M})$ e un flusso fattibile è un vettore di \mathbb{R}^3 :

$$f = (f_{\mathcal{L}}, f_{\mathcal{R}}, f_{\mathcal{M}}), \quad f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{M}} = r.$$

Il flusso sugli archi diventa

$$\begin{aligned} f_{sa} &= f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{M}}, \\ f_{ae} &= f_{\mathcal{L}}, \\ f_{ab} &= f_{\mathcal{M}}, \\ f_{sb} &= f_{\mathcal{R}}, \\ f_{be} &= f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Per quello che riguarda la latenza sugli archi, supponiamo che resti invariata quella sugli archi sa, sb, ae, be e che

$$\ell_{ab} = 0,$$

e quindi la latenza sui cammini diventa

$$\begin{aligned}\ell_{\mathcal{L}}(f) &= \alpha + \beta(f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{M}}), \\ \ell_{\mathcal{R}}(f) &= \alpha + \beta(f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{M}}). \\ \ell_{\mathcal{M}}(f) &= \beta(f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{R}} + 2f_{\mathcal{M}}).\end{aligned}$$

La seguente nozione generalizza l'equilibrio di Nash al problema del selfish routing.

Definizione 8.1.1. Un flusso f si dice di equilibrio (di Nash) se, per ogni $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ con $f_{P_1} > 0$ e per ogni $0 < \delta < f_{P_1}$ si ha

$$\ell_{P_1}(f) \leq \ell_{P_2}(\tilde{f}),$$

dove

$$\tilde{f} = \begin{cases} f_{P_1} - \delta & P = P_1, \\ f_{P_2} + \delta & P = P_2, \\ f_P & P \neq P_1, P_2. \end{cases}$$

In altri termini, un flusso è di equilibrio se per ogni cammino P_1 effettivamente utilizzato ($f_{P_1} > 0$) non conviene ad una quantità δ di utenti spostarsi da questo cammino su un altro cammino P_2 , in quanto la loro latenza non diminuirebbe.

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0$, si ha che se un flusso è di equilibrio, allora per ogni cammino P_1 e P_2 con $f_{P_1}, f_{P_2} > 0$, allora

$$\ell_{P_1}(f) = \ell_{P_2}(f). \tag{8.1}$$

Utilizzando questa condizione (necessaria) possiamo calcolare gli equilibri per il grafo (a) e il grafo (b).

- Consideriamo prima di tutto il grafo (a), e imponiamo la condizione (8.1): si ha per quanto visto prima

$$\begin{cases} \ell_{\mathcal{L}}(f) = \alpha + \beta f_{\mathcal{L}} = \alpha + \beta f_{\mathcal{R}} = \ell_{\mathcal{R}}(f), \\ f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{R}} = r, \end{cases}$$

da cui segue che

$$f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{R}} = r/2.$$

Questo flusso è l'(unico) equilibrio: infatti, posto

$$\tilde{f} = \begin{cases} r/2 - \delta & \text{se } P = \mathcal{L}, \\ r/2 + \delta & \text{se } P = \mathcal{R}, \end{cases}$$

si ha

$$\ell_{\mathcal{L}}(f) = \alpha + \beta r/2 < \alpha + \beta r/2 + \beta \delta = \ell_{\mathcal{R}}(\tilde{f}).$$

Si conclude che il flusso $f = (r/2, r/2)$ è l'unico equilibrio di Nash per il grafo (a).

- Consideriamo ora il grafo (b), e dimostriamo che se

$$r < \alpha/\beta,$$

allora l'unico equilibrio è

$$f = (0, 0, r) \quad \text{ovvero } f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{R}} = 0, \quad f_{\mathcal{M}} = r,$$

ovvero tutto il flusso si concentra sul cammino di mezzo. Dato che il flussi sui cammini \mathcal{L} e \mathcal{R} sono nulli, non possiamo usare la (8.1). Usando la definizione, se poniamo ad esempio

$$\tilde{f} = \begin{cases} r - \delta & \text{se } P = \mathcal{M}, \\ \delta & \text{se } P = \mathcal{L}, \\ 0 & \text{se } P = \mathcal{R}, \end{cases}$$

si ha

$$\ell_{\mathcal{M}}(f) = 2\beta r < \alpha + \beta r = \ell_{\mathcal{L}}(\tilde{f}),$$

che è vero dato che abbiamo supposto $r < \alpha/\beta$.

Ora, la latenza di questo flusso è $\ell_{\mathcal{M}}(f) = 2\beta r$, che è strettamente della latenza del flusso di equilibrio sul grafo (a), cioè $\alpha + \beta r/2$, a patto che sia $r > 2\alpha/(3\beta)$. Quindi la condizione affinché sussista il paradosso di Braess è

$$\frac{2\alpha}{3\beta} < r < \frac{\alpha}{\beta}.$$

In ogni caso, per il grafo (b) il flusso $f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{R}} = r/2$, $f_{\mathcal{M}} = 0$ non è di equilibrio, infatti posto ad esempio

$$\tilde{f} = \begin{cases} r/2 - \delta & \text{se } P = \mathcal{L}, \\ \delta & \text{se } P = \mathcal{M}, \\ r/2 & \text{se } P = \mathcal{R}, \end{cases}$$

si ha

$$\ell_{\mathcal{L}}(f) = \alpha + \beta r/2 > \beta r/2 + \beta r/2 + \beta \delta = \ell_{\mathcal{M}}(\tilde{f}),$$

dato che $r/2 + \delta < \alpha/\beta$ per $\delta < r/2$.

8.2 Il paradosso di Knight

Anche questo non è un vero paradosso, ma solo un risultato parzialmente sorprendente nel contesto del selfish routing. Consideriamo il digrafo in figura 8.3. In questo caso ci sono solo due archi, e quindi due cammini, \mathcal{L} e \mathcal{R} . Assumiamo che le latenze siano

$$\ell_{\mathcal{L}} = \beta f_{\mathcal{L}}, \quad \ell_{\mathcal{R}} = \alpha,$$

cosicché sul cammino \mathcal{L} la latenza è proporzionale al flusso (ad esempio una strada di grande traffico), mentre sul cammino \mathcal{R} la latenza è costante (ad esempio il trasporto pubblico).

All'equilibrio si ha che

$$\ell_{\mathcal{L}}(f) = \beta f_{\mathcal{L}} = \alpha = \ell_{\mathcal{R}}(f),$$

e quindi ricordando che $f_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{R}} = r$,

$$f_{\mathcal{L}} = \alpha/\beta, \quad f_{\mathcal{R}} = r - \alpha/\beta.$$

Ora supponiamo che il traffico sul cammino \mathcal{L} abbia un alto costo sociale, si pensi ad esempio in termini di inquinamento atmosferico dovuto ai gas di scarico delle auto, e che allo scopo di trasferire una parte di traffico sul cammino \mathcal{R} (il trasporto pubblico), si imponga un costo $\gamma > 0$ sul cammino \mathcal{L} :

$$\ell_{\mathcal{L}} = \beta f_{\mathcal{L}} + \gamma.$$

All'equilibrio si ha quindi che

$$\ell_{\mathcal{L}}(f) = \gamma + \beta f_{\mathcal{L}} = \alpha = \ell_{\mathcal{R}}(f),$$

e quindi

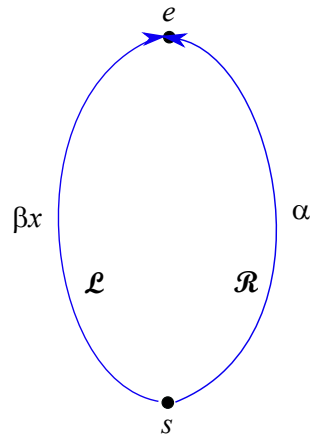


Figura 8.3: Digrafo per il paradosso di Knight

$$f_{\mathcal{L}} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}, \quad f_{\mathcal{R}} = r - \frac{\alpha - \gamma}{\beta},$$

il che significa che in effetti il flusso si trasferisce in parte sul cammino \mathcal{R} . Il 'paradosso' sta nel fatto che il costo soggettivo rimane costante: la latenza all'equilibrio è ancora α come in assenza del costo γ .