

Note del corso di Fisica per MATFIN

M. Billò

a.a. 2011/2012

Indice

1	Concetti introduttivi	2
1.1	Grandezze fisiche	3
1.2	Misure ed errori	11
2	Cinematica del punto materiale	25
2.1	Spazio ambiente e sistemi di coordinate	25
2.2	Vettori	29
2.3	La legge oraria	37
2.3.1	Spostamento e distanza	40
2.3.2	Velocità media	43
2.3.3	Moto rettilineo uniforme	47
2.4	Velocità ed accelerazione	55
2.4.1	Velocità istantanea	55
3	Dinamica	56
3.1	Concetto intuitivo e definizione operativa delle forze	56
3.2	Le leggi fondamentali del moto	59
3.2.1	La prima legge del moto	59
3.2.2	La seconda legge del moto	60
3.2.3	Un'applicazione importante: il moto armonico	61
3.2.4	La terza legge del moto	63
3.3	Alcuni tipi di forze macroscopiche e loro caratteristiche	66
3.3.1	Forze d'attrito	66
3.3.2	Forze di resistenza dipendenti dalla velocità	69
3.4	Origine microscopica delle forze macroscopiche e interazioni elettriche	72
3.4.1	Cariche elettriche e forze coulombiane	72
3.4.2	Il campo elettrico	76
3.4.3	Flusso del campo elettrico	82

Capitolo 1

Concetti introduttivi

Impostazione del corso Le principali motivazioni per lo studio della Fisica di base nel corso di laurea MATFIN sono a mio avviso, le seguenti:

- La Fisica fornisce un paradigma di modellizzazione matematica applicata con successo nell'ambito di una scienza sperimentale. E' sorgente di metodi, analogie, idee essenziali per la modellizzazione matematica in altri ambiti, quali ad esempio quello economico-finanziario cui MATFIN è rivolta. Da questo punto di vista, ciò che conta in questo corso è il metodo più che gli specifici argomenti sviluppati. Tuttavia il metodo viene appreso solo sviluppandolo in concreti contesti fisici; se non si affrontano problemi espliciti, non si acquistano vere competenze utilizzabili poi in altri campi. Riassumendo: questo cercherà di essere un corso di fisica con enfasi (per quanto ne sarò capace) sugli aspetti matematici e metodologici, ed una scelta di argomenti basata in buona parte sulla loro generalità ed "esportabilità", al prezzo di tagliarne alcuni che dal punto di vista della fisica strettamente detta sono molto importanti. Cercherò inoltre di utilizzare talvolta esempi ed esercizi coinvolgenti concetti e quantità al di fuori della Fisica strettamente detta.
- Nel corso di laurea triennale in Matematica vi sono ben due corsi di Fisica. Non averne, qui, creerebbe un debito eccessivo per chi volesse poi proseguire con la LM in Matematica.

La Fisica La Fisica si propone di dare una descrizione quantitativa di certi aspetti di base della natura e del nostro mondo, formulando *leggi*, matematicamente espresse ed il più possibile generali, che premettono di effettuare previsioni. Si basa sul *metodo scientifico* per raggiungere una conoscenza della realtà oggettiva affidabile, verificabile, condivisibile. Nel metodo scientifico

si hanno due aspetti che interagiscono fra di loro: raccolta di evidenze empiriche misurabili attraverso osservazioni ed esperimenti; formulazione di ipotesi e teorie da sottoporre nuovamente a verifica sperimentale. Una sequenza più dettagliata del modo di procedere è la seguente.

- Osservazione di un fenomeno.
- Realizzazione di un esperimento per chiarire e quantificare il fenomeno, ottenendo delle misure ¹.
- Definizione di un modello fisico (cioè una rappresentazione semplificata della situazione che ne coglie gli aspetti essenziali per il fenomeno che si sta studiando).
- Formulazione di un modello matematico, comprendente un insieme di equazioni che legano le varie grandezze fisiche coinvolte nel fenomeno.
- Formalizzazione di una teoria che renda conto di tali equazioni e sia in grado di spiegare altri fenomeni e prevedere quindi il risultato di altri opportuni esperimenti.
- Verifica sperimentale della teoria tramite esperimenti opportunamente concepiti e realizzati ².

1.1 Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche sono i “tipi” di proprietà osservabili e misurabili. Esse sono definite *operativamente* tramite il confronto con una *unità campione* convenzionalmente definita. Tale confronto permette di assegnare un risultato quantitativo (cioè numerico) alla misura delle grandezze. Esistono evidentemente diversi tipi indipendenti di grandezze fisiche: con un campione di lunghezza (ad es un metro a nastro), operativamente non riesco a misurare un intervallo di tempo.

Grandezze fondamentali Si definiscono *grandezze fondamentali* un insieme di grandezze indipendenti sufficienti per poter definire ogni altra grandezza fisica in termini di esse. Per un sistema di grandezze fondamentali

¹Nel processo di misura è necessaria anche un'accurata valutazione degli errori ed una analisi statistica dei risultati, vedi la sez. 1.2.

²Un'affermazione scientifica ha la caratteristica di poter essere falsificabile tramite opportuni esperimenti.

si sceglie in modo convenzionale un insieme di campioni di misura; vi possono essere ovviamente diverse scelte di campioni, più o meno largamente adottate. In Fisica, ed in generale nella Scienza e nella Tecnologia, è quasi universalmente adottato il cosiddetto Sistema Internazionale (S.I.). Le grandezze fondamentali e le relative unità di misura nel S.I. sono riportate in tabella 1.1 Possiamo eventualmente considerare, in ambiti che esulano dalla

grandezza	simbolo	unità	simbolo
lunghezza	L	metro	m
massa	M	chilogrammo	Kg
tempo	t	secondo	s
temperatura assoluta	T	grado Kelvin	K
intensità luminosa	I	candela	cd
intensità di corrente	i	Ampere	A

Tabella 1.1: Le grandezze fondamentali coi loro simboli, le unità di misura corrispondenti e i simboli di quest'ultime nel S.I.

Fisica strettamente detta, anche altre grandezze (definite, magari, in modo meno rigoroso). Ad esempio, il valore monetario, che nel sistema europeo si misura in euro (€) e nel sistema americano in dollari. Sicuramente è una grandezza di tipo diverso dalla massa o dal tempo ³. Potremmo ad esempio indicare tale grandezza come D (per “denaro”).

Grandezze derivate Le *grandezze derivate* sono operativamente definite in termini di grandezze fondamentali. Ad esempio una misura di velocità (media) si ottiene dividendo la misura dello spazio percorso per quella del tempo di percorrenza: velocità = lunghezza/tempo. Similmente, l'accelerazione corrisponde a lunghezza/(tempo)².

Dimensionalità delle grandezze Il “tipo” di una grandezza in riferimento alle grandezze fondamentali è noto come *dimensione*, e viene indicato usando parentesi quadre. Il concetto è facilmente espresso tramite esempi, come nella tabella 1.2. Si può estendere questo concetto anche ad altri campi. Ad esempio, quali sono le “dimensioni” di un incremento annuale di capitale δC ? Tale quantità corrisponde all'aumento totale di capitale (che è un valore monetario, cioè una grandezza fondamentale di tipo D , secondo quanto ipotizzato prima) diviso per il periodo di tempo in cui si è verificato (misurato

³Anche se il detto “il tempo è denaro” non è del tutto irragionevole.

grandezza derivata	dimensione	unità di misura
velocità	$[v] = [L t^{-1}]$	m/s
accelerazione	$[a] = [L t^{-2}]$	m/s ²
superficie	$[S] = [L^2]$	m ²
volume	$[V] = [L^3]$	m ³
densità volumica	$[\rho] = [ML^{-3}]$	Kg/m ³
...

Tabella 1.2: Alcune grandezze derivate.

in anni). Abbiamo dunque

$$[\delta C] = [D t^{-1}] . \quad (1.1)$$

Quali sono invece, le dimensioni di un tasso annuo di interesse α ? Il tasso di interesse corrisponde all'incremento annuo di capitale diviso per il capitale iniziale, quindi

$$[\alpha] = [\delta C / C] = [t^{-1}] . \quad (1.2)$$

Infatti si esprime usualmente come una percentuale (che è un numero puro) "all'anno" (o al mese, etc. ...).

Analisi dimensionale E' un potente strumento di controllo sulla validità delle relazioni che si suppone esistano fra certe grandezze (e delle soluzioni degli esercizi!!) che consiste nel controllare che le dimensioni di termini che vengono uguagliati o sommati siano le stesse, cioè che i termini siano omogenei. Supponiamo ad esempio di trovare una formula che lega lo spazio percorso s all'accelerazione a ed al tempo impegnato t nel seguente modo:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 . \quad (1.3)$$

Possiamo controllare che questa formula è dimensionalmente corretta: per il membro di sinistra, che è una lunghezza, si ha

$$[s] = [L] . \quad (1.4)$$

Per il membro di destra,

$$\left[\frac{1}{2} a t^2 \right] = [a t^2] = [L t^{-2} t^2] = [L] . \quad (1.5)$$

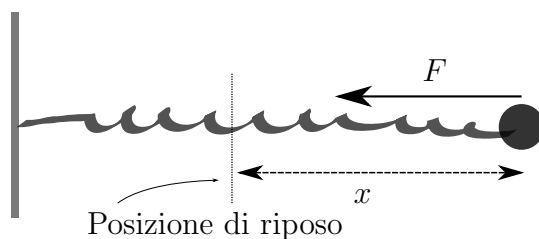


Figura 1.1: Una molla elongata esercita una forza di richiamo.

Nel secondo passaggio teniamo conto che il fattore $1/2$ è adimensionale, quindi è irrilevante in questa analisi dimensionale ⁴; nel secondo inseriamo le dimensioni dell'accelerazione, riportate nella tabella 1.2; nel passaggio finale manipoliamo le dimensioni come grandezze algebriche. Una formula del tipo $s = at$ non sarebbe invece dimensionalmente corretta. Come altro esempio, la 2^a equazione della dinamica (equazione di Newton), che discuteremo più avanti, collega la forza F agente su un punto materiale (modello ideale di certi sistemi fisici) alla massa m ed accelerazione a di tale punto:

$$F = m a . \quad (1.6)$$

Assumendo che tale equazione sia corretta, segue che le dimensioni di una forza sono

$$[F] = [m a] = [M L t^{-2}] . \quad (1.7)$$

L'unità di misura derivata per la forza nel S.I. è dunque il $Kg m s^{-2}$. L'importanza di tale unità di misura fa sì che le sia riservato un nome e un simbolo apposito, il Newton (N).

Costanti dimensionali In certi sistemi fisici compaiono dei parametri caratterizzanti (delle “costanti” del sistema) che possono essere dimensionali. Ad esempio, si trova sperimentalmente che le molle esercitano una forza di richiamo proporzionale all'elongazione cui sono soggette. Con riferimento alle notazioni della figura 1.1, si ha dunque

$$F = k x . \quad (1.8)$$

Dimensionalmente si deve avere (x è una lunghezza)

$$[F] = [k x] = [k] [x] = [k][L]. \quad (1.9)$$

⁴La sua correttezza non può quindi venire controllata tramite essa.

Le dimensioni di una forza sono date dall'eq. (1.7), quindi

$$[MLt^{-2}] = [k][L] \quad (1.10)$$

da cui, operando algebricamente sulle dimensioni, possiamo ricavare $[k]$:

$$[k] = [Mt^{-2}]. \quad (1.11)$$

Dunque k è una costante dimensionale che caratterizza la molla (e varia da molla a molla).

Esercizio Calcolate le dimensioni della “costante di gravitazione universale” G che compare nella formula che descrive la forza di attrazione tra due punti materiali di masse m_1 e m_2 posti a distanza r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.12)$$

Grandezze adimensionali Sono grandezze derivate ottenute come rapporto di grandezze omogenee, e sono rappresentate da numeri puri. La presenza di grandezze adimensionali e coefficienti numerici in un'equazione non può essere controllata tramite l'analisi dimensionale. E' importante notare che solo grandezze adimensionali possono entrare in una formula come argomenti di una funzione che non sia semplicemente un monomio nelle varie grandezze da cui dipende.

Esempio Se τ è un tempo e x una posizione, una legge di moto del tipo

$$x(\tau) = e^\tau \quad (1.13)$$

non è possibile. Il membro di destra non ha una dimensione definita, e pertanto non ha senso. Infatti, se espandiamo ⁵ in serie di Taylor l'esponenziale per τ piccoli, abbiamo

$$e^\tau = 1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \dots \quad (1.16)$$

⁵Anche senza espandere in serie, se consideriamo la derivata dell'esponenziale abbiamo

$$\frac{de^\tau}{d\tau} = e^\tau. \quad (1.14)$$

La derivata rispetto al tempo corrisponde al limite di un rapporto incrementale in cui si ha un intervallo di tempo a denominatore, quindi a livello dimensionale eq. (1.14) implica

$$[e^\tau][t^{-1}] = [e^\tau], \quad (1.15)$$

il che è impossibile.

I termine di questa espansione non sono omogenei: il primo è adimensionale, il secondo ha dimensione $[t]$, il terzo $[t^2]$, \dots . Una possibile legge, dimensionalmente consistente, sarebbe invece la seguente:

$$x(\tau) = x_0 e^{\tau/\tau_0} , \quad (1.17)$$

dove x_0 ha le dimensioni di una lunghezza e corrisponde alla posizione al tempo $\tau = 0$ mentre τ_0 è una scala temporale di riferimento. In tal caso, l'argomento dell'esponenziale (e quindi l'esponenziale tutto) è adimensionale.

Angoli Un esempio molto importante di grandezze adimensionali è rappresentato dagli *angoli*. L'angolo θ tra due direzioni è definito scegliendo una

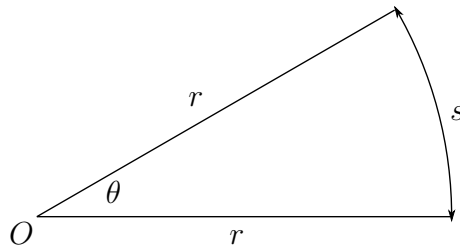


Figura 1.2: La definizione dell'angolo

circonferenza di raggio r qualsiasi, centrata nel punto di intersezione delle due direzioni, come il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza s compreso tra le due direzioni e il raggio stesso, vedi figura 1.2:

$$\theta = \frac{s}{r} . \quad (1.18)$$

Dato che s è proporzionale ad r , questa definizione è indipendente dal raggio scelto. Quando gli angoli sono definiti tramite questa formula, essi sono numeri puri, ma si dice comunemente che sono “misurati in radianti”. E' immediato trovare il valore di alcuni angoli particolari. Ad esempio, per un angolo giro, l'arco di circonferenza corrisponde a tutta la circonferenza, quindi

$$\text{angolo giro} : \theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi . \quad (1.19)$$

Un'angolo piatto è metà di un angolo giro, quindi corrisponde a π . Un angolo retto, che è metà di un angolo piatto, vale $\pi/2$. L'angolo al vertice di un triangolo equilatero, che è un terzo di angolo giro, vale $\pi/3$. Per gli angoli si usa spesso nella vita comune la notazione sessagesimale, in cui un angolo

piatto corrisponde a 180° . Da questo possiamo dedurre la corrispondenza tra gradi sessagesimali e radianti:

$$180^\circ = \pi \quad \Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} . \quad (1.20)$$

Questo fattore di conversione ci permette di riesprimere angoli dati in gradi sessagesimali in radianti (cioè come numeri puri). Ad esempio, un angolo di 108° corrisponde a

$$108^\circ = 108 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{5} . \quad (1.21)$$

Esempio di uso dell'analisi dimensionale Consideriamo un semplice sistema fisico, detto pendolo ideale, che rappresenta la modellizzazione più semplice di un pendolo reale; vedi figura 1.3. In tale modello, qui sulla terra,

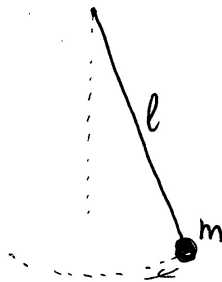


Figura 1.3: Modellizzazione di un pendolo ideale.

un punto materiale di massa m è sospeso senza attriti ad un punto tramite un file rigido di lunghezza l , inestensibile e di massa trascurabile. Il pendolo viene allontanato dalla posizione di equilibrio (la verticale) e lasciato libero di muoversi sotto l'influsso della gravità superficiale terrestre, che come è noto è caratterizzata dall'accelerazione di gravità $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Si verifica che il pendolo oscilla in maniera regolare con un periodo di oscillazione T (il periodo è il tempo necessario al pendolo per compiere un'oscillazione completa, avanti e indietro). Il periodo T può dipendere solo dal valore di m e di l e da g , che sono le uniche grandezze che entrano nel nostro modello. Assumiamo una dipendenza del tipo

$$T = c l^\alpha m^\beta g^\gamma , \quad (1.22)$$

dove c è una costante numerica, ed α, β, γ dei coefficienti che vorremmo determinare. L'analisi dimensionale di questa relazione ci fornisce la seguente relazione:

$$[T] = [l^\alpha m^\beta g^\gamma] = [L^\alpha M^\beta L^\gamma t^{-2\gamma}], \quad (1.23)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo ricordato che l è una lunghezza, m è una massa e g un'accelerazione. Nel membro da sinistra, T è un tempo, quindi otteniamo

$$[t] = [L^{\alpha+\gamma} M^\beta t^{-2\gamma}]. \quad (1.24)$$

Nei due membri, tutte le grandezze fondamentali devono apparire alla stessa potenza; otteniamo pertanto il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0, \\ \beta &= 0, \\ -2\gamma &= 1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

che ha la soluzione $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1/2$. Otteniamo pertanto che la formula che esprime il periodo di oscillazione è

$$T = c \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.26)$$

Il coefficiente adimensionale c non può venir fissato tramite analisi dimensionale; quando studieremo questo modello otterremo che $c = 2\pi$.

Cambiamenti di unità di misura Per effettuare la conversione tra la misura di due grandezze effettuata rispetto ad unità di misura diverse è sufficiente (e sempre possibile: si tratta di grandezze omogenee!) esprimere la “vecchia” unità di misura in termini della “nuova”. Ad esempio, nei paesi anglosassoni spesso si usa come misura di lunghezza l’inch (il “pollice”). Si ha che

$$1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm} = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}. \quad (1.27)$$

Supponiamo di conoscere la misura di un area A in pollici quadri: $A = 4(\text{inch})^2$. Nel S.I. si avrà

$$A = 4(\text{inch})^2 = 4(2.54 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 4 \times (2.54)^2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 2.58 \times 10^{-3} \text{ m}^2. \quad (1.28)$$

Esempio Consideriamo un esempio al di fuori della fisica strettamente detta. Definiamo un (peculiare) indicatore economico I dato dal rapporto tra il prodotto interno lordo (P.I.L.) P e la superficie S di una nazione:

$$I \equiv \frac{P}{S}, \quad (1.29)$$

che (vagamente) rappresenta lo sfruttamento economico del territorio. Vogliamo confrontare tale indice tra U.S.A. e Eurozona, sapendo che i dati rilevanti (riferiti al 2014) sono espressi nella seguente tabella:

	U.S.A.	Eurozona
P	17.4×10^{12} dollari	13.4×10^{12} €
S	3717813 sq. ml	2628410 km ²

In tale tabella, sq. ml sta per “miglia quadre”. L’indicatore I per gli Stati Uniti vale

$$I_{USA} = \frac{17.4 \times 10^{12} \text{dollari}}{3.717 \times 10^6 \text{miglia}^2} = 4.69 \times 10^6 \text{dollari/miglia}^2 . \quad (1.30)$$

Per la zona Euro abbiamo invece

$$I_{Euro} = \frac{13.4 \times 10^{12} \text{€}}{2.628 \times 10^6 \text{Km}^2} = 5.09 \times 10^6 \text{€}/\text{Km}^2 . \quad (1.31)$$

Non possiamo confrontare direttamente i valori numerici dei due indici perché sono espressi in unità differenti. Le regole di conversione dalle unità U.S.A. a quelle europee sono i seguenti (il tasso di scambio è quello medio del 2014):

$$1 \text{ miglio} = 1609 \text{ m} , \quad 1 \text{ dollaro} = 0.746 \text{€} \quad (\text{cambio di fine 2012}) . \quad (1.32)$$

Possiamo quindi riesprimere I_{USA} come segue:

$$I_{USA} = 4.69 \times 10^6 \times \frac{0.746 \text{€}}{(1.609 \text{Km})^2} = 1.35 \times 10^6 \text{€}/\text{Km}^2 . \quad (1.33)$$

Confrontando tale valore con quello di I_{Euro} dato in eq. (1.31) vediamo che questo particolare indice è molto più alto per l’Eurozona (si ha $I_{Euro} = 3.76 I_{USA}$). Ciò è assai ragionevole, dato che vaste zone degli USA sono poco popolate e poco produttive in quanto desertiche o semi-desertiche.

1.2 Misure ed errori

Nell’effettuare la misura di una grandezza fisica si ricercano la *precisione* e l’*accuratezza*.

Precisione La precisione di una misura dipende da quanto essa è ben determinata, indipendentemente da quanto essa si avvicini al valore “vero” della grandezza oggetto di misura. E’ legata in particolare alla scala minima che possiamo leggere sui nostri strumenti di misura.

Accuratezza L’accuratezza di una misura dipende da quanto essa si avvicina al valore vero della grandezza.

Stima dell'errore su una singola misura Effettuando una misura bisogna ovviamente cercare di evitare gli errori veri e propri (errori di lettura, di posizionamento degli apparecchi, etc.), detti *errori sistematici*, per avere una buona accuratezza, ed utilizzare uno strumento con una risoluzione adeguata alla grandezza da misurare e agli scopi della misura stessa. Ad esempio, misurare un segmento l delle dimensioni di quello tracciato qui:

con un metro a nastro che segna solo i centimetri è poco sensato, perchè troppo impreciso. E' adeguato invece un righello riportante i millimetri. Per una misura singola di una grandezza f , il cui risultato sia un certo valore f_m , si deve stimare l'*errore massimo assoluto* Δf che si è potuto commettere. Il risultato della misura va quindi riportato come

$$f = f_m \pm \Delta f . \quad (1.34)$$

Nell'esempio precedente, il possibile errore massimo Δl nella misura del segmento l dovuto alla limitata precisione della scala è $0.5mm$. Tenendo conto che potremmo aver fatto qualche errore nel posizionamento del righello, e per tenerci sul sicuro, potremmo aumentare questo valore e pensare che l'errore massimo assoluto sia $\Delta l = 1mm$. Se per esempio otteniamo la misura $l_m = 4.7cm$, quello che possiamo dire con sicurezza è

$$l = (4.7 \pm 0.1)cm . \quad (1.35)$$

Errore relativo Più significativo dell'errore assoluto Δf è l'errore relativo, definito come il rapporto tra l'errore e il valore della grandezza misurata ⁶:

$$\frac{\Delta f}{|f_m|} . \quad (1.36)$$

L'errore relativo è un numero puro, e viene espresso in percentuale. Nell'esempio precedente, abbiamo

$$\frac{\Delta l}{|l_m|} = \frac{0.1cm}{4.7cm} = 0.02 = 2\% . \quad (1.37)$$

Se l'errore di un millimetro dell'esempio precedente fosse stato per la misura di una lunghezza dell'ordine di chilometri, l'errore relativo sarebbe risultato bassissimo: avremmo fatto un lavoro eccezionale!

⁶A meno di termini di ordine superiore al primo in Δf , questa definizione coincide con $\Delta f/|f|$ dove f è il valore "vero" della nostra misura, che possiamo stimare come $f = f_m \pm \Delta f$.

Cifre significative La presenza di un termine di errore nella misura ci dice che essa può essere conosciuta con sicurezza solo fino ad un certo livello, cioè che il suo valore numerico ha solo un certo numero di *cifre significative*. L'ultima cifra significativa è quella che corrisponde all'ordine di grandezza dell'errore. Nell'esempio appena utilizzato, è corretto scrivere

$$l = 4.7\text{cm} \quad (\text{corretto}) \quad (1.38)$$

con *due* cifre significative: infatti in questo modo si comunica che l'ultima cifra significativa è quella che corrisponde ai *mm*, e quindi che l'ordine di grandezza dell'errore è di *1mm*, che è in effetti l'errore massimo assoluto stimato. Il numero di cifre significative di una misura è collegato all'errore relativo su di essa. Se si hanno n cifre significative, questo indica che l'errore relativo è dell'ordine di grandezza di 10^{-n} . Nell'esempio precedente, l'errore relativo è 2×10^{-2} , cioè è dell'ordine di 10^{-2} , e la misura ha dunque due cifre significative. Se scrivessimo

$$l = 4.70\text{cm} \quad (\text{scorretto}) \quad (1.39)$$

con *tre* cifre significative, questo comunicherebbe un ordine di grandezza dell'errore corrispondente a quello dell'ultima cifra significativa, cioè $0.01\text{cm} = 0.1\text{mm}$, il che non corrisponde al vero. Notiamo inoltre che avremmo potuto correttamente scrivere la nostra misura come

$$l = 0.047\text{m} \quad (\text{corretto}) . \quad (1.40)$$

Le cifre significative di tale scrittura rimarrebbero *due*: gli zeri iniziali non contano perché ci troviamo a doverli inserire semplicemente a causa dell'unità di misura scelta, grande rispetto al risultato. Se invece volessimo esprimere il risultato in termini di un'unità di misura piccola, quale il micron $\mu = 10^{-6}\text{m}$, ci troveremmo di fronte ad una ambiguità. Infatti, effettuando l'equivalenza a partire da $l = 0.047\text{m}$ troveremmo apparentemente

$$l = 47000\mu \quad (\text{scorretto}) . \quad (1.41)$$

Tale scrittura, però, avrebbe *cinque* cifre significative, e sembrerebbe implicare che noi conosciamo il risultato con un'incertezza dell'ordine del valore dell'ultima cifra, cioè del micron. Infatti, se noi avessimo davvero effettuato la misura tramite qualche sofisticato strumento di misura in modo da avere davvero un errore massimo stimato di 1μ , la scriveremmo esattamente nello stesso modo. Per risolvere l'ambiguità, il modo corretto di scrivere la nostra misura è tramite la notazione esponenziale:

$$l = 4.7 \times 10^4\mu \quad (\text{corretto}) . \quad (1.42)$$

Le cifre significative in tal modo rimangono due, e si evidenzia che l'errore è dell'ordine dei $10^4\mu$, cioè del *mm*.

Propagazione dell'errore Supponiamo di voler valutare una grandezza tramite la sua espressione in funzione di altre grandezze delle quali si effettua una misura diretta. Come semplice esempio, consideriamo la misura dell'area A di una piastra rettangolare, vedi figura 1.4. Supponiamo di ottenerne, dalla

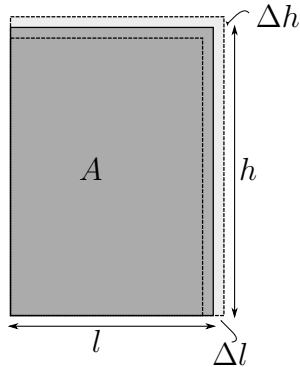


Figura 1.4: La grandezza da misurare è l'area A di una piastra rettangolare.

misura diretta dei suoi lati,

$$l = (4.5 \pm 0.1)cm , \quad h = (16.3 \pm 0.1)cm . \quad (1.43)$$

Per l'area abbiamo

$$A = lh = (4.5 \pm 0.1) \times (16.3 \pm 0.1)cm^2 . \quad (1.44)$$

A causa dei possibili errori sui lati, possiamo solo dire che il valore dell'area sarà presumibilmente compreso tra il valore minimo

$$4.4 \times 16.2cm^2 = 71.28cm^2 \quad (1.45)$$

ed il valore massimo

$$4.6 \times 16.4cm^2 = 75.44cm^2 . \quad (1.46)$$

Il valore centrale è $(75.44 + 71.28)/2cm^2 = 73.36cm^2$; la semi-distanza tra i valori estremi è $2.08cm^2$. Possiamo quindi concludere che

$$A = (73.36 \pm 2.08)cm^2 . \quad (1.47)$$

Notiamo che l'errore è dell'ordine del centimetro, e le cifre significative del risultato sono dunque solo due, tante quante quelle del fattore con meno cifre significative, l . In conclusione, dunque, il nostro risultato va scritto come

$$A = (73 \pm 2)cm^2 . \quad (1.48)$$

In generale, consideriamo una grandezza

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.49)$$

che dipende dalle variabili $x_i, i = 1, \dots, N$. La misura diretta di queste ultime fornisce i risultati ⁷ $x_i \pm \Delta x_i$. Supponendo gli errori Δx_i piccoli rispetto ai valori x_i e sviluppando al prim'ordine si ha per l'errore su f la seguente espressione:

$$\Delta f = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i . \quad (1.50)$$

Alcune osservazioni su questa formula:

- il simbolo $\partial f / \partial x$ denota la "derivata parziale" di una funzione f di molti argomenti: $f = f(x, y, \dots)$ fatta rispetto ad uno dei suoi argomenti. Rispetto a tale operazione, gli altri argomenti si comportano come costanti. Ad esempio, se $f = x y^2$, allora $\partial f / \partial x = y^2$ e $\partial f / \partial y = 2xy$.
- La presenza del *modulo* della derivata (che non è presente di per sé nello sviluppo di Taylor della funzione f) è dovuto al fatto che gli errori Δx_i sono per definizione positivi, ma dobbiamo considerare sia il caso in cui essi si aggiungono ad x_i sia quello in cui si sottraggono. Qualunque sia il segno della derivata parziale rispetto ad x_i , in uno dei due casi si ottiene un contributo positivo. Equivalentemente, si può scrivere come in eq. (1.50).
- Tutti i termini dell'eq. (1.50) sono omogenei: infatti la dimensione di $\partial f / \partial x_i$ è diminuita rispetto quella di f della dimensione di x_i , che però viene reintegrata dalla dimensione del suo errore Δx_i .

L'errore dunque si *propaga* dalle misure dirette alla quantità calcolate a partire da esse. Bisogna tenere ben presente questo effetto, che può portare ad incertezze grandi sul risultato finale anche a partire da misure relativamente precise.

Esempio Sulla Terra, un oggetto libero di cadere ha un'accelerazione costante diretta verso il basso (accelerazione di gravità) $g = (9.80 \pm 0.01) \text{ m s}^{-2}$. Se denotiamo con z la coordinata verticale, la posizione di un oggetto in caduta libera in funzione del tempo può venire espressa, come vedremo in seguito, tramite la formula

$$z(t) = z_0 + v_0 t - 1/2 g t^2 . \quad (1.51)$$

⁷Per non appesantire eccessivamente la notazione, qui usiamo lo stesso simbolo per la grandezza ed il risultato della misura.

Qui z_0 rappresenta la posizione dell'oggetto, e v_0 la sua velocità all'istante $t = 0$ (potrebbe essere lanciato o spinto invece che semplicemente lasciato andare). Supponiamo di voler conoscere (senza averla potuta misurare direttamente) l'altezza dell'oggetto z_T ad un tempo $T = (2.0 \pm 0.1)$ s determinato sperimentalmente, sapendo che la posizione iniziale è stata misurata essere $y_0 = (100.0 \pm 0.1)$ m, con velocità approssimativamente nulla: $v_0 = (0.0 \pm 0.1)$ m s⁻¹. Utilizzando la legge del moto (1.51) abbiamo

$$z_T = z_0 + v_0 T - 1/2 g T^2 . \quad (1.52)$$

Coi valori riportati prima, si ottiene $z_T = 19.6$ m. Si hanno però errori su z_0, v_0, g

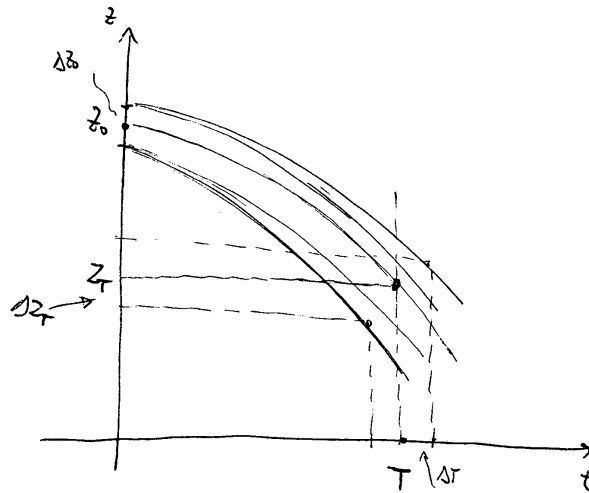


Figura 1.5: L'incertezza sui dati iniziali, e quindi sulla forma della curva $z(t)$, e quella sul tempo T portano ad un'incertezza sul risultato finale z_T .

e T , che si propagano secondo la formula eq. (1.50) alla grandezza z_T :

$$\begin{aligned} \Delta z_T &= \left| \frac{\partial z_T}{\partial z_0} \right| \Delta z_0 + \left| \frac{\partial z_T}{\partial v_0} \right| \Delta v_0 + \left| \frac{\partial z_T}{\partial g} \right| \Delta g + \left| \frac{\partial z_T}{\partial T} \right| \Delta T \\ &= \Delta z_0 + T \Delta v_0 + \frac{1}{2} T^2 \Delta g + |v_0 - g T| \Delta T . \end{aligned} \quad (1.53)$$

Siccome stiamo lavorando al prim'ordine negli errori, possiamo ora in questa espressione inserire per y_0, v_0, \dots i valori misurati, senza errori. Otteniamo infine nel nostro caso, sostituendo i valori numerici dati prima per le misure e i loro errori, $\Delta z_T = 2.2$ m. La nostra stima per la grandezza z_T è dunque affetta da un'incertezza piuttosto grande, ed ha due sole cifre significative:

$$z_T = (19 \pm 2) \text{ m} . \quad (1.54)$$

La figura 1.5 da' una descrizione grafica di tale incertezza.

La propagazione delle incertezze andrebbe tenuta in debito conto anche in ambiti diversi dalla Fisica.

Esempio Supponiamo di sapere che un capitale investito avrà nel tempo un andamento esponenziale secondo la legge

$$C(t) = C_0 e^{\alpha t}, \quad (1.55)$$

dove C_0 è il capitale iniziale, e α il tasso di interesse. Pensiamo di poter mettere insieme un capitale iniziale di un milione di euro, *give or take* diecimila euro: $C_0 = (10^6 \pm 10^4)$ €. Ipotizziamo inoltre di riuscire a spuntare un tasso di interesse (fisso) tra il 2 e il 4% all'anno: $\alpha = (0.03 \pm 0.01)$ (anno)⁻¹. Quale capitale C_{10} potremo avere tra 10 anni? Dall'eq. (1.55) risulta

$$C_{10} = C_0 \times e^{\alpha t} \Big|_{t=10 \text{ anni}} = 10^6 \times e^{0.03 \times 10} \text{ €} = 1.3 \times 10^6 \text{ €}. \quad (1.56)$$

Tuttavia, le incertezze su C_0 ed α si propagano a C_{10} :

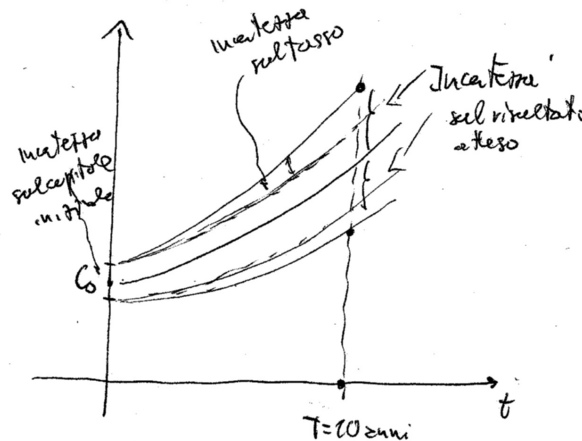


Figura 1.6: L'incertezza sul capitale iniziale e sul tasso di interesse determina un'incertezza sulla forma della funzione $C(t)$ e quindi sul capitale atteso a 10 anni.

$$\begin{aligned} \Delta C_{10} &= \left| \frac{\partial C_{10}}{\partial C_0} \right| \Delta C_0 + \left| \frac{\partial C_{10}}{\partial \alpha} \right| \Delta \alpha = e^{\alpha t} \Big|_{t=10 \text{ anni}} \Delta C_0 + C_0 t e^{\alpha t} \Big|_{t=10 \text{ anni}} \Delta \alpha \\ &= 1.4 \times 10^5 \text{ €}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Possiamo dunque stimare il nostro capitale a 10 anni come

$$C_{10} = (1.30 \pm 0.14) \times 10^6 \text{ €}. \quad (1.58)$$

Il nostro guadagno nell'operazione, $C_{10} - C_0$, sarà di (300000 ± 140000) €. L'incertezza è forte. La figura 1.6 da' una descrizione grafica di tale incertezza.

Propagazione dell'errore relativo in casi particolari Consideriamo una grandezza f ottenuta come prodotto di due altre:

$$f(x, y) = x y . \quad (1.59)$$

La formula di propagazione degli errori, eq. (1.50), applicata a questo caso ci dice che

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y = |y| \Delta x + |x| \Delta y . \quad (1.60)$$

Per l'errore relativo si ha allora

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} . \quad (1.61)$$

Per un prodotto, gli errori relativi si sommano! La stessa cosa succede per un rapporto. Infatti, se $g = x/y$, si ha

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \Delta y = \frac{1}{|y|} \Delta x + \frac{|x|}{|y|} \Delta y \quad (1.62)$$

e quindi nuovamente

$$\frac{\Delta g}{|g|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} . \quad (1.63)$$

Possiamo generalizzare questa proprietà considerando il caso, abbastanza comune, di una grandezza espressa come un monomio in molte variabili:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = c (x_1)^{k_1} (x_2)^{k_2} \dots (x_N)^{k_N} , \quad (1.64)$$

dove c è una costante. Le derivate parziali di f sono facilmente esprimibili: ad esempio,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c k_1 (x_1)^{k_1-1} (x_2)^{k_2} \dots (x_N)^{k_N} = \frac{k_1}{x_1} f . \quad (1.65)$$

Similmente avviene per le altre variabili, quindi possiamo scrivere, per ogni $i = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{k_i}{x_i} f \quad (1.66)$$

ed ottenere, applicando l'eq. (1.50) per la propagazione degli errori,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^N \frac{|k_i|}{|x_i|} f \Delta x_i . \quad (1.67)$$

Per l'errore relativo si ha dunque la semplice espressione

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \sum_{i=1}^N |k_i| \frac{\Delta x_i}{|x_i|} . \quad (1.68)$$

Cifre significative per particolari grandezze derivate Dalla relazione tra il numero di cifre significative e l'ordine di grandezza dell'errore relativo, descritta dopo l'eq. (1.38), segue che le formule del paragrafo precedente si possono esprimere in termini del numero di cifre significative, e danno origine alla seguente regola approssimata. Per una grandezza ottenuta tramite un prodotto, od un rapporto, il numero di cifre significative è quello del fattore che ne ha di meno.

Misure ripetute - Istogramma delle frequenze Finora abbiamo analizzato misure singole e abbiamo considerato

- la precisione consentita dallo strumento di misura;
- la possibile presenza di errori sistematici, che si cerca di ridurre il più possibile.

Tali due fattori portano a stimare un errore massimo assoluto per ogni misura. Anche svolgendo al meglio gli esperimenti e le misure, tuttavia, ci sono sempre delle fluttuazioni e delle incertezze non eliminabili, dette *errori casuali* o incertezze statistiche; esse fanno sì che, effettuando molte misure della stessa grandezza nelle stesse condizioni sperimentali, esse differiscono tra di loro e dal valore vero che si suppone esistere. Tali differenze sono visibili se la precisione della misura è comparabile con l'ordine di grandezza delle incertezze statistiche stesse, cioè in qualche modo se la precisione della misura è spinta al limite. Effettuando un insieme di misure $\{x_i\}$, con $i = 1, \dots, N$, esse possono essere rappresentate in un istogramma di frequenza come in figura 1.8. L'asse delle ascisse rappresenta la grandezza x (in una certa unità di misura) ed è suddiviso in intervallini corrispondenti alla precisione della misura (ad esempio, intervalli di ampiezza $1mm$ se stiamo effettuando misure di lunghezza con un righello la cui scala riporta i millimetri). Possiamo etichettarli con un indice α . I valori misurati x_i risultano distribuiti nei vari intervallini e sull'asse delle ordinate si riporta il numero di misure che cadono in ognuno di essi, divisa per il numero totale di misure, cioè la frequenza f_α con cui le misure cadono in esso. L'istogramma delle frequenze mostra che le misure si addensano in una zona all'interno della quale ci aspettiamo si trovi il valore "vero".

Media Quale è la migliore stima del valore vero che possiamo estrarre dal nostro insieme di misure? Da molti punti di vista si può mostrare che la stima più affidabile è data dalla *media* delle misure

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} . \quad (1.69)$$

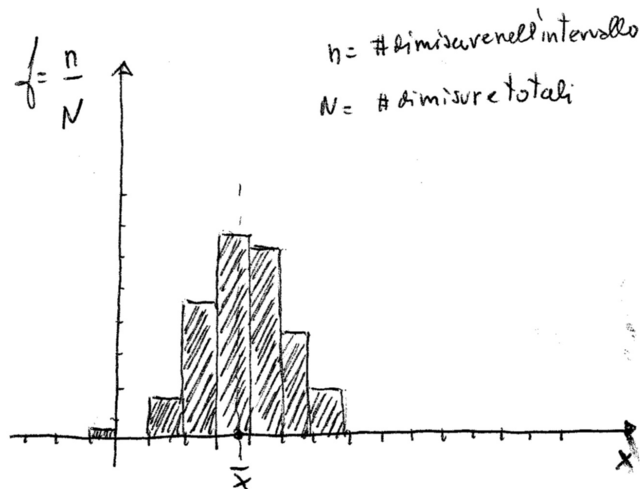


Figura 1.7: Istogramma delle frequenze per un set di misure della variabile x . La media è indicata come \bar{x} .

In termini dell'istogramma delle frequenze, se denotiamo con \hat{x}_α i valori centrali di ogni intervallino, la media può essere anche stimata tramite la formula

$$\sum_{\alpha} \hat{x}_{\alpha} f_{\alpha} . \quad (1.70)$$

Varianza empirica L'istogramma delle frequenze mostra che le misure hanno una certa dispersione intorno alla media, cioè possono essere più o meno addensate intorno ad essa. Come ottenere una descrizione quantitativa di tale dispersione? Definiamo gli *scarti* ξ_i di ogni singola misura rispetto alla media:

$$\xi_i = x_i - \bar{x} . \quad (1.71)$$

Il segno di uno scarto non è molto significativo, quello che conta è il suo modulo $|\xi|$ che rappresenta la distanza della misura x_i dalla media \bar{x} . Spesso si considera il quadrato di tale distanza, cioè lo *scarto quadratico* ξ_i^2 . La grandezza quantitativa che meglio rappresenta la dispersione delle misure intorno alla media è la “varianza empirica”

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}{N-1}} . \quad (1.72)$$

La curva normale degli errori Nella maggior parte delle situazioni, se si fa un numero elevatissimo di misure (in modo idealizzato, quindi, se si prende

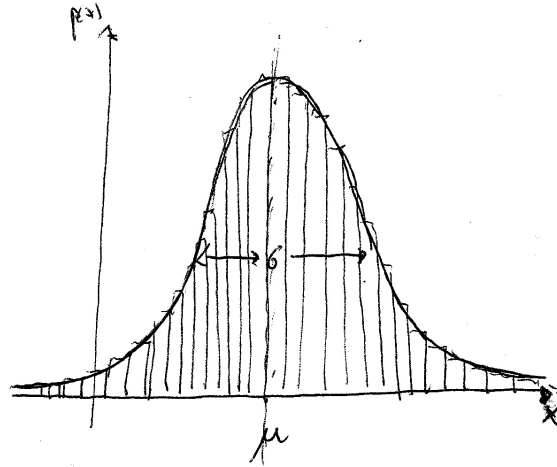


Figura 1.8: Nel limite di un grande numero di misure l'istogramma delle frequenze tende ad una curva continua, la curva normale degli errori di Gauss.

il limite $N \rightarrow \infty$) e si rendono gli intervallini nell'asse delle ascisse sempre più piccoli, si può mostrare che le frequenze ottenute assumono la forma di una funzione continua $p_g(x)$, detta distribuzione normale degli errori, o curva di Gauss, che è descritta dall'equazione

$$p_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \quad (1.73)$$

La curva $p_g(x)$ è la *densità di probabilità* di ottenere come risultato di una misura il valore x . Ciò significa che probabilità $P([a, b])$ di ottenere un risultato $x \in [a, b]$ è data da ⁸

$$P([a, b]) = \int_a^b dx p(x) , \quad (1.75)$$

come illustrato in figura 1.9. Data una distribuzione di probabilità $p(x)$ possiamo calcolare il *valore medio* della variabile x come

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x p(x) . \quad (1.76)$$

⁸Ovviamente, la probabilità di ottenere un qualche x deve essere uno: siamo certi di ottenere un qualche risultato! Questo vuol dire che ogni corretta distribuzione di probabilità deve essere *normalizzata*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 , \quad (1.74)$$

il che è vero per la distribuzione gaussiana data in eq. (1.73), come segue dalla formula (1.78).

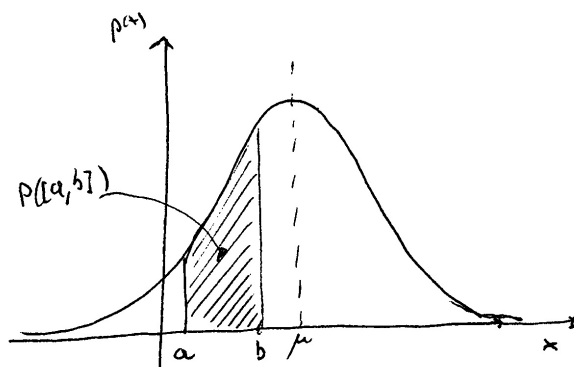


Figura 1.9: La probabilità totale di ottenere una misura nell'intervallo $[a, b]$ è data dall'integrale della densità di probabilità, cioè dall'area sottesa alla curva in tale intervallo.

Questa definizione è analoga alla definizione di media nel caso di un numero finito di misure data in eq. (1.70). Per la distribuzione gaussiana si trova

$$\langle x \rangle = \int dx x p_g(x) = \mu ; \quad (1.77)$$

il parametro μ rappresenta dunque il valor medio della grandezza x .

Esercizio Mostrate come questo risultato segue, come quelli per i valori medi seguenti, tramite opportuni cambi di variabile, dalla seguente formula che descrive una importantissima classe di integrali definiti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^k e^{-ay^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n + 1, \\ \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} a^{-(2n+1)/2} & \text{se } k = 2n, \end{cases} \quad (1.78)$$

dove $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 1$.

Se consideriamo il valor medio dello scarto quadratico rispetto alla media troviamo

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\mu \langle x \rangle + \mu^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x^2 \rangle, \quad (1.79)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato l'eq. (1.77) e il fatto che la distribuzione è normalizzata. Effettuando il calcolo del valor medio di x^2 usando eq. (1.78) si trova infine

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \sigma^2. \quad (1.80)$$

Il parametro σ in eq. (1.73) rappresenta dunque il limite continuo della varianza empirica s definita in eq. (1.72) ed è detto *varianza*; esso fornisce una misura della “larghezza” della distribuzione. Ricapitolando, la relazione tra i parametri “empirici” di un set di N misure e i parametri della curva normale che descrive ciò che accadrebbe per infinite misure è la seguente:

$$\bar{x} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu, \quad s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma. \quad (1.81)$$

Errore sulla media Avendo effettuato un set di molte misure, possiamo stimare il valore vero tramite la media empirica \bar{x} . Quale incertezza si deve attribuire a questa stima? Questa domanda si può rifrappare come segue: se facessimo molte serie di N misure, calcolando di ciascuna la media empirica, come si distribuirebbero tali medie? Si può mostrare che esse tenderebbero a seguire nuovamente una distribuzione di tipo gaussiano, con una varianza data da

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (1.82)$$

se σ è la varianza della distribuzione corrispondente a una singola serie di misure (nel limite di N grande). In pratica, dunque, possiamo stimare empiricamente la varianza della media $\sigma_{\bar{x}}$ tramite la quantità

$$\delta = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}{N(N-1)}} \quad (1.83)$$

e scrivere il risultato di una serie di misure come

$$\bar{x} \pm \delta . \quad (1.84)$$

Esercizio Suponiamo di aver misurato il periodo di oscillazione T di un pendolo, ottenendo la seguente lista di misure:

$$1.1 \text{ s} , 1.3 \text{ s} , 1.2 \text{ s} , 1.4 \text{ s} , 1.2 \text{ s} , 1.3 \text{ s} , 1.2 \text{ s} , 1.1 \text{ s} , 1.3 \text{ s} , 1.2 \text{ s} . \quad (1.85)$$

Qual'è la miglior stima che possiamo dare del periodo T e della sua incertezza?

Capitolo 2

Cinematica del punto materiale

In Fisica ci si occupa molto spesso del *moto* di *modelli semplificati* di oggetti, quali i *punti materiali*, nello *spazio ambiente*. In particolare, la cinematica si occupa della descrizione del moto, usando i concetti di spazio e di tempo, indipendentemente dalle cause del moto stesso, che sono invece oggetto di studio della dinamica.

2.1 Spazio ambiente e sistemi di coordinate

Lo spazio ambiente viene usualmente assunto essere lo spazio 3-dimensionale della nostra esperienza quotidiana.

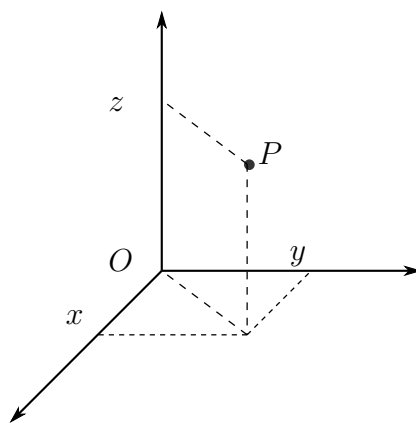


Figura 2.1: Assegnazione di coordinate cartesiane ad un punto P nello spazio. Il punto O è l'origine.

Coordinate cartesiane Fissando a piacere un'origine ed un sistema di assi cartesiani, vedi fig. 2.1, ad ogni punto P dello spazio viene associata una

terna di numeri, le *coordinate cartesiane* del punto:

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

dove \mathbb{R}^3 è il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ovviamente, nel determinare le coordinate cartesiane nello spazio fisico, si fissa un'unità di lunghezza rispetto alla quale le proiezioni sui vari assi sono misurate. Possiamo vedere ogni coordinata come un numero puro che esprime il rapporto tra la proiezione e l'unità di misura. L'unità scelta va comunque sempre dichiarata ed usata per estrarre l'espressione "fisica", dimensionale, della posizione. Può capitare di avere a che fare con situazioni semplificate o ridotte in cui i punti (gli oggetti) si possono muovere solo su un sottospazio bi-dimensionale, ed in particolare su un piano. In questo caso, con una scelta di coordinate cartesiane, il piano viene identificato con \mathbb{R}^2 , vedi fig. 2.2. Considereremo anche, per semplicità

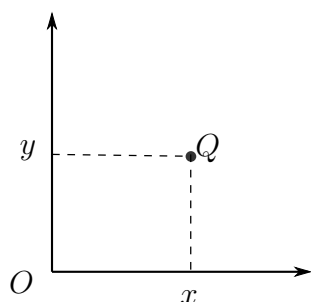


Figura 2.2: Assegnazione di coordinate cartesiane ad un punto Q nel piano. Il punto O è l'origine.

di trattamento ma non solo, casi la cui modellizzazione corrisponde a punti che si muovono in una dimensione sola, lungo una retta; vedi figura 2.3. Ad

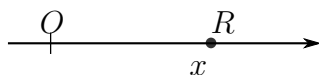


Figura 2.3: Assegnazione di una coordinate cartesiana ad un punto R su di una retta. Il punto O è l'origine.

esempio, questo modello è adeguato per descrivere il moto di una macchina lungo un rettilineo se per i nostri scopi conta solo lo spostamento lungo la strada, e trascuriamo piccole deviazioni a destra e sinistra all'interno della carreggiata.

Scelta delle coordinate Naturalmente, si possono usare sistemi di coordinate diverse per descrivere lo spazio: è un nostro privilegio usare quello che ci è più conveniente. Ad esempio, sempre utilizzando coordinate cartesiane,

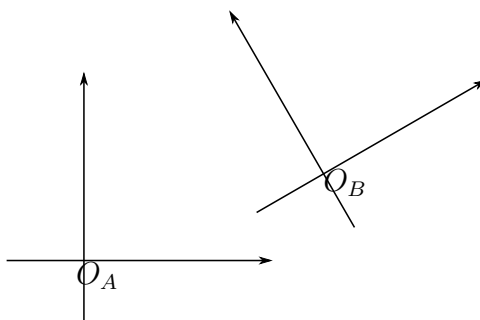


Figura 2.4: Due sistemi cartesiani nel piano, traslati e ruotati l'uno rispetto all'altro.

possiamo scegliere l'origine in una posizione diversa ed orientare gli assi diversamente. Vedi, nel caso bi-dimensionale, fig. 2.4. Consideriamo due S.R. traslati l'uno rispetto all'altro come in fig. ???. Le coordinate (x', y') di un qualsiasi punto P nel S.R. O' sono date in termini delle coordinate (x, y) nel S.R. O dalle seguenti formule di passaggio:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 , \\ y' = y - y_0 , \end{cases} \quad (2.2)$$

dove (x_0, y_0) sono le coordinate dell'origine del S.R. O' nel S.R. O . Queste formule di passaggio si generalizzano immediatamente ad un caso tri-dimensionale (o n -dimensionale). Per due S.R. ruotati l'uno rispetto all'altro di un angolo α come in fig. ??? le formule di passaggio (con riferimento alle notazioni della figura) sono

$$\begin{cases} x' = \cos \alpha x + \sin \alpha y , \\ y' = -\sin \alpha x + \cos \alpha y . \end{cases} \quad (2.3)$$

Mostratelo per esercizio. In tre dimensioni, la rotazione reciproca di due S.R. può essere parametrizzata da due angoli, e le formule di passaggio sono un po' più complicate, ma possono essere ricavate con ragionamenti geometrici analoghi. Le formule di passaggio per un S.R. roto-traslato rispetto ad un altro, come in fig. 2.4 si ottengono componendo le trasformazioni date in (2.2) e (2.3):

$$\begin{cases} x' = \cos \alpha (x - x_0) + \sin \alpha (y - y_0) , \\ y' = -\sin \alpha (x - x_0) + \cos \alpha (y - y_0) . \end{cases} \quad (2.4)$$

Coordinate polari nel piano In due dimensioni, un sistema di coordinate spesso molto utile è quello *polare*, vedi fig. 2.5. Le formule di passaggio dalle

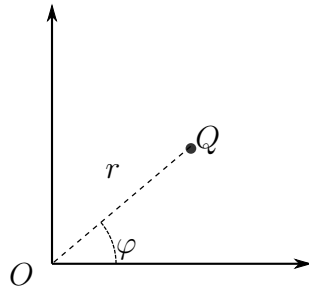


Figura 2.5: Coordinate polari nel piano.

coordinate polari (r, φ) , con $r \in \mathbb{R}^+$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, a quelle cartesiane (x, y) , con l'origine nella stessa posizione, sono:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (2.5)$$

Le formule inverse sono (ricavatele per esercizio):

$$\varphi = \arctan(y/x), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.6)$$

Coordinate polari nello spazio tri-dimensionale Analogamente, nello spazio tridimensionale è spesso utile il sistema delle coordinate polari sferiche (r, θ, φ) , con $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. descritto in figura 2.6. Le

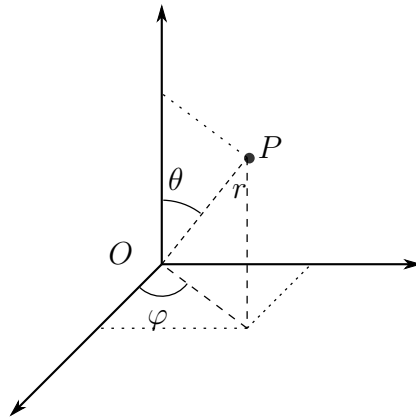


Figura 2.6: Coordinate polari nello spazio.

formule di passaggio sono

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.7)$$

Esercizio Ricavate le formule per il passaggio inverso di coordinate.

Altri sistemi In determinate situazioni, possono rivelarsi utili altri sistemi di coordinate, ad esempio un sistema “cilindrico” di coordinate nello spazio, descritto in figura 2.7. La scelta di un sistema di coordinate opportuno

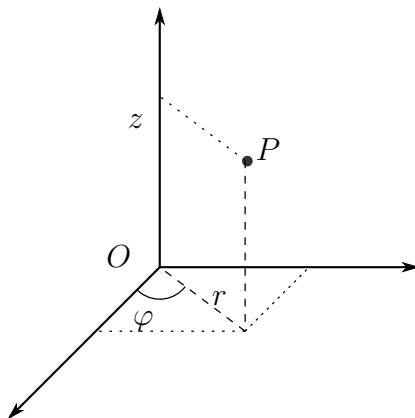


Figura 2.7: Coordinate cilindriche nello spazio.

può semplificare, e di molto, il trattamento di un problema, ma in linea di principio nulla di fisico dipende da tale scelta ¹.

2.2 Vettori

Studiando il moto di un punto materiale, ci interesserà lo *spostamento* di tale punto durante un certo intervallo di tempo. Lo spostamento è il *segmento orientato* $\overline{P_i P_f}$ che ne congiunge la posizione iniziale P_i e la posizione finale P_f , vedi figura 2.8, ed è un esempio di *vettore*. I vettori nello spazio tri-

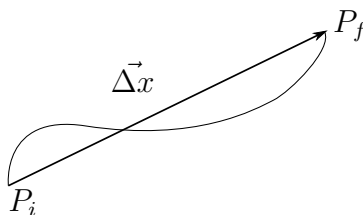


Figura 2.8: Il vettore spostamento Δx è il segmento orientato tra un punto iniziale P_i ed un unto finale P_f .

dimensionale \mathbb{R}^3 (ma anche, ovviamente, nel piano \mathbb{R}^2 o su di una retta) sono rappresentati come frecce, ed indicati usualmente con lettere coronate da una

¹Perlomeno, sino a quando i sistemi di riferimento sono in quiete o in moto reltivo uniforme.

freccia: ad esempio, uno spostamento potrebbe essere indicato come $\vec{\Delta x}$, una forza come \vec{F} , I vettori in \mathbb{R}^3 , cioè i segmenti orientati, sono caratterizzati da una *direzione* (la retta su cui giacciono) un *verso* ed un *modulo* (cioè la loro lunghezza). Il modulo di un vettore \vec{v} è usualmente denotato come $|\vec{v}|$ o, quando non vi sia pericolo di confusione, semplicemente come v . Notiamo che il punto di applicazione (cioè il punto da cui parte la freccia) non fa parte della definizione di vettore, anche se può essere importante per certi scopi, ad esempio quando il vettore corrisponde ad uno spostamento o ad una forza).

Proprietà fondamentali dei vettori Le proprietà che più tipicamente caratterizzano i vettori, e possono venire generalizzate per costruire “spazi vettoriali” contenenti oggetti diversi dai segmenti orientati, sono le seguenti.

- I vettori possono essere moltiplicati per un numero reale λ : il vettore $\lambda\vec{v}$ ha la stessa direzione e verso di \vec{v} , e modulo pari a $\lambda|\vec{v}|$. Dal punto di vista fisico il vettore $2\vec{\Delta x}$ corrisponde a ciò che naturalmente identifichiamo col doppio dello spostamento $\vec{\Delta x}$.
- I vettori possono venire *sommati* secondo una regola che, applicata ai vettori spostamento, fornisce lo spostamento complessivo che si avrebbe effettuandoli successivamente, vedi figura 2.9. Dato che il punto

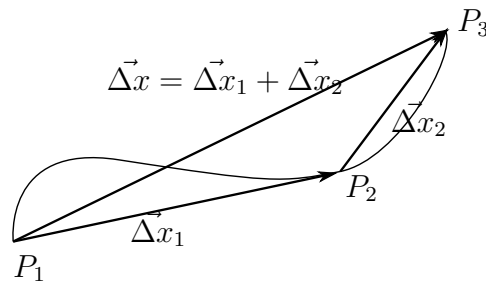


Figura 2.9: La somma di due vettori spostamento è il vettore corrispondente allo spostamento complessivo.

di applicazione non fa parte della definizione di vettore, la somma di due vettori qualsiasi \vec{v} e \vec{w} può venire equivalentemente ottenuta applicandoli entrambi nello stesso punto ed usando la cosiddetta “regola del parallelogramma”, descritta in figura 2.10. Notiamo che questa operazione di somma è commutativa: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$, per ogni \vec{v} e \vec{w} .

- Esiste un vettore che funge da elemento neutro rispetto alla somma vettoriale, il vettore nullo $\vec{0}$, di modulo 0 (cioè privo di lunghezza), tale che

$$\forall \vec{v}, \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}. \quad (2.8)$$

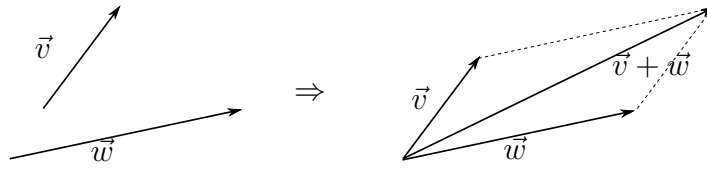


Figura 2.10: La somma di due vettori tramite la cosiddetta “regola del parallelogramma”.

- Ogni vettore \vec{v} ammette un opposto, che possiamo indicare con $-\vec{v}$, tale che

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} . \quad (2.9)$$

Il vettore $-\vec{v}$ ha la stessa direzione e lo stesso modulo di \vec{v} , ma verso opposto.

Dalle proprietà precedenti segue che *combinazioni lineari* di vettori, del tipo

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_N \vec{v}_N \quad (2.10)$$

sono ancora vettori.

Prodotto scalare Il prodotto scalare è un’operazione che ad una coppia di vettori associa un numero reale:

$$\vec{w}, \vec{v} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \equiv |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta , \quad (2.11)$$

dove θ è l’angolo compreso tra i due vettori, vedi fig. 2.11. Il prodotto scalare

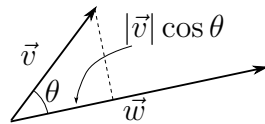


Figura 2.11: Il prodotto scalare tra due vettori dipende dall’angolo compreso tra di essi.

è simmetrico ed è distributivo rispetto alla somma vettoriale.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} , \quad \vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{y}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{y} . \quad (2.12)$$

Dalla definizione (2.11) segue immediatamente che $\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w})$; combinando questo con la proprietà distributiva, eq. (2.12), vediamo che il prodotto scalare è un’operazione lineare nel secondo argomento:

$$\vec{v} \cdot (\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2) = \lambda_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2 , \quad (2.13)$$

e ed è lineare anche nel primo come conseguenza della sua simmetria. Notiamo che il prodotto scalare di un vettore con se stesso non è altro che il suo modulo quadro:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2, \quad (2.14)$$

dato che in questo caso l'angolo compreso è nullo. I vettori \vec{e} di lunghezza uno², cioè tali che $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$, sono detti *versori*. Essi specificano una direzione ed un verso. Dato un vettore qualsiasi possiamo ottenere il versore corrispondente (cioè con la stessa direzione e verso) come $\vec{e} = \vec{v}/|\vec{v}|$. Il prodotto scalare di due versori è semplicemente dato dal coseno dell'angolo compreso:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \theta. \quad (2.15)$$

Avere una definizione di prodotto scalare equivale dunque a saper definire lunghezze ed angoli.

Proiezione di un vettore lungo un versore La proiezione di un vettore \vec{y} nella direzione individuata da un versore \vec{e} , si ottiene con la costruzione riportata in figura 2.12. Il risultato è un vettore di modulo $|\vec{y}| \cos \theta$, dove θ

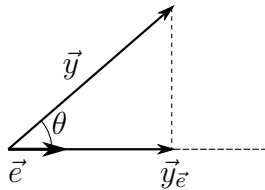


Figura 2.12: Proiezione di un vettore \vec{v} lungo un versore \vec{e} .

è l'angolo compreso tra \vec{y} e \vec{e} , e di direzione e verso quelli di \vec{e} . Notando che $|\vec{y}| \cos \theta = \vec{y} \cdot \vec{e}$, come segue dall'eq. (2.11), il risultato è scrivibile come

$$(\vec{y} \cdot \vec{e}) \vec{e}. \quad (2.16)$$

Proiezione di un vettore lungo un altro La proiezione di un vettore \vec{y} lungo un generico vettore \vec{v} , che denotiamo come $\vec{y}_{\vec{v}}$, si ottiene semplicemente individuando innanzitutto il versore corrispondente a \vec{v} , cioè $\vec{v}/|\vec{v}|$, e poi applicando la formula precedente: il vettore proiettato è dunque dato da

$$\vec{y}_{\vec{v}} = \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (2.17)$$

²In qualche unità prefissata, se sono anche grandezze dimensionali, quali ad esempio spostamenti, forze,...

Indipendenza lineare Un insieme di vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si dice *linearmente dipendente* se se ne può trovare una particolare combinazione lineare che si annulla, cioè se per qualche scelta dei coefficienti λ_i ($i = 1, \dots, n$) si ha

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}. \quad (2.18)$$

I vettori di tale insieme si dicono *linearmente indipendenti* se non è possibile ottenere una tale relazione.

Retta reale Nello spazio uni-dimensionale, ogni coppia di vettori è linearmente dipendente. Infatti, vedi figura 2.13, dato un vettore \vec{v} , ogni altro

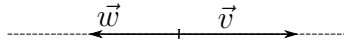


Figura 2.13: In una dimensione, ogni coppia di vettori è linearmente dipendente.

vettore \vec{w} si può scrivere come

$$\vec{w} = \pm \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \vec{v}, \quad (2.19)$$

così che si ha la relazione

$$\vec{w} \mp \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.20)$$

In altre parole, lungo la retta reale tutti i vettori sono proporzionali ad un unico versore. Essa rappresenta uno spazio vettoriale *uni-dimensionale*.

Piano Nel piano si possono avere al più due vettori linearmente indipendenti. Infatti, come illustrato in figura 2.14, dati due vettori \vec{v} e \vec{w} linearmente

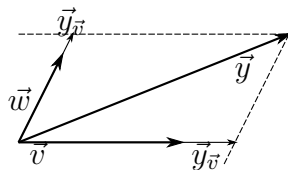


Figura 2.14: Nel piano, ogni vettore \vec{y} può essere espresso come combinazione lineare di due vettori fissati \vec{v} e \vec{w} .

indipendenti (cioè non nella stessa direzione) ogni altro vettore \vec{y} può venire ottenuto, tramite la regola del parallelogramma, come somma di due vettori proporzionali a \vec{v} e \vec{w} , che sono null'altro che le proiezioni di \vec{y} lungo di essi: $\vec{y} = \vec{y}_v + \vec{y}_w$. Il piano è uno spazio vettoriale di dimensione due.

Spazio tri-dimensionale In maniera del tutto analoga, è facile convincersi che nello spazio piatto non si possono avere più di tre vettori linearmente indipendenti, ovvero che lo spazio è uno spazio vettoriale di dimensione tre.

Basi di vettori Nello spazio tri-dimensionale, per quanto appena detto, possiamo scegliere arbitrariamente una *base* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ di tre vettori linearmente indipendenti tra di loro ed esprimere qualsiasi vettore \vec{v} come combinazione lineare di essi:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 . \quad (2.21)$$

Fissata una base, quindi, un vettore \vec{v} nello spazio tri-dimensionale è univocamente identificato da una terna di numeri reali $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Lo spazio dei vettori spaziali è dunque isomorfo a \mathbb{R}^3 , lo spazio delle terne di numeri reali.

Basi ortonormali in tre dimensioni In particolare, è particolarmente conveniente scegliere una *base orto-normale* (base O.N.), cioè una base di tre versori ortogonali fra di loro, per i quali è tradizionale usare la notazione $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, vedi figura 2.15. Essi soddisfano dunque le relazioni

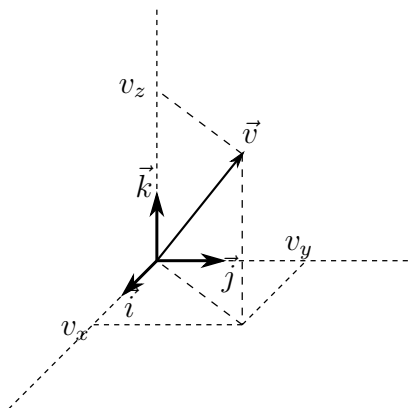


Figura 2.15: Decomposizione di un vettore \vec{v} rispetto ad una base O.N. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 , \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0 , \end{aligned} \quad (2.22)$$

ed individuano tre direzioni ortogonali e tre versi. Qualsiasi vettore può venire decomposto rispetto ad essi:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} . \quad (2.23)$$

Le *componenti* (v_x, v_y, v_z) sono date dalle proiezioni del vettore \vec{v} sui tre versori:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}, \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}, \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}, \quad (2.24)$$

come si vede facilmente applicando le relazioni in eq. (2.22). Notiamo che, fissata la base O.N., possiamo rappresentare un vettore tramite la terna delle sue componenti:

$$\vec{v} \longleftrightarrow (v_x, v_y, v_z). \quad (2.25)$$

Queste definizioni sono facilmente generalizzabili. In qualsiasi spazio vettoriale di dimensione n (cioè che ammette al più n vettori linearmente indipendenti) dotato di un prodotto scalare è possibile scegliere una base O.N. In particolare, nel piano e sulla retta possiamo scegliere delle basi che usualmente indicheremo come $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{i}\}$ rispettivamente.

Espressione in componenti della somma vettoriale E' facile mostrare che, dati due vettori \vec{v} , di componenti (v_x, v_y, v_z) , e \vec{w} , di componenti (w_x, w_y, w_z) , le componenti del vettore somma sono semplicemente la somma delle componenti dei due:

$$\vec{v} + \vec{w} \longleftrightarrow (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z). \quad (2.26)$$

La figura 2.16 illustra questa proprietà in un caso bi-dimensionale.

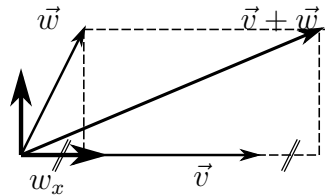


Figura 2.16: La componente $(\vec{v} + \vec{w})_x$ è ottenuta aggiungendo a v_x un tratto di lunghezza w_x .

Espressione in componenti della moltiplicazione per uno scalare Se un vettore viene moltiplicato per un numero reale, anche le sue componenti risultano moltiplicate per lo stesso numero:

$$\lambda \vec{v} \longleftrightarrow (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z). \quad (2.27)$$

Espressione in componenti del prodotto scalare Dati due vettori

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad \vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}, \quad (2.28)$$

usando la linearità del prodotto scalare e le proprietà di ortonormalità dei versori di base, eq. (2.22), si ha

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot (w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}) \\ &= v_x w_x \vec{i} \cdot \vec{i} + v_x w_y \vec{i} \cdot \vec{j} + \dots + v_z w_z \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Possiamo dunque scrivere, se usiamo la rappresentazione in componenti, che

$$(v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z . \quad (2.30)$$

Basi O.N. e coordinate cartesiane Come discusso prima, fissata una base O.N. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, lo spazio dei vettori in tre dimensioni è isomorfo a \mathbb{R}^3 . Viceversa, noi possiamo vedere lo spazio ambiente \mathbb{R}^3 , i cui elementi sono i punti, come uno spazio vettoriale. Se fissiamo arbitrariamente un'origine O , infatti, ad ogni punto P possiamo associare un segmento orientato \overline{OP} , che è il vettore che descrive lo spostamento del punto rispetto all'origine e che denoteremo come \vec{x} . Da questo punto di vista, introdurre una base O.N. corrisponde ad introdurre un sistema di assi cartesiani e scrivere

$$\vec{x} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} . \quad (2.31)$$

Esprimere \vec{x} tramite le sue componenti: $\vec{x} \longleftrightarrow (x, y, z)$ corrisponde dunque ad assegnare al punto P le sue coordinate cartesiane: $P \longleftrightarrow (x, y, z)$ rispetto a tali assi.

2.3 La legge oraria

Supponiamo che il punto si possa muovere in uno spazio \mathcal{M} , che per noi sarà quasi sempre lo spazio piatto tri-dimensionale, \mathbb{R}^3 , bi-dimensionale, \mathbb{R}^2 o uni-dimensionale, \mathbb{R} , ma potrebbe anche essere uno spazio curvo, quale la superficie della Terra. Come rappresentato in fig. 2.17, il moto di un punto è

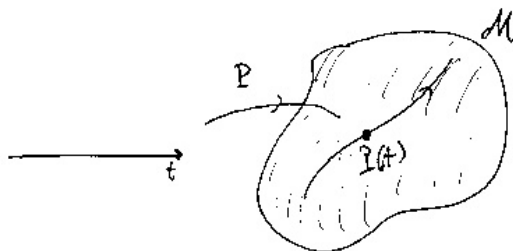


Figura 2.17: Legge oraria per il moto di un punto nello spazio ambiente \mathcal{M}

descritto da una funzione P da \mathbb{R} (o da un suo intervallo) in \mathcal{M} , che assegna ad ogni istante t uno specifico punto $P(t)$. Tale funzione è detta *legge oraria* del moto. Per avere una descrizione quantitativa della legge oraria $P(t)$ si introduce un sistema di coordinate su \mathcal{M} , di modo che ogni punto $P(t)$ sia individuato da una n -pla di numeri reali ³, le sue coordinate. La legge oraria specifica è a tal punto descritta da n funzioni reali (le coordinate) di variabile reale (il tempo).

Legge oraria in coordinate cartesiane In particolare, sullo spazio piatto \mathbb{R}^3 possiamo scegliere un sistema cartesiano di coordinate (x, y, z) . La legge oraria sarà allora espressa come

$$(x(t), y(t), z(t)) . \quad (2.32)$$

Ad esempio, la legge

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0) \quad (2.33)$$

corrisponde ad un punto che se ne sta fermo nell'origine del nostro sistema di coordinate.

Legge oraria in altri sistemi di coordinate E' perfettamente lecito, e può essere conveniente in certi casi, utilizzare altri sistemi di coordinate per esprimere la legge oraria. Ad esempio, per un moto nel piano \mathbb{R}^2 , possiamo

³Come già notato precedentemente, le coordinate spaziali hanno di per se dimensioni di lunghezza. Quando le pensiamo come numeri è perchè ne consideriamo il rapporto con una unità di misura fissata, che va dichiarata.

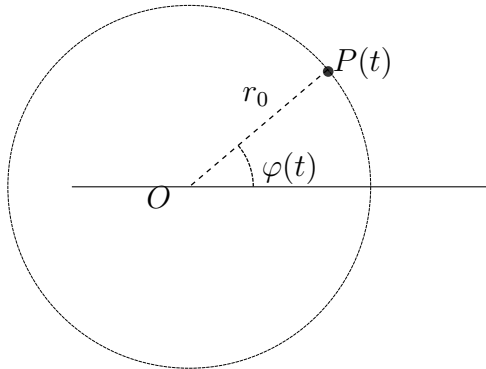


Figura 2.18: La legge oraria in eq. (2.34) corrisponde ad un moto circolare uniforme.

usare le coordinate polari (r, φ) ed esprimere la legge oraria come $(r(t), \varphi(t))$. In tali coordinate, la legge oraria

$$(r(t), \varphi(t)) = (r_0, \omega t) , \quad (2.34)$$

dove r_0 e ω sono due costanti, di dimensioni rispettivamente di $[L]$ e $[t]^{-1}$, corrisponde ad un moto circolare uniforme nel piano, vedi fig. 2.18: al variare di t il punto $P(t)$ mantiene la stessa distanza r_0 dall'origine mentre il suo angolo $\varphi(t)$ varia linearmente con t , cosicché il punto percorre una circonferenza.

Formulazione vettoriale della legge oraria Nel caso di spazi piatti, ad esempio \mathbb{R}^3 , abbiamo visto che le coordinate cartesiane, ad esempio (x, y, z) , possono venir riguardate come le componenti del vettore spostamento di P rispetto all'origine, $\vec{x} = \overline{OP}$. La legge oraria si può dunque anche scrivere in notazione vettoriale: in \mathbb{R}^3 , ad esempio,

$$\vec{x}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} . \quad (2.35)$$

Esempio Consideriamo la legge oraria nel piano data da

$$\vec{x}(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \vec{x}_0 , \quad (2.36)$$

valida per $t > 0$, con $t_0 = 1$ s e dove $\vec{x}_0 = \vec{i} - 2\vec{j}$ è un vettore fisso, le cui componenti sono misurate in metri. Analizziamo il moto descritto da questa legge. Analizzando la posizione a tempi successivi abbiamo la seguente tabella:

tempo	posizione
$t = 0s$	$\vec{x}(0) = 0$
$t = 1s$	$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$
$t = 4s$	$\vec{x}(0) = 2\vec{x}_0$
$t = 9s$	$\vec{x}(0) = 3\vec{x}_0$
...	...

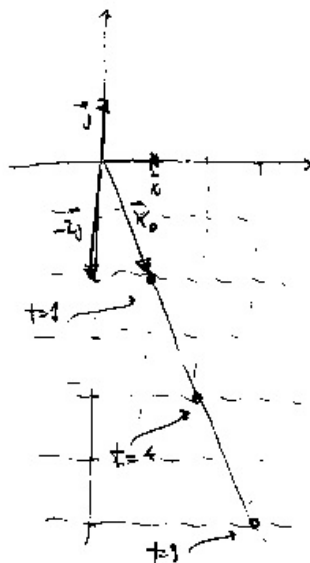


Figura 2.19: Moto descritto dalla legge oraria vettoriale di eq. (2.36).

Come descritto anche in figura 2.19, il punto si muove su una semiretta la cui direzione e verso sono individuati da \vec{x}_0 , allontanandosi dall'origine sempre meno rapidamente. La stessa legge oraria può essere espressa in componenti. Infatti,

$$\vec{x}(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \vec{x}_0 = \sqrt{\frac{t}{t_0}} (\vec{i} - 2\vec{j}) \quad (2.37)$$

così che le componenti sono

$$x(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}}, \quad y(t) = -2\sqrt{\frac{t}{t_0}}. \quad (2.38)$$

Cinematica e studio di funzioni La legge oraria contiene tutta l'informazione descrittiva sul moto. Per “capire” e analizzare cosa sta succedendo è necessario estrarre tale informazione studiandone l'espressione esplicita in coordinate (o in forma vettoriale). Studiare la legge oraria espressa in coordinate corrisponde a studiare n funzioni reali (le coordinate) di variabile reale

(il tempo). Si applicano quindi gli strumenti di analisi matematica standard che avete appreso nel corso di Analisi. In effetti, molti dei concetti cardine dell'analisi, quali derivate, massimi, minimi, . . . , sono radicati, anche storicamente, proprio nella cinematica. Per “capire” il moto descritto da una legge oraria, infatti, è conveniente introdurre grandezze derivate quali la velocità e l'accelerazione che, come vedremo, corrispondono al concetto di derivata e derivata seconda della posizione.

2.3.1 Spostamento e distanza

Consideriamo un moto che avvenga durante un intervallo di tempo $[t_i, t_f]$; useremo spesso la notazione $\Delta t = t_f - t_i$. Cominciamo per semplicità dal caso uni-dimensionale, vedi fig. 2.20. La legge oraria $P(t)$ sarà dunque espressa

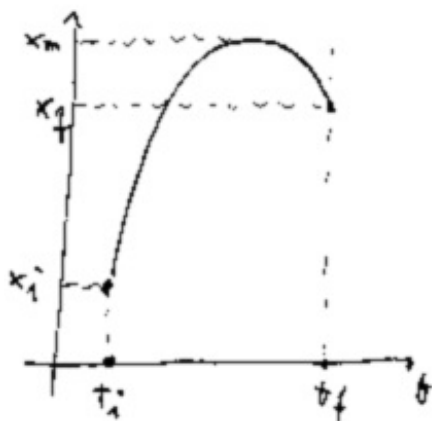


Figura 2.20: Esempio di legge oraria di un moto unidimensionale.

semplicemente tramite una funzione reale di variabile reale $x(t)$, dove x è la coordinata scelta lungo l'unica direzione di moto. Denotiamo come x_i e x_f le posizioni iniziali e finali del punto:

$$x_i \equiv x(t_i), \quad x_f \equiv x(t_f). \quad (2.39)$$

Spostamento Una delle prime cose che possiamo chiederci su questo moto è: di quanto si è spostato il punto? la risposta è immediata:

$$\Delta x = x_f - x_i. \quad (2.40)$$

Questa quantità (lo spostamento) è in realtà un vettore uni-dimensionale $\Delta \vec{x} = \overline{P_i P_f} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$.

Distanza percorsa Una seconda, ovvia, domanda è: quanta distanza ha percorso il punto durante il moto? La risposta qui è meno immediata. Infatti il moto avviene come segue, vedi fig. 2.21. Il punto dapprima “va oltre”



Figura 2.21: Il percorso del punto descritto dalla legge oraria in fig. 2.20.

x_f , fino ad x_m , poi torna indietro. La distanza percorsa d è dunque, in questo caso,

$$d = |x_f - x_i| + 2|x_m - x_f| \quad (2.41)$$

e per determinarla è necessario individuare il punto di massimo x_m . La distanza percorsa è una grandezza scalare e non vettoriale.

Alcune osservazioni.

1. Le due informazioni, spostamento e distanza percorsa, sono utili per scopi diversi. Supponiamo che il punto rappresenti una macchina in moto lungo una strada. Il contachilometri segna la distanza percorsa d . E' questa la grandezza rilevante, ad esempio, per il consumo di carburante. Lo spostamento non tiene in conto del percorso fatto: conta solo il risultato finale!
2. Questi concetti si generalizzano allo studio della dipendenza temporale di altre grandezze, oltre allo spazio. Ad esempio, consideriamo il valore (attualizzato) s di uno stock di azioni al passare del tempo, vedi fig. 2.22. In fin dei conti ⁴ l'unica cosa che conta è lo “spostamento” $s_f - s_i$, cioè

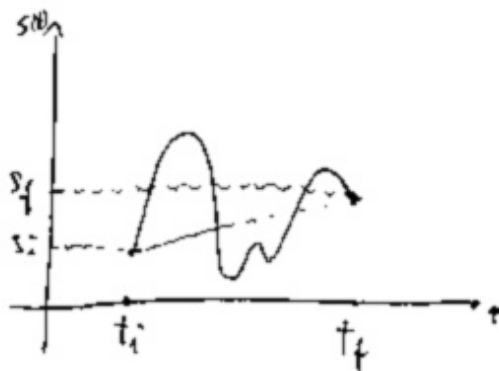


Figura 2.22: Dipendenza dal tempo del valore di uno stock di azioni.

il guadagno.

3. In dimensioni maggiori di uno, il carattere vettoriale dello spostamento, in contrasto alla natura scalare della distanza percorsa, risulta più evidente, vedi fig. 2.23:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = \overline{P_i P_f} . \quad (2.42)$$

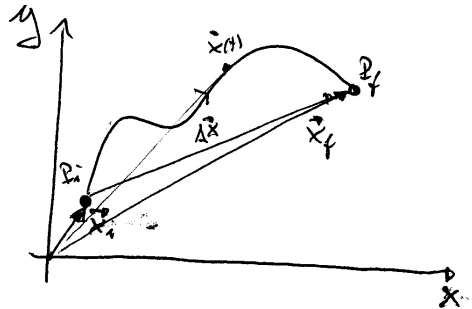


Figura 2.23: Natura vettoriale dello spostamento.

4. Per un qualsiasi percorso chiuso, cioè tale che $\vec{x}_f = \vec{x}_i$, lo spostamento è nullo, la distanza (in generale) no.

Esempio Consideriamo il moto circolare uniforme descritto dalla legge oraria, già considerata precedentemente in eq. (2.34),

$$r(t) = r_0 , \quad \varphi(t) = \omega t , \quad (2.43)$$

tra l'istante iniziale $t_i = 0$ e l'istante finale $t_f = 2\pi/\omega$, vedi fig. 2.24. All'istante iniziale si ha

$$\begin{cases} r(t_i) = r_0 , \\ \varphi(t_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_i) = r_0 \cos(0) = r_0 , \\ y(t_i) = r_0 \sin(0) = 0 . \end{cases} \quad (2.44)$$

A quello finale si ha

$$\begin{cases} r(t_f) = r_0 , \\ \varphi(t_f) = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_f) = r_0 \cos(2\pi) = r_0 , \\ y(t_f) = r_0 \sin(2\pi) = 0 . \end{cases} \quad (2.45)$$

⁴A meno di non utilizzare in contemporanea altri sofisticati strumenti finanziari dipendenti dalle oscillazioni di valore delle azioni stesse.

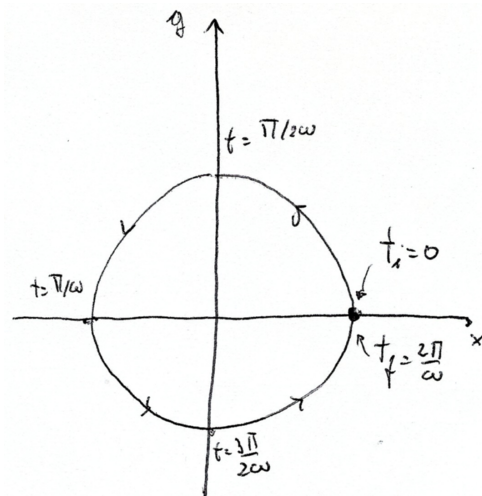


Figura 2.24: Esempio di percorso chiuso: moto circolare uniforme durante un periodo $2\pi/\Omega$.

Le posizioni iniziali e finali coincidono, dato che la variabile angolare φ è periodica di periodo 2π , e lo spostamento è dunque nullo:

$$\Delta x = \vec{x}_f - \vec{x}_i = \vec{0} . \quad (2.46)$$

La distanza percorsa d , invece, è la lunghezza della circonferenza tracciata dal punto nel suo moto:

$$d = 2\pi r_0 . \quad (2.47)$$

2.3.2 Velocità media

Oltre a distanza percorsa e spostamento totale, ci può interessare sapere “quanto in fretta” tale spostamento è avvenuto. Questo concetto è espresso quantitativamente dalla velocità media.

Velocità media La velocità media è definita come

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta}x}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} . \quad (2.48)$$

Osserviamo che:

- la velocità media è una grandezza derivata, con le dimensioni di:

$$[v_m] = [Lt^{-1}] . \quad (2.49)$$

- E' un vettore con la stessa direzione e verso di $\vec{\Delta x}$, e modulo $|\vec{\Delta x}|/|\Delta t|$. Essendo un vettore, possiamo anche esprimerlo in componenti.

Esempio Consideriamo il moto bi-dimensionale la cui traiettoria è riportata in fig. 2.25. Esso si svolge tra il tempo $t_i = 1$ s e il tempo $t_f = 9$ s, e ha punti iniziali e

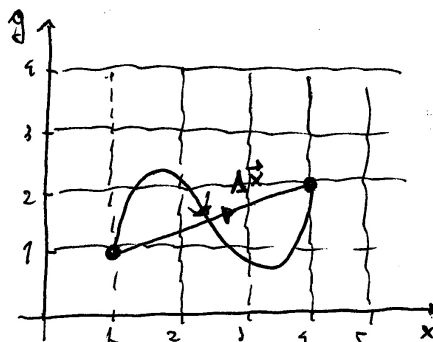


Figura 2.25: Esempio di moto bi-dimensionale, tra l'istante iniziale $t_i = 1$ s e quello finale $t_f = 9$ s.

finali

$$\vec{x}_i \leftrightarrow (x_i, y_i) = (1, 1) \text{ m} , \quad \vec{x}_f \leftrightarrow (x_f, y_f) = (4, 2) \text{ m} . \quad (2.50)$$

Abbiamo quindi $\Delta t = (9 - 1) \text{ s} = 8 \text{ s}$, mentre il vettore spostamento ha componenti

$$(\Delta x, \Delta y) = (x_f - x_i, y_f - y_i) = (3, 1) \text{ m} . \quad (2.51)$$

Le componenti della velocità media sono dunque

$$(v_{m,x}, v_{m,y}) = \frac{1}{\Delta t}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{8}(3, 1) \text{ m s}^{-1} . \quad (2.52)$$

Nel caso uni-dimensionale, in cui la velocità media ha una sola componente v_m , è facile darle un'interpretazione grafica, vedi fig. 2.26. Essa rappresenta la pendenza della retta che unisce i punti iniziali e finali nel piano (x, t) :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha . \quad (2.53)$$

In più dimensioni, con coordinate x_i ($i = 1, \dots, n$), la velocità media \vec{v}_m ha n componenti $v_{m,i}$, ciascuna delle quali ha questa interpretazione grafica nel piano (x_i, t) .

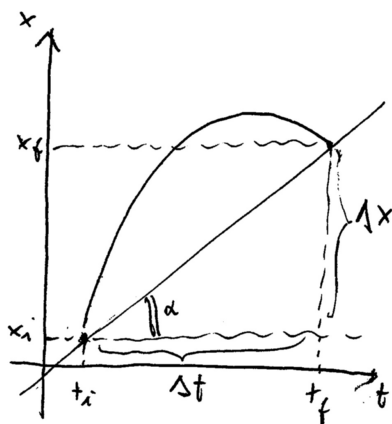


Figura 2.26: Interpretazione geometrica nel piano (x, t) della velocità media.

Esercizio Consideriamo il moto tri-dimensionale descritto dalla legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = -t \\ z(t) = 20 - 5t^2, \end{cases} \quad (2.54)$$

dove le lunghezze sono misurate in metri e il tempo t , che varia tra $t_i = 0$ e $t_f = 2$, in secondi. In fig. 2.27 è rappresentato nello spazio questo moto. Calcoliamo la

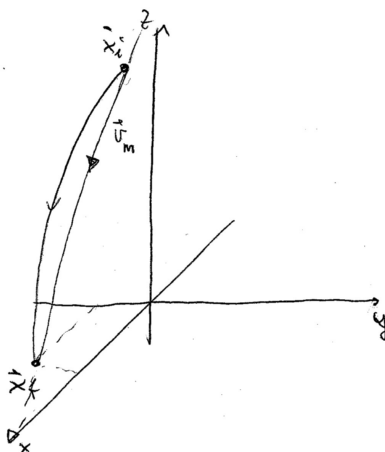


Figura 2.27: Rappresentazione del moto descritto dalla legge oraria in eq. (2.54).

velocità media e il suo modulo. Siccome

$$\vec{x}_i \leftrightarrow (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 20) \quad (2.55)$$

e

$$\vec{x}_f \leftrightarrow (x(2), y(2), z(2)) = (5, -2, 0) \quad (2.56)$$

troviamo

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 20\vec{k} \quad (2.57)$$

e quindi

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (4\vec{i} - 2\vec{j} - 20\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k} , \quad (2.58)$$

cioè, in componenti,

$$(v_{m,x}, v_{m,y}, v_{m,z}) = (2, -1, -10) . \quad (2.59)$$

Il modulo della velocità media è dunque

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{v_{m,x}^2 + v_{m,y}^2 + v_{m,z}^2} = \sqrt{105} \text{ m s}^{-1} . \quad (2.60)$$

Velocità scalare media La *velocità scalare media* è definita come

$$v_{s,m} \equiv \frac{d}{\Delta t} , \quad (2.61)$$

dove d è la distanza percorsa. Questa quantità:

- è uno scalare, non un vettore.
- dipende dal percorso seguito, dato che d dipende da esso. In generale, quindi, essa *non* coincide con il modulo della velocità media.

Esempio Consideriamo nuovamente un moto circolare uniforme, vedi fig 2.24, con legge oraria

$$r(t) = r_0 , \quad \varphi(t) = \omega t , \quad (2.62)$$

con t che varia tra $t_i = 0$ e $t_f = 2\pi/\omega$ s. Abbiamo già ricavato in precedenza il vettore spostamento e la distanza percorsa:

$$\Delta\vec{x} = \vec{0} , \quad d = 2\pi r_0 . \quad (2.63)$$

Abbiamo pertanto

$$\vec{v}_m = \vec{0} , \quad v_{s,m} = \frac{2\pi r_0}{\Delta t} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi r_0 = \omega r_0 . \quad (2.64)$$

2.3.3 Moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme la legge oraria è tale che, scelto un qualsiasi intervallo Δt durante il moto, la velocità media risulta sempre la stessa: si può quindi dire che il moto avviene a velocità costante. La legge oraria, scritta in notazione vettoriale, è la seguente:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v} t, \quad (2.65)$$

dove \vec{x}_0 rappresenta la posizione al tempo $t = 0$. Dato un *qualsiasi* intervallo temporale $[t_1, t_2]$, si ha

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x}_0 + \vec{v} t_2 - \vec{x}_0 - \vec{v} t_1}{t_2 - t_1} = \vec{v}. \quad (2.66)$$

Il vettore \vec{v} , il cui modulo $|\vec{v}|$ denoteremo semplicemente come v , rappresenta dunque la velocità costante cui avviene il moto.

Traiettoria Dalla legge oraria (2.65) segue che il vettore spostamento è sempre proporzionale a \vec{v} ; la traiettoria del punto nello spazio giace sulla retta la cui direzione è specificata da \vec{v} , vedi fig. 2.28. Questo tipo di

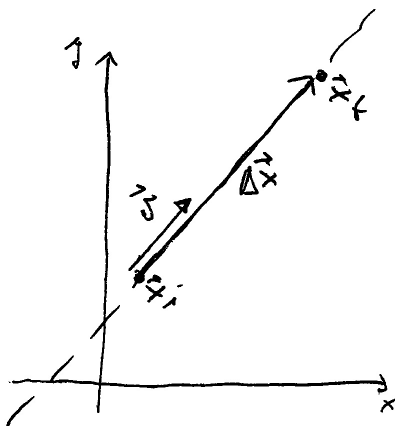


Figura 2.28: Il moto rettilineo uniforme avviene su una retta la cui direzione è individuata da \vec{v} .

moto è dunque effettivamente uni-dimensionale. Possiamo infatti scegliere nuovi assi cartesiani di modo che uno di essi, che potremmo denotare ad esempio come asse X , abbia la direzione ed il verso di \vec{v} : avremo così bisogno di una sola coordinata per individuare la posizione del punto lungo il moto. La legge oraria sarà semplicemente scrivibile come

$$X(t) = X_0 + v t. \quad (2.67)$$

Il grafico di questa legge oraria nel piano (X, t) è quello di una retta, vedi fig. 2.29. Risulta quindi evidente anche da ragionamenti geometrici (si-

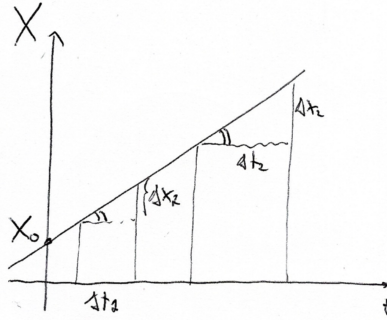


Figura 2.29: Nel moto rettilineo uniforme la velocità media è la stessa in ogni intervallo.

militudine di triangoli) che, per qualsiasi coppia di intervalli $\Delta t_1, \Delta t_2$ scelta, si ottiene sempre la stessa velocità media:

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta X_2}{\Delta t_2} = v . \quad (2.68)$$

Nella formulazione uni-dimensionale di eq. (2.67) è anche evidente che per il moto rettilineo uniforme ⁵, in ogni intervallo di moto, la velocità scalare media $v_{m,s}$ coincide con v :

$$v_{s,m} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{|\Delta X|}{\Delta t} = v . \quad (2.69)$$

Infine, siccome $\Delta X = v\Delta t$, si può notare, come descritto in fig. 2.30, che lo spazio percorso corrisponde all'area sottesa al grafico della velocità.

Esempio Consideriamo il caso di un moto rettilineo nel piano. La legge oraria, eq. (2.65), in componenti è espressa come

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t , \\ y(t) = y_0 + v_y t . \end{cases} \quad (2.70)$$

Ricavando t dalla prima relazione e sostituendolo nella seconda, si trova l'espressione della traiettoria nella forma

$$y(x) = y_0 + v_y \frac{x - x_0}{v_x} = y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 + \frac{v_y}{v_x} x . \quad (2.71)$$

Questa è l'equazione di una retta, vedi fig. 2.31a). L'angolo di pendenza α della

⁵Come per tutti i moti che avvengono lungo una retta senza inversioni di senso di percorrenza.

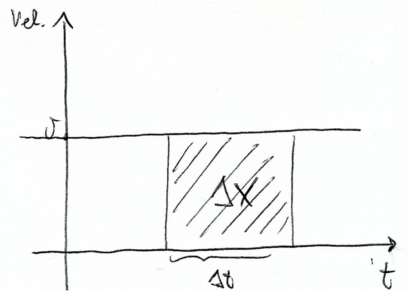


Figura 2.30: Nel moto rettilineo uniforme lo spazio percorso corrisponde all'area sottesa al grafico (costante) della velocità.

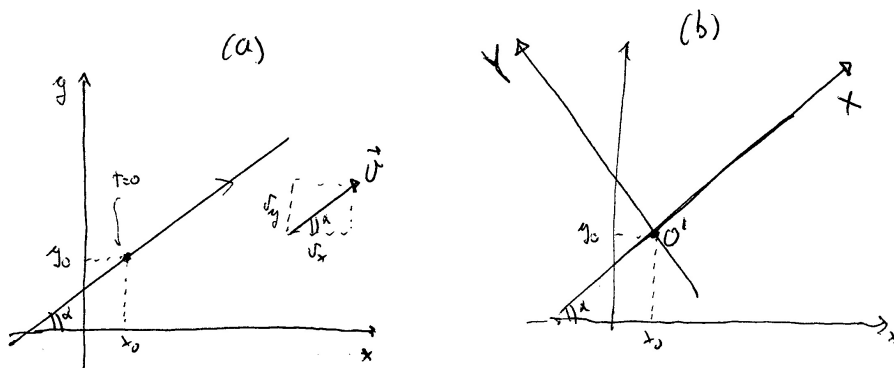


Figura 2.31: a) Traiettoria di un moto rettilineo uniforme nel piano (x, y) . b) Nel sistema di riferimento (X, Y) la descrizione del moto diviene sostanzialmente uni-dimensionale.

retta è dato da $\tan \alpha = v_y/v_x$, che equivale a

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v}; \quad (2.72)$$

infatti v_x e v_y sono le componenti del vettore \vec{v} lungo gli assi (x, y) , e sono quindi date da $v_x = v \cos \alpha$, $v_y = v \sin \alpha$, vedi eq. (2.16). Possiamo introdurre il nuovo sistema di riferimento con coordinate (X, Y) disegnato in fig. 2.31b), centrato nel punto O' di coordinate (x_0, y_0) e ruotato di un angolo α rispetto al vecchio sistema. Utilizzando le formule di passaggio tra S.R. relativamente roto-traslati date in eq. (2.4) nelle nuove coordinate (X, Y) la legge oraria è data da

$$X(t) = \cos \alpha (x(t) - x_0) + \sin \alpha (y(t) - y_0) = \frac{v_x}{v} v_x t + \frac{v_y}{v} v_y t = \frac{v_x^2 + v_y^2}{v} t \quad (2.73)$$

e

$$Y(t) = -\sin \alpha (x(t) - x_0) + \cos \alpha (y(t) - y_0) = -\frac{v_y}{v} v_x t + \frac{v_x}{v} v_y t, \quad (2.74)$$

cioè diviene semplicemente

$$\begin{cases} X(t) = vt, \\ Y(t) = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

Esercizio Al tempo $t_1 = 0$ s un punto si trova nella posizione $\vec{x}_1 = (1 \pm 0.1, 2 \pm 0.1)$ m nel piano (da ora in poi non scriviamo più le unità di misura). Al tempo $t_2 = (4 \pm 0.2)$ si trova nel punto $\vec{x}_2 = (9 \pm 0.1, 4 \pm 0.1)$. Sapendo che il moto è rettilineo uniforme, dove si troverà al tempo $t_3 = 10$? (Fornire la risposta con la stima della sua incertezza).

Esempio L'esempio seguente sull'uso delle leggi orarie del moto uniforme ha alcune pretese "culturali", parla infatti di filosofi greci...

La tartaruga parte dalla posizione $x = 0$ e si muove di moto rettilineo uniforme. Quando essa si trova in x_1 , parte da $x = 0$ Achille, con velocità doppia. Quando Achille giunge in x_1 , la tartaruga si è già spostata in una posizione x_2 . Quando Achille giunge in x_2 , la tartaruga è già in x_3 , e così via. Achille, pertanto, non raggiungerà mai la tartaruga.

(Libera parafrasi da Zenone l'Eleate). Vogliamo confutare tale affermazione e spiegare l'apparente ben noto paradosso. La legge oraria della tartaruga è

$$x_T(t) = vt, \quad (2.76)$$

dove v è la velocità della tartaruga. Essa dunque giunge in x_1 al tempo

$$t_1 = \frac{x_1}{v}. \quad (2.77)$$

A tale istante, Achille parte da $x = 0$. La legge del moto di Achille (valida per $t > t_1$) è dunque

$$x_A(t) = 2v(t - t_1) = 2v \left(t - \frac{x_1}{v} \right). \quad (2.78)$$

Infatti, la sua velocità è $2v$, e al tempo $t = t_1$ si deve trovare in 0. Achille raggiunge la tartaruga al tempo t_i in cui i due protagonisti si trovano nella stessa posizione, vedi fig. 2.32. Imponiamo dunque l'equazione

$$x_A(t_i) = x_T(t_i) \quad \Leftrightarrow \quad 2v \left(t_i - \frac{x_1}{v} \right) = vt_i \quad (2.79)$$

che determina immediatamente

$$t_i = \frac{2x_1}{v}. \quad (2.80)$$

In tale istante, la posizione dei due è (usando ad esempio la legge del moto della tartaruga)

$$x_i = x_T(t_i) = vt_i = 2x_1. \quad (2.81)$$

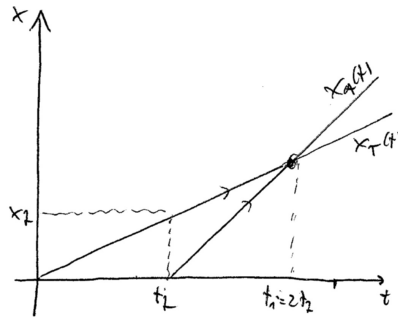


Figura 2.32: Grafico dei moti di Achille e della tartaruga.

Achille, dunque, raggiunge la tartaruga quando questa si trova nella posizione $2x_1$: Zenone ha torto (e ci mancherebbe!). Tuttavia, il suo ragionamento è in buona parte corretto. Non vi è contraddizione tra queste due affermazioni, vediamo perché. Consideriamo le posizioni della tartaruga e di Achille in istanti successivi, scelti come nel ragionamento di Zenone. Quando Achille raggiunge la posizione x_1 , la tartaruga (che va' alla metà della velocità di questo) ha percorso un tratto lungo $x_1/2$, e si trova quindi in $x_1 + x_1/2$. Quando Achille ha raggiunto questo punto percorrendo un tratto lungo $x_1/2$, la tartaruga ha fatto un'altro $x_1/4$, eccetera. Riportiamo in una tabella queste posizioni:

x_T	x_A
x_1	0
$x_1 + \frac{x_1}{2}$	x_1
$x_1 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4}$	$x_1 + \frac{x_1}{2}$
$x_1 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_1}{8}$	$x_1 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4}$
...	...

Le due posizioni possono diventare uguali se e solo se le somme vengono estese ad infiniti termini! Quindi, da questo punto di vista, Achille può raggiungere la tartaruga nel punto

$$x_i = x_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k . \quad (2.82)$$

Dal confronto con il risultato in eq. (2.81) ottenuto tramite le leggi del moto uniforme, possiamo dedurre che si deve avere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 2 . \quad (2.83)$$

In effetti, questo è un caso particolare della cosiddetta *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} , \quad \text{per } |q| < 1 . \quad (2.84)$$

Approssimazione di un moto generico con moti rettilinei uniformi

Consideriamo un moto, uni-dimensionale per semplicità, descritto da una generica legge oraria $x(t)$, tra gli istanti t_i e t_f . Come illustrato in fig. 2.33, una prima grossolana descrizione approssimata del moto è quella rappresentata da un moto rettilineo uniforme con velocità $v = v_m = \Delta x / \Delta t$. Esso

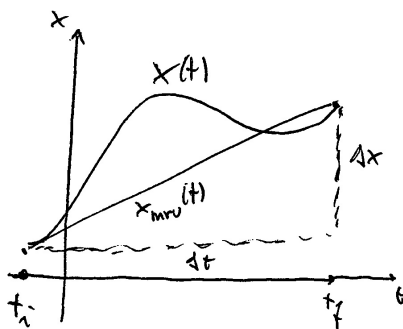


Figura 2.33: Un moto rettilineo uniforme con velocità v_m fornisce una cruda approssimazione del moto reale.

arriva e parte negli stessi punti del moto “vero”, impiegando lo stesso tempo, cioè ha gli stessi estremi nel piano (x, t) . Rappresentazioni via via più fedeli si ottengono suddividendo l’intervallo di moto Δt in tanti sotto-intervalli $\Delta t^{(i)} = t_{i+1} - t_i$ scegliendo dei tempi intermedi t_i ; denotiamo come x_i le posizioni $x(t_i)$, vedi fig. 2.34a). In ogni sotto-intervallo si calcola la velocità

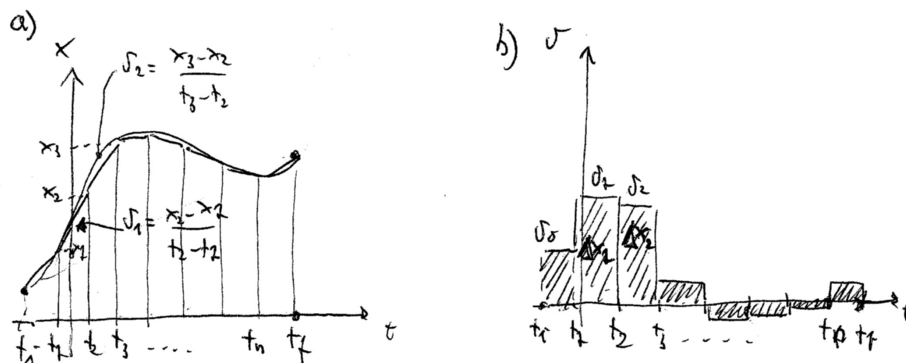


Figura 2.34: a) Suddividendo un moto in intervallini di moto uniforme si ottiene una migliore approssimazione del moto.

media

$$v^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.85)$$

e si utilizza la legge del moto uniforme con tale velocità. In pratica, si approssima il grafico della legge oraria $x(t)$ con una spezzata. Tale spezzata

si avvicina al moto reale quanto più rendiamo piccoli gli intervallini in cui suddividiamo il moto. Notiamo che, come rappresentato in fig. 2.34b), per il moto uniforme in ogni intervallino la relazione $\Delta x^{(i)} = v^{(i)} \Delta t^{(i)}$ ci dice che lo spostamento corrisponde all'area del rettangolo che sta sotto il grafico della velocità costante in tale intervallino. Ne consegue che lo spostamento totale $\Delta x = \sum_i \Delta x^{(i)}$ è l'area sottesa alla linea spezzata che descrive le velocità medie.

2.4 Velocità ed accelerazione

...

2.4.1 Velocità istantanea

Rimaniamo per semplicità nel contesto del moto uni-dimensionale. Procedendo come nel paragrafo precedente e scegliendo intervalli infinitesimi di suddivisione del moto, si ottiene una quantità che descrive istante per istante la rapidità del moto, detta *velocità istantanea*:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} . \quad (2.86)$$

La velocità istantanea, dunque, non è nient'altro che la derivata temporale della legge oraria. Come ben noto dall'analisi, e come risulta evidente se ci si immagina di scegliere nella figura 2.34 intervallini sempre più piccoli, il significato geometrico della derivata è legato alla *pendenza della retta tangente* alla curva in un punto. Se denotiamo come $\alpha(t)$ l'angolo che definisce la pendenza della retta tangente alla curva in $x(t)$, abbiamo

$$\tan \alpha(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v(t) . \quad (2.87)$$

Capitolo 3

Dinamica

La Dinamica si occupa delle cause del moto; più precisamente, come vedremo, si occupa di come le forze esercitate dall'esterno sugli oggetti ne varino lo stato di moto.

3.1 Concetto intuitivo e definizione operativa delle forze

E' nostra esperienza quotidiana che per mettere in moto un oggetto sia necessaria un'interazione. Quest'interazione può corrispondere a:

- una *forza di contatto*, ad esempio quella esercitata dalla mia mano che spinge la sedia;
- la presenza di un *campo di forza* cui l'oggetto risponde. Ad esempio, gli oggetti dotati di massa (quali le mele), presso la superficie della Terra, sono soggetti ad una *forza peso* e, se lasciati liberi, cadono.

In realtà, come discuteremo brevemente in seguito, non vi è una distinzione così netta tra i due casi. Le forze di contatto tra oggetti macroscopici hanno un'origine microscopica in forze a livello molecolare ed atomico che, a loro volta, sono dovute principalmente ai campi di forze di tipo elettrico indotti dalle cariche dei loro componenti elementari. Tuttavia, nell'analizzare fenomeni macroscopici, è conveniente mantenere questa distinzione. E' anche chiaro dalla nostra esperienza che una forza che, applicata ad un oggetto libero, ne cambia lo stato di moto, se applicata ad un oggetto vincolato ha un effetto statico di deformazione dell'oggetto stesso.

Definizione operativa - Misura di una forza La forza è una grandezza di cui abbiamo una buona intuizione. Dal punto di vista fisico, però, è necessario darne una definizione operativa. Deve essere possibile misurare le forze tramite il confronto con una unità campione di forza. Per fare ciò possiamo ricorrere all'effetto di deformazione che le forze inducono su di una molla, allungandola. Supponiamo di appendere, qui sulla superficie della Terra, un corpo all'estremità di una molla. Al corpo sappiamo che è applicata una forza peso; ora, tuttavia, il corpo non cade. In compenso la molla subisce una elongazione rispetto alla sua condizione di riposo, vedi fig. 3.1.

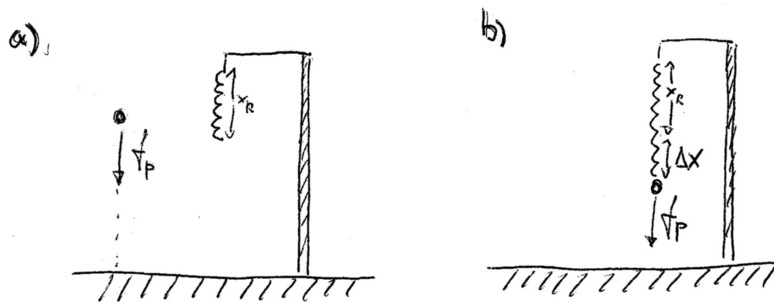


Figura 3.1: a) Un grave libero è soggetto ad una forza peso f_p che lo accelera verso il basso. b) Se appeso ad una molla, l'effetto della forza peso è di deformare la molla rispetto alla sua posizione di riposo x_R .

La legge di Hooke Corpi diversi, in generale, subiscono forze peso diverse e producono allungamenti diversi di una stessa molla. Supponiamo di avere una collezione di oggetti campione, ciascuno con una forza peso f_p , che producono il medesimo allungamento δx . Possiamo misurare l'allungamento totale Δx che si produce quando appendiamo n (due o più) di questi oggetti, che subiranno una forza peso totale $F_p = n f_p$, vedi fig. 3.2. Troviamo che (entro un certo limite, cioè prima che la molla si "snervi") si ha $\Delta x = n \delta x$. Possiamo dunque concludere che l'allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata (legge di Hooke):

$$\Delta x = k F , \quad (3.1)$$

dove k è una costante dimensionale che caratterizza la molla stessa.

Il dinamometro Questa proporzionalità ci permette di usare un *dinamometro*, cioè una molla opportunamente tarata, per misurare l'intensità delle forze, vedi fig. 3.3. Possiamo dichiarare che l'unità di forza corrisponde ad un certo allungamento del nostro dinamometro ed usare quest'ultimo come

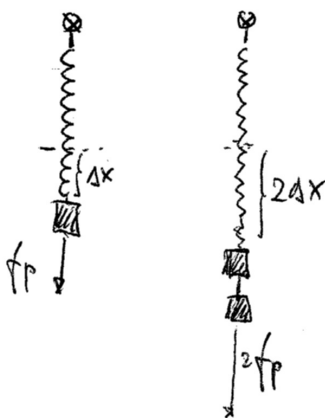


Figura 3.2: L'allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata.

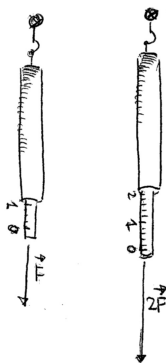


Figura 3.3: Dotando una molla di una scala per misurarne l'allungamento si ottiene uno strumento per misurare le forze applicate, detto dinamometro.

unità di misura dell'allungamento stesso in una scala graduata ¹. Se applicando al dinamometro una forza F leggiamo sulla scala dello strumento un allungamento pari a 2 unità, possiamo concludere che il modulo della forza applicata è 2, nella nostra unità.

Natura vettoriale delle forze. Somma di forze. Sperimentando con il dinamometro, è facile rendersi conto della natura *vettoriale* delle forze. infatti, come mostrato in fig. 3.4, si può anche tener conto della direzione in cui la forza applicata estende il dinamometro; in questo senso le forze applicate possono essere pensate come vettori. Se si confrontano, in questo quadro, le deformazioni prodotte da due forze \vec{F}_1 ed \vec{F}_2 con quella che si ottiene applicando entrambe le forze, si trova che la seconda corrisponde alla

¹In effetti, nel S.I. è definita un'unità di forza, il Newton, $1N = 1Kg\,m\,s^{-2}$. Quello che sarà conveniente fare è di usare come unità della scala l'allungamento prodotto da $1N$.

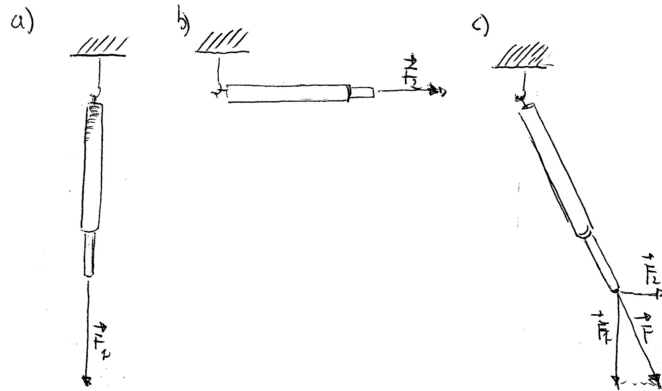


Figura 3.4: L'applicazione simultanea delle due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , tenendo conto anche della direzione di deformazione, porta allo stesso effetto della somma vettoriale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

deformazione prodotta dalla somma vettoriale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$: le forze dunque si comportano a tutti gli effetti come vettori. Spesso la somma vettoriale delle forze agenti su un corpo è detta la (forza) *risultante*.

3.2 Le leggi fondamentali del moto

Le forze applicate agli oggetti, ed in particolare ai punti materiali, ne variano lo stato di moto, in un modo che è codificato in tre leggi.

3.2.1 La prima legge del moto

Nell'esperienza quotidiana si può avere l'impressione che sia necessario applicare una forza per mantenere in moto un oggetto. Questa impressione è però dovuta al fatto che spesso vi sono forze di attrito (che discuteremo in seguito) che si oppongono al moto. In realtà un corpo non soggetto a forze (cioè un corpo non interagente) tende a mantenere il suo stato di moto: questo è il principio di inerzia formulato da Galileo. Tale principio è stato riformulato come "prima legge del moto" da Newton, e può venire espresso con più precisione come segue:

Se un corpo non interagisce con altri corpi è possibile trovare un sistema di riferimento in cui esso ha accelerazione nulla, e si muove pertanto di moto rettilineo uniforme.

Non si può semplicemente dire che un corpo non interagente si muove di moto rettilineo uniforme, perchè, come discusso nel capitolo precedente, il tipo di moto dipende dal sistema di riferimento usato.

Sistemi inerziali Un sistema di riferimento in cui un corpo non soggetto a forze non accelera è detto un *sistema inerziale*.

- Un S.R. in moto relativo uniforme rispetto ad un sistema inerziale è anch'esso inerziale. Infatti, dalle trasformazioni ... è chiaro l'accelerazione nel nuovo sistema resta nulla se lo era nel sistema inerziale.
- Un S.R. che si muove con velocità costante rispetto alle stelle lontane è la migliore approssimazione di sistema inerziale.
- La Terra non è un sistema inerziale, perchè rispetto ad un sistema come al punto precedente ha un moto relativo accelerato a causa di suoi moti di rivoluzione e rotazione. Tuttavia, per esperimenti relativi a moti in porzioni limitate di spazio sulla superficie terrestre, possiamo considerare un S.R. ancorato alla terra come sufficientemente inerziale perchè le accelerazioni di cui sopra sono abbastanza piccole e spesso trascurabili rispetto a quelle in gioco.

Riassumendo, la prima legge del moto dice che, quando su un corpo non agisce complessivamente alcuna forza, la sua accelerazione è nulla, se valutata in un sistema di riferimento inerziale.

3.2.2 La seconda legge del moto

La seconda legge del moto ci dice cosa avviene quando su di un corpo si ha una forza risultante \vec{F} non nulla: il corpo accelera, e l'accelerazione è direttamente proporzionale ad \vec{F} . Questo viene usualmente scritto nella forma

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (3.2)$$

Il coefficiente di proporzionalità m è detto *massa* (più precisamente, *massa inerziale*) del corpo. Esso rappresenta una caratteristica intrinseca di ogni corpo e può essere ricavato applicando una forza nota ad un corpo e misurandone la conseguente accelerazione.

La quantità di moto La seconda legge della dinamica, scritta nella forma (3.2), è valida quando la massa m è costante nel tempo. La si può però riscrivere in una forma diversa introducendo la *quantità di moto* di un corpo:

$$\vec{q} \equiv m\vec{v} . \quad (3.3)$$

La quantità di moto è un vettore avente direzione e verso del vettore velocità, e modulo $m|\vec{v}|$. In termini della quantità di moto, la seconda legge del moto si

può scrivere come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} . \quad (3.4)$$

Quando la massa è costante nel tempo, cioè quando $dm/dt = 0$, questa equazione si riduce alla (3.2); infatti, si ha in tal caso

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} . \quad (3.5)$$

Tuttavia, essa si applica anche al caso in cui la massa varii nel tempo.

Interpretazione della seconda legge del moto E' importante notare che l'eq. (3.2), o la (3.4), *non* va interpretata come una definizione della forza. L'equazione ha un contenuto non banale quando la forza \vec{F} applicata al corpo in una data posizione \vec{x} è nota. Allora, siccome $\vec{a} = d^2\vec{x}/d^2t$, si ha un'equazione differenziale per la legge oraria $\vec{x}(t)$. A volte l'equazione differenziale può essere molto semplice.

- Se la forza è nulla, $\vec{F} = \vec{0}$, l'eq. (3.2) ci dice che il punto non accelera, e si muove dunque di moto rettilineo uniforme.
- Se la forza \vec{F} è indipendente dalla posizione, come ad esempio avviene (con ottima approssimazione) è per un corpo in caduta libera in prossimità della superficie terrestre, che è soggetto alla forza peso, l'eq. (3.2) ci dice che un corpo di massa costante ha un'accelerazione costante, e si muove quindi di moto uniformemente accelerato.

3.2.3 Un'applicazione importante: il moto armonico

In altre situazioni, la forza applicata dipende dalla posizione. Un esempio semplice ma molto importante è quello in cui un oggetto è collegato all'estremità di una molla, vedi fig. 3.5, e lasciato libero di muoversi. Per semplicità

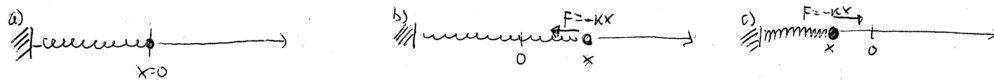


Figura 3.5: a) consideriamo una molla la cui posizione di riposo corrisponde ad $x = 0$. Un punto materiale attaccato all'estremità di una molla è soggetto ad una forza $F = -kx$, dove x corrisponde b) all'elongazione o c) alla compressione della molla stessa.

consideriamo il caso in cui l'oggetto è vincolato a muoversi in una direzione

sola. Abbiamo detto prima, vedi eq. (3.1), che per mantenere una molla allungata ² di un tratto x è necessario applicare una forza esterna $F_{\text{ext}} = kx$. Questo significa che la molla così allungata esercita una forza di richiamo opposta

$$F(x) = -kx . \quad (3.6)$$

Si trova, con buona approssimazione, che tale espressione è valida anche per $x < 0$: quando la molla è compressa essa esercita una forza tendente a riportare l'estremo nella sua posizione di riposo il cui modulo è dato da $k|x|$, con k la stessa costante di Hooke che appare nel caso dell'allungazione. A questo punto, per un punto materiale di massa m collegato all'estremo di una molla e lasciato libero di muoversi, la seconda legge del moto, eq. (3.2), diviene l'equazione differenziale

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) . \quad (3.7)$$

Poniamo

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} . \quad (3.8)$$

La costante ω ha le dimensioni di t^{-1} , cioè di frequenza. L'equazione del moto diviene quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 , \quad (3.9)$$

cioè un'equazione differenziale lineare del second'ordine, omogenea e a coefficienti costanti. La soluzione generica può essere scritta come ³

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t , \quad (3.10)$$

con A e B costanti arbitrarie. Tali costanti possono essere fissate imponendo le "condizioni iniziali" del moto, ovverossia il valore della posizione x_0 e della velocità v_0 al tempo ⁴ $t = 0$. Siccome dall'eq. (3.10) segue che

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t , \quad (3.11)$$

le condizioni iniziali sono

$$x_0 = A , \quad v_0 = \omega B . \quad (3.12)$$

²Scogliamo dunque un sistema di coordinate in cui $x = 0$ quando l'estremo della molla si trova nella posizione di riposo.

³Oppure come $x(t) = c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}$.

⁴Potremmo scegliere un qualsiasi altro istante per fissare questo tipo di condizioni.

La legge oraria eq. (3.10) si può quindi esprimere come

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t , \quad (3.13)$$

o anche come

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) , \quad (3.14)$$

dove la costante C e l'angolo ϕ sono legate a x_0 e v_0 dalle relazioni (mostrarle!)

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} , \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} . \quad (3.15)$$

Il moto descritto da questa legge oraria è *periodico*. Definiamo infatti il *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} , \quad (3.16)$$

che ha le dimensioni di un tempo siccome ω e una frequenza (cioè $[t^{-1}]$). Si ha allora

$$x(t + T) = x(t) , \quad (3.17)$$

e similmente per la velocità. Dopo un periodo, il punto si ritrova nella stessa posizione con la stessa velocità. In fig. 3.6 vengono rappresentati i grafici

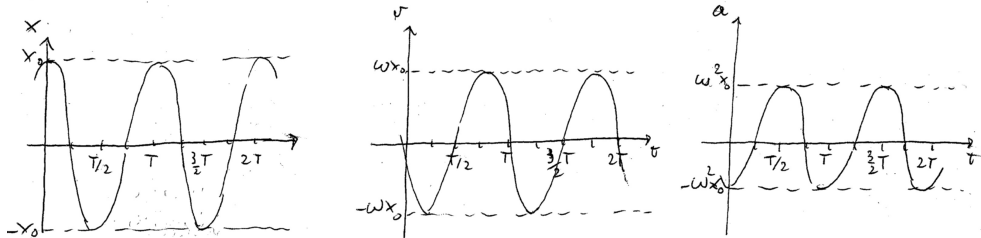


Figura 3.6: Grafico di allungamento, velocità ed accelerazione nel moto armonico $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Si ha $T = 2\pi/\omega$.

della legge oraria, della velocità e dell'accelerazione del moto armonico, nel caso particolare in cui $v_0 = 0$.

3.2.4 La terza legge del moto

Le forze sono sempre interazioni tra oggetti diversi. La terza legge del moto di Newton dice che per due corpi interagenti

la forza \vec{F}_{12} esercitata dal corpo 1 sul corpo 2 è opposta alla forza \vec{F}_{21} esercitata dal corpo 2 sul corpo 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (3.18)$$

Alcune osservazioni:

- le forze si presentano in coppie: ad una forza di azione si contrappone sempre una forza di reazione.
- Le forze di azione e reazione, che sono dello stesso tipo, agiscono però su due oggetti diversi.

Esempio Ad esempio, la forza che agisce su un oggetto (O) in caduta libera è la forza di gravità esercitata dalla Terra (T) sull'oggetto stesso, \vec{F}_{TO} , di modulo mg , dove m è la massa dell'oggetto e g l'accelerazione di gravità. La forza di reazione $\vec{F}_{OT} = -\vec{F}_{TO}$ è l'attrazione gravitazionale esercitata dall'oggetto sulla Terra, vedi fig. 3.7. Essa ha lo stesso modulo mg , ma induce un'accelerazione del

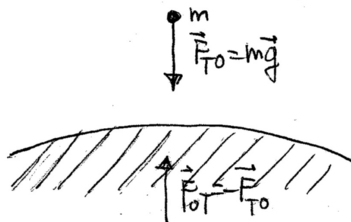


Figura 3.7: Azione e reazione tra un oggetto massivo e la Terra.

tutto trascurabile della Terra: infatti dall'eq. (3.2) si avrebbe $\vec{a}_T = \vec{F}_{OT}/M_T$, dove M_T è la massa della Terra, che è molto grande.

Piano inclinato Consideriamo un piano inclinato come in figura 3.8. Poniamo su di esso un oggetto di massa m che consideriamo poter scivolare sul piano senza impedimenti (in altre parole, trascuriamo la presenza di attrito, che considereremo invece in seguito). Conviene analizzare la situazione

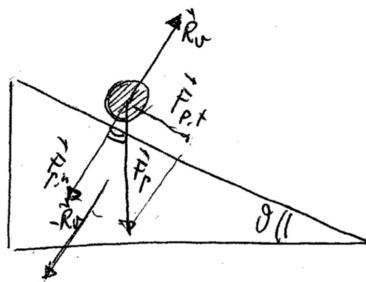


Figura 3.8: Forze e reazioni vincolari in un piano inclinato.

(che schematizziamo come bi-dimensionale trascurando la larghezza del piano inclinato) rispetto ad un sistema di assi ortogonali diretti l'uno lungo il

piano inclinato, l'altro normalmente ad esso. Sull'oggetto agisce la forza peso $\vec{F}_p = m\vec{g}$, diretta verso il basso. Se scomponiamo la forza peso nelle sue componenti tangenziali e normali al piano abbiamo

$$F_{p,t} = F_p \sin \theta = m g \sin \theta , \quad F_{p,n} = F_p \cos \theta = m g \cos \theta . \quad (3.19)$$

L'oggetto ha accelerazione nulla lungo la direzione normale (esso non penetra nella superficie del piano inclinato), pertanto vi è una forza di reazione vincolare \vec{R}_v esercitata dal piano sull'oggetto che annulla la componente normale della forza peso. In modulo, dunque, $R_v = F_{p,n}$. La terza legge del moto implica che anche l'oggetto esercita sul piano una forza, uguale ed opposta a \vec{R}_v . Questa, dato che il piano inclinato non accelera, è a sua volta contro-bilanciata da reazioni vincolari esercitate sul piano dalle superfici cui esso è vincolato. La componente tangenziale $F_{p,t}$ non è invece bilanciata da alcuna reazione vincolare. L'oggetto dunque si muove lungo il piano inclinato sotto l'azione di $F_{p,n}$ con un'accelerazione a determinata dalla seconda legge del moto:

$$m a = F_{p,t} = m g \sin \theta , \quad (3.20)$$

da cui $a = g \sin \theta$.

3.3 Alcuni tipi di forze macroscopiche e loro caratteristiche

Nella descrizione della dinamica di oggetti macroscopici si fa uso di un gran numero di idealizzazioni, a molti livelli. Nella *dinamica del punto materiale* si considera un intero oggetto come un solo punto materiale, di massa pari a quella dell'oggetto: ci si concentra sul suo moto, sotto l'influenza di forze esterne, come un tutt'uno e si trascurano tutti i suoi moti di rotazione, le sue deformazioni eccetera. Nella *dinamica del corpo rigido* si raffina la descrizione, e si tiene conto della forma dell'oggetto (descritta in modo idealizzato in termini di forme geometriche semplici) e dei moti di rotazione su se stesso. I corpi però non sono totalmente rigidi, e per tener conto delle deformazioni bisogna affinare ulteriormente la descrizione. Inoltre, cercando di essere sempre più precisi, i corpi non sono generalmente omogenei, e se si scende a livello microscopico anche i corpi costituiti da una sola sostanza chimica hanno una struttura discreta molecolare ed atomica. Insomma, la descrizione fisica della dinamica macroscopica è una descrizione efficace ottenuta tramite un modello idealizzato. Il livello di idealizzazione va scelto in base all'obiettivo che si ha nello studio di un dato fenomeno. Anche la descrizione delle forze agenti sugli oggetti macroscopici è in generale approssimata ed efficace; l'importante è che sia adeguata al problema che ci si pone.

Forze macroscopiche e microscopiche Le forze macroscopiche risultano in modo estremamente complicato da forze microscopiche che agiscono a livello molecolare e atomico. La descrizione precisa di queste ultime necessita in realtà di una descrizione quantistica. Esse nascono principalmente come effetto dei campi di forze elettriche tra i costituenti elementari. Dunque, le forze di contatto si riconducono all'effetto di campi di forze, e non c'è una distinzione intrinseca netta tra i due casi. Tuttavia, è spesso impraticabile ricondurre le forze alle loro origini microscopiche, e conviene considerarle in modo approssimato/idealizzato. Questo discorso vale, ad esempio, per le forze di attrito.

3.3.1 Forze d'attrito

Consideriamo il moto di un oggetto che avviene a contatto di una superficie cui è fatto aderire da una forza "premente" \vec{N} normale alla superficie stessa (ad esempio, una cassa che viene trascinata sul pavimento). A causa delle irregolarità delle superfici a contatto e delle interazioni a livello microscopico tra i componenti dei due materiali, si viene a creare una forza, detta *forza*

d'attrito, che si oppone al moto dell'oggetto relativo alla superficie su cui scorre.

Attrito statico Supponiamo che l'oggetto sia fermo rispetto alla superficie. Applicando una forza \vec{F} parallela alla superficie, la cui intensità viene gradualmente aumentata, si trova che:

- inizialmente, cioè per $F = |\vec{F}|$ piccolo, l'oggetto non si muove. Per la seconda legge del moto, ciò significa che si crea una *forza di attrito statico* $\vec{f}_s = -\vec{F}$, cosicché la forza totale applicata all'oggetto è nulla ed esso non accelera.
- Quando l'intensità della forza applicata F supera un certo valore $f_{s,max}$, l'oggetto inizia a muoversi: $f_{s,max}$ è dunque la massima intensità raggiungibile dalla forza d'attrito statico. Sperimentalmente si trova che $f_{s,max}$ dipende linearmente dal modulo della forza normale:

$$f_{s,max} = \mu_s N . \quad (3.21)$$

Il coefficiente di proporzionalità μ_s , detto *coefficiente di attrito statico*, dipende dalla natura delle superfici a contatto, dalla loro rugosità e anche dalla loro composizione chimica.

Attrito dinamico Quando il corpo si è messo in moto, la forza di attrito non scompare: si ha una *forza di attrito dinamico* \vec{f}_d , il cui modulo assume tipicamente un valore inferiore ad $f_{s,max}$. Questa forza si oppone al moto relativo tra le due superfici, e quindi la forza totale agente sull'oggetto, che ne determina l'accelerazione, è $\vec{F} - \vec{f}_d$. Si trova sperimentalmente che l'intensità di tale forza è direttamente proporzionale alla forza premente:

$$f_d = \mu_d N . \quad (3.22)$$

Il coefficiente di proporzionalità μ_d , è detto *coefficiente di attrito dinamico* e dipende dalla natura delle superfici a contatto, in particolare dalla loro rugosità e dalla loro composizione chimica.

Piano inclinato scabro Consideriamo un semplice apparato, che può essere utilizzato per valutare i coefficienti di attrito, consistente di un piano inclinato di cui sia possibile variare l'angolo di inclinazione θ , vedi fig. 3.9. Sul piano inclinato viene appoggiato un'oggetto di massa m , che si appoggia sul piano tramite una superficie di contatto. In assenza di attrito, l'oggetto scivolerebbe per qualsiasi valore di θ , con un'accelerazione $g \sin \theta$ dovuta alla

componente della forza peso diretta lungo il piano inclinato, vedi eq. (3.20). In presenza di attrito, supponiamo di incrementare gradualmente l'inclina-

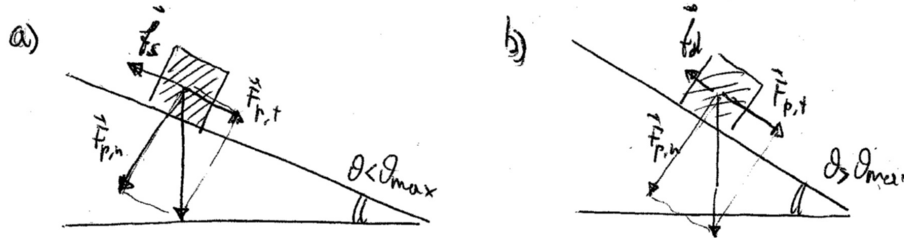


Figura 3.9: Piano inclinato scabro. a) Per inclinazioni $\theta < \theta_{max}$ la forza di attrito statico compensa la componente tangenziale della forza peso e il blocco non si muove. b) per $\theta > \theta_{max}$ la forza di attrito dinamico la compensa solo parzialmente e il blocco accelera, ma meno che in assenza di attrito.

zione del piano a partire. Inizialmente, per piccoli θ , la forza di attrito statico compensa la componente tangenziale della forza peso: in modulo,

$$f_s = F_{p,t} = m g \sin \theta \quad (3.23)$$

e il blocco non si muove, fino ad un angolo massimo θ_{max} per il quale il blocco si mette in movimento. In tale situazione, da un lato $f_{s,max} = m g \sin \theta_{max}$. Dall'altro, l'eq. (3.21) ci dice che $f_{s,max}$ è proporzionale alla forza premente, cioè alla componente normale della forza peso:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{p,n} = m g \cos \theta_{max} . \quad (3.24)$$

Confrontando le due espressioni di $f_{s,max}$ troviamo che

$$\mu_s = \tan \theta_{max} . \quad (3.25)$$

Per angoli maggiori di θ_{max} , il blocco scivola sotto l'azione di una forza totale nella direzione tangenziale al piano data da

$$F_{p,t} - f_d = F_{p,t} - \mu_d F_{p,n} = m g \sin \theta - \mu_d m g \cos \theta . \quad (3.26)$$

Se, tramite un opportuno apparato, riusciamo a determinare per quale valore θ_u dell'angolo il blocco, una volta messo in moto, scende di moto uniforme, allora dalla seconda legge del moto sappiamo che per tale valore la forza totale in eq.(3.26) si annulla, e quindi si ha

$$\mu_d = \tan \theta_u . \quad (3.27)$$

3.3.2 Forze di resistenza dipendenti dalla velocità

Gli oggetti macroscopici non si muovono generalmente (per lo meno, qui sulla superficie della Terra) nel vuoto, ma si trovano immersi in fluidi (nell'aria, o liquidi). Durante il loro moto, dunque, interagiscono con il mezzo in cui si trovano. Si crea così, in modo generalmente molto complicato a partire dalle interazioni microscopiche, una forza efficace, agente sull'oggetto, che si oppone al moto e che tipicamente dipende dalla velocità del corpo relativa al mezzo.

Moto in un fluido viscoso Un oggetto in moto all'interno di un fluido viscoso, vedi fig. 3.10 con velocità non troppo elevate, subisce una forza efficace, che si oppone al moto, proporzionale ⁵ alla velocità stessa:

$$\vec{F}_r = -k\vec{v}. \quad (3.28)$$

Questa relazione si applica anche a corpi molto piccoli (quali particelle di polvere) in moto nell'aria. Consideriamo il caso in cui il corpo sia libero di

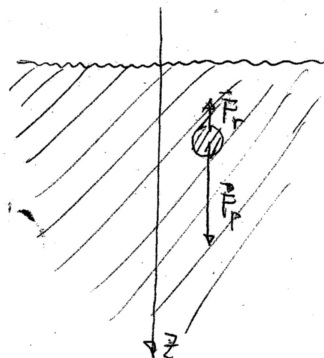


Figura 3.10: Un oggetto scende in un fluido viscoso subisce una forza resistente \vec{F}_r proporzionale alla velocità.

cadere nel fluido sotto l'influsso della sua forza peso $\vec{F}_p = m\vec{g}$. Consideriamo il problema come uni-dimensionale, considerando solo la direzione verticale z (orientata come in figura 3.10) e la velocità $v = v_z$. La seconda legge della dinamica eq. (3.2) ci dice che

$$m \frac{dv}{dt} = F_r + F_p = -kv + mg. \quad (3.29)$$

⁵Se il corpo è una sfera di raggio R si trova che il coefficiente $k = 6\pi R\eta$, dove η è un parametro caratteristico del fluido, detto viscosità.

Quest'equazione differenziale è della stessa forma di quella risolta in sez. ??, vedi eq. (??); in tal caso l'analogo ruolo dell'attrito viscoso era giocato dalla Tobin tax. La soluzione corrisponde dunque (mutatis mutandis) all'eq. (??):

$$v(t) = \frac{m g}{k} \left(1 - e^{-\frac{k t}{m}} \right) ; \quad (3.30)$$

il grafico di questa soluzione è disegnato in fig. 3.11. Notiamo che il corpo,

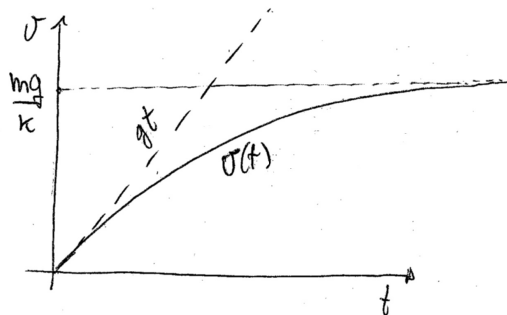


Figura 3.11: Il profilo temporale della velocità $v(t)$ in eq. (3.30).

col tempo, raggiunge una velocità limite costante:

$$v_l = \frac{m g}{k} . \quad (3.31)$$

Alla velocità limite v_l il membro di destra dell'eq. (3.29) si annullerebbe. Si annullerebbe quindi la sua derivata, quindi la velocità non cambierebbe più.

Resistenza dell'aria Per oggetti estesi in movimento (che supponiamo per semplicità rettilineo, quindi unidimensionale) nell'aria (o in altri fluidi gassosi) si trova sperimentalmente che, perlomeno in un regime di velocità abbastanza ampio, essi subiscono una forza che si oppone al moto il cui modulo è proporzionale al quadrato della velocità:

$$F_r = -c v^2 . \quad (3.32)$$

Consideriamo il caso in cui un oggetto sia in caduta libera nell'aria (per semplicità, con velocità iniziale nulla). La legge del moto è, in totale analogia all'eq. (3.29),

$$m \frac{dv}{dt} = F_r + F_p = -c v^2 + m g . \quad (3.33)$$

Anche in questo caso, l'effetto della forza frenante è di far sì che la velocità, invece di aumentare indefinitamente, come avverrebbe sotto la sola azione della forza peso, raggiunga una velocità limite v_l . Come discusso dopo eq.

(3.31), la velocità limite è quella per cui il membro di destra dell'eq. (3.33) si annulla, e nel caso presente è dunque data da

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} . \quad (3.34)$$

L'equazione (3.33) è a variabili separabili:

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} = dt . \quad (3.35)$$

Con la condizione iniziale che $v(0) = 0$, risolviamo integrando tra $t = 0$ e t nella variabile temporale ⁶ e tra 0 e v nel membro di sinistra:

$$\frac{1}{g} \int_0^v \frac{d\tilde{v}}{1 - \frac{c}{mg}v^2} = \int_0^t d\tilde{t} = t . \quad (3.36)$$

Cambiamo variabile di integrazione introducendo $y = \sqrt{c/gm} \tilde{v}$; il membro

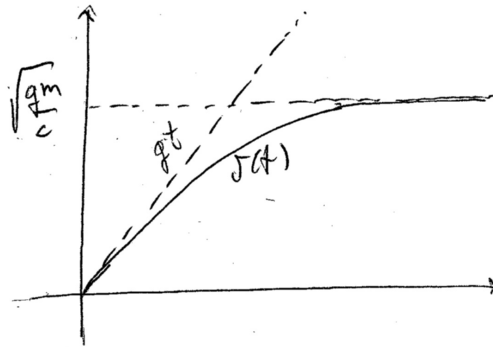


Figura 3.12: Il profilo temporale della velocità $v(t)$ in eq. (3.39).

di sinistra diviene

$$\sqrt{\frac{m}{gc}} \int_0^{\sqrt{\frac{c}{gm}}v} \frac{dy}{1 - y^2} = \sqrt{\frac{m}{gc}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c}{gm}}v \right) . \quad (3.37)$$

Abbiamo dunque

$$\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c}{gm}}v \right) = \sqrt{\frac{gc}{m}}t , \quad (3.38)$$

da cui la soluzione

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gc}{m}}t \right) . \quad (3.39)$$

Il grafico di questa funzione è riportato in fig. 3.12.

⁶Per evitare confusioni, rinominiamo le variabili di integrazione come \tilde{t} e \tilde{v} .

3.4 Origine microscopica delle forze macroscopiche e interazioni elettriche

La distinzione netta tra forze di contatto e campi di forza che si verifica a livello macroscopico è in realtà un effetto della estrema complicazione degli oggetti macroscopici in termini dei loro costituenti elementari. A livello di questi ultimi, le interazioni sono dovute a campi di forze. In particolare, la grande maggioranza dei fenomeni emergenti a livello macroscopico hanno la loro origine microscopica nelle *interazioni elettromagnetiche* di tali componenti elementari.

3.4.1 Cariche elettriche e forze coulombiane

Nel corso dei secoli si è scoperto che vi sono alcuni effetti di interazione a distanza tra oggetti macroscopici che non sono riconducibili all'interazione gravitazionale, e non dipendono quindi dalla massa degli oggetti, ma da un'altra proprietà detta "carica elettrica". Gli oggetti macroscopici hanno usualmente carica elettrica totale nulla, cioè sono "neutri", ed è per questo che le forze elettrostatiche non sono state immediate da individuare e descrivere anche se l'interazione elettromagnetica tra i costituenti fondamentali è enormemente più forte di quella gravitazionale. Tuttavia, tramite procedimenti anche semplici, quali ad esempio lo strofinio, alcuni materiali acquistano una carica elettrica. Ad esempio, dopo aver strofinato due bacchette di vetro sulla seta, esse si *respingono* tramite un'interazione a distanza. Similmente si respingono due bacchette di bachelite caricate per strofinio. Tuttavia una bacchetta di vetro ed una di bachelite, cariche, si *attraggono*. Sperimentando con altri materiali carichi per strofinio, si è trovato che essi o attraggono o respingono il vetro, e si comportano in modo opposto con la bachelite.

Proprietà fondamentali della carica elettrica Tramite queste ed altre esperienze più precise e sofisticate si è dunque stabilito che

- esistono in natura cariche elettriche di due tipi diversi. Cariche elettriche dello stesso tipo si respingono, di tipi opposti si attraggono.

Con esperimenti via via più raffinati si sono scoperte altre proprietà della carica elettrica. In particolare

- la carica elettrica è additiva, ma nella somma le cariche di tipo opposto vanno considerate con segno opposto: si hanno dunque cariche *positive* e *negative*. Notiamo che ciò implica che si possono formare aggregati

di cariche positive e negative globalmente neutri, cioè con carica totale $Q = \sum q_i = 0$. Questo è quanto avviene normalmente in un atomo, che è composto da elettroni e protoni, aventi carica opposta, in numero uguale, oltre che da neutroni di carica nulla. La materia ordinaria, composta di atomi, è dunque neutra. Tuttavia, è relativamente facile strappare alcuni elettroni agli atomi e certi procedimenti quali lo strofinio possono appunto provocare la migrazione di un certo numero di elettroni da un materiale all'altro, creando nell'uno un eccesso di cariche positive, nell'altro di cariche negative.

- La carica elettrica è conservata: in un sistema isolato, la carica totale Q è costante.
- La carica totale è *quantizzata*: tutte le cariche elettriche in natura sono multipli interi (relativi) di una unità fondamentale di carica e , pari al modulo della carica di un elettrone o un protone. Convenzionalmente, la carica dell'elettrone è considerata negativa: $q_{el} = -e$; quella del protone è opposta a quella dell'elettrone: $q_{prot} = e$.

Unità di misura nel S.I. Tramite vari tipi di effetti che la carica elettrica produce, è possibile darne una definizione operativa come grandezza fisica. Nel S.I. la carica è definita come grandezza derivata dalla corrente elettrica (grandezza che per ora non abbiamo ancora discusso), basandosi sul fatto che la carica q trasferita in un certo intervallo di tempo da una data corrente $j(t)$ è l'integrale della corrente nell'intervallo in questione:

$$q = \int dt j(t) . \quad (3.40)$$

Della corrente si dà nel S.I. una definizione operativa, e quindi una definizione di unità fondamentale, tramite la forza che si crea tra due conduttori paralleli attraversati da corrente. L'unità di misura della corrente nel S.I. è detta *ampere* (A). L'unità derivata per la carica è il *Coulomb* (C), con $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$. Questa unità corrisponde ad una quantità di carica piuttosto elevata rispetto a quelle in gioco in molti semplici fenomeni elettrici; ad esempio, l'ordine di grandezza della carica acquistata per strofinio da una bacchetta di bachelite è di 10^{-6} C . La carica elementare e , espressa in coulomb, è piccolissima:

$$e = 1.6021765 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (3.41)$$

In altri termini, 1 C corrisponde alla carica di un numero enorme, circa 6.25×10^{18} , di portatori elementari di carica (elettroni).

La forza di attrazione coulombiana Apparati sperimentali quali la bilancia di torsione hanno consentito di valutare sperimentalmente la forza di attrazione o repulsione tra le cariche elettriche. Si è trovato che due oggetti idealizzabili come puntiformi, dotati di cariche q_1 e q_2 , esercitano reciprocamente una forza. La forza esercitata dalla carica q_1 sulla carica q_2 vale

$$\vec{F}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} , \quad (3.42)$$

dove $\vec{r}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ è il vettore spostamento dalla posizione della prima carica \vec{x}_1 a quella della seconda, \vec{x}_2 ; $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ è il suo modulo (la distanza tra le cariche) e $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ il versore corrispondente, vedi fig. 3.13. Infine, k_e è una costante ⁷ che dipende dal sistema di unità di misura scelto. Nel S.I., con le forze espresse in Newton, la cariche in Coulomb e le distanze in metri, si ha

$$k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 . \quad (3.43)$$

(Esercizio: controllate la correttezza dimensionale di quest'espressione). Si

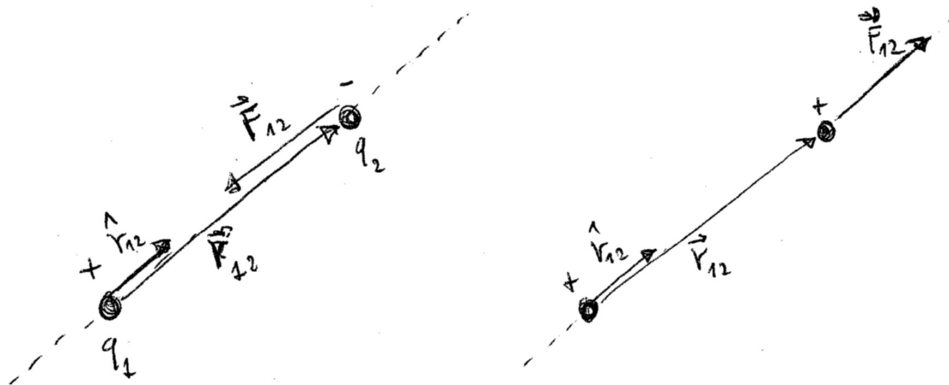


Figura 3.13: Forza coulombiana tra due cariche di segno discordi o concordi.

ha, per il principio di azione e reazione, che la forza esercitata da q_2 su q_1 vale $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Come rappresentato in figura 3.13,

- se q_1 e q_2 hanno segni opposti, la forza è attrattiva (tende a far diminuire la distanza):

$$\vec{F}_{12} = -k_e \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} . \quad (3.44)$$

- Se le cariche hanno lo stesso segno, essa è invece repulsiva:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} . \quad (3.45)$$

⁷La costante di Coulomb k_e viene anche spesso espressa come $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ in termini di un'altra costante ϵ_0 detta "costante dielettrica del vuoto".

Addività delle forze coulombiane La forza coulombiana è additiva nel senso della somma vettoriale. Dato un'insieme di cariche puntiformi q_i , con $i = 1, \dots, n$, la forza esercitata su una di esse, diciamo q_j , è data dalla somma vettoriale delle forze coulombiane esercitate su di essa da tutte le altre cariche:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = k_e q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ji}^2} \hat{r}_{ji}, \quad (3.46)$$

dove \vec{r}_{ij} è il vettore spostamento dalla posizione di q_i a quella di q_j .

Esercizio Consideriamo tre cariche uguali positive $q = 2 \times 10^{-6}$ C poste ai lati di un triangolo equilatero di lato $l = 0.1$ m. Quale forza agisce su ciascuna di esse? Con riferimento alla fig. 3.14, consideriamo la forza agente sulla carica 3; quella sulle altre due cariche è ricavabile per analogia. Le forze \vec{F}_{13} e \vec{F}_{23} agenti su di

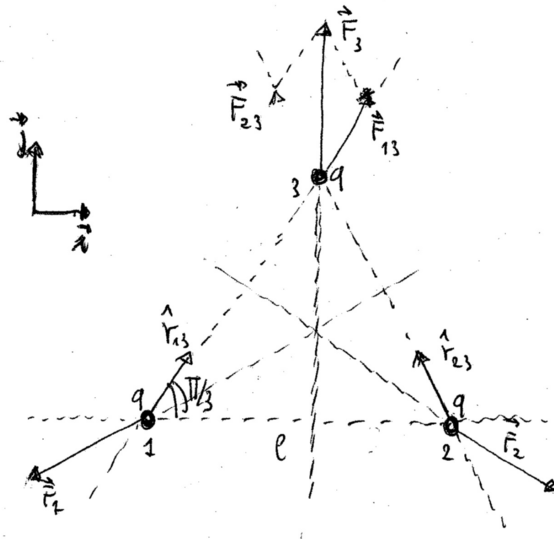


Figura 3.14: Forze coulombiane in una configurazione di cariche uguali poste ai vertici di un triangolo equilatero.

essa hanno lo stesso modulo

$$F = |\vec{F}_{13}| = |\vec{F}_{23}| = k_e \frac{q^2}{l^2}. \quad (3.47)$$

I versori \hat{r}_{13} e \hat{r}_{23} hanno componenti orizzontali opposte e componenti verticali uguali:

$$\hat{r}_{13} = \cos \frac{\pi}{3} \hat{i} + \sin \frac{\pi}{3} \hat{j} = \frac{1}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j}, \quad \hat{r}_{23} = \cos \frac{2\pi}{3} \hat{i} + \sin \frac{2\pi}{3} \hat{j} = -\frac{1}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j}. \quad (3.48)$$

La forza \vec{F}_3 risultante sulla carica 3 è dunque diretta verticalmente:

$$\begin{aligned}\vec{F}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = F(\hat{r}_{13} + \hat{r}_{23}) = \sqrt{3}F\vec{j} = \sqrt{3}k_e \frac{q^2}{l^2}\vec{j} \\ &= \sqrt{3} \times 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{4 \times 10^{-12} \text{ C}^2}{\times 10^{-2} \text{ m}^2} \vec{j} = 6.23 \text{ N } \vec{j} .\end{aligned}\quad (3.49)$$

Le forze agenti sulla cariche 1 e 2 rispettivamente sono uguali in modulo, e dirette lungo i versori che si ottengono ruotando \vec{j} di, rispettivamente, $2\pi/3$ e $4\pi/3$.

3.4.2 Il campo elettrico

Data una distribuzione di cariche q_i poste nei punti P_i , (dette cariche “sorgenti”), una qualsiasi carica “di prova” q , che supponiamo piccola per far sì che la sua presenza non possa alterare la distribuzione delle cariche sorgenti, posta in un punto P , subisce una forza coulombiana $\vec{F}_q(P)$, diversa da punto a punto, dovuta alla sua interazione con le cariche sorgenti e proporzionale alla carica q stessa, vedi le eq. (3.42,3.46). Similmente avverrebbe per un'altra carica di prova q' posta nello stesso punto, che subirebbe una forza proporzionale a q' ma per il resto uguale a quella subita dalla carica q :

$$\vec{F}_{q'}(P) = q' \frac{\vec{F}_q(P)}{q} . \quad (3.50)$$

Possiamo quindi interpretare la situazione come segue. Le cariche sorgenti generano un *campo elettrico* $\vec{E}(P)$ corrispondente alla forza per unità di carica subita da una piccola carica di prova ⁸ posta nel punto P :

$$\vec{E}(P) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(P)}{q} . \quad (3.51)$$

In presenza del campo elettrico generato dalle sorgenti, una qualsiasi ulteriore carica q' , posta nel punto P , subisce una forza

$$\vec{F}_{q'} = q' \vec{E}(P) . \quad (3.52)$$

Notiamo che la forza ha la direzione del campo elettrico, ma verso uguale od opposto a seconda del segno della carica q' . Nel caso in cui le cariche sorgenti siano puntiformi, dall'eq. (3.46) e dalla definizione (3.51) segue che

$$\vec{E}(P) = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_{iP}^2} \hat{r}_{iP} , \quad (3.53)$$

dove $\vec{r}_{iP} = \overline{P_i P}$ è il vettore spostamento dalla posizione P_i della i -ma carica al punto P , r_{iP} il suo modulo e \hat{r}_{iP} il versore corrispondente.

⁸Questa è la ragione del limite $q \rightarrow 0$ che si è inserito nell'eq. (3.51)

Campi vettoriali Il campo elettrico $\vec{E}(P)$ è un *campo vettoriale*, ovvero esso corrisponde all'assegnazione di un vettore in ogni punto P dello spazio, vedi fig. 3.15:

$$P \mapsto \vec{E}(P) . \quad (3.54)$$

Il vettore \vec{E} può essere descritto tramite le sue componenti rispetto ad una

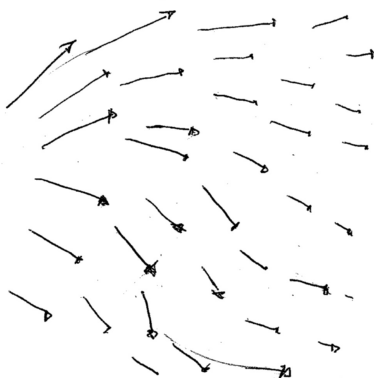


Figura 3.15: Un campo vettoriale assegna un vettore ad ogni punto dello spazio.

base fissata, ad esempio scrivendo $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$. Al punto P dello spazio possiamo associare delle coordinate, ad esempio delle coordinate cartesiane: $P \leftrightarrow (x, y, z)$, equivalenti al vettore spostamento \vec{x} , o qualsiasi altra terma di coordinate. In questo modo il campo vettoriale è esplicitamente dato da una terna di funzioni reali, le componenti E_x, E_y, E_z , di tre variabili reali, le coordinate x, y, z . Nel seguito del corso incontreremo svariati esempi di campi vettoriali.

Il campo elettrico di un dipolo Come esempio (importante) di campo elettrico creato da un insieme di cariche puntiformi, consideriamo il caso di due cariche uguali ed opposte, q e $-q$, poste a distanza $d = 2a$ l'una dall'altra, vedi fig. 3.16. Tale configurazione è detta *dipolo elettrico*, e fornisce un'utile modellizzazione di situazioni cui si ha una distribuzione di carica globalmente neutra, ma con il centro di carica positivo non coincidente con quello della cariche negative, come avviene ad esempio in alcune molecole. Il prodotto qd è detto "momento di dipolo". Con la scelta del S.R. fatta in fig. 3.16, la carica $q_1 = -q$ (negativa) è posta in $\vec{x}_1 = a\vec{i}$, la carica $q_2 = q$ (positiva) in $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -a\vec{j}$. Secondo l'eq. (3.53), il campo elettrico prodotto da

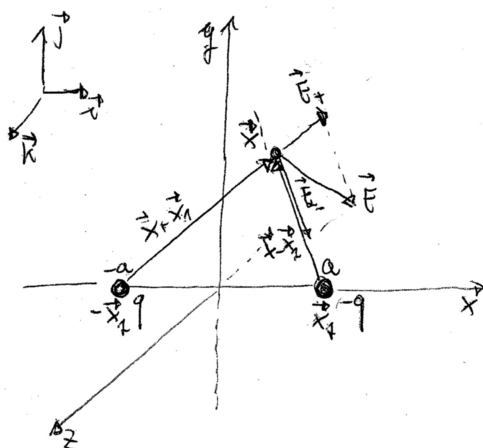


Figura 3.16: La configurazione di cariche detta dipolo elettrico.

queste sorgenti è dato, in un generico punto \vec{x} , da

$$\vec{E}(\vec{x}) = k_e \left\{ q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right\} = k_e q \left\{ -\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + \frac{\vec{x} + \vec{x}_1}{|\vec{x} + \vec{x}_1|^3} \right\}, \quad (3.55)$$

dove, rispetto all'eq. (3.53), abbiamo esplicitato il versore corrispondente allo spostamento $\vec{x} - \vec{x}_1$ come $(\vec{x} - \vec{x}_i)/|\vec{x} - \vec{x}_i|$. Il sistema possiede un'evidente

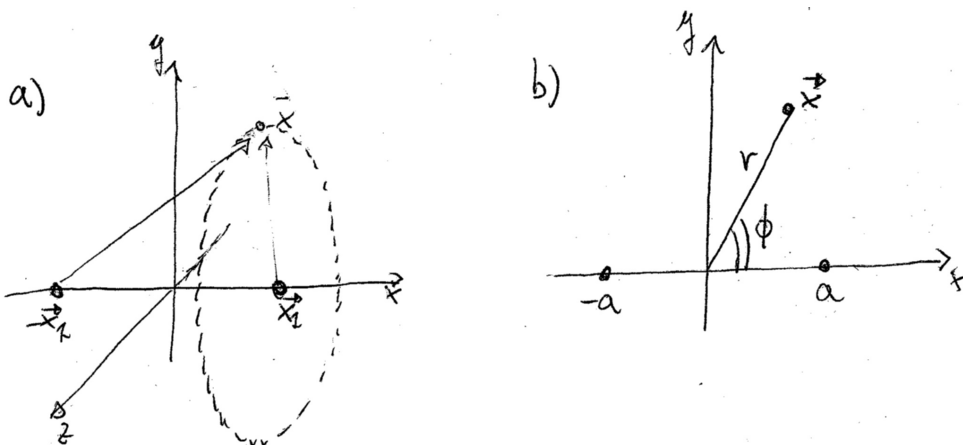


Figura 3.17: a) La configurazione di dipolo elettrico ha simmetria assiale intorno all'asse congiungente le due cariche. b) Nel piano (x, y) usiamo coordinate polari.

simmetria assiale per rotazioni intorno all'asse x . Grazie a tale simmetria possiamo effettuare il calcolo del campo elettrico in punti \vec{x} giacenti in un qualsiasi piano passante per l'asse x , ad esempio il piano (x, y) . Lo stesso valore del campo si avrà in tutti i punti collegati a questo da una rotazione

intorno all'asse x , di angolo arbitrario, vedi fig. 3.17 a). Con le notazioni di fig. 3.17 b) prendiamo dunque

$$\vec{x} = r \cos \phi \vec{i} + r \sin \phi \vec{j} \quad (3.56)$$

ottenendo così

$$\vec{x} - \vec{x}_1 = (r \cos \phi - a) \vec{i} + r \sin \phi \vec{j}, \quad \vec{x} + \vec{x}_1 = (r \cos \phi + a) \vec{i} + r \sin \phi \vec{j}. \quad (3.57)$$

Di conseguenza,

$$|\vec{x} - \vec{x}_1|^2 = r^2 - 2ra \cos \phi + a^2, \quad |\vec{x} + \vec{x}_1|^2 = r^2 + 2ra \cos \phi + a^2. \quad (3.58)$$

Il campo elettrico nel punto \vec{x} è quindi esprimibile in termini delle coordinate polari r, ϕ del punto, come segue:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \phi) = k_e q \left\{ \left[\frac{r \cos \phi + a}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r \cos \phi - a}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{i} \right. \\ \left. + \left[\frac{r \sin \phi}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r \sin \phi}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{j} \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nel punti che giacciono sull'asse verticale, $\vec{x} = (0, y)$, per cui $\cos \phi = 0$ e

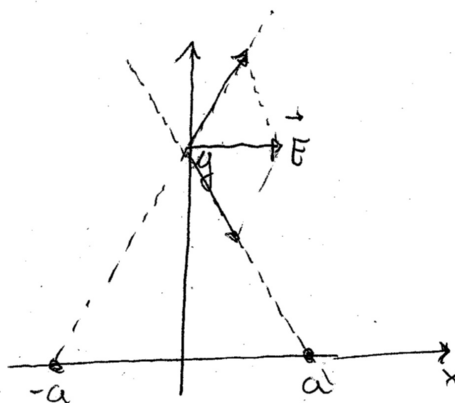


Figura 3.18: Il campo generato dal dipolo nei punti lungo l'asse y ha solo componente lungo l'asse x .

$r = |y|$, la componente lungo \vec{j} del campo si annulla, e la sola componente è quella orizzontale, vedi fig. 3.18:

$$E_x(y) = \frac{2a}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.60)$$

Lungo l'asse orizzontale, $\vec{x} = (x, 0)$, si ha $\phi = 0$ o $\phi = \pi$, e $r = |x|$. Nuovamente, la componente lungo \vec{j} si annulla e troviamo per la componente orizzontale (ricavare queste espressioni per esercizio: attenzione ai segni legati alla presenza di moduli!)

$$E_x(x) = \begin{cases} -k_e q \frac{4a|x|}{(x^2-a^2)^2}, & |x| > a, \\ 2k_e q \frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2}, & |x| < a. \end{cases} \quad (3.61)$$

In fig. 3.19a) viene descritta la direzione del campo nei punti lungo l'asse x ; in fig. 3.19b) vi è il grafico della componente E_x data in eq. (3.61).

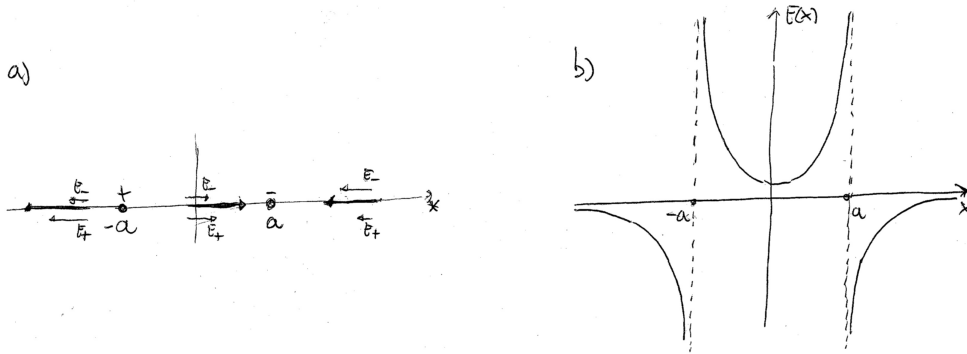


Figura 3.19: a) Direzione del campo di dipolo in punti lungo l'asse x . b) L'andamento della componente $E_x(x)$ del campo nei punti lungo l'asse x .

Andamento a grandi distanze del campo del dipolo Estraiamo l'andamento dominante per r grande in eq. (3.59) scrivendo i denominatori che appaiono in tale espressione come segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3 \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \phi + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{r^3} \left(1 - 3\frac{a}{r} \cos \phi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

dove abbiamo utilizzato il seguente sviluppo di Taylor intorno a $z = 0$:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\alpha z + O(z^2); \quad (3.63)$$

per noi $z = 1/r$, ed espandere intorno a $z = 0$ corrisponde ad espandere intorno a $r \rightarrow \infty$. Similmente abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3 \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \phi + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{a}{r} \cos \phi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Inserendo questi sviluppi in eq. (3.59) otteniamo dopo semplici passaggi (lasciati come esercizio)

$$\vec{E}(r, \phi) = \frac{2k_e q a}{r^3} \left\{ (1 - 3 \cos^2 \phi) \vec{i} - 3 \sin \phi \cos \phi \vec{j} \right\} + O(1/r^4). \quad (3.65)$$

Il campo elettrico di un dipolo decresce dunque a lunga distanza come $1/r^3$, cioè molto più velocemente di quello dovuto ad una carica puntiforme, che va come $1/r^2$. Infatti, in un punto molto distante, i campi prodotti dalle due cariche puntiformi uguali ed opposte che compongono il dipolo divengono quasi uguali ed opposti, ed il termine dominante in $1/r^2$ si elide.

3.4.3 Flusso del campo elettrico

Linee di forza del campo elettrico È possibile dare una utile rappresentazione grafica del campo elettrico, che rende più intuitivi alcuni risultati matematici ad esso relativi. Essa è ottenuta tracciando delle linee orientate,

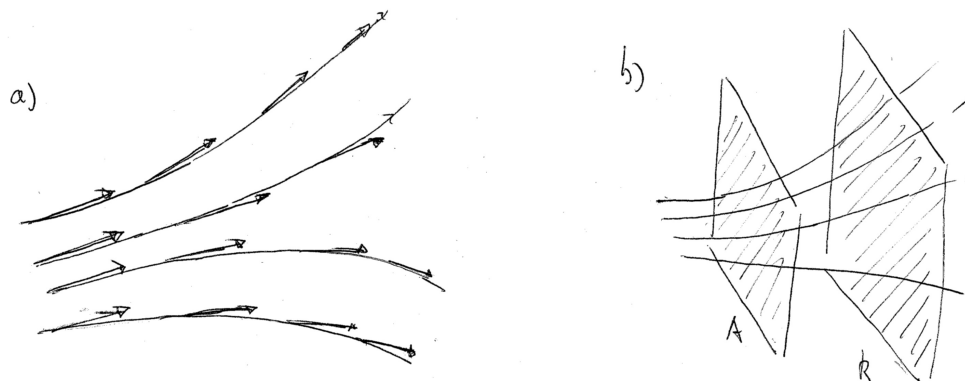


Figura 3.20: a) In ogni punto, il vettore appartenente al campo elettrico è tangente alla linea di forza. b) Il numero di linee di forza per unità di superficie che attraversano la zona A è superiore a quello nella zona B. Il campo è quindi più intenso nella zona A.

dette *linee di forza* del campo, tali che:

- in ogni punto il campo elettrico è tangente alle linee di forza, ed orientato come esse, vedi fig. 3.20a).
- Il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie ad esse perpendicolare è proporzionale⁹ all'intensità (cioè al modulo) del campo in quella regione, vedi fig. 3.20b).

Ad esempio, il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme positiva è sempre diretto radialmente verso l'esterno, e le sue linee di flusso sono quindi delle semirette che si dipartono dalla posizione della carica, orientate verso l'esterno, vedi fig. 3.21a). Per una carica negativa il campo, e quindi le linee di forza, sono orientate verso la carica stessa, vedi fig. 3.21b). Il campo elettrico ha simmetria sferica, pertanto ha la stessa intensità in ogni punto di una superficie sferica di raggio r centrata nella carica, che ha area $4\pi r^2$. Se N è il numero di linee di campo che escono dalla carica, allora il numero di linee per unità di area che attraversano la superficie, W proporzionale all'intensità del campo, è $N/(4\pi r^2)$. Questo è consistente con la forma, eq. (3.53), del

⁹La costante di proporzionalità è scelta in modo arbitrario e conveniente per la rappresentazione grafica del particolare campo cui si è interessati.

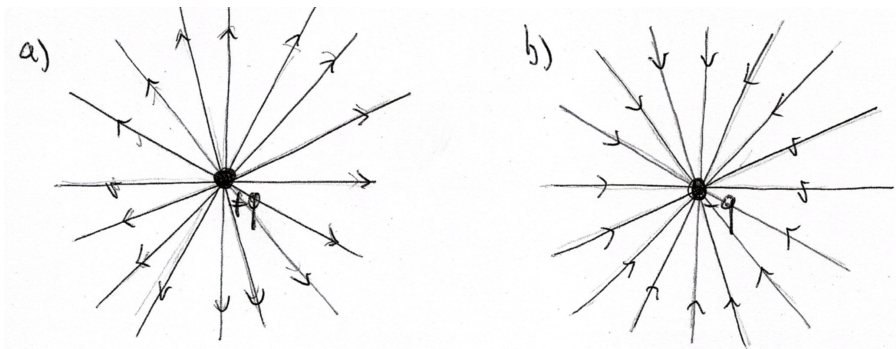


Figura 3.21: Linee di forza del campo coulombiano di a) una carica positiva, b) una carica negativa.

campo coulombiano. Questa osservazione corrisponde, *in nuce*, alla legge di Gauss che discuteremo in seguito. Come altro esempio, in fig. 3.22 sono

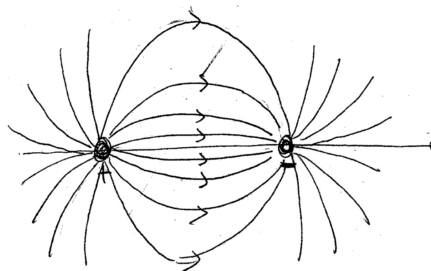


Figura 3.22: Linee di forza del campo di dipolo (proiezione su un piano; il campo ha simmetria assiale intorno all'asse x).

rappresentate le linee di forza del campo di un dipolo.