

Le funzioni

§ 2.1 Generalità sulle applicazioni o funzioni

Definizione 2.1. Una **applicazione o funzione** f è una terna $f = (A, B, G)$, dove A e B sono insiemi non vuoti e G è una corrispondenza da A a B (cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$) che è ovunque definita e funzionale ossia che gode della seguente proprietà:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G.$$

Notazioni e terminologia: A si dice **dominio** di f , B si dice **codominio** di f e G si dice **grafico** di f . Per indicare che f è una funzione da A in B invece che $f = (A, B, G)$ abitualmente si usa la notazione $f: A \rightarrow B$. Fissato un elemento $a \in A$, per indicare che b è l'unico elemento di B tale che $(a, b) \in G$ si scrive $b = f(a)$ e si dice che b è l'**immagine** di a .

Definizione 2.2. Si dice **immagine** di una funzione $f: A \rightarrow B$ e si denota $\text{Im}(f)$ oppure $f(A)$ il sottoinsieme di B degli elementi che sono immagine di qualche elemento di A ossia:

$$\text{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}.$$

Più generalmente, dato un sottoinsieme C di A , si dice **immagine di C** il sottoinsieme di B :

$$f(C) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in C\}.$$

NOTA BENE Spesso per assegnare una funzione $f: A \rightarrow B$ si fornisce una “legge” ossia una qualche formula che permette di associare a ciascun elemento del dominio la sua immagine. Si faccia però attenzione al fatto che la funzione è caratterizzata soltanto dal dominio A , dal codominio B e dal grafico G e non dalla eventuale “formulazione della legge”. I due esempi seguenti mostrano come una stessa “legge” può definire funzioni diverse e come, d'altra parte, “leggi” diverse possono definire una stessa funzione.

Esempio 2.3. La funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $f(n) = n^2$ e la funzione $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $g(n) = n^2$ sono diverse, perché non hanno lo stesso dominio e lo stesso codominio, ma, oltre a questo, hanno anche proprietà molto diverse. Usando la terminologia che definiremo in seguito, f non è iniettiva, mentre g lo è.

Esempio 2.4. Siano $A = \{0, 1, 2\}$ ed $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite rispettivamente da $f(x) = x - 7$ e $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$. Queste funzioni, per quanto espresse mediante “leggi” diverse, sono la stessa funzione, ossia $f = g$, poichè hanno lo stesso dominio A , lo stesso codominio \mathbb{R} e lo stesso grafico: $G_f = G_g = \{(0, -7), (1, -6), (2, -5)\}$.

Esempio 2.5. Elenchiamo ora alcune funzioni particolarmente importanti e che capiterà spesso di usare.

- a. **Le funzioni costanti.** Siano A e B insiemi e $b_0 \in B$ un elemento fissato. La funzione costante b_0 è $f_{b_0}: A \rightarrow B$ definita da $f_{b_0}(a) = b_0$ per ogni $a \in A$. Se $A = B = \mathbb{R}$, la funzione costante b_0 ha come grafico la retta “orizzontale” di equazione $y = b_0$.
- b. **Le funzioni identità di A .** Sia A un insieme; la funzione identità di A è $id_A: A \rightarrow A$ definita da $id_A(a) = a$ per ogni $a \in A$. Se $A = B = \mathbb{R}$, la funzione identità $id_{\mathbb{R}}$ ha come grafico la retta bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$. Si faccia attenzione a non confondere la funzione identità con la funzione costante 1.
- c. **Le operazioni.** Una operazione binaria interna in un insieme A è una funzione $*$: $A \times A \rightarrow A$. L’immagine di un elemento $*$ ((a_1, a_2)) di solito si denota $a_1 * a_2$.
- d. **Le successioni.** Una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; il termine n -esimo a_n della successione è l’immagine $f(n)$ del numero naturale n .

§ 2.2 Funzioni iniettive e suriettive

Definizione 2.6. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice:

- **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$;
- **suriettiva** se $\text{Im}(f) = B$ ossia se $\forall b \in B \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$;
- **biunivoca o biiettiva** se è sia iniettiva sia suriettiva.

Una funzione biunivoca si dice anche **biiezione oppure corrispondenza biunivoca oppure corrispondenza 1–1**. Possiamo riformulare le precedenti definizioni usando il concetto di controimmagine.

Definizione 2.7. Siano $f: A \rightarrow B$ una funzione, b_0 un elemento di B e D un sottoinsieme di B . Si dice **controimmagine di b_0** il sottoinsieme di A così definito:

$$f^{-1}(b_0) = \{a \in A \mid f(a) = b_0\}.$$

Analogamente si dice **controimmagine di D** il sottoinsieme di A :

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}.$$

La controimmagine di un elemento b_0 del codominio non è altro che la controimmagine del sottoinsieme singleton $\{b_0\}$, ossia $f^{-1}(b_0) = f^{-1}(\{b_0\})$. La controimmagine di un elemento è quindi sempre definita (ossia esiste sempre) ed è un sottoinsieme del dominio che, a seconda dei casi, può essere l'insieme vuoto \emptyset , oppure un singleton (ossia un sottoinsieme con un solo elemento), oppure un sottoinsieme con più elementi.

Esempio 2.8. Siano $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da: $g(0) = 5$, $g(1) = \sqrt{5}$, $g(2) = -\pi$, $g(3) = -\pi$. Avremo allora $f^{-1}(-\pi) = \{2, 3\}$, $f^{-1}(\sqrt{5}) = \{1\}$, $f^{-1}(27) = \emptyset$. Consideriamo poi i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} : $D_1 = [3, +\infty)$, $D_2 = (-\infty, 0)$, $D_3 = [-10, -8]$. Allora: $f^{-1}(D_1) = \{0\}$, $f^{-1}(D_2) = \{2, 3\}$, $f^{-1}(D_3) = \emptyset$.

Proposizione 2.9. Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Allora:

- 1) f è iniettiva $\iff \forall b \in B \quad f^{-1}(b)$ contiene al massimo un elemento.
- 2) f è suriettiva $\iff \forall b \in B \quad f^{-1}(b)$ contiene almeno un elemento.
- 3) f è biunivoca $\iff \forall b \in B \quad f^{-1}(b)$ contiene uno e un solo elemento.

Dimostrazione. 1) Supponiamo f iniettiva e sia b un elemento qualsiasi di B . Se $b \notin \text{Im}(f)$ allora $f^{-1}(b) = \emptyset$; se invece $b \in \text{Im}(f)$ ossia se $b = f(a)$ per un qualche $a \in A$, allora per ogni $a' \neq a$ si ha $f(a') \neq f(a) = b$ e quindi $f^{-1}(b) = \{a\}$ contiene un solo elemento. Supponiamo ora che la controimmagine di ciascun elemento del codominio contenga al massimo un elemento; se a_1, a_2 sono elementi distinti di A , allora le loro immagini $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$ sono distinte perché in caso contrario $f^{-1}(b_1)$ conterrebbe più di un elemento. 2) L'equivalenza segue subito dall'osservazione che $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ se e solo se $b \in \text{Im}(f)$. Infine 3) si ottiene immediatamente dalle precedenti. \square

Esempio 2.10.

- a. Le funzioni costanti da A in B non sono mai nè iniettive (tranne nel caso molto particolare in cui A abbia un solo elemento) nè suriettive (tranne nel caso molto particolare in cui B abbia un solo elemento).

- b. Le funzioni identità $id_A: A \rightarrow A$ sono sempre biunivoche.
- c. Le funzioni proiezione su un fattore π_1 e π_2 dal prodotto cartesiano $A \times B$ su A e su B rispettivamente, sono sempre suriettive. Inoltre π_1 (risp. π_2) è anche iniettiva soltanto in caso B (risp. A) abbia un solo elemento.
- d. La funzione proiezione sul quoziente $\pi: A \rightarrow A/\rho$ è sempre suriettiva, poichè (per definizione) le classi di equivalenza non sono mai vuote. L'unico caso in cui π risulta anche iniettiva è quello che riguarda la relazione "identità": $a_1 \rho a_2$ se e solo se $a_1 = a_2$.

§ 2.3 La composizione di funzioni

Definizione 2.11. *Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funzioni. Si dice **funzione composta di f e g** la funzione: $g \circ f: A \rightarrow C$ data da $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.*

La lettura corretta di $g \circ f$ è " f composto g " in quanto f è la prima funzione che agisce e g la seconda; per evitare una (per noi) poco naturale lettura da destra verso sinistra e, nello stesso tempo, rispettare il significato matematico del simbolo, evitando confusione ed errori, si può leggere $g \circ f$ anche come " g dopo f ". Si noti che la composizione di due funzioni è definita solo nel caso in cui il codominio della prima coincide col dominio della seconda.

Proposizione 2.12. (Proprietà associativa della composizione)

Siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$ funzioni. Allora: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Dimostrazione. Per la verifica è sufficiente osservare che le due funzioni hanno lo stesso dominio A , lo stesso codominio D e assegnano a ciascun elemento a di A la stessa immagine $h(g(f(a)))$. □

Grazie alla proprietà associativa, potremo scrivere senza ambiguità la composizione di più funzioni come $h \circ g \circ f$, senza l'uso di parentesi. Non valgono invece per la composizione di funzioni la proprietà commutativa e la proprietà di cancellazione, come mostrano gli esempi che seguono.

Esempio 2.13. Siano A , B e C insiemi due a due distinti e siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: B \rightarrow A$ funzioni. La composizione $g \circ f$ è definita, mentre non lo è la composizione $f \circ g$ poichè il codominio di g e il dominio di f non coincidono. Le composizioni $h \circ f$ e $f \circ h$ sono entrambe definite, ma sono funzioni diverse, perché la prima ha dominio A e la seconda ha dominio B .

Esempio 2.14. Siano $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ le funzioni date da $f(n) = n^2$ e $g(n) = n + 3$. Le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono entrambe definite, sono entrambe funzioni da \mathbb{N} in \mathbb{N} , ma sono funzioni diverse poichè ad esempio $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 3$, mentre $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3) = 9$.

Esempio 2.15. Siano $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ due funzioni e sia $c_7: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione costante 7. Allora $c_7 \circ f = c_7 \circ g = c_7$ anche se $f \neq g$.

I due esempi seguenti mostrano il comportamento di due funzioni importanti rispetto alla composizione.

Esempio 2.16. Siano A, B insiemi, id_A e id_B le rispettive funzioni identità e sia infine $g: A \rightarrow B$ una funzione qualsiasi. Allora si ha $id_B \circ g = g$ ed anche $g \circ id_A = g$.

Esempio 2.17. Siano A un insieme, a un suo elemento fissato e $f_a: A \rightarrow A$ la corrispondente funzione costante. Se $g: A \rightarrow A$ è una funzione qualsiasi, allora $f_a \circ g = f_a$ e $g \circ f_a = f_{g(a)}$.

I risultati seguenti mostrano il comportamento di due funzioni importanti rispetto alla composizione.

Proposizione 2.18. *Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni. Allora:*

i) $g \circ f$ iniettiva $\implies f$ iniettiva;

ii) $g \circ f$ suriettiva $\implies g$ suriettiva.

Dimostrazione. i) Proviamo che se f non è iniettiva, neppure $g \circ f$ può esserlo. Supponiamo che a_1, a_2 siano elementi distinti di A tali che $f(a_1) = f(a_2) = b$; allora si ha:

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$$

e quindi $g \circ f$ non è iniettiva. ii) Supponiamo $g \circ f$ suriettiva; vogliamo provare che $\text{Im}(g) = C$, ossia che $\forall c \in C$ si ha $c \in \text{Im}(g)$. Per ipotesi esiste $a \in A$ tale che $(g \circ f)(a) = c$. In tal caso, posto $b = f(a)$, si ha $g(b) = c$, come volevasi. \square

Dall'iniettività della funzione composta, invece, nulla segue riguardo all'iniettività della seconda funzione e, allo stesso modo, dalla suriettività della funzione composta nulla segue riguardo alla suriettività della prima funzione.

§ 2.4 Funzioni inverse

Definizione 2.19. *Si dice **funzione inversa** di una funzione $f: A \rightarrow B$ una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che valgano le due condizioni $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.*

Non tutte le funzione hanno una funzione inversa. Infatti:

Proposizione 2.20. *Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Allora:*

$$f \text{ ha un'inversa } g \iff f \text{ è biunivoca}$$

Dimostrazione. “ \implies ” segue dalla Proposizione 2.18, ricordando che le funzioni identità sono iniettive e suriettive. “ \impliedby ” Supponiamo f biunivoca e costruiamo esplicitamente la funzione inversa $g: B \rightarrow A$ come corrispondenza inversa. Dunque $\forall b \in B$ poniamo $g(b) = a$ dove a è l'unico elemento di A tale che $f(a) = b$. Per costruzione, le due composizioni di f e g coincidono con l'identità di A e di B rispettivamente. \square

Notiamo che è sempre possibile costruire la corrispondenza inversa di una funzione f , ma essa non è in generale una funzione a meno che, come prima dimostrato, f sia biunivoca. Se infatti f non è suriettiva, la corrispondenza inversa non risulta ovunque definita e se f non è iniettiva, la corrispondenza inversa non risulta funzionale. Proviamo ora che la funzione inversa, se esiste, è unica.

Proposizione 2.21. *Siano $f: A \rightarrow B$ e $g, h: B \rightarrow A$ delle funzioni. Se $g \circ f = id_A$ e $f \circ h = id_B$, allora $g = h$.*

Dimostrazione. Intanto g e h hanno lo stesso dominio e codominio. Ci basterebbe allora provare che hanno lo stesso grafo. Scegliamo invece un ragionamento di tipo più formale: calcoliamo la composizione “a tre” $g \circ f \circ h$ nei due modi diversi permessi dalla proprietà associativa:

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h.$$

\square

Dunque non possono esistere due diverse funzioni inverse di una stessa funzione f . Di solito l'unica funzione inversa di f (naturalmente se esiste) viene denotata col simbolo f^{-1} . ATTENZIONE: le notazioni di funzione inversa e di controimmagine possono essere confuse una con l'altra.

§ 2.5 La cardinalità di un insieme

Come applicazione delle cose viste riguardo alle funzioni vogliamo ora definire in modo rigoroso il “numero di elementi” di un insieme, anche nel caso in cui l'insieme sia “infinito”. Prima di poter fare ciò, è necessario precisare cosa intendiamo dicendo che un insieme è finito oppure che è infinito.

Definizione 2.22. *Si dice che due insiemi A e B sono equipollenti oppure hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione biunivoca $f: A \rightarrow B$.*

Intuitivamente possiamo dire che $Card(A) = Card(B)$ se A ha tanti elementi quanti B . Vogliamo ora mettere a confronto tra loro le cardinalità, per poter dire anche se un insieme ha più elementi (oppure ha meno elementi) di un altro.

Definizione 2.23. *Dati due insiemi A e B , diciamo che A ha **cardinalità minore o uguale di B** se esiste una applicazione iniettiva $i: A \rightarrow B$ oppure (equivalentemente) se esiste una applicazione suriettiva $p: B \rightarrow A$. In tal caso scriveremo $Card(A) \leq Card(B)$.*

Teorema 2.24. *Siano A e B insiemi. Allora:*

$$Card(A) = Card(B) \iff Card(A) \leq Card(B) \text{ e } Card(B) \leq Card(A).$$

Definizione 2.25. *Un insieme è **infinito** se è equipollente ad un suo sottoinsieme proprio ossia se esiste una funzione $f: A \rightarrow A$ iniettiva ma non suriettiva, oppure suriettiva ma non iniettiva. Un insieme è **finito** se questo non capita.*

Esempio 2.26. L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è un insieme infinito poichè la funzione “successore” $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sigma(n) = n + 1$ è iniettiva ma non suriettiva (Assiomi di Peano). Possiamo anche vedere che la funzione “doppio” $f: \mathbb{N} \rightarrow P$ ($P = \{\text{numeri naturali pari}\}$) data da $f(n) = 2n$, è biunivoca e quindi $Card(\mathbb{N}) = Card(P)$, anche se P è un sottoinsieme proprio di \mathbb{N} .

Dalla definizione di insieme finito segue la seguente proprietà,

Teorema 2.27. *Se A è un insieme **finito** e $f: A \rightarrow A$ è una funzione, allora si ha:*

$$f \text{ è iniettiva} \iff f \text{ è biunivoca} \iff f \text{ è suriettiva.}$$

Nel seguito del capitolo indicheremo con I_n ($n \geq 1$) l'insieme dei numeri naturali $\{1, \dots, n\}$. Diremo inoltre che l'insieme vuoto ha cardinalità 0.

Teorema 2.28. a. *Per ogni numero naturale n , I_n è un insieme finito.*

b. *Ogni insieme finito A è equipollente ad un I_n oppure è \emptyset : quindi $Card(A) \in \mathbb{N}$.*

c. *Se B è infinito, allora $Card(B) \geq Card(\mathbb{N}) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

La cardinalità dell'insieme infinito \mathbb{N} è detta **cardinalità numerabile** e viene indicata con \aleph_0 (\aleph è la lettera ebraica alef). Un insieme equipollente a \mathbb{N} si dice **insieme numerabile**.

Esempio 2.29. $Card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$. Una applicazione biunivoca $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ è data da $f(n) = 2n$ se $n \geq 0$, $f(n) = -2n - 1$ se $n < 0$. Anche \mathbb{Q} ha cardinalità numerabile, ma non è semplice costruire esplicitamente una funzione biunivoca $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

Solo per curiosità: la cardinalità dei numeri reali. $\text{Card}(\mathbb{R})$, detta anche **cardinalità del continuo**, è strettamente maggiore di $\aleph_0 = \text{Card}(\mathbb{N})$. L'applicazione $n \mapsto n$ mostra che $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$. Proviamo che non vale l'uguaglianza mostrando che nessuna funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere suriettiva. Identifichiamo ogni numero reale con la sua scrittura posizionale in base 10 e indichiamo con $c_n(x)$ la n -esima cifra decimale del numero x . Costruiamo un numero reale che non appartiene a $\text{Im}(f)$. Sia y il numero reale con parte intera 0 tale che $c_n(y) = 2$ se $c_n(f(n-1)) \neq 2$ e $c_n(y) = 1$ se $c_n(f(n-1)) = 2$. Tale numero y differisce da ciascun numero reale appartenente a $\text{Im}(f)$ in almeno una cifra decimale e quindi $y \notin \text{Im}(f)$. Vi sono tuttavia insiemi che hanno cardinalità più grande di quella del \mathbb{R} , ad esempio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'insieme delle parti di \mathbb{R} . Possiamo provare infatti, più in generale, che per ogni insieme A , finito o infinito, si ha $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$. La funzione iniettiva $a \mapsto \{a\}$ prova che $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$. Proviamo che non vale l'uguaglianza. Supponiamo per assurdo che esista una funzione $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ biunivoca e indichiamo con B il sottoinsieme di A degli elementi a tali che $a \notin f(a)$. Essendo f suriettiva, esiste un elemento $a_0 \in A$ tale che $f(a_0) = B$. Si perviene allora alla contraddizione:

$$a_0 \in f(a_0) \iff a_0 \notin f(a_0).$$

§ 2.6 Il principio dei cassetti

Dalla definizione di insieme finito e dalle proprietà che abbiamo enunciato nella sezione precedente segue la proprietà conosciuta come **principio dei cassetti** o **principio della piccionaia**. Se B è un insieme finito con n elementi e A è un suo sottoinsieme con m elementi, allora $m \leq n$ e inoltre A è strettamente più piccolo di B se e solo se $m < n$. Questa proprietà appare meno evidente quando i numeri coinvolti sono grandi.

Esempio 2.30. In una grande città, come Milano Roma, vi sono sicuramente due persone con lo stesso numero di capelli in testa. Sappiamo infatti che il numero di capelli che un individuo può possedere non supera i 200'000. Se tutti gli abitanti di Roma (o di Milano) avessero un diverso numero di capelli, l'insieme B costituito dai numeri di capelli di ciascun individuo avrebbe tanti elementi quanti sono gli abitanti (e quindi più di un milione di elementi), pur essendo un sottoinsieme dell'insieme A dei numeri interi da 0 a 200'000 che ha solo 200'001 elementi.

Possiamo enunciare il Principio dei cassetti anche coinvolgendo le nozioni di iniettività e suriettività delle funzioni: sia $f: A \rightarrow B$ una funzione tra gli insiemi A di cardinalità m e B di cardinalità k .

- Se f è iniettiva allora $m \leq k$, ossia
- se $m > k$, f non può essere iniettiva.
- Se f è suriettiva allora $m \geq k$, ossia
- se $m < k$, f non può essere suriettiva.

Si faccia attenzione al fatto che queste proprietà contengono delle implicazioni, non delle bi-implicazioni.

Esempio 2.31. Consideriamo una funzione $f: A \rightarrow B$ da un insieme A con 7 elementi ad un insieme B con 18 elementi. Possiamo affermare con totale sicurezza che f non è suriettiva in quanto $7 \not\geq 18$. Possiamo inoltre affermare che f potrebbe essere iniettiva, ma senza ulteriori informazioni non possiamo sapere se lo è oppure no.

§ 2.7 Esercizi

- 2.1** Sia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $f(n) = n^2 - 3n + 5$. Determinare $f(0)$, $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(0)$. Si tratta di una applicazione iniettiva? Si tratta di una applicazione suriettiva?
- 2.2** Sia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $f(n) = 2n^2 - 3n + 5$. Determinare $f(0)$, $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(0)$. Si tratta di una applicazione suriettiva? Si tratta di una applicazione iniettiva?
- 2.3** Sia $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione data da $f((n, m)) = \min\{m, n\}$.
- Determinare l'immagine dei sottoinsiemi $\mathbb{N} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{N}$.
 - Determinare gli insiemi controimmagine $f^{-1}(n)$ per $n = 4$ e poi per un n generico.
 - Dire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
- 2.4** Sia $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione data da $f((n, m)) = m^2 + n$.
- Determinare $\text{Im}(f)$ e l'immagine dei sottoinsiemi $\mathbb{Z} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{Z}$.
 - Determinare gli insiemi controimmagine $f^{-1}(4)$ e $f^{-1}(\mathbb{Z}_{<0})$, dove $\mathbb{Z}_{<0}$ è l'insieme dei numeri interi strettamente negativi.
 - Dire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
- 2.5** Sia $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'applicazione data da: $f((x, y)) = (y, 2)$ se x è dispari e $f((x, y)) = (y, x)$ se x è pari.
- Dire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
 - Determinare $f^{-1}((1, 1))$, $f^{-1}((1, 2))$, $f^{-1}((11, 12))$, $f^{-1}((4, 6))$, $f^{-1}((4, 7))$.
 - Determinare $f(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})$ e $f^{-1}(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})$, dove $2\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi pari.

2.6 Determinare tutte le applicazioni $f: A \rightarrow B$ dove $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$. Quante sono quelle suriettive? Quante sono quelle iniettive?

2.7 Esiste una applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(\{1, 2\}) = \{1, \sqrt{2}, \pi\}$? Esiste una applicazione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(\{1, \sqrt{2}, \pi\}) = \{1, 2\}$? (motivare le risposte; in caso affermativo esibire un esempio.)

2.8 Determinare l'immagine della funzione $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $\phi((m, n)) = mn$. Vi sono elementi del codominio la cui controimmagine è un singleton? Trovare tutti gli elementi di $\phi^{-1}(p)$, per ogni numero primo p .

2.9 Siano A un insieme, B un suo sottoinsieme, $X = \mathcal{P}(A)$ e $\phi: X \rightarrow X$ l'applicazione data da $\phi(C) = C \cap B$. Dire se ϕ è iniettiva, suriettiva, biunivoca e determinare $\text{Im}(\phi)$. Rispondere alle stesse domande relativamente a $\psi: X \rightarrow X$ data da $\psi(C) = C \cup B$.

2.10 Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(n) = n^2$. Provare che non esiste una applicazione $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$.

2.11 Sia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(n) = n^2 - n$ se $n > 0$ e $f(n) = -n + 1$ se $n \leq 0$. Provare che non esiste una applicazione $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$. Costruire due diverse applicazioni $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tali che $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$.

2.12 Sia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(n) = 4n + 1$ se n è pari e $f(n) = 3n - 2$ se n è dispari. Dire se si tratta di una applicazione iniettiva, suriettiva, biunivoca. Determinare esplicitamente gli insiemi controimmagine di 0, 1, -3.

2.13 Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni biunivoche. Verificare che anche la funzione inversa f^{-1} e la funzione composta $g \circ f$ sono funzioni biunivoche.

2.14 La successione di **Fibonacci** è la funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ e $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ per ogni $n \geq 2$. Determinare le immagini dei primi 6 numeri naturali. Si tratta di una funzione suriettiva? iniettiva?

2.15 In un teatro vi sono 500 persone. Provare che ce ne sono almeno 2 che festeggiano il compleanno lo stesso giorno. Quante persone bisogna riunire per essere sicuri che almeno tre tra esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

2.16 Provare che in Italia esistono sicuramente due persone che festeggiano il compleanno nello stesso giorno, hanno lo stesso numero di scarpe ed anche la stessa altezza espressa in centimetri. E a Torino?