Esercizi su insiemi

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Insieme delle parti o insieme potenza

Definizione

L'**insieme delle parti** $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A (detto anche **insieme potenza** di A) è l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Descrivere $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ dove $A = \{a\}$ è un singoletto.

Si ha $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$, e quindi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{A\}, \mathcal{P}(A)\}$.

Inserire $\in$ oppure $\subseteq$ al posto dei puntini

$\emptyset \ldots \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \ldots \mathbb{N}$ $\quad$ $5 \ldots \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \ldots \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N} \ldots \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ $\quad$ $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ldots \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k$ per qualche $k\} \ldots \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k$ per qualche $k\}$

Soluzione

$\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad$ $5 \in \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ $\quad$ $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k$ per qualche $k\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k$ per qualche $k\}$

Quale delle seguenti affermazioni sono corrette?

1. $\emptyset \in A$ per ogni insieme A FALSO
2. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ per ogni insieme A VERO
3. $a \in \{\{a\}\}$ FALSO
4. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ FALSO
5. $\{a\} \in \{\{a\}\}$ VERO
6. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ VERO
7. $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ VERO
8. $\{0, 1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ FALSO

Verificare leggi insiemistiche

La logica proposizionale può essere utilizzata in maniera sistematica per verificare identità o inclusioni tra insiemi costruiti utilizzando le operazioni insiemistiche (finitarie) che abbiamo visto.

Dimostriamo che

$$\complement\complement A = A$$

Dobbiamo verificare che, qualunque sia A, valga la formula

$$\forall x \, (x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A).$$

Fissiamo quindi un generico x. Sfruttando la corrispondenza tra operazioni insiemistiche e connettivi logici visti in precedenza, la formula

$$x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A$$

diventa

$$\neg(\neg(x \in \complement\complement A)) \leftrightarrow x \in A.$$

Se ora nella formula

$$\neg(\neg(x \in A)) \leftrightarrow x \in A$$

sostituiamo l'affermazione "$x \in A$" con una corrispondente lettera proposizionale P otteniamo la formula proposizionale

$$\neg(\neg \mathrm{P}) \leftrightarrow \mathrm{P}.$$

In generale, il fatto che P sia vera o meno dipenderà naturalmente dalla scelta di A e x: ma noi vogliamo proprio dimostrare che l'equivalenza è vera in ogni caso (cioè comunque vengano presi A e x), ovvero che la proposizione precedente è una tautologia. Per la legge della doppia negazione questo è vero, quindi comunque siano presi A e x avremo che

$$x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A,$$

da cui $\complement\complement A = A$ per qualunque insieme A, come desiderato.

Dimostriamo che

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in \complement(A \cup B) \leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B.$$

Utilizzando la corrispondenza tra operazioni insiemistiche e connettivi che abbiamo visto, la formula precedente diventa

$$\neg(x \in \complement(A \vee x \in \cup B)) \leftrightarrow (\neg(x \in \complement A) \cap \wedge \neg(x \in \complement B)).$$

Questa è una proposizione della forma

$$\neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$$

dove P e Q sono, rispettivamente, "$x \in A$" e "$x \in B$". Poiché tale proposizione è una tautologia (leggi di De Morgan), l'identità insiemistica è dimostrata.

Naturalmente le identità insiemistiche si possono anche dimostrare in altro modo, ad esempio sfruttando ciò che già si è dimostrato. Ad esempio:

Dimostriamo che

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

utilizzando il fatto che per tutti gli insiemi che per tutti gli insiemi X e Y valgono $\complement\complement X = X$ e $\complement(X \cup Y) = \complement X \cap \complement Y$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\complement(A \cap B) &= \complement(\complement\complement A \cap \complement\complement B) \\
&= \complement\left(\complement\left(\complement A \cup \complement B\right)\right) \\
&= \complement\complement\left(\complement A \cup \complement B\right) \\
&= \complement A \cup \complement B
\end{aligned}$$

□

Dimostrare che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

ovvero

$$(x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)).$$

Questa è una proposizione della forma

$$(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \leftrightarrow ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})),$$

dove P, Q e R sono, rispettivamente, "$x \in A$", "$x \in B$" e "$x \in C$".

Dimostrare che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Calcoliamo la tavola di verità di $(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \leftrightarrow ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}))$.

P	Q	R	$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$	$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})$	$(\dots) \leftrightarrow (\dots)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**

Poiché la proposizione precedente è una tautologia, l'equivalenza

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

è vera per qualunque x, A, B, C. Quindi l'identità insiemistica di partenza è dimostrata.

Dimostrare che $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Poiché $X \setminus Y = X \cap \complement Y$, l'identità può essere riscritta come

$$(A \cup B) \cap \complement(A \cap B) = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A).$$

Quindi dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in (A \cup B) \cap \complement(A \cap B) \leftrightarrow x \in (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$

ovvero

$$((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \leftrightarrow \\ ((x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A))).$$

Questa è una proposizione del tipo

$$((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge \neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) \leftrightarrow ((\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{P})).$$

Usando le tavole di verità si verifica che tale proposizione è una tautologia, quindi l'identità insiemistica proposta è corretta.

Lo stesso metodo può essere utilizzato anche per trovare controesempi quando una certa identità booleana non è valida.

Dimostrare (trovando un controesempio) che **non** vale l'identità

$$A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

Dato un generico x, dobbiamo verificare che non è vero in generale che

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C),$$

ovvero

$$(x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)).$$

Questa è una proposizione del tipo

$$(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \leftrightarrow (\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})),$$

dove P, Q e R sono, rispettivamente, "$x \in A$", "$x \in B$" e "$x \in C$".

La tavola di verità di tale proposizione è

P	Q	R	$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$	$\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$	$(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \leftrightarrow (\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}))$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**

Poiché la proposizione non è una tautologia, l'identità **non** è valida. Ad esempio, l'identità risulta falsa quando ci troviamo nella situazione descritta dalla quarta riga. Dunque un controesempio può essere costruito considerando un A che contenga almeno un elemento x che non compare né in B né in C, ad esempio $A = \{a\}$, $B = C = \emptyset$: in tale situazione, posto $x = a$ si avrà infatti $x \in A \cup (B \cap C)$ ma $x \notin A \cap (B \cup C)$, da cui $A \cap (B \cup C) \neq A \cup (B \cap C)$. In maniera analoga si può ottenere un (diverso) controesempio dalla quinta riga.

Dimostrare che $B \subseteq \complement(A \setminus B)$

Poiché $X \setminus Y = X \cap \complement Y$, l'affermazione può essere riscritta come

$$B \subseteq \complement(A \cap \complement B).$$

Quindi dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in B \to x \in \complement(A \cap \complement B),$$

ovvero

$$x \in B \to \neg(x \in A \wedge \neg(x \in B)).$$

Questa è una proposizione del tipo

$$\mathrm{Q} \to \neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}).$$

Dimostrare che $B \subseteq \complement(A \setminus B)$

Calcoliamo la tavola di verità di $\mathrm{Q} \to \neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$.

P	Q	$\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}$	$\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$	$\mathrm{Q} \to \neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**

Poiché essa risulta una tautologia, l'affermazione

$$x \in B \to x \in \complement(A \cap \complement B)$$

risulta vera qualunque siano x, A, B. Quindi abbiamo effettivamente dimostrato che $B \subseteq \complement(A \setminus B)$.

È vero che $A \cap (B \cup C) \subseteq B$?

Dobbiamo controllare se per ogni x

$$x \in A \cap (B \cup C) \to x \in B,$$

ovvero se per ogni x

$$(x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \to x \in B.$$

Questa è una proposizione del tipo

$$(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \to \mathrm{Q},$$

dove P, Q ed R sono, rispettivamente, "$x \in A$", "$x \in B$" e "$x \in C$".

È vero che $A \cap (B \cup C) \subseteq B$?

Calcoliamo la tavola di verità di $(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \rightarrow \mathrm{Q}$:

P	Q	R	$\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}$	$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$	$(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})) \rightarrow \mathrm{Q}$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**

Poiché quando P ed R sono vere e Q è falsa la proposizione risulta falsa, possiamo costruire un controesempio scegliendo gli insiemi A, B, C in modo che ci sia un qualche elemento x che stia in A e in C ma non in B. Ad esempio, prendendo $A = C = \{a\}$ e $B = \emptyset$ si controlla facilmente che l'inclusione $A \cap (B \cup C) \subseteq B$ non è verificata.

Dimostrare che $\complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$

In questo caso non possiamo ricondurci alla logica proposizionale (a meno che I non sia finito) perché le operazioni $\bigcup_{i\in I}$ e $\bigcap_{i\in I}$ sono operazioni infinitarie (coinvolgono infiniti insiemi) mentre i connettivi sono operatori finitari (unari o binari). Dobbiamo quindi procedere con una dimostrazione *ad hoc*.

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in \complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \complement A_i.$$

In effetti $x \in \complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow \neg\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow \neg(\exists i \in I\,(x \in A_i)) \leftrightarrow \forall i \in I \neg\,(x \in A_i) \leftrightarrow \forall i \in I\,(x \notin A_i) \leftrightarrow \forall i \in I\,\left(x \in \complement A_i\right) \leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \complement A_i$.

Attenzione! La negazione di $\exists i \in I(\dots)$, ovvero $\neg(\exists i \in I(\dots))$, è equivalente a $\forall i \in I \neg(\dots)$. Viceversa, $\neg(\forall i \in I(\dots))$ è equivalente a $\exists i \in I \neg(\dots)$.