Capitolo 3

Tecniche di enumerazione

§ 3.1 Il principio di inclusione-esclusione.

Vogliamo contare il numero di elementi dell'unione di due o più insiemi finiti. In questo capitolo pwer indicare il numero di elementi di un insieme A scriveremo $|A|$ invece $\#A$: si tratta di un altro modo di indicare la cardinalità che spesso si incontra sui libri. Iniziamo cl caso di 2 insiemi. Siano A e B due insiemi finiti di cardinalità finita n ed m rispettivamente, che siano disgiunti ossia privi di elementi comuni. Allora:

$$|A \cup B| = |A + |B = n + m.$$

La formula si generalizza al caso di k insiemi finiti A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, con $|A_i = n_i$, disgiunti due a due:

$$| \cup A_i| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = n_1 + \cdots + n_k.$$

Se invece A e B hanno k elementi in comune (ossia $k = |A \cap B|$), allora la formula diventa:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + m - k.$$

Il termine correttivo $-k$ si inserisce poichè i k elementi comuni ad A e B compaiono tra gli n del primo insieme e gli m del secondo e sarebbero pertanto contati due volte in $n+m$. Questa formula più generale è nota come **principio di inclusione-esclusione**. Tralasciamo la sua generalizzazione al caso di k insiemi poichè decisamente più complicata. La riportiamo solo per il caso $k = 3$, con un esempio di applicazione:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Esempio 3.1. Su 25 studenti, 15 hanno superato l'esame di Matematica, 12 quello di Chimica e 5 hanno superato entrambi gli esami. Quanti studenti hanno superato almeno un esame? Quanti studenti hanno fallito entrambi gli esami? Sia A l'insieme degli studenti che hanno superato l'esame di Matematica: $|A| = 15$.

Sia B l'insieme degli studenti che hanno superato l'esame di Chimica, $|B| = 12$.
$A \cap B$ è l'insieme degli studenti che hanno superato entrambi gli esami: $|A \cap B| = 5$.
La risposta alla prima domanda è l'ordine dell'insieme $A \cup B$, dato da $15+12-5 = 22$.
Non hanno superato nessuno dei due esami $25 - 22 = 3$ studenti.

Esempio 3.2. Sia $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Quanti sono i numeri di I divisibili per 2 o per 3? Sia A l'insieme dei numeri pari di I: l'ordine di A è 10.
Sia B l'insieme dei multipli di 3 in I: $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ ha ordine 6.
$A \cap B$ è l'insieme dei multipli di 6 minori di 20: $A \cap B = \{6, 12, 18\}$ ha ordine 3.
I numeri di I divisibili per 2 o per 3 sono $10 + 6 - 3 = 13$.

Esempio 3.3. In un gruppo di amici tutti hanno visto almeno uno dei film x, y, z: 8 hanno visto il film x, 12 il film y e 9 il film z. Inoltre 6 hanno visto x e y, 4 hanno visto x e z, 7 hanno visto y e z e soltanto uno di essi ha assistito alle tre proiezioni. Da quante persone è formato il gruppo? Con ovvio significato delle notazioni si ha: $|X| = 8$, $|Y| = 12$, $|Z| = 9$, $|X \cap Y| = 6$, $|X \cap Z| = 4$, , $|Y \cap Z| = 7$, $|X \cap Y \cap Z| = 1$.
Quindi :

$$|X \cup Y \cup Z| = 8 + 12 + 9 - 6 - 4 - 7 + 1 = 13.$$

§ 3.2 Il metodo delle scelte successive

Consideriamo come primo caso quello del prodotto cartesiano.

Proposizione 3.4. *Siano A e B due insiemi finiti di cardinalità n e m rispettivamente. Allora:*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = nm.$$

Dimostrazione. Se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, consideriamo gli n sottoinsiemi B_i di $A \times B$ a due a due disgiunti formati ognuno dalle m coppie aventi a_i come prima componente. Per la formula della cardinalità dell'unione di insiemi disgiunti abbiamo

$$|A \times B| = |B_1| + \cdots + |B_n| = nm.$$

□

Osserviamo che disponendo in colonna e in riga gli n elementi di A e gli m elementi di B, il prodotto cartesiano $A \times B$ può essere visualizzato come una tabella di nm quadretti. Possiamo utilizzare il ragionamento precedente anche in situazioni più generali. *Se una scelta può essere compiuta in n modi diversi e, per ciascuno di essi, una seconda scelta può essere compiuta in m modi diversi, allora la successione delle due scelte può essere effettuata in nm modi distinti.* Nel caso del prodotto cartesiano la scelta del secondo elemento avviene sempre tra quelli di uno stesso insieme. Come vedremo, in situazioni più generali si costruiscono coppie scegliendo il primo elemento in un insieme fisso con n elementi e il secondo elemento in un insieme di cardinalità m che però può dipendere dal primo elemento scelto. Mediante l'induzione quanto visto relativamente a due scelte si estende al caso di un numero finito di scelte consecutive.

Proposizione 3.5. *Supponiamo di dover eseguire k scelte consecutive e che la scelta i-esima possa avvenire in n_i modi diversi. Allora le sequenze di scelte possibili sono*

$$\prod_{i=1}^{k} n_i.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k. Per $k = 2$ la dimostrazione è quella presentata precedentemente. Supponiamo che l'asserto sia vero per un certo numero k_0 di scelte e proviamo che allora è vera per $k_0 + 1$ scelte. Per l'ipotesi induttiva possiamo eseguire le prime k_0 scelte in $N = \prod_{i=1}^{k_0} n_i$ modi. Possiamo pensare la nostra procedura di scelte come costituita da due momenti: in un primo momento eseguiamo le prime k_0 scelte in N modi e nel secondo momento eseguiamo l'ultima scelta in n_{k_0+1} modi possibili. Applicando il caso $k = 2$ in tutto avremo $N \cdot n_{k_0+1}$ modi. Possiamo quindi concludere che la formula vale anche nel caso $k_0 + 1$ scelte poichè

$$N \cdot n_{k_0+1} = (\prod_{i=1}^{k_0} n_i) \cdot n_{k_0+1} = (\prod_{i=1}^{k_0+1} n_i).$$

□

Il principio di moltiplicazione delle scelte (anche nella sua forma estesa a più di due scelte) ci permette di risolvere molti problemi combinatorici.

Esempio 3.6. Quante etichette si possono formare con un numero di due cifre (da 00 a 99) e una lettera (dell'alfabeto di 26 lettere)? Le etichette sono tanti gli elementi del prodotto cartesiano $C \times A$ dove C è l'insieme dei numeri da 0 a 99 (che ha 100 elementi) e A è l'insieme delle lettere dell'alfabeto, che ha quindi 26 elementi. Allora le etichette possibili sono $100 \cdot 26 = 2600$.

Esempio 3.7. Quanti oggetti possiamo differenziare con delle targhe costituite da 3 simboli di cui il primo è una lettera scelta tra α, β, γ, δ, il secondo è una cifra da 1 a 5 e il terzo è una lettera dell'alfabeto? Le lettere greche possono essere scelte in 4 modi, le cifre in 5 modi, la lettera finale in 26 modi: in tutto possiamo costruire $4 \cdot 5 \cdot 26 = 540$ targhe diverse.

Esempio 3.8. Supponiamo che il menù di un ristorante consista di 5 antipasti, 6 primi, 6 secondi e 4 dolci: quanti pasti completi (di quattro portate) possiamo ordinare? Le quaterne ordinate (e quindi le scelte possibili) sono $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720$.

Esempio 3.9. Scegliamo due persone in un gruppo di 7 come responsabile della cassa comune e addetto alle comunicazioni. In quanti modi può essere effettuata la scelta? La scelta di responsabile della cassa può essere effettuata in 7 modi diverse: scegliamo un elemento qualsiasi nell'insieme G costituito dalle 7 persone. La scelta dell'addetto alle comunicazioni può essere effettuata in 6 modi diversi: scegliamo un elemento qualsiasi nell'insieme $G - \{a\}$, dove a è la persona a cui è stata affidata la prima mansione; come si vede il secondo insieme, pur avendo in tutti i casi 6 elementi, cambia a seconda della prima scelta effettuata.

Il principio delle scelte successive può essere utilizzato per determinare alcune formule di calcolo combinatorico. Vediamone alcune.

§ 3.3 Disposizioni con ripetizione

Diciamo **disposizioni con ripetizione** di k elementi scelti in un insieme B di ordine m ogni ordinamento o disposizione di k elemnti scelti in B con la possibilità di usare più volte uno stesso elemento. In modo più formale:

Definizione 3.10. *Chiamiamo **disposizioni con ripetizione** di ordine k di elementi di un insieme B tutte le funzioni $f\colon I_k \to B$ oppure equivalentemente gli elementi del prodotto cartesiano $B \times \cdots \times B$ di B per se stesso k volte.*

Esempio 3.11. Le funzioni di I_3 in I_2 sono identificabili con le $2^3 = 8$ terne $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(1,2,2)$, $(2,1,1)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(2,2,2)$. La prima è la funzione costante di valore 1, la seconda è la funzione tale che $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$, $\dots$, l'ultima è la funzione costante di valore 2.

Il metodo delle scelte successive prova che il numero delle disposizioni con ripetizione di m elementi a k a k è

$$D^r_{k,m} = m^k.$$

Esempio 3.12. Vogliamo contare i sottoinsiemi di un insieme I di ordine n. Possiamo immaginare di costruire un sottoinsieme di I esaminando ciascun elemento di I e decidendo se vogliamo metterlo nel sottoinsieme oppure no. Dobbiamo cosıeseguire per n volte una scelta tra 2 possibilità. Quindi il numero di possibili sottoinsiemi è dato dal prodotto delle scelte e quindi, come già detto, è 2^n.

Esempio 3.13. Vogliamo calcolare il numero delle colonne tra loro diverse che si possono giocare al totocalcio. Come è noto, il gioco consiste nell'assegnare uno dei tre simboli 1, X, 2 ad ognuna delle 13 partite. Ogni colonna può essere identificata con una sequenza ordinata di elementi scelti tra 1, X, 2 e quindi con una funzione da I_{13} (i numeri da 1 a 13 corrispondono nell'ordine della schedina alle 13 partite) in un insieme con 3 elementi (i tre simboli citati). Le colonne possibili sono quindi $3^{13} = 1594323$. Giocando tutte queste colonne si ha la certezza del tredici (purtroppo con una spesa superiore alla vincita !!).

§ 3.4 Permutazioni

Si dice **permutazione** di n oggetti distinti un qualunque loro ordinamento o allineamento. Per contare il numero delle permutazioni è utile il simbolo di fattoriale. In modo più formale:

Definizione 3.14. *Chiamiamo* ***permutazioni*** *di un insieme B con m elementi tutte le funzioni biunivoche $f\colon I_m \to B$.*

Esempio 3.15. Se scriviamo le funzioni biunivoche f di $I_3 = \{1, 2, 3\}$ in sè elencando ordinatamente le immagini come terne $(f(1), f(2), f(3))$, otteniamo le 6 terne:

$$(1,2,3)\,,\ (1,3,2)\,,\ (2,1,3)\,,\ (2,3,1)\,,\ (3,1,2)\,,\ (3,2,1).$$

Osserviamo che in ogni terna compaiono i 3 numeri esattamente una volta sola e che ci'o nelle varie terne viene fatto in tutti gli ordini possibili: abbiamo ordinato (allineato) in tutti i modi possibili i nostri elementi.

Dato un numero naturale $n > 0$, chiamiamo **fattoriale** di n il numero:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Si pone inoltre $0! = 1$. E' una convenzione, ma come vedremo ha una motivazione ben precisa. Notiamo che $n!$ cresce rapidamente al crescere di n. Ne diamo i primi dieci valori: Il numero complessivo delle permutazioni di n oggetti è:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

$$P_n = n!$$

Possiamo infatti scegliere in n modi diversi l'elemento da mettere al primo posto, in $n-1$ modi quello da mettere al secondo (tutti gli elementi vanno bene, tranne quello scelto per il primo posto), in $n-2$ modi quello da mettere al terzo posto e cosıvia. Per il principio delle scelte successive, complessivamente si possono dunque effettuare $n!$ scelte.

Esempio 3.16. Scriviamo tutte le $3! = 6$ permutazioni di 3 palline di colore B (bianco), R (rosso), V (verde). Abbiamo due allineamenti che mettono la pallina B al primo posto, altrettanti per R e V

$$BRV\ ,\ BVR\ ,\ RVB\ ,\ RBV\ ,\ VBR\ ,\ VRB.$$

Esempio 3.17. Scriviamo alcune delle $5! = 120$ permutazioni di 5 palline di colore B (bianco), R (rosso), V (verde), G (giallo) e N (nero). Possiamo iniziare scrivendo tutte quelle che hanno B al primo posto (che saranno 24, come le permutazioni dei 4 elementi R, V, G, N); tra queste possiamo iniziare da quelle che hanno R al secondo posto (che saranno 6 come le permutazioni di V, G, N):

$$BRVGN\ ,\ BRVNG\ ,\ BRGVN\ ,\ BRGNV\ ,\ BRNVG\ ,\ BRNGV.$$

Potremo poi cambiare l'elemento al secondo posto in tutti i modi possibili. Elencate tutte le permutazioni che iniziano con B, passeremo poi a quelle che iniziano con R, ecc. Procedere ordinatamente in questo modo ci permette di non dimenticarne nessuna e di non scrivere più volte una stessa permutazione.

§ 3.5 Disposizioni semplici

Si dice **disposizione semplice** di n oggetti a k a k (con $k \leq n$) ogni allineamento di k oggetti distinti scelti in un insieme di n. In modo più formale:

Definizione 3.18. *Chiamiamo **disposizioni semplici** di ordine k degli elementi di un insieme B tutte le funzioni iniettive $f\colon I_k \to B$.*

Osserviamo che se $|B| = n$, è necessario supporre $k \leq n$ poichè in caso contrario, per il principio dei cassetti, non ci sarebbero funzioni iniettive da I_k a B. Il numero totale di disposizioni semplici di n elementi a k a k è:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Possiamo infatti scegliere in n modi diversi l'oggetto da mettere al primo posto, in $n-1$ modi quello da mettere al secondo posto (vanno bene tutti, tranne quello messo al primo posto), in $n-2$ modi quello da mettere al terzo posto e cosıvia fino all'ultimo posto; poichè i posti sono k, all'ultimo posto potremo scegliere tra $n-(k-1)$ oggetti (tutti meno i $k-1$ già utilizzati).

Esempio 3.19. Sia I l'insieme formato da tre palline di colore verde (V), rosso (R), nero (N). Le disposizioni di queste tre palline a due a due sono $D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$, e precisamente, sono gli allineamenti:

$$VR\ ,\ RV\ ,\ VN\ ,\ NV\ ,\ RN\ ,\ NR.$$

Possiamo vedere ogni disposizione anche come una funzione iniettiva dall'insieme $A = \{1, 2\}$ (o più generalmente da un insieme $A = \{a_1, a_2\}$ di ordine 2) in $B = \{V, R, N\}$ che associa ad 1 il primo elemento della disposizione e a 2 il secondo, ossia:

$$VR \text{ corrisponde a } f\colon 1 \mapsto V,\ 2 \mapsto R$$

$$f\colon 1 \mapsto B,\ 2 \mapsto V \text{ corrisponde a } BV.$$

Esempio 3.20. Consideriamo una funzione $f\colon A \to B$: come già osservato nel capitolo precedente, alcune sono iniettive e altre no. Contiamo quante sono quelle non iniettive. Ordiniamo in un modo qualsiasi gli elementi A, siano $a_1, a_2, \dots, a_7$. Ogni funzione è individuata dalla lista ordinata delle 7 immagini $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_7))$, lista che in genere può contenere anche elementi ripetuti. Le funzioni sono quindi 18^7, come le disposizioni con ripetizione dei 18 elementi di B in liste di 7. Le funzioni iniettive sono quelle corrispondenti a liste senza ripetizioni: il loro numero è quindi $\frac{18!}{(18-7)!}$. Di conseguenza le funzioni non iniettive sono $18^7 - \frac{18!}{11!}$.

§ 3.6 Combinazioni semplici

Affrontiamo ora il problema quello da cui il calcolo combinatorio prende il nome. Vogliamo contare in quanti modi si possono scegliere k oggetti (diversi, ma senza un ordine precisato) in un insieme A di n oggetti diversi. Poichè non vogliamo precisare l'ordine con cui scegliamo i k elementi, ma solo quali sono, quello che vogliamo considerare è un sottoinsieme di A con k elementi.

Definizione 3.21. *Chiamiamo **combinazioni** di ordine k di elementi di un insieme A tutti i sottoinsiemi di A con k elementi.*

Anche in questo caso se $|A| = n$ è necessario supporre $k \leq n$. Per contare le combinazioni possiamo immaginare di costruire per prima cosa tutte le disposizioni di ordine k degli elementi di A (che sono $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$) e poi di raggruppare tra loro tutte quelle costituite dagli stessi elementi; ogni gruppetto contiene $k!$ disposizioni (le permutazioni dei k elementi che compaiono in ciascuna disposizione del gruppetto). I gruppetti corrispondono alle combinazioni (ossia ai sottoinsiemi con k elementi) e il loro numero è quindi $D_{n,k} : k!$.

Esempio 3.22. Se U è l'insieme formato da tre palline di colore verde (V), rosso (R), nero (N), le disposizioni di queste tre palline a due a due sono $D_{3,2} = 6$, e, precisamente, sono gli allineamenti: VR, RV, VN, NV, RN, NR. Le combinazioni di queste tre palline a 2 a 2 sono 3: $\{V, R\}$, $\{V, N\}$, $\{R, N\}$. Notiamo che ciascuno di essi corrisponde a $2! = 2$ diverse disposizioni.

§ 3.7 I binomiali

Per esprimere in modo generale la formula del numero di combinazioni utilizziamo il simbolo binomiale. Si dice **coefficiente binomiale** n su k, $(0 \leq k \leq n)$, il numero:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Potremo quindi scrivere sinteticamente:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Esempio 3.23. Aggiungiamo all'insieme U dell'esempio precedente una pallina gialla G e scriviamo tutte le combinazioni delle 4 palline a 2 a 2. Otteniamo $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi: $\{V, R\}$, $\{V, N\}$, $\{R, N\}$, $\{V, G\}$, $\{N, G\}$, $\{R, G\}$.

Esempio 3.24. In una lotteria vengono assegnati 3 premi uguali mediante estrazione a sorte tra i 20 partecipanti. Il terzetto di vincitori è un insieme di 3 persone sorteggiate, che non tiene conto dell'eventuale ordine di estrazione. I possibili terzetti di vincitori sono allora tanti quante le possibili scelte di 3 elementi in un insieme di 20, ossia sono $C_{20,3} = \binom{20}{3} = 1140$.

Vediamo ora alcune proprietà dei binomiali. Siano k ed n numeri interi, $0 \leq k \leq n$.

i) Casi estremi: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) Simmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) Formula di Stiefel: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la formual di Stiefel in due modi diversi. La prima dimostrazione usa la definizione algebrica del simbolo binomiale. Vogliamo provare che è corretta l'uguaglianza

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

La correttezza o meno non si modifica se moltiplichiamo i due membri per il numero $k! \cdot (n-k)!$ e li dividiamo per il numero $(n-1)!$ (che sono entrambi $\neq 0$):

$$\frac{k}{1} + \frac{n-k}{1} = \frac{n}{1}.$$

è evidente che l'uguaglianza è corretta. Proviamo ora la stessa uguaglianza ricordando che i binomiali contano le combinazioni semplici. Consideriamo un insieme A con n elementi, uno dei quali è l'elemento $\overline{a}$. Consideriamo i sottoinsiemi di A con k elementi. Possiamo suddividere tali sottoinsiemi in due tipi distinti: quelli che non contengono $\overline{a}$ e quelli che lo contengono. Quelli che non contengono $\overline{a}$ sono i sottoinsiemi di $A - \{\overline{a}\}$ (insieme con $n-1$ elelemnti) di cardinalità k: il loro numero è quindi $\binom{n-1}{k}$. Ogni sottoinsieme del secondo tipo può essere ottenuto considerando un sottoinsieme di $k-1$ elementi di $A - \{\overline{a}\}$ (a cui viene poi aggiunto $\overline{a}$): il numero di tali sottoinsiemi è quindi $\binom{n-1}{k-1}$. Quindi il primo membro della formual di Stiefel fornisce il numero dei sottoinsiemi di A di cardinalità k sommando il numero di sottoinsiemi del primo tipo e il numero di sottoinsiemi del secondo tipo, mentre il secondo membro della formual $\binom{n}{k}$ fornisce direttamente numero di tutti i sottoinsiemi di A con k elementi. Quindi i due membri sono uguali $\square$

Il nome dei coefficienti binomiali deriva dal fatto che essi sono appunto i coefficienti che compaiono nello sviluppo della potenza $n-$esima di un binomio mediante la **formula del binomio di Newton**.

Teorema 3.25. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha*

$$(X+Y)^n = \binom{n}{0}X^n + \binom{n}{1}X^{n-1}Y + \dots \binom{n}{k}X^{n-k}Y^k + \dots + \binom{n}{n}Y^n.$$

Dimostrazione. Dimostriamo questa formula in due modi diversi. Per la prima dimostrazione usiamo l'induzione su n. Per $n=1$ abbiamo $(X+Y)^1 = 1 \cdot X + 1 \cdot Y$. Notiamo che il coefficiente 1 di X coincide proprio con $\binom{1}{0}$ e il coefficiente 1 di Y coincide con $\binom{1}{1}$. Supponiamo ora che la formula valga per un certo numero $n_0 \geq 1$ e proviamo che allora vale anche per il numero n_0+1. Possiamo scrivere $(X+Y)^{n_0+1}$ come prodotto $(X+Y)^{n_0} \cdot (X+Y)$. Usando l'ipotesi induttiva otteniamo

$$\left(\binom{n_0}{0}X^{n_0} + \binom{n_0}{1}X^{n_0-1}Y + \dots \binom{n_0}{k}X^{n_0-k}Y^k + \dots + \binom{n_0}{n_0}Y^{n_0}\right) \cdot (X+Y).$$

Eseguiamo quindi il prodotto e raccogliamo i monomi simili. Otteniamo una volta sola il monomio X^{n_0+1} moltiplicando X^{n_0} per X: dunque il suo coefficiente sarà $\binom{n_0}{0} \cdot 1 = \binom{n_0+1}{0}$. Lo stesso vale per il monomio Y^{n_0+1}. Otteniamo invece due volte ogni altro monomio $X^{n_0+1-k}Y^k$, con $1 \leq k \leq n_0$: una volta moltiplicando $X^{n_0-k}Y^k$ per X e una volta moltiplcando $X^{n_0+1-k}Y^{k-1}$ per Y. Dunque nel risultato il suo coefficiente sarà

$$\binom{n_0}{k} \cdot 1 + \binom{n_0+1}{k-1} \cdot 1$$

che per la formula di Stiefel coincide proprio con $\binom{n_0+1}{k}$. Per seconda dimostrazione utilizzamo le combinazioni. Numeriamo da 1 a n gli n fattori $(X+Y)$ che corrispondono a $(X+Y)^n$. Eseguendo il prodotto mediante la proprietà distributiva otteniamo un monomio $X^{n-k}Y^n$ se scegliamo l'addendo Y in k fattori e nei rimanenti l'addendo X: i modi di scegliere k fattori tra gli n elencati è dato da $\binom{n}{k}$. Quindi nello sviluppo della potenza troveremo $\binom{n}{k}$ monomi simili $X^{n-k}Y^n$ tutti con coefficiente 1: raccogliendoli il coefficiente è pertanto $\binom{n}{k}$. $\square$

Spesso i coefficienti binomiali si scrivono nel modo seguente detto **Triangolo di Tartaglia** (o Triangolo di Pascal):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Notiamo che il primo e l'ultimo coefficiente binomiale in ogni riga del triangolo sono uguali a 1 (per la prima proprietà vista), il triangolo è simmetrico rispetto alla retta verticale centrale (per la seconda propriet'a) e ogni coefficiente binomiale all'interno del triangolo è la somma dei due coefficienti binomiali alla sua destra e alla sua sinistra nella riga precedente (per la formula di Stiefel). Queste osservazioni ci permettono di riscrivere il triangolo di Tartaglia calcolando molto facilmente i numeri di ogni riga:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Solitamente ben noti sono gli sviluppi delle potenze fino al terzo grado:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Se nei due membri della formula dello sviluppo della potenza del binomio sostituiamo $X = 1$ e $Y = 1$ otteniamo un'altra interessante proprietà dei binomiali: **iv)** la somma della riga n-esima del triangolo di Tartaglia è 2^n ossia:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Le proprietà viste dei binomiali possono essere motivate osservando che:

i) c'è un solo un sottoinsieme con 0 elementi (l'insieme vuoto) e un solo sottoinsieme con $n = |A|$ elementi (tutto l'insieme A);

ii) scegliere k elementi tra n è come isolare i restanti $n-k$;

iii) fissato un certo elemento a_0 in un insieme A che ha n elementi, i sottoinsiemi di A con k elementi possono essere di due tipi: quelli che non contengono a_0 e quelli che lo contengono. Quelli del primo tipo sono tanti quanti i modi di scegliere k elementi nell'insieme $A \setminus \{a_0\}$ (che ha $n-1$ elementi); quelli del secondo tipo sono tanti quanti i modi di scegliere $k-1$ elementi in $A \setminus \{a_0\}$ (a cui aggiungere poi a_0 stesso);

iv) la somma di tutti i binomiali della riga n-esima del triangolo di Tartaglia è 2^n poichè, come abbiamo già visto, tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme A con n elementi sono 2^n.

Esempio 3.26. Ad un appello d'esame si presentano 16 studenti, ma solo 10 possono essere interrogati il primo giorno. Ci sono più oppure meno di 1000 modi di scegliere i 6 che dovranno ritornare il giorno successivo? I modi di scegliere 6 elementi in un insieme di 16 sono:

$$\binom{16}{6} = \frac{16!}{10! \cdot 6!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 > 1000.$$

Esempio 3.27. Dobbiamo scegliere 3 cavie maschio (tra le 10 a disposizione) e 4 cavie femmina (tra le 12 a disposizione) per un esperimento. In quanti modi può avvenire la scelta della coppia di cavie? La scelta è quella di 3 elementi in un insiem di 10 seguita dalla scelta di 4 elementi in un insieme di 12. Si ha quindi:

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{4} = \frac{10! \cdot 12!}{3! \cdot 7! \cdot 4! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 59400.$$

§ 3.8 Multi-insiemi e combinazioni con ripetizione

Alcuni problemi che sembrano richiedere l'uso di un insieme in verità utilizzano qualcosa di diverso che sarà chiamato un **multi-insieme**.
Per esempio le lettere dell'alfabeto contenute nella parola *torino* sono, in ordine alfabetico, $\{i, n, o, o, r, t\}$. La notazione con le parentesi graffe ricorda quella di un insieme, ma un insieme non contiene elementi ripetuti. Siamo quindi in presenza di qualcosa di diverso.

Definizione 3.28. *Un* **multi-insieme** *scelto da un insieme S è una funzione $m : S \to \mathbb{N}$ da S all'insieme degli interi non negativi. Per ogni $x \in S$, $m(x)$ è detta la molteplicità di x nel multi-insieme. La cardinalità del multi-insieme è la somma delle molteplicità degli elementi di S.*

Esempio 3.29. Qual è la molteplicità di ciascuna lettera dell'alfabeto nella parola *torino*? Qual è la cardinalità del multi-insieme delle lettere di *torino*? La molteplicità di i, n, r, t è 1, la molteplicità di o è 2 mentre la molteplicità di ogni altra lettera dell'alfabeto è 0. In simboli la funzione di molteplicità è data da $m(i) = m(n) = m(r) = m(t) = 1$, $m(o) = 2$, $m(a) = m(b) = \cdots = 0$. La cardinalità del multi-insieme è $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$.

Esempio 3.30. Ad un gioco a premi partecipano 4 concorrenti. La prima prova consiste in 12 domande: per ogni domanda, il primo concorrente che dà la risposta giusta ottiene un punto. Supponendo vengano assegnati tutti i 12 punti, quanti sono i possibili esiti del primo gioco? Sappiamo che ogni concorrente ottiene un punteggio da 0 a 12, e che la somma dei punteggi dei concorrenti è 12. Possiamo immaginare di visualizzare l'esito come una lista di 1 (1 punto per ciascuna domanda) scrivendo prima quelli ottenuti dal primo concorrente, poi quelli del secondo e così via, inserendo un segno di separazione tra quelli di un concorrente e quelli del successivo. Ad esempio se il primo ha ottenuto 5 punti, il secondo 2, il terzo 4 e l'ultimo 1, avremo

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1 \bullet\ 1\ 1\ \bullet\ 1\ 1\ 1\ 1\ \bullet\ 1$$

e se i punteggi sono stati 9, 0, 3, 0, avremo

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \bullet\ \bullet\ 1\ 1\ 1\ \bullet$$

In tutti i casi ci saranno $12+3$ caselline (dove 3 è il numero di concorrenti meno uno) in cui sistemare i 3 separatori $\bullet$ e i 12 numeri 1: quindi i possibili esiti corrispondono a scegliere dove mettere i 3 separatori sceglinedo 3 posizioni tra $12 + 3$ (oppure a scegliere le 12 posizioni in cui sistemare gli 1). In formule:

$$\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{12+4-1}{12}.$$

Teorema 3.31. *Il numero dei multi-insiemi di cardinalità k scelti da un insieme di n elementi è dato da*

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Dimostrazione. (**Metodo dei separatori**). Indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gli elementi di S. Per ogni multi-insieme su S di cardinalità k, cioè per ciascuna funzione m definita da S in $\mathbb{N}$ tale che $\sum_{x_i \in S} m(x_i) = k$, possiamo definire una sequenza di $k + n - 1$ numeri 1 e 0 come segue:

- si scrivono $m(x_1)$ numeri 1 seguiti da uno 0 (che funge da "separatore");
- successivamente si scrivono $m(x_2)$ numeri 1 seguiti da uno 0;

  ...

- si scrivono $m(x_{n-1})$ numeri 1 seguiti da uno 0;
- infine si scrivono $m(x_n)$ numeri 1, *senza* per'o mettere lo 0 finale.

Ora $m(x_1)+m(x_2)+\cdots+m(x_n) = k$ è la cardinalità del multi-insieme e quindi una sequenza come quella precedente contiene k volte il numero 1 e $n-1$ volte il numero 0, quindi in totale $k+n-1$ elementi. Inoltre, data una sequenza come sopra, si individua un multi-insieme scelto da S utilizzando gli 0 per suddividere la sequenza in n gruppi di numeri 1, dove per ogni gruppo il numero di 1 che compaiono rappresenta la molteplicità dell'elemento corrispondente. Quindi le sequenze del tipo precedente sono tante quanti i multi-insiemi scelti da S. Poichè il numero di tali sequenze è il numero di modi di scegliere gli $n-1$ elementi in cui posizionare i numeri 0, questo numero è dato da

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

cioè dal numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con $k+n-1$ elementi e quindi questo è anche il numero dei multi-insiemi di cardinalità k scelti in S. $\square$

Esempio 3.32. Una pasticceria produce 5 tipi, a, b, c, d, e di paste ricoperte al cioccolato. In quanti modi diversi si può confezionare un vassoio con 8 di queste paste? Ogni confezione di 8 paste può essere pensata come un multi- insieme di cardinalità 8 scelto da un insieme di cardinalità 5. Quindi ci sono

$$\binom{5+8-1}{5-1} = \binom{12}{8} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2} = 11\cdot 5\cdot 9 = 495$$

confezioni diverse. Se ad ogni confezione associamo la sequenza di 12 numeri 1 e 0 con 4 numeri 0, la confezione 001110110111 contiene 0 paste di tipo a, 0 paste di tipo b, 3 paste di tipo c, 2 paste di tipo d e 3 paste di tipo e.

§ 3.9 Esercizi

3.1 Siano $H = \{1, 2, 3, 4\}$ e $K = \{a, b, c\}$; scrivere tutti gli elementi del prodotto cartesiano $H \times K$.

3.2 In una regione vi sono venti citt'a, collegate a coppie da una strada comunale. Quante strade comunali possiede la regione in questione?

3.3 Quante diagonali ha un poligono convesso di 6 lati?

3.4 Per **anagramma** di una certa parola, si intende un qualunque riordinamento delle lettere che costituiscono quella parola. Contrariamente a quanto succede in enigmistica, in matematica NON si richiede che il nuovo riordinamento delle lettere formi una parola di senso compiuto. Calcolare quanti sono gli anagrammi delle parole seguenti:

SE, ICS, ORO, TORINO, INSIEME, ANAGRAMMA.

3.5 Quanti sono gli anagrammi della parola PADRE? E della parola MAMMA?

3.6 Scrivere tutti i numeri di due cifre (non necessariamente diverse) scelte tra 1, 2, 3, 4.

3.7 In quanti modi 3 oggetti possono essere colorati con 5 colori diversi?

3.8 Ad un campionato di calcio partecipano 20 squadre. Ogni squadra gioca una prima volta contro tutte le altre (girone di andata) e poi una seconda (girone di ritorno). Quante partite in totale si disputano nel girone d'andata? Qual'è la risposta per un torneo a n squadre, se $n \geq 2$?

3.9 Vogliamo calcolare in quanti modi diversi si può scegliere una terna di numeri (a, b, c) compresi tra 1 e 100 ordinati in ordine crescente $a < b < c$.

3.10 Calcolare il numero di modi distinti in cui può essere servito un giocatore di scala quaranta in una singola mano.

3.11 (a) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere con un mazzo da poker di 52 carte? (b) Quanti poker di assi si possono formare ? (c) Quanti poker diversi si possono formare ?

3.12 Una classe è formata da 10 ragazzi e 10 ragazze. Dividiamo a caso la classe in due squadre composte da 10 persone ciascuna. In quanti modi questo può avvenire? Quanti sono i casi in cui le due squadre hanno lo stesso numero di ragazze e ragazzi? Quale è il rapporto tra tali due valori scritto in forma percentuale?

3.13 Dire quanti sono gli anagrammi della parola LOGICA e della parola ILLOGICA.

3.14 Scrivere tutti i numeri (di 3 cifre) formati dalle cifre 1 , 2 , 3 non ripetute.

3.15 Quattro giocatori di tennis vogliono giocare un doppio. Quante coppie distinte si possono formare?

3.16 Nel gioco del Super-enalotto bisogna indovinare 6 numeri scelti tra il numero 1 e il numero 90. Quanti insiemi di 6 numeri si possono formare ?

3.17 Quanti sono i possibili prodotti di 6 fattori che si possono formare con i numeri 7, 17 e 37?

3.18 Uno studente deve seguire 3 corsi di lingue tra i seguenti: inglese, francese, tedesco, spagnolo, russo. Quante possibili scelte ha? quante se vuole includere il corso di inglese?

3.19 Verificare mediante le formule la validità della Formula di Stiefel.

3.20 (Da un compito d'esame) Quanti sono gli anagrammi della parola PROBLEMA che contengono almeno una tra le sequenze di lettere PR, RMAE, EP?

3.21 Dati 5 punti del piano, a 3 a 3 non allineati, quante sono le rette che passano per 2 di tali punti? Cambia la risposta se anzichè nel piano i 5 punti sono scelti nello spazio? Qual'è la risposta nel caso generale di $n \geq 2$ punti, con la medesima condizione che siano a 3 a 3 non allineati?

3.22 Sia A l'insieme $\{a, b, c, d\}$. Quante sono le applicazioni iniettive $f\colon A \to A$ tali che $f(b) = d$? Quante le suriettive con $f(a) = a$?

3.23 Si hanno a disposizione 6 vernici di colori diversi, con cui si vogliono dipingere le 4 pareti di una stanza, usando un solo colore per parete. In quanti modi si possono dipingere le pareti se si decide di non usare più volte uno stesso colore? In quanti modi se si decide che è possibile usare più volte uno stesso colore? In quanti modi se si decide che è possibile usare più volte uno stesso colore, purchè non su pareti adiacenti? Generalizzare le risposte dei precedenti quesiti al caso di una stanza poligonale con n pareti.

3.24 Nove persone si presentano ad un concorso per 4 posti. Quante sono le possibili graduatorie dei vincitori, se si escludono gli *ex-aequo*?

3.25 Quanti sono i numeri naturali $1 \leq n \leq 500$ che sono multipli di almeno uno tra 2, 3, 5?

3.26 Quanti sono i numeri naturali $1 \leq n \leq 500$ che sono multipli di almeno uno tra 7, 17, 37?

3.27 Quanti sono i numeri naturali $1 \leq n \leq 12100$ che sono multipli di almeno uno tra 10, 55, 22?

3.28 Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 6, 4\}$, $C = \{1, 2\}$.

a. Determinare il numero di applicazioni di C in C e il numero di applicazioni $\phi\colon A \to B$ tali che $\phi(C) \subseteq C$.

b. Si fissi una applicazione suriettiva $f\colon A \to B$ a scelta. Quante sono le applicazioni $g\colon B \to A$ tali che $f \circ g = id_B$? È vero che lo stesso numero si sarebbe ottenuto per ogni altra applicazione suriettiva $f\colon A \to B$?

c. Si fissi una applicazione suriettiva $f\colon A \to C$ a scelta. Quante sono le applicazioni $g\colon C \to A$ tali che $f \circ g = id_C$? È vero che lo stesso numero si sarebbe ottenuto per ogni altra applicazione suriettiva $f\colon A \to C$?

d. Si fissi una applicazione iniettiva $h\colon B \to A$ a scelta. Quante sono le applicazioni $k\colon A \to B$ tali che $k \circ h = id_B$? È vero che lo stesso numero si sarebbe ottenuto per ogni altra applicazione iniettiva $f\colon B \to A$?

e. Si fissi una applicazione iniettiva $h\colon C \to A$ a scelta. Quante sono le applicazioni $k\colon A \to C$ tali che $k \circ h = id_C$? È vero che lo stesso numero si sarebbe ottenuto per ogni altra applicazione iniettiva $f\colon C \to A$?