Esercizi sulla logica proposizionale

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Riepilogo: tavole di verità dei connettivi logici

P	$\neg P$
V	**F**
F	**V**

P	Q	$P \wedge Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

P	Q	$P \vee Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Calcolare tavole di verità

Esercizio

Calcolare la tavola di verità di

$$A \wedge (B \to \neg A).$$

A	B	$\neg A$	$B \to \neg A$	$A \wedge (B \to \neg A)$
V	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**

Calcolare tavole di verità

Esercizio

Calcolare la tavola di verità di P, dove P è la proposizione

$$(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge ((\mathrm{C} \leftrightarrow \neg\mathrm{A}) \vee \mathrm{B}).$$

A	B	C	$\mathrm{A} \to \mathrm{B}$	$\neg\mathrm{A}$	$\mathrm{C} \leftrightarrow \neg\mathrm{A}$	$(\mathrm{C} \leftrightarrow \neg\mathrm{A}) \vee \mathrm{B}$	P
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**

Riepilogo: tautologie, contraddizioni e soddisfacibilità

Tautologie

P è una **tautologia** se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P ha solo $\mathbf{V}$.

Contraddizioni

P è una **contraddizione** (o è **insoddisfacibile**) se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P ha solo $\mathbf{F}$.

Soddisfacibilità

P è **soddisfacibile** se e solo se nella sua tavola di verità la colonna di P contiene almeno un $\mathbf{V}$.

Osservazione

P *è soddisfacibile* se e solo se P *non è una contraddizione*.
P *è una tautologia* se e solo se $\neg\mathrm{P}$ *è una contraddizione*.

Stabilire se P è tautologia/soddisfacibile/contraddizione

Esercizio

Stabilire se P è soddisfacibile/tautologia/contraddizione, dove P è la proposizione

$$((\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \land \neg \mathrm{B}) \to (\mathrm{A} \lor \mathrm{B}).$$

P è della forma $\mathrm{Q} \to \mathrm{R}$, dove

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} : &\qquad (\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \land \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{R} : &\qquad \mathrm{A} \lor \mathrm{B}. \end{aligned}$$

P è tautologia/soddisfacibile/contraddizione?

A	B	C	$C \to A$	$\neg B$	$\overbrace{(C \to A) \land \neg B}^{Q}$	$\overbrace{A \lor B}^{R}$	$\overbrace{Q \to R}^{P}$	
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	✓ !
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	!

Le risposte sono:

P è soddisfacibile, dato che vi è almeno un **V** nella sua colonna della tavola di verità.
P non è tautologia, dato che vi è almeno un **F** nella sua colonna della tavola di verità.

Riepilogo: conseguenza logica

La proposizione Q è **conseguenza logica** delle proposizioni $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$, in simboli

$$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q},$$

se e solo se nella tavola di verità costruita a partire da *tutte* le variabili proposizionali $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ che compaiono in almeno una tra $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}$ accade che

> *in ogni riga in cui ciascuna delle formule $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ ha valore V, anche Q ha valore V.*

Esercizio

Stabilire se $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$, dove

- P è la proposizione $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$,
- Q è la proposizione $\neg\mathrm{B} \to \mathrm{C}$,
- R è la proposizione $\mathrm{A} \vee \mathrm{C}$.

$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$?

$\mathrm{P}: \quad \mathrm{B} \to \mathrm{A} \qquad \mathrm{Q}: \quad \neg\mathrm{B} \to \mathrm{C} \qquad \mathrm{R}: \quad \mathrm{A} \vee \mathrm{C}$

A	B	C	$\overbrace{\mathrm{B} \to \mathrm{A}}^{\mathrm{P}}$	$\overbrace{\neg\mathrm{B} \to \mathrm{C}}^{\mathrm{Q}}$	$\overbrace{\mathrm{A} \vee \mathrm{C}}^{\mathrm{R}}$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	

La risposta è **SÌ** perché in ogni riga in cui P, Q sono vere lo è anche R.

Stabilire se vale la relazione $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$

Esercizio

Stabilire se $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$, dove

- P è la proposizione $\neg \mathrm{C}$,
- Q è la proposizione $\mathrm{A} \vee \mathrm{C}$,
- R è la proposizione $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$.

$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$?

$\mathrm{P}: \quad \neg \mathrm{C}$ $\qquad$ $\mathrm{Q}: \quad \mathrm{A} \vee \mathrm{C}$ $\qquad$ $\mathrm{R}: \quad \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

A	B	C	$\overbrace{\neg C}^{P}$	$\overbrace{A \vee C}^{Q}$	$\overbrace{A \rightarrow B}^{R}$	
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	!
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	

La risposta è **NO** perché vi è almeno una riga, in questo caso la quarta, in cui P, Q sono vere mentre R è falso.

Riepilogo: equivalenza logica

La proposizione P è **logicamente equivalente** alla proposizione Q, in simboli

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q},$$

se e solo se nella tavola di verità costruita a partire da *tutte* le variabili proposizionali $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ che compaiono in almeno una tra P e Q accade che

> *le colonne di P e Q hanno esattamente gli stessi valori di verità in ogni riga.*

Stabilire se vale $P \equiv Q$

Verificare se

$$\underbrace{A \land B}_{P} \equiv \underbrace{\neg(A \to \neg B)}_{Q}.$$

A	B	$\overbrace{A \land B}^{P}$	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\overbrace{\neg(A \to \neg B)}^{Q}$	
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	✓
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	✓
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	✓
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	✓

$P \equiv Q$ è verificato perché P, Q hanno gli stessi valori di verità in ogni riga.

Stabilire se

$$\underbrace{(A \vee B) \leftrightarrow C}_{P} \equiv \underbrace{(A \vee B) \wedge C}_{Q}.$$

A	B	C	$A \vee B$	$\overbrace{(A \vee B) \leftrightarrow C}^{P}$	$\overbrace{(A \vee B) \wedge C}^{Q}$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	✓
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	✓
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	✓
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	✓
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**!**

$P \equiv Q$ non è verificato perché P, Q non hanno gli stessi valori di verità in almeno una riga (l'ultima).