Tutorato Logica

riccardo.treglia@unito.it

17 Novembre 2020

(Relazione n-aria)

Sia $n \geq 1$ Una relazione n-aria e' un sottoinsieme di un prodotto cartesiano della forma $A_0 \times A_1 \cdots \times A_{n-1}$

- Se $A_i = A$ per ogni $i = \{0, \cdots, n-1\}$ allora parleremo di relazione n-arie su A
- Se $n = 1$ parleremo di relazione unaria o predicato
- Se $n = 2$ parleremo di relazione binaria
- Se $n = 3$ parleremo di relazione ternaria

$R \subseteq A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$
$n = 2$ $R \subseteq A \times B$
$(a, b) \in R \leftrightarrow aRb$
$a \in A, b \in B$
Proprieta' per una relazione
$R \subseteq A^2 = A \times A$
Riflessia se aRa per ogni $a \in A$
Simmetrica se da aRb segue bRa $a, b \in A$
Antisimmetrica se da aRb e bRa segue $a = b$ $a, b \in A$
Transitiva se da aRb e bRc segue che aRc $a, b, c \in A$

$$R + S + T \stackrel{def}{=} \text{relazione d'equivalenza}$$

Esercizio 1 $R \subseteq A^2$

$(a, b) \in R$ con $a, b \in A$

$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

se R e' simmetrico

$$R \equiv R^{-1}$$

R per ogni punto $P \in A$ P R P

$(P, P) \in R \Leftrightarrow \cancel{d(P, P) = 1}$ falso $d(P, P) = 0$

S se PRQ allora QRP

$d(P,Q) = 1 \overset{?}{\Rightarrow} d(Q,P) = 1$ vero

A se PRQ e QRP allora $P = Q$

$d(P,Q) = 1$ $d(Q,P) = 1 \overset{?}{\Rightarrow} P = Q$

T se PRQ e QRS allora PRS

$d(P,Q) = 1$ $d(Q,S) = 1 \overset{?}{\Rightarrow} d(P,S) = 1$

Esercizio 2 Relazione di equivalenza $\overset{def}{=}$ Riflessiva, Simmetrica, Transitiva

$(a,b),(b,c) \in E_5 \Rightarrow (a,c) \in E_5$

$E_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$[0]_{E_2} = [1]_{E_2}$ $[2]_{E_2}$

$[3]_{E_2}$ $[4]_{E_2}$

Definizione Classi di equivalenza

Sia E una relazione d'equivalenza su A, $E \subseteq A \times A$.

La classe di equivalenza di un elemento $a \in A$ rispetto ad E e'

$$[a]_E \overset{def}{=} \{x \in A \mid xEa\}$$

$E_5 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(0,2),(2,0),(3,3),(4,4)\}$

$[a]_{E_5} = \{x \in A \mid xE_5a\}$

$[0]_{E_5} = \{0,1,2\}$

$[3]_{E_5} = \{3\}$

$[4]_{E_5} = \{4\}$

Esercizio 4 $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

R per ogni elemento $a \in \mathbb{Z}$ e' vero che aRa, ovvero a + a e' pari?

S presi due elementi $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $(a,b) \in R$, ovvero a + b e' pari

$(b,a) \overset{?}{\in} R$ ovvero b + a e' pari

T presi tre elementi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tali che

$(a,b) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (a,c) \in R$ ovvero a + b e' pari

$(b,c) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (a,c) \in R$ ovvero b + c e' pari

Transitivita'

a + b e' pari e b + c e' pari allora a + c e' pari

2 casi

a,b sono entrambi pari

$\Rightarrow$ anche c deve essere pari perche' $(b, c) \in R$

$\Rightarrow (a, c) \in R$

a,b sono dispari

$\Rightarrow$ poiche' $(b, c) \in R$ anche c deve essere dispari

$\Rightarrow (a, c) \in R$

$[0]_R = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 0\text{e' pari}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ pari}\} = \mathbb{P} = 2\mathbb{Z}$

$[1]_R = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 1\text{e' pari}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ dispari}\} = \mathbb{D} = 2\mathbb{Z} + 1$

$R \subseteq A \times A$ transitivo

$S \subseteq A \times A$ transitivo

$R \circ S \overset{def}{=} \{(a, c) \in A^2 \mid \exists b : (a, b) \in Re(b, c) \in S\}$

$R, S \subseteq A^2$ sono transitive

$R \circ S = \{(a, c) \in A^2 \mid \exists b \in A(a, b) \in Re(b, c) \in S\}$

prova la transitivita'

Supposto che $\underbrace{(a, b)}_{1}, \underbrace{(b, c)}_{2} \in R \circ S$ voglio provare che $(a, c) \in R \circ S$

1 Se $(a, b) \in R \circ S$ significa che esiste $b_1 \in A : (a, b_1) \in Re(b_1', b) \in S$

2 Se $(b, c) \in R \circ S$ significa che esiste $c_1 \in A : (b, c_1) \in Re(c_1, c) \in S$

$A = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$

$S = \{(1, 0), (2, 1), (2, 2), (0, 2)\}$

$R \circ S = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 2)\}$