Capitolo 5

Il gruppo delle permutazioni

§ 5.1 Le permutazioni

Fissiamo un numero intero positivo n. Denotiamo con I_n l'insieme dei numeri naturali $\{1, \ldots, n\}$.

Definizione 5.1. *Sia σ una funzione che ha come dominio e codominio I_n. Se σ è biunivoca, allora σ è una* **permutazione**. *L'insieme di tutte le permutazioni definite su I_n si denota con S_n.*

NOTA BENE: se A è un insieme finito, per ogni funzione $f : A \to A$, si ha

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow f \text{ suriettiva} \Leftrightarrow f \text{ biunivoca.}$$

Esempio 5.2. Consideriamo in S_5 la permutazione σ data da:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : I_5 & \to & I_5 \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 2 \end{array}$$

Per scrivere in modo veloce σ, utilizzeremo una tabella costituita da due righe: nella prima sono elencati ordinatamente gli elementi di I_5 e al di sotto di ciascuno di essi, la seconda riga contiene le loro immagini. Otteniamo cosı la seguente tabellina

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo utilizzare una tabellina analoga a quelle presentata nell'esempio per scrivere in modo sintetivo qualsiasi permutazione. Nella prima riga elenchiamo gli elementi di I_n e al di sotto di ciascuno scriviamo la sua immagine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n-1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le permutazioni sono funzioni, possiamo quindi anche comporre due permutazioni.

Esempio 5.3. Consideriamo in S_5 la permutazione σ dell'esempio 5.2 e la seguente permutazione τ:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo comporre (con l'usuale legge di composizione tra funzioni) σ e τ. Poiché la composizione di funzioni non è commutativa, eseguiamo entrambe le composizioni (ottenendo risultati diversi).

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1) = 3, \quad (\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(3) = 1,$$

$$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(4) = 5, \quad (\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(5) = 2,$$

$$(\sigma \circ \tau)(5) = \sigma(\tau(5)) = \sigma(2) = 4.$$

Riassumendo con la scrittura "a tabellina ":

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, possiamo calcolare $\tau \circ \sigma$, ottenendo:

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 5.2 Il gruppo delle permutazioni

Ricordiamo ora due proprietà della composizione tra funzioni Intanto, la composizione di funzioni gode della proprietà associativa. Inoltre, la composizione di due funzioni biunivoche è una funzione biunivoca. In particolare, se componiamo due permutazioni, otteniamo ancora una permutazione. Possiamo quindi affermare che S_n con l'operazione di composizione di funzioni è un semigruppo. Però se $n \geq 3$ l'operazione NON è commutativa (vedi Esempio 5.3). Nell'Esempio 4.28, abbiamo già verificato che l'insieme delle funzioni biunivoche da un insieme A nell'insieme A è un gruppo con la composizione $\circ$. Questo vale quindi anche per l'insieme delle permutazioni S_n con $\circ$. Vediamo esplicitamente come si scrivono nella nostra notazione l'identità e l'inverso in S_n. L'identità (o elemento neutro) è

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

cioè è la *funzione identit'a* definita come $e(i) = i$ per ogni $i \in I_n$. Si verifica facilmente che $e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma$ per ogni $\sigma \in S_n$. Per poter affermare che S_n con l'operazione $\circ$ è un gruppo resta da dimostrare che per ogni $\sigma \in S_n$ esiste la permutazione inversa $\tau \in S_n$ tale che $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = e$. Possiamo costruire con facilità la funzione τ nel modo seguente:

- scriviamo σ mediante la tabellina
- scambiamo tra loro le due righe,
- riordiniamo le colonne in modo da avere nella prima riga i numeri in ordine crescente.

Esempio 5.4. Consideriamo la tabellina della permutazione $\sigma \in S_5$ di Esempio 5.2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere la permutazione inversa di σ, scambiamo le due righe della tabella precedente

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e poi riordiniamo le colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che la permutazione ottenuta col metodo illustrato è proprio la funzione inversa. Infatti, l'inversa di una funzione biunivoca $f: X \to Y$ è la funzione che associa ad un elemento $y \in Y$ l'unico elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Quindi l'immagine $\tau(r)$ di un elemento $r \in I_n$ è l'unico elemento $s \in I_n$ tale che $\sigma(s) = r$, ossia $\tau(r)$ è il numero che nella tabellina di σ si trova al di sopra di r.

Notazione 5.5. Per le permutazioni si usa sempre la notazione moltiplicativa. Quindi l'identità si denota con 1_{S_n} (oltre che con e e con Id) e la permutazione inversa di σ si denota con σ^{-1}. Infine, la composizione $\sigma \circ \tau$ si denota semplicemente con $\sigma\tau$, sottindendendo il simbolo $\circ$ di composizione

Riassumendo, abbiamo dimostrato che:

Teorema 5.6. *Sia S_n l'insieme delle permutazioni di I_n. Allora in S_n è definita un'operazione, la composizione di permutazioni, che ha le seguenti proprietà:*

1. *per ogni $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ si ha $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$, ovvero la composizione di permutazioni è associativa;*
2. *per ogni $\sigma \in S_n$, $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$, dove e è la permutazione identità , ovvero esiste l'elemento neutro;*
3. *per ogni $\sigma \in S_n$, esiste una funzione denotata σ^{-1} tale che $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$, ovvero ogni elemento di S_n ha un inverso.*

Corollario 5.7. *L'insieme S_n delle permutazioni di I_n con l'operazione di composizione è un gruppo (non abeliano).*

§ 5.3 Cicli e scambi

Definizione 5.8. *Siano r un intero, $2 \leq r \leq n$, e siano $m_1,\ m_2,\ \dots, m_r$ elementi distinti di I_n. Si dice r-**ciclo** di S_n e si indica con $(m_1 m_2 \dots m_r)$ la permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $\sigma(m_1) = m_2$, $\sigma(m_2) = m_3$, $\dots$, $\sigma(m_{r-1}) = m_r$, $\sigma(m_r) = m_1$ e $\sigma(i) = i$ per ogni $i \in I_n - \{m_1,\ m_2,\ \dots, m_r\}$. I 2-cicli si dicono anche* **scambi** *o* **trasposizioni**. *Due cicli $(m_1 m_2 \dots m_r)$ e $(n_1 n_2 \dots n_s)$ di S_n si dicono* **disgiunti** *se $\{m_1, m_2, \dots, m_r\} \cap \{n_1, n_2, \dots, n_s\} = \emptyset$. Dato un ciclo $\sigma = (m_1\, m_2\, \dots\, m_r)$, diciamo che r è la* **lunghezza** *di σ.*

Esempio 5.9. In S_5 il simbolo $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ indica la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Anche $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ indicano la stessa permutazione σ. Il termine ciclo si riferisce appunto alla natura circolare di questa permutazione. Infatti in un ciclo conta l'ordine in cui compaiono gli elementi, e non chi è il primo elemento. Invece il ciclo che si scrive invertendo l'ordine degli elementi della scrittura di σ ossia il ciclo $\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è la permutazione inversa di σ. Infatti $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ e si ha $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = Id$. Il simbolo $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ indica la funzione che scambia tra loro 2 e 3 e lascia fissi 1, 4, e 5 ossia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Il risultato seguente raccoglie alcuni fatti importanti sulle permutazioni; per ciascuno di essi diamo una dimostrazione algoritmica, per mostrare come si può operare concretamente.

Teorema 5.10. *Sia n un intero positivo.*

i) Ogni permutazione di S_n, che non sia l'identità, si può scrivere in modo essenzialmente unico come composizione di cicli disgiunti.

ii) Due cicli disgiunti σ e τ commutano, ossia $\tau\sigma = \sigma\tau$.

iii) ogni ciclo di lunghezza r si può scrivere come prodotto di $r - 1$ scambi.

iv) ogni permutazione si può scrivere come composizione di scambi.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto che due cicli disgiunti commutano tra loro. Dimostreremo poi le affermazioni i), iii) e iv) che riguardano l'esistenza di particolari decomposizioni in cicli, fornendo per ciascuna un algoritmo che costruisce tali decomposizioni. ii) Se $\sigma = (m_1 m_2 \dots m_r)$ e $\tau = (n_1 n_2 \dots n_s)$ sono disgiunti, la loro composizione, nei due modi, è la funzione f data da $f(m_i) = \sigma(m_i)$, $f(n_j) = \tau(n_j)$ e $f(t) = t$ se $t \in I_n - \{m_1, m_2, \dots, m_r, n_1, n_2, \dots, n_s\}$. i) Per costruire la decomposizione di una permutazione σ in cicli disgiunti consideriamo il piú piccolo intero i tale che $\sigma(i) \neq i$ e iniziamo a costruire un ciclo $(i\ \sigma(i)\ \sigma(\sigma(i)) \dots)$. Poichè gli elementi in I_n sono solo n, dopo al piú n applicazioni della funzione σ troveremo un elemento già insierito nel ciclo. Tale elemento non può essere che il primo, ossia i, poichè σ è iniettivo. Chiudiamo cosı il primo ciclo. Se abbiamo esaurito tutti gli elementi di I_n che non sono fissati da σ (ossia quelli tali che $\sigma(r) \neq r$), ci fermiamo. Altrimenti prendiamo uno degli elementi di I_n non ancora inseriti nel ciclo già costruito e non fissati da σ e iniziamo a costruire un secondo ciclo, fino a "chiuderlo". Ripetiamo la procedura fino ad esaurire gli elementi non fissati da σ. Il ciclo σ si scrive allora come composizione (in un ordine qualsiasi) dei cicli disgiunti costruiti. iii) Una decomposizione in scambi di una permutazione qualsiasi si otterrà componendo le decomposizioni in scambi dei cicli della sua decomposizione in cicli. Il ciclo $\sigma = (m_1 m_2 \dots m_r)$ si ottiene come composizione di scambi in tanti modi, ad esempio nel modo seguente:

$$(m_1 m_2 \dots m_r) = (m_1 m_r)(m_1 m_{r-1}) \dots (m_1 m_3)(m_1 m_2).$$

iv) si ottiene come conseguenza delle precedenti. □

Osservazione 5.11. La decomposizione di una permutazione in cicli disgiunti è essenzialmente unica, poiché l'unica variante possibile riguarda l'ordine con cui elenchiamo i cicli; si tratta di una variante poco significativa in quanto, come abbiamo provato, la composizione di cicli disgiunti gode della proprietà commutativa. Un'altra possibile variante riguarda la scrittura dei cicli; infatti possiamo elencare gli elementi che costituiscono un ciclo iniziando da uno qualsiasi di essi. Non si tratta di una diversa decomposizione in cicli, ma solo di simboli leggermente diversi per indicare uno stesso ciclo.

Esempio 5.12. Per decomporre $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ in cicli disgiunti cominciamo da 1, poichè $\sigma(1) \neq 1$. Costruiamo il primo ciclo applicando σ ripetutamente fino a ritrovare 1 stesso: $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$. $\sigma(5) = 1$. Otteniamo dunque il ciclo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Osserviamo ora che 3 non compare in questo ciclo e che $\sigma(3) \neq 3$. Costruiamo quindi un secondo ciclo partendo da 3, che si fermerà quando troveremo nuovamente 3: $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 3$. Otteniamo un secondo ciclo $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. Controlliamo ora che l'unico numero non considerato nei due cicli è 6, ma $\sigma(6) = 6$. Dunque la decomposizione è terminata: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. Le uniche varianti alla scrittura della decomposizione di σ sono l'odine dei cicli oppure il punto di inizio dei cicli stessi:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

Una decomposizione di $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ in scambi è ad esempio $\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ ma lo è anche $\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$. Quindi una decomposizione in scambi di σ è $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Una diversa decomposizione in scambi di σ è $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Raccogliamo nel corollario seguente alcuni fatti utili da ricordare, che sono conseguenza di quanto già detto ed in particolare del Teorema 5.10.

Corollario 5.13. *In S_n*

- *Se τ è l'r-ciclo $\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}$, allora τ^{-1} è l'r-ciclo $\begin{pmatrix} m_r & \dots & m_1 \end{pmatrix}$;*
- *se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ è una decomposizione in cicli disgiunti di σ, allora $\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$.*
- *Se $\sigma = s_1 \dots s_r$ è una decomposizione in scambi, allora $\sigma^{-1} = s_r \cdots s_1$.*
- *se τ è un r-ciclo, allora $\tau^r = 1_{S_n}$ e $\tau^{-1} = \tau^{r-1}$;*
- *se σ si decompone come prodotto dei cicli disgiunti $\tau_1, \dots, \tau_m$ e r è im minimo comune multiplo della lunghezza di tali cicli, allora $\sigma^r = 1_{S_n}$ e $\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}$.*

La prima affermazione si prova eseguendo direttamente il calcolo di τ^r. Per provare la seconda basta osservare che per la commutatività della composizione di cicli disgiunti abbiamo $\sigma^r = (\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_m)^r = \tau_1^r \dots \tau_m^r$ e che ciascuna potenza τ_i^r coincide con 1_{S_n} poichè r è un multiplo della lunghezza di τ_r.

Dimostrazione. □

Una stessa permutazione $\sigma \in I_n$ può essere decomposta in scambi in tanti modi diversi, anche costituiti da un diverso numero di scambi.

Definizione 5.14. *Una permutazione si dice* **pari** *se si può scrivere come composizione di un numero pari di scambi e si dice* **dispari** *se si può scrivere come composizione di un numero dispari di scambi.*

Una tale terminologia non avrebbe alcun senso se una stessa permutazione potesse essere contemporaneamente pari e dispari.

Teorema 5.15. *La parità di ogni permutazione è ben definita.*

Dimostrazione. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che che ogni decomposizione in scambi della permutazione identica Id è costituita da un numero pari di scambi. Infatti se ci fosse una permutazione σ che può essere scritta mediante $r \in 2\mathbb{N}$ scambi ed anche mediante $r' \in 2\mathbb{N}+1$ scambi, allora anche σ^{-1} avrebbe la stessa proprietà e quindi $Id = \sigma\sigma^{-1}$ potrerbbe essere scritta mediante $r + r' \in 2\mathbb{N}+1$, scambi, componendo gli m scambi che danno σ con gli m' scambi che danno σ^{-1}. La nostra dimostrazione è un algoritmo che partendo da una qualsiasi decomposizione in m scambi di Id ne costruisce un'altra con $m-2$ scambi. Ripetendo la procedura arriveremo alla decomposizione con 0 scambi. Avremo cosı provato che $m - 2h = 0$, ossia che m è pari. A questo scopo useremo le due formule seguenti, dove a, x, y sono elementi diversi di I_n:

$$\begin{pmatrix}a & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}a & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & x\end{pmatrix} = Id$$

Fissiamo una decomposizione in scambi di Id ed osserviamo che ogni $i \in I_n$ che compare in uno di tali scambi deve comparire almeno in un altro. In caso contrario mediante tale composizione di scambi i non sarebbe immagine di se stesso, ma sarebbe immagine dell'altro elemento che fa coppia con lui nell'unico scambio che lo coinvolge. Supponiamo per semplicità che i sia 1 e procediamo nel modo seguente. Applicando ripetutamente la prima delle due formule precedenti possiamo "spostare" uno alla volta i cicli che coinvolgono 1 fino a farli diventare consecutivi. Ora consideriamo due di tali cicli consecutivi $\begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\end{pmatrix}$: se $x = y$ la seconda formula ci permette di cancellare i due cicli ottenendo una decomposizione di Id con 2 cicli in meno di prima. Se $x \neq y$, la prima formula ci permette di scrivere una decomposizione nello stesso numero di cicli, ma in cui 1 compare una volta in meno. Ripetendo la procedura riusciremo a ottenere una decomposizione in $m - 2k$ cicli, in cui 1 non compare più. Ora possiamo prendere in esame un altro numero che compare ed applicare a lui la stessa procedura, fino a farlo sparire. Al termine della procedura nessun numero comparirà negli scambi e quindi avremo 0 scambi. Durante ciascun passo della procedura il numero di scambi rimane invariato o diminuisce di 2: pertanto il numero iniziale m di scambi era pari. □

Abbiamo visto che la decomposizione di una permutazione in scambi non è univocamente determinata, ma lo è la decomposizione in cicli disgiunti, a meno dell'ordine in cui scriviamo i cicli stessi (Proposizione 5.10). Possiamo "catalogare" le permutazionidi S_n a seconda di quali sono le lunghezze delle permutazioni che costituiscono la sua decomposizione in cicli disgiunti. Piú precisamente, sia $\sigma \in S_n$ e sia $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$ la sua decomposizione in cicli disgiunti. Sia k_r il numero di cicli di lunghezza r presenti nella decomposizione di σ, con la convenzione di considerare gli elementi fissati da σ come 1-cicli. L'n-pla $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ è detta il **tipo** della permutazione σ. Un altro modo di indicare il tipo di una permutazione è $[1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}]$.

Esempio 5.16. Usando la convenzione di non scrivere r^{k_r} quando $k_r = 0$ e di scrivere solo r quando $k_r = 1$, i possibili tipi di una permutazione di S_5 sono

$$[1^5], [1^3 2], [1^2 3], [12^2], [14], [23], [5].$$

Esempio 5.17. Calcoliamo il numero di permutazioni di S_{17} di tipo $[2^2 3^3 4]$. Si tratta di sistemare i numeri $1, 2, \dots, 17$ nella scrittura seguente al posto dei puntini:

$$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)$$

Ci sono 17! modi di fare ciò. Bisogna però tenere conto che la stessa permutazione σ può essere ottenuta con questa procedura in più modi differenti. Infatti si devono fare le due considerazioni seguenti:

1. Ci sono piú modi di scrivere lo stesso ciclo: un ciclo può essere individuato ponendo in prima posizione un suo qualsiasi elemento, mentre l'ordine degli altri elementi del ciclo è determinato da σ. Ci sono quindi 2 modi di scrivere lo stesso 2-ciclo, 3 modi di scrivere lo stesso 3-ciclo e, in generale, n modi di scrivere un n-ciclo. Nel nostro esempio il numero 17! va quindi diviso per $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4$.

2. L'ordine di scrittura dei cicli di uguale lunghezza è arbitrario. Ci sono quindi 2! modi di ordinare due 2-cicli ottenendo la stessa permutazione, 3! modi di ordinare tre 3-cicli ottenendo la stessa permutazione, ecc. Quindi nel nostro esempio il numero 17! va ulteriormente diviso per $2! \cdot 3!$.

In totale il numero delle permutazioni del tipo assegnato è quindi:

$$\frac{17!}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4 \cdot 2! \cdot 3!}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ragionando nel seguente modo.

- Ci sono $\binom{17}{2}$ modi differenti di individuare il primo 2-ciclo;
- ci sono $\binom{15}{2}$ modi differenti di individuare il secondo 2-ciclo;
- ci sono $\binom{13}{3} \cdot 2!$ modi differenti di individuare il primo 3-ciclo, dove $\binom{13}{3}$ sono i modi di scegliere 3 elementi dai 13 non ancora utilizzati e 2! i modi di posizionare i restanti due elementi dopo il primo che può essere scelto arbitrariamente;
- ci sono $\binom{10}{3} \cdot 2!$ modi differenti di individuare il secondo 3-ciclo;
- ci sono $\binom{7}{3} \cdot 2!$ modi differenti di individuare il terzo 3-ciclo;
- ci sono $\binom{4}{4} \cdot 3!$ modi differenti di individuare il 4-ciclo.

Infine, poichè l'ordine di scrittura dei cicli di uguale lunghezza nella decomposizione è arbitrario, il numero ottenuto va diviso per $2! \cdot 3!$. Quindi, in totale il numero delle permutazioni del tipo assegnato si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{\binom{17}{2} \cdot \binom{15}{2} \cdot \binom{13}{3} \cdot 2! \cdot \binom{10}{3} \cdot 2! \cdot \binom{7}{3} \cdot 2! \cdot \binom{4}{4} \cdot 3!}{2! \cdot 3!}$$

Per calcolare la parità di una permutazione possiamo decomporla in scambi e poi contare il loro numero per stabilire se si tratta di un numero pari oppure dispari. Un metodo alternativo e più veloce è dato dalla seguente

Proposizione 5.18. *La parità di un r-ciclo è $r-1$. La parità di una permutazione di tipo $[1^{k_1}2^{k_2}\dots n^{k_n}]$ coincide con la parità di*

$$\sum_{r=1}^{n}(r-1)k_r$$

ossia dalla parità del numero di cicli di lunghezza pari.

Dimostrazione. La prima affermazione è conseguenza della Proposizione 5.10. Per quel che riguarda la seconda, basta ricordare che si può ottenere una decomposizione in scambi di una permutazione σ decomponendo prima σ nel prodotto di cicli disgiunti e poi sostituendo ad ogni ciclo una sua decomposizione in scambi. Decomponendo ogni r-ciclo in $r-1$ scambi, il numero complessivo di scambi in cui abbiamo decomposto σ è dato proprio dal numero presente nell'enunciato. Poichè a noi non interessa sapere quanti sono, ma solo se il numero è pari o dispari, ci basterà contare quanti sono i cicli disgiunti con lunghezza pari, poiché quelli di lunghezza dispari sono permutazioni pari e quindi non modificano la parità. □

§ 5.4 Esercizi

5.1 Considerate le seguenti permutazioni:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&9&6&4&2&8&7&1&5\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&7&3&5&1&8&2&6&9\end{pmatrix}$$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&5&4&2&6&1&3&9&8\end{pmatrix},\quad \pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&1&5&6&9&8&4&7\end{pmatrix},$$

calcolare i prodotti $\sigma\circ\tau$, $\tau\circ\sigma$, $\pi\circ\tau$, $\tau\circ\pi$, $\sigma\circ\tau\circ\pi$, $\sigma\circ\tau\circ\rho\circ\pi$.

5.2 Siano σ, τ, ρ, π le permutazioni dell'esercizio precedente. Scrivere le loro inverse rispetto alla composizione.

5.3 Siano σ, τ, ρ, π le permutazioni dell'esercizio 6.1. Scriverle come prodotto di cicli disgiunti. Scrivere inoltre come prodotto di cicli disgiunti anche $\sigma\circ\tau$, $\tau\circ\sigma$, $\pi\circ\tau$, $\tau\circ\pi$, $\sigma\circ\tau\circ\pi$, $\sigma\circ\tau\circ\rho\circ\pi$.

5.4 Scrivere tutti i possibili tipi di una permutazione di S_6.

5.5 Calcolare il numero di permutazioni di S_5 di tipo [15] e il numero di quelle di tipo [5].

5.6 Calcolare il numero di permutazioni di S_8 di tipo [35] e il numero di quelle di tipo [42].

5.7 Calcolare il numero di permutazioni di S_7 di tipo $[12^3]$.

5.8 Calcolare il numero di permutazioni di S_9 di tipo $[123^2]$. **5.9** Trovare l'inversa di ognuna delle seguenti permutazioni di S_9:

$$\sigma=(134265),\tau=(1352)(6847),\rho=(3269)(14)(587),\pi=(142)(637)(958)$$

5.10 Dimostrare che una permutazione σ e la sua inversa σ^{-1} hanno la stessa parit'a.

5.11 Dimostrare che, per ogni coppia di permutazioni σ e τ, le permutazioni $\sigma\tau$ e $\tau\sigma$ hanno la stessa parità.

5.12 Scrivere tutti i tipi di permutazioni in S_7 e in S_8.

5.13 Decomporre le permutazioni dell'esercizio 6.1 e dell'esercizio 6.9 in prodotto di trasposizioni.

5.14 Consideriamo le permutazioni $\sigma = (123)(456)(78)$, $\tau = (1357)(26)(4)(8)$. Trovare la parit'a di σ e τ, e scriverle come prodotto di trasposizioni.

5.15 Calcolare il numero di permutazioni di S_6 di tipo $[1^4 2]$ e il numero di quelle di tipo $[2^3]$.

5.16 Sia $\sigma = (12)$ permutazione di S_6. Determinare il numero di permutazioni τ di S_6 di tipo $[2^3]$ tali che $\sigma\tau = \tau\sigma$.

5.17 Siano σ e τ le seguenti permutazioni in S_9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 5 & 3 & 9 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

e sia $\rho = \sigma \circ \tau$.

1. Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e la parità di σ, τ e ρ;
2. Determinare il tipo di ρ e il numero di permutazioni di S_9 che hanno lo stesso tipo di ρ;
3. Si dica quanti sono gli 8-cicli di S_9 che contengono 2 ma non 7.

5.18 Siano σ, τ le permutazioni di S_{12} cosıdefinite:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 9 & 7 & 12 & 3 & 5 & 6 & 11 & 2 & 10 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la decomposizione in cicli disgiunti di σ e di τ.
2. Determinare il tipo di σ ed il numero di permutazioni di S_{12} che hanno lo stesso tipo di σ.
3. Determinare una permutazione ρ di S_{12} tale che $\sigma \circ \rho \circ \tau = \sigma \circ \tau$.