Tutorato Logica 09/12 - Funzioni e Cardinalita'

Definizione
Una relazione di $f \subseteq A \times B$ si dice funzione da A in B se

1. per ogni $a \in A$ c'e' un $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$
2. se $(a, b_1) \in f$ e $(a, b_2) \in f$ allora $b_1 = b_2$

$f : A \to B$ e' l'unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ si indica f(a)
Esempi $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{0, 1, 4, 9\}$
$f_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 5)\}$ si', e' una funzione
$f_2 = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (3, 0)\}$ $(1, ?)$ NO
$f_3 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
Definizione
Dato una funzione $f : A \to B$ si dice:
iniettiva se da $a_1 \neq a_2$ segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$
se da $f(a_1) = f(a_{2)}$ segue che $a_1 = a_2$
suriettiva se ogni $b \in B$ e' della forma $f(a)$ per qualche $a \in A$
biettivia = (in + sur)
Esercizio: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che
$x \longmapsto \frac{1}{x}$
iniettivita': siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ con $f(x_1) = f(x_2)$
$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$ essendo
$x_1, x_2 > 0$ $x_1 = x_2$
suriettiva: sia $y \in \mathbb{R}^+$, bisogna dimostrare che esiste
$x \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(x) = y$ pari a $x = \frac{1}{y}$ allora $f(x) = f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$
Definizione
Dati due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalita' se esiste una funzione $f : X \to Y$ biettiva
$X \approx Y$ oppure $|X| = |Y|$
def. un insieme e' finito se e solo se e' in biezione con $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ per qualche $n \in N$
$|X| = n$
un insieme che non e' finito e' infinito
Def (ordine tra cardinalita')

X si inietta in Y se esiste una funzione iniettiva $f : X \to Y$

$X \leq Y$ $|X| \leq |Y|$

Teorema C - S - B

se $X \leq Y$ e $Y \leq X$ allora $X \approx Y$

Corollario: se $X \leq Y$ e $Y \leq X$ allora $X \approx Y$

Sia X un insieme finito con m elementi e Y un insieme finito con n elementi

se $m > n$ allora per ogni $f : X \to Y$ esistono $x, x' \in X$ distinti tali che $f(x) = f(x')$

Corollario: un insieme X e' infinito se e solo se esiste $Y \subset X$ tale che $X \approx Y$

Esercizio

Dimostrare che l'insieme di tutte le rette nel piano cartesiano e' in biezione con $\mathbb{R}$

Svolgimento: $\mathbb{R}_\pi$ l'insieme di tutte le rette del piano cartesiano

$\mathbb{R}_\pi \approx \mathbb{R} \Leftrightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\pi$ iniettiva e $g : \mathbb{R}_\pi \to \mathbb{R}$ per C-S-B

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\pi$

$\overline{x} \in \mathbb{R} \mapsto$ "$x = \overline{x}$" $\in \mathbb{R}_\pi$

se $x_1 \neq x_2$ segue

$\overbrace{r_1 : x = x_1}^{f(x_1)} \neq \overbrace{r_2 : x = x_2}^{f(x_2)}$

$g : \mathbb{R}_\pi \to \mathbb{R}$

Ogni retta nel piano cartesiano puo' essere univocamente scritta come $y = mx + q$

$g^{'} : \mathbb{R}_\pi \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$r : y = mx + q \mapsto (m, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

se $(m, q) = (m', q') \Leftrightarrow m = m'$ e $q = q'$

$r_1 = y = mx + q \neq r_2 = y = m'x + q' \xrightarrow{g'} (m, q) \neq (m', q')$

So che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathbb{R}$

$X \neq \emptyset$. Con $X^{<\mathbb{N}}$ indichiamo l'insieme delle sequenze finite.

$$s = (x_0, \ldots, x_{n-1})$$

di elementi di X

$X^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ $X^0 = \{\epsilon\}$

$X^{<\mathbb{N}} = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}$ e $x_i \in X \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$

Esercizio: Dimostrare che l'insieme delle sequenze binarie finite e' numerabile

$\{0,1\}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$ $f \colon \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ $g \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$

$f \colon (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \in \mathbb{N}$

$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (b_0, \ldots, b_{n-1})$

$f(a_0, \ldots, a_{n-1}) \overset{?}{\neq} f(b_0, \ldots, b_{n-1}) \Rightarrow a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_0 \overset{?}{\neq} b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + b_0$

$s_1 = (0,0)$ $s_2 = (0,0,0)$

$f(s_1) = 0$ $f(s_2) = 0$

$f\colon (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (a_{n-1}+1)2^{(n-1)+1} + (a_{n-2}+2)^{(n-2)+1} + \ldots + (a_1 + 1)2^{1+1} + (a_0+1)2^1$

$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (b_0, \ldots, b_{m-1}) \Rightarrow f(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq f(b_0, \ldots, b_{m-1})$

$s_1 = (0,0)$ $s_2 = (0,0,0)$

$f(s_1) = (0+1)2^2 + (0+1)2 = 6$

$f(s_2) = (0+1)2^3 + (0+1)2^2 + (0+1)2 = 14$

Ok, il controesempio e' risolto, ma f e' iniettiva. Capire autonomamente e nel caso risolvere

$g\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$

$n \in \mathbb{N} \mapsto$ numero binario associato a n

$61 \div 2 =$	1
$30 \div 2 =$	0
$15 \div 2 =$	1
$7 \div 2 =$	1
$3 \div 2 =$	1
$1 \div$	1

$1011111 = 61$

Esercizio: Sia $Fin = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ e' finiti$\}$ e $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

$$|Fin| = |\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}|$$

$X^{<\mathbb{N}} \leftarrow \mathbb{N}$

Soluzione 1: $f\colon Fin \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ iniettiva e poi ricordo che $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$

$$g\colon \mathbb{N} \to Fin$$

$f\colon Fin \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

$\chi \subseteq_{fin} \mathbb{N} \longmapsto (\chi_0, \ldots, \chi_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

$(\chi_0, \ldots, \chi_n) = X$

$f(X_1) = f(X_2)$

$(\chi_0, \ldots, \chi_n) = (\chi'_0, \ldots, \chi'_n)$

$\chi_0 = \chi'_0$

$\chi_1 = \chi'_1$

$\vdots$

$\chi_n = \chi'_n$

$X_1 = X_2$

$g\colon \mathbb{N} \to Fin$

$n \in \mathbb{N} \mapsto \{n\} \in Fin$

$g(n_1) = g(n_2)$

$\{n_1\} = \{n_2\}$

$n_1 = n_2$

Da svolgere autonomamente

Esercizio 1

Sia $J = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, ovvero l'intervallo aperto dei reali compresi tra 0 e 1, esclusi, e sia $S = \{(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, ovvero il quadrato aperto del piano cartesiano compreso tra gli assi e le rette $x = 1$ e $y = 1$. Provare che J e S hanno la stessa cardinalita'.