Esercizi sulla logica proposizionale

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Riepilogo: tavole di verità dei connettivi logici

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Calcolare tavole di verità

Esercizio

Calcolare la tavola di verità di

$$\neg B \to (A \wedge B).$$

A	B	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg B \to (A \wedge B)$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

Calcolare tavole di verità

Esercizio

Calcolare la tavola di verità di P, dove P è la proposizione

$$(C \vee (A \to B)) \leftrightarrow (C \wedge \neg A).$$

A	B	C	$A \to B$	$C \vee (A \to B)$	$\neg A$	$C \wedge \neg A$	P
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

Riepilogo: tautologie, contraddizioni e soddisfacibilità

Tautologie

P è una tautologia se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P ha solo V.

Contraddizioni

P è una contraddizione (o è insoddisfacibile) se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P ha solo F.

Soddisfacibilità

P è soddisfacibile se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P contiene almeno un V.

Osservazione

P *è soddisfacibile* se e solo se P *non è una contraddizione*.
P *è una tautologia* se e solo se $\neg P$ *è una contraddizione*.

Stabilire se P è tautologia/soddisfacibile/contraddizione

Esercizio

Stabilire se P è soddisfacibile/tautologia/contraddizione, dove P è la proposizione

$$(A \vee \neg C) \wedge ((A \wedge B) \to C).$$

P è della forma $Q \wedge R$, dove

$$\begin{aligned} Q: &\qquad A \vee \neg C \\ R: &\qquad (A \wedge B) \to C. \end{aligned}$$

P è tautologia/soddisfacibile/contraddizione?

A	B	C	$\neg C$	$\overbrace{A \vee \neg C}^{Q}$	$A \wedge B$	$\overbrace{(A \wedge B) \to C}^{R}$	$\overbrace{Q \wedge R}^{P}$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	V	V

Le risposte sono:

P è soddisfacibile, dato che vi è almeno un V nella sua colonna della tavola di verità, non è tautologia, dato che vi è almeno un F nella sua colonna della tavola di verità, non è una contraddizione, dato che è soddisfacibile.

Riepilogo: conseguenza logica

La proposizione Q è conseguenza logica delle proposizioni $P_1, \ldots, P_n$, in simboli

$$P_1, \ldots, P_n \models Q,$$

se e solo se nella tavola di verità costruita a partire da *tutte* le variabili proposizionali $A, B, C, \ldots$ che compaiono in almeno una tra $P_1, \ldots, P_n, Q$ accade che

> *in ogni riga in cui ciascuna delle formule $P_1, \ldots, P_n$ ha valore V, anche Q ha valore V.*

Stabilire se vale la relazione $P_1, \ldots, P_n \models Q$

Esercizio

Stabilire se $P, Q \models R$, dove

- P è la proposizione $A \leftrightarrow B$,
- Q è la proposizione $\neg B \vee C$,
- R è la proposizione $A \to C$.

$P, Q \models R$?

$P: \quad A \leftrightarrow B \qquad Q: \quad \neg B \vee C \qquad R: \quad A \rightarrow C$

A	B	C	$\overbrace{A \leftrightarrow B}^{P}$	$\overbrace{\neg B \vee C}^{Q}$	$\overbrace{A \rightarrow C}^{R}$	
V	V	V	V	V	V	✓
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	F	V	F	
F	V	V	F	V	V	
F	V	F	F	F	V	
F	F	V	V	V	V	✓
F	F	F	V	V	V	✓

La risposta è SÌ perché in ogni riga in cui P, Q sono vere lo è anche R.

Stabilire se vale la relazione $P_1, \ldots, P_n \models Q$

Esercizio

Stabilire se $P, Q \models R$, dove

- P è la proposizione $C \to A$,
- Q è la proposizione $\neg B$,
- R è la proposizione $A \vee B$.

$P, Q \models R$?

$P: \quad C \to A$ $\qquad Q: \quad \neg B$ $\qquad R: \quad A \vee B$

A	B	C	$\overbrace{C \to A}^{P}$	$\overbrace{\neg B}^{Q}$	$\overbrace{A \vee B}^{R}$	
V	V	V	V	F	V	
V	V	F	V	F	V	
V	F	V	V	V	V	✓
V	F	F	V	V	V	✓
F	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F	V	
F	F	V	F	V	F	
F	F	F	V	V	F	!

La risposta è NO perché vi è almeno una riga, in questo caso l'ultima, in cui P, Q sono vere mentre R è falso.

Riepilogo: equivalenza logica

La proposizione P è logicamente equivalente alla proposizione Q, in simboli

$$P \equiv Q,$$

se e solo se nella tavola di verità costruita a partire da *tutte* le variabili proposizionali $A, B, C, \ldots$ che compaiono in almeno una tra P e Q accade che

> *le colonne di P e Q hanno esattamente gli stessi valori di verità in ogni riga.*

Stabilire se vale $P \equiv Q$

Verificare se

$$\underbrace{A \to B}_{P} \equiv \underbrace{\neg(A \wedge \neg B)}_{Q}.$$

A	B	$\overbrace{A \to B}^{P}$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\overbrace{\neg(A \wedge \neg B)}^{Q}$	
V	V	V	F	F	V	✓
V	F	F	V	V	F	✓
F	V	V	F	F	V	✓
F	F	V	V	F	V	✓

$P \equiv Q$ è verificato perché P, Q hanno gli stessi valori di verità in ogni riga.

Stabilire se

$$\underbrace{(A \leftrightarrow B) \vee C}_{P} \equiv \underbrace{C \rightarrow (A \leftrightarrow B)}_{Q}.$$

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$\overbrace{(A \leftrightarrow B) \vee C}^{P}$	$\overbrace{C \rightarrow (A \leftrightarrow B)}^{Q}$	
V	V	V	V	V	V	✓
V	V	F	V	V	V	✓
V	F	V	F	V	F	!
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	F	V	F	
F	V	F	F	F	V	
F	F	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	V	

$P \equiv Q$ non è verificato perché P, Q non hanno gli stessi valori di verità in almeno una riga (ad esempio la terza).