Capitolo 1

Il linguaggio degli insiemi

§ 1.1 Insiemi ed elementi

Indicheremo abitualmente gli insiemi con lettere maiuscole $A, B, \ldots$ e gli elementi di un insieme con lettere minuscole. NOTA BENE: NON diamo una definizione formale di insieme. "a è un elemento dell'insieme A" si scrive in simboli "$a \in A$" e si legge "a appartiene ad A".

Idea intuitiva: un insieme è costituito e caratterizzato esclusivamente dai suoi elementi, ossia: due insiemi sono uguali se e solo se contengono gli stessi elementi.

Useremo spesso gli insiemi numerici $\mathbb{N}$ (numeri naturali), $\mathbb{Z}$ (numeri interi relativi), $\mathbb{Q}$ (numeri razionali) ed $\mathbb{R}$ (numeri reali), soprattutto per poter costruire qualche esempio significativo.

Un insieme può essere assegnato elencando i suoi elementi. Gli elementi dell'insieme sono quelli presenti nell'elenco, non ha importanza se sono elencati più volte o in quale ordine.

Esempio 1.1. $A = \{0, 1\}$ è l'insieme costituito dai due numeri 0 e 1. Anche $\{1, 0\}$ e $\{0, 0, 1, 1, 1\}$ sono l'insieme A, perché l'ordine e le ripetizioni sono irrilevanti.

Un altro modo per assegnare un insieme è quello di indicare una sua **proprietà caratteristica** ossia una proprietà soddisfatta da tutti gli elementi dell'insieme e solo da essi:

$$B = \{x \in X \mid x \text{ soddisfa la proprietà } P\}.$$

Se si usa la proprietà caratteristica:

- è sempre **necessario** indicare esplicitamente l'insieme X degli elementi da prendere in considerazione;
- la proprietà P usata non deve essere in alcun modo vaga o ambigua.

Esempio 1.2. Non hanno alcun senso espressioni quali: $X = \{\text{multipli di } 2\}$, $Y = \{\text{numeri naturali grandi}\}$, $Z = \{\text{soluzioni dell'equazione } x^4 - 1 = 0\}$.

L'insieme $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ è invece perfettamente definito. Poichè nessun numero reale ha quadrato negativo, l'insieme V ora considerato è privo di elementi: V si chiama **insieme vuoto** e si denota $\emptyset$. L'insieme vuoto è unico: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset = \{n \in \mathbb{N} \mid n > n\}$.

Nei paragrafi successivi vedremo come a partire da insiemi noti se ne possano costruire altri mediante alcune costruzioni standard (unione, intersezione, complementare, insieme delle parti, prodotto cartesiano, quoziente).

Per indicare che un elemento a non appartiene ad un insieme A scriviamo $a \notin A$. Preso un qualsiasi elemento a, l'affermazione che a non appartiene all'insieme vuoto si scrive in simboli: $\forall a$: $a \notin \emptyset$. $\forall$ significa "per ogni", "ogni", "per tutti" ...
Ad eccezione dell'insieme vuoto, tutti gli altri insiemi contengono qualche elemento.

In simboli: $A \neq \emptyset \iff \exists\, a$ tale che $a \in A$. Il simbolo $\exists$ significa "esiste", "c'è almeno un/o/a..."; a volte si usa anche il simbolo $\exists!$ col significato di "esiste uno ed un solo" o "esiste un unico". $\iff$ si legge "se e soltanto se" oppure "se e solo se" e significa che l'affermazione che lo precede e l'affermazione che lo segue sono equivalenti ossia che sono entrambe vere oppure entrambe false. Per ogni insieme A, scriveremo $\#A = n$ oppure $|A| = n$ se A ha un numero finito n di elementi oppure $\#A = |A| = \infty$ se ne ha infiniti.

Esempio 1.3. (i) $\#\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 = 0\} = \#\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\} = 2$,

(ii) Se $A = \{1, 0, -3, 1, 7, 0, 0, 7\}$, si ha $|A| = 4$. Ricordiamo infatti che gli elementi di un insieme si contano una volta sola e quindi $A = \{1, 0, -3, 7\}$.

(iii) Indicando con $2\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi pari, ossia

$$2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

si ha $\#2\mathbb{Z} = \infty$ ed anche $\#\mathbb{Z} = \infty$.

§ 1.2 Sottoinsiemi

Si dice che l'insieme A è un **sottoinsieme** dell'insieme B, oppure che A è contenuto in B, se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B. In simboli: $A \subseteq B \iff (a \in A \implies a \in B)$. Il simbolo $\implies$ si legge "implica". Se F_1 e F_2 sono due affermazioni, l'implicazione $F_1 \implies F_2$ significa che se (oppure ogni volta che) l'affermazione F_1 è vera, allora è vera anche F_2. Quindi l'implicazione è corretta quando F_1 e F_2 sono entrambe vere ed anche quando F_1 è falsa (indipendentemente dal fatto che F_2 sia vera o falsa).

Esempio 1.4. L'implicazione $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > 3 \Longrightarrow 2n$ è pari) è corretta. Invece $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > 3 \Longrightarrow n^2 > 20)$ è falsa perché esiste almeno un caso in cui la prima affermazione è vera e la seconda no: $4 > 3$, ma $4^2 \leq 20$. Sono vere anche affermazioni piuttosto strane per il senso comune come: $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n < -3 \Longrightarrow 2n$ è pari)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(n < -3 \Longrightarrow 2n$ è dispari)

NOTA BENE: Una affermazione è vera se e soltanto se è vera in tutti i casi; la dimostrazione deve comprendere tutti i casi possibili e non soltanto alcuni casi particolari. Una affermazione è falsa se e solo se è falsa in almeno un caso; per provarlo è sufficiente esibire esplicitamente un controesempio. Le strane affermazioni dell'esempio precedente sono considerate corrette poichè non ammettono controesempi: non vi sono infatti numeri naturali minori di -3 da poter usare come controesempi. Se A è un *sottoinsieme proprio* di B, ossia se è un sottoinsieme di B diverso da B stesso, si può anche scrivere $A \subset B$, oppure ancor pi'u chiaramente $A \subsetneq B$, invece di $A \subseteq B$. Quindi: $A \subsetneq B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B, ma vi è almeno un elemento di B che non è elemento di A. Anche in questo caso una sbarra sul simbolo indica la sua negazione: $A \not\subset B$ significa che l'insieme A non è un sottoinsieme dell'insieme B, ossia che esiste almeno un elemento di A che non è elemento di B. In simboli:

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow \ \exists\, a \in A,\ a \notin B.$$

Esempio 1.5. (i) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 20\} \subseteq \mathbb{N}$; poichè siamo sicuri che vi sono dei numeri naturali che non appartengono al primo insieme (come per esempio $x = 100$) possiamo anche scrivere $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 20\} \subset \mathbb{N}$.

(ii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^7 - 3x^5 + 5x^2 - 3x + 1 > 0\} \subseteq \mathbb{N}$; in questo caso è difficile stabilire se i due insiemi sono diversi oppure no e quindi ci conviene evitare il simbolo $\subset$.

(iii) l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri interi pari $2\mathbb{Z}$ sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$, ma nessuno dei due è sottoinsieme dell'altro:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{N} \not\subset 2\mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}.$$

(iv) L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme; ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, ossia: se A è un insieme, allora $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$.

La seguente proprietà viene usata molto spesso per provare l'uguaglianza tra due insiemi. **Doppia inclusione**

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$$

Il simbolo $\wedge$ abbrevia la congiunzione "e". Dunque, due insiemi sono diversi se differiscono almeno per un elemento, ossia se vi è almeno un elemento nel primo che non appartiene al secondo oppure vi è almeno un elemento nel secondo che non appartinen al primo:

$$A \neq B \iff \exists\, a \in A,\ a \notin B\ \vee\ \exists\, b \in B,\ b \notin A \iff A \not\subseteq B\ \vee\ B \not\subseteq A$$

Il simbolo $\vee$ abbrevia la congiunzione "o", "oppure". Se A è un sottoinsieme proprio di B e B ha un numero finito n di elementi, ossia $\#B = n$, allora anche A ha un numero finito m di elementi, strettamente minore di n, ossia:

$$\#B \in \mathbb{N}\ e\ \ A \subset B \Longrightarrow \#A \in \mathbb{N}\ \ e\ \ \#A < \#B.$$

Invece se $\#B = \infty$, A può avere un numero finito di elementi o anche infiniti elementi come B. Ad esempio $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, ma $\#2\mathbb{Z} = \infty = \#\mathbb{Z}$.

§ 1.3 Intersezione, unione complementare

Definizione 1.6. *Siano A, B insiemi. Si dice* **intersezione** *di A e B e si denota $A \cap B$ l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi che stanno contemporaneamente in A e in B:*

$$x \in A \cap B \iff (x \in A\ \wedge\ x \in B).$$

Due insiemi A e B si dicono ***disgiunti*** *se $A \cap B = \emptyset$. Si dice* **unione** *di A e B e si denota $A \cup B$ l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi che stanno in almeno uno tra A e B:*

$$x \in A \cup B \iff (x \in A\ \vee\ x \in B).$$

NOTA BENE: L'espressione $x \in A$ **oppure** $x \in B$ comprende anche il caso degli eventuali elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi. Quindi:

$$A \cup B \supseteq A \cap B.$$

Talvolta useremo l'espressione "l'unione disgiunta di A e B" per indicare semplicemente l'unione $A \cup B$, ma sottolineando che i due insiemi A e B considerati sono disgiunti. Non è dunque un diverso tipo di unione, ma è solo un modo abbreviato per "l'unione dei due insiemi A e B (che sono insiemi disgiunti)". L'unione e l'intersezione di insiemi non dipendono dall'ordine in cui gli insiemi vengono considerati e soddisfano le seguenti **proprietà distributive**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Esempio 1.7. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$. Allora:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \}$$

Unione, intersezione e relative proprietà possono essere generalizzati a famiglie qualsiasi di insiemi.

Definizione 1.8. *Sia I un insieme non vuoto e, per ogni $i \in I$, sia A_i un insieme:*

$$a \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow (\exists i \in I \quad a \in A_i), \qquad a \in \bigcap_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow (\forall i \in I \quad a \in A_i).$$

Esempio 1.9. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo con A_n l'insieme dei numeri interi relativi che sono multipli di n. Allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$. Dimostriamo l'ugualianza $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$ utilizzando il metodo della doppia inclusione. L'inclusione "$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{Z}$" è ovvia perché tutti gli insiemi A_n sono contenuti in $\mathbb{Z}$ e quindi anche la loro unione lo è. Per dimostrare l'inclusione opposta "$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq \mathbb{Z}$" proviamo che ogni numero intero x è contenuto in almeno uno degli insiemi A_n. Possiamo ad esempio scegliere $n = 1$ ed osservare che ogni numero intero è multiplo di 1. Oppure possiamo scegliere $n = |x|$ (dove $|x|$ è il valore assoluto di x). Allora $x = n$ se $x \geq 0$ e $x = -n$ se $x < 0$: in entrambi i casi x è un multiplo di n e quindi $x \in A_n$.

Esempio 1.10. Il dominio della funzione reale di variabile reale $y = \tan(x)$ è:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

Un modo alternativo di scrivere il dominio della funzione tangente è quello di dire che è costituito da tutti i numeri reali **tranne** i multipli interi di π.

Definizione 1.11. *Siano X un insieme e A un suo sottoinsieme. Si dice* **complementare** *di A in X e si indica con $\mathcal{C}_X(A)$ l'insieme di tutti gli elementi di X che non appartengono ad A:*

$$\mathcal{C}_X(A) = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Quindi il dominio della funzione tangente è $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\})$.

L'insieme complementare $\mathcal{C}_X(A)$ è l'unico insieme che verifica le due condizioni

$$A \cap \mathcal{C}_X(A) = \emptyset \quad e \quad A \cup \mathcal{C}_X(A) = X.$$

Valgono inoltre le **Leggi di De Morgan**: se A e B sono sottoinsiemi di X, allora:

$$\mathcal{C}_X(A \cup B) = \mathcal{C}_X(A) \cap \mathcal{C}_X(B) \quad e \quad \mathcal{C}_X(A \cap B) = \mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B).$$

Proprietà analoghe valgono relativamente ad unioni ed intersezioni di famiglie di insiemi. Data una famiglia A_i, $i \in I$ di sottoinsiemi di un insieme X si ha:

$$\mathcal{C}_X\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_X(A_i) \quad e \quad \mathcal{C}_X\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_X(A_i).$$

Definizione 1.12. *Dati gli insiemi A e B, si dice* **insieme differenza** *di B ed A, e si denota $B - A$, oppure $B \setminus A$, l'insieme formato da tutti gli elementi di B che non appartengono ad A, ossia:*

$$x \in B - A \Longleftrightarrow x \in B \text{ e } x \notin A \quad \textit{ovvero} \quad B - A = \mathcal{C}_{A \cup B}(A).$$

Talvolta si considera anche l'insieme costituito dagli elementi di due insiemi che non siano elementi comuni.

Definizione 1.13. *Dati gli insiemi A e B, si dice* **differenza simmetrica** *di A e B, e si denota $A \triangle B$, l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad uno solo tra A e B, ossia:*

$$x \in A \triangle B \Longleftrightarrow x \in A - B \textit{ oppure } x \in B - A$$

ovvero

$$B \triangle A = (A \cup B) - (A \cap B).$$

§ 1.4 Insieme delle parti

Gli insiemi possono a loro volta essere considerati come elementi di altri insiemi.

Esempio 1.14. L'insieme $A = \{1, \{2, 3\}\}$ ha due elementi: il numero 1 e l'insieme formato dai numeri 2 e 3. L'insieme $X = \{5, \{5\}\}$ ha due elementi: il numero 5 e l'insieme che ha 5 come unico elemento (un insieme come $\{5\}$ che ha un solo elemento si dice anche **singleton**).

Definizione 1.15. *Si dice* **insieme delle parti** *di un insieme X, l'insieme $\mathcal{P}(X)$ i cui elementi sono i sottoinsiemi di X:*

$$A \in \mathcal{P}(X) \Longleftrightarrow A \subseteq X.$$

Attenzione alle notazioni: $a \in A \Longleftrightarrow \{a\} \subseteq A \Longleftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Esempio 1.16. Sia $A = \{0, 5, 7\}$. Allora

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\ , \{0\}, \{5\}, \{7\}, \{0, 5\}, \{0, 7\}, \{5, 7\}, A\}.$$

L'insieme delle parti di un insieme non è mai l'insieme vuoto poichè in ogni caso contiene almeno l'elemento $\emptyset$. In particolare $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ha 1 elemento. Se X è un insieme con n elementi, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi. Dimostreremo in seguito questa affermazione.

§ 1.5 Partizioni

Vogliamo ora suddividere un insieme X in parti, ciascuna costituita da un suo sottoinsieme, in modo che riunendole tutte riotteniamo l'insieme di partenza. Se non poniamo altre condizioni che questa, otteniamo un **ricoprimento** di X. Ponendo alcune condizioni ulteriori otteniamo ricoprimenti speciali, che vengono utilizzati in numerose costruzioni matematiche.

Definizione 1.17. *Si dice* **partizione** *di X una famiglia di suoi sottoinsiemi tali che:*

- *nessuno di essi è vuoto,*
- *sono due a due disgiunti,*
- *la loro unione è tutto X.*

In modo piu formale possiamo dire che una partizione $\mathcal{Q}$ di X è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ tale che:

- $\emptyset \notin \mathcal{Q}$
- $\forall\ Y, Y' \in \mathcal{Q}$ *si ha* $Y \cap Y' = \emptyset$ *oppure* $Y = Y'$
- $\bigcup_{Y\in\mathcal{Q}} Y = X$.

Un insieme $\mathcal{Q}$ siffatto si dice anche **quoziente** *di X.*

Esempio 1.18.

a. I sottoinsiemi $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è pari}\}$ e $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è dispari}\}$ costituiscono una partizione di $\mathbb{Z}$. Il quoziente $\mathcal{Q} = \{P, D\}$ ha due elementi.

b. I sottoinsiemi $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 3\}$ costituiscono una partizione di $\mathbb{Z}$. Il quoziente $\mathcal{Q} = \{A, B, C\}$ ha tre elementi.

c. Per ogni numero naturale $k \geq 1$ si consideri il sottoinsieme Y_k di $\mathbb{N}$ definito da:

$$Y_k = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{ la notazione posizionale di } x \text{ in base 10 ha } k \text{ cifre }\}.$$

I sottoinsiemi Y_k formano una partizione di $\mathbb{N}$. Il quoziente $\mathcal{Q} = \{Y_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$ ha infiniti elementi.

d. I sottoinsiemi $Y_p = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è multiplo di } p\}$, al variare di p nei numeri primi positivi di $\mathbb{Z}$, non costituiscono una partizione di $\mathbb{Z}$, poichè la loro unione non contiene il numero intero 1 (oppure perché non sono due a due disgiunti).

Solo per curiosità: il Paradosso di Russell. *Secondo la "definizione informale-intuitiva" per cui un insieme è dato semplicemente dai suoi elementi, risulta essere un insieme anche quello i cui elementi sono tutti i possibili insiemi: indichiamo un tale "insieme" con X. Per X vale la strana proprietà: $X \in X$.*

Potremmo allora classificare tutti gli "insiemi" secondo i due tipi:

- *insiemi A tali che $A \notin A$*
- *insiemi A tali che $A \in A$.*

Gli insiemi del primo tipo formano un "sottoinsieme" Y di X. A quale dei due tipi apparterrà Y?

$$Y \in Y \iff Y \text{ è un insieme del primo tipo} \iff Y \notin Y.$$

Da questa contraddizione non c'è via d'uscita, se non quella di definire con grande attenzione il concetto di insieme, in modo da evitare che "cose" come X e Y siano degli insiemi.

§ 1.6 Prodotto cartesiano

Definizione 1.19. *Siano A, B insiemi. Si dice* **prodotto cartesiano** *di A e B e si denota $A \times B$ l'insieme i cui elementi sono le* **coppie ordinate** *(a, b) dove a varia tra tutti gli elementi di A e b tra quelli di B:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Analogamente il prodotto cartesiano di $A_1, \dots, A_n$ è l'insieme delle $n-$uple di elementi presi ordinatamente uno in ciascun insieme:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \ \mid \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, allora anche $A \times B \neq \emptyset$. Infatti esiste almeno un elemento $a_0 \in A$ e almeno un elemento $b_0 \in B$ e quindi il prodotto cartesiano contiene almeno l'elemento (a_0, b_0). Lo stesso vale per il prodotto cartesiano di n insiemi non vuoti.

Definizione 1.20. *Ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ si dice anche* **corrispondenza** *tra A e B. Se $D \subseteq A \times B$ e $(a, b) \in D$, diremo anche che gli elementi $a \in A$ e $b \in B$ sono in corrispondenza. Spesso le corrispondenze, come i sottoinsiemi in genere, vengono definite mediante una proprietà caratteristica. Se $A = B$ le corrispondenze in $A \times A$ si chiamano* **relazioni** *in A.*

Esempio 1.21.

a. Il sottoinsieme $D = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ è una corrispondenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ed è una relazione in $\mathbb{Z}$). Due numeri interi n, m sono in corrispondenza se e soltanto se sono entrambi pari.

b. L'insieme delle coppie di numeri naturali (n, m) senza fattori in comune è una corrispondenza in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

c. L'insieme $\{(3,2),(3,1),(4,1),(4,4)\}$ è una corrispondenza in $\{1,2,3,4\} \times \mathbb{N}$.

§ 1.7 Esercizi

Nei seguenti problemi A, B, C, ... denotano sottoinsiemi arbitrari di un insieme X fissato.

1.1 Determinare $\#A$ nei seguenti casi:

a. $A = \{-1, 0, 3\} \cup \{-3, 3\}$

b. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$

c. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\}$

d. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$

e. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$

f. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$.

1.2 Sia D un insieme con 3 elementi e F un insieme con 2 elementi. Quanti elementi ha $D \cap F$? Quanti elementi ha $D \cup F$? Per ogni caso possibile scrivere un esempio esplicito. **1.3** Sia C l'insieme

dei numeri naturali dispari, D l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 ed E l'insieme dei numeri naturali maggiori di 0. Scrivere in simboli i tre insiemi e stabilire se le seguenti affermazioni sono giuste o sbagliate (nel secondo caso esibire un controesempio):

a. $C \subset E$

b. $D = E$

c. $C \cup D = E$

d. $D - C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 6\ \}$.

e. $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ non è multiplo di } 6\ \}$.

f. $D - E = \emptyset$.

1.4 Siano $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\}$, $B = \{1, -1, 2\}$ e $C = \{1, \{2, 3\}\}$.

a. Determinare l'insieme delle parti di B e l'insieme delle parti di C.

b. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

$$\begin{array}{cccccc} \{1\} \not\subseteq A & 1 \in C & \{1\} \in A & 2 \in C & 1 \subseteq A & 3 \in C \\ 1 \in A & \{1\} \in C & A \subseteq B & \{2,3\} \in C & B \subseteq A & \{2\} \in C \end{array}$$

1.5 Siano $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{26} + x^{16} - 2 = 0\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

a. Volendo calcolare $A \cap B$ possiamo scegliere tra le due definizioni equivalenti:

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} \quad e \quad A \cap B = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Quale delle due è più semplice? Dare una motivazione e quindi calcolare $A \cap B$.

b. Determinare la lista degli elementi di $B - A$.

c. Scrivere $A \cup B$ come unione di due insiemi disgiunti.

1.6 Indichiamo con S e con T gli insiemi delle soluzioni reali delle equazioni $x^2 - 4x + 6 = 0$ e $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

a. Determinare esplicitamente gli elementi dei due insiemi.

b. Esprimere mediante S e T ed elencare esplicitamente gli elementi dell'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $(x^2 - 4x + 6)(3x^2 - 4x - 4) = 0$.

c. Esprimere mediante S e T ed elencare esplicitamente gli elementi dell'insieme delle soluzioni reali del sistema di equazioni $\begin{cases} x^2 - 4x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases}$.

1.7 Indichiamo con S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Quale è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(x - 4) \cdot f(x) = 0$?

1.8 Siano $X = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 10\}$. Calcolare: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $\mathcal{C}_X(A)$, $\mathcal{C}_X(B)$.

1.9 Sia $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$. Verificare che gli insiemi $H \cap 2\mathbb{Z}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0\}$ e $\{-5,\ 5\}$ costituiscono una partizione di H.

1.10 Siano $X = \mathbb{R}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ e $Z = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \leq x < 21\}$. Determinare $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y \cup Z)$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y)$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Z)$ e verificare che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y \cup Z) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Z)$.

1.11 Dimostrare le uguaglianze $A \cap \mathcal{C}_X(B) = A - B$ e $A \cup \mathcal{C}_X(B) = \mathcal{C}_X(B - A)$.

1.12 Provare che le seguenti affermazioni sono false esibendo dei controesempi espliciti:

i) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$;

ii) $(B \cup A) \cap C = B \cup (A \cap C)$;

iii) $A - \mathcal{C}_X(B) = \mathcal{C}_X(\mathcal{C}_X(A) - B)$.

1.13 Siano $A = \{1, 2, \sqrt{3}, -2, 0, \{2\}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$. Determinare $A \cap B$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(B)$, $A \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(B)$, $A - B$. Quali sono i sottoinsiemi di A che sono anche sottoinsiemi di B?

1.14 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq n + 1\}$. Calcolare $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1.15 Siano $X = \mathbb{Z}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$, $D = \{x \in Z \mid x \text{ e pari}\}$ e $E = C - D$. Determinare

a. $\#(X - D)$

b. $\#(C - D)$

c. $\#(C \cap D)$.

d. $\#(C - \mathcal{C}_X(D))$

e. $\#(C \cap \mathcal{C}_X(D))$

1.16 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 2n\}$. Calcolare $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1.17 Dimostrare la seguente affermazione: $A \cap B = \emptyset$ se e solo se $\mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B) = X$.

1.18 Trovare esplicitamente dei sottoinsiemi A, B, C di $\mathbb{N}$ tali che $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

1.19 Siano D e P i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ conteneti rispettivamente i numeri dispari e i numeri pari. Dimostrare che $\{D, P\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$.

1.20 Per ogni $r \in \{0, 1, 2\}$ si definisca A_r come il sottoinsieme dei numeri naturali la cui divisione per 3 dà resto r. Dimostrare che la famiglia $\{A_0, A_1, A_2\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$.

1.21 Sia X l'insieme di tutti i numeri naturali multipli di 3. Scrivere una partizione di X costituita da 2 sottoinsiemi. Scrivere una partizione di X costituita da infiniti sottoinsiemi.

1.22 Siano $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$. Scrivere esplicitamente $A \times B$, $A \times A$, $(A \times A) \cap (A \times B)$, $A \times (A \cap B)$, $(A \times A) \cup (A \times B)$, $A \times (A \cup B)$, $\mathcal{P}(B \times B)$ e $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B)$.