

# Capitolo 3

## Dinamica

La Dinamica si occupa delle cause del moto; più precisamente, come vedremo, si occupa di come le forze esercitate dall'esterno sugli oggetti ne varino lo stato di moto.

### 3.1 Concetto intuitivo e definizione operativa delle forze

E' nostra esperienza quotidiana che per mettere in moto un oggetto sia necessaria un'interazione. Quest'interazione può corrispondere a:

- una *forza di contatto*, ad esempio quella esercitata dalla mia mano che spinge la sedia;
- la presenza di un *campo di forza* cui l'oggetto risponde. Ad esempio, gli oggetti dotati di massa (quali le mele), presso la superficie della Terra, sono soggetti ad una *forza peso* e, se lasciati liberi, cadono.

In realtà, come discuteremo brevemente in seguito, non vi è una distinzione così netta tra i due casi. Le forze di contatto tra oggetti macroscopici hanno un'origine microscopica in forze a livello molecolare ed atomico che, a loro volta, sono dovute principalmente ai campi di forze di tipo elettrico indotti dalle cariche dei loro componenti elementari. Tuttavia, nell'analizzare fenomeni macroscopici, è conveniente mantenere questa distinzione. E' anche chiaro dalla nostra esperienza che una forza che, applicata ad un oggetto libero, ne cambia lo stato di moto, se applicata ad un oggetto vincolato ha un effetto statico di deformazione dell'oggetto stesso.

**Definizione operativa - Misura di una forza** La forza è una grandezza di cui abbiamo una buona intuizione. Dal punto di vista fisico, però, è necessario darne una definizione operativa. Deve essere possibile misurare le forze tramite il confronto con una unità campione di forza. Per fare ciò possiamo ricorrere all'effetto di deformazione che le forze inducono su di una molla, allungandola. Supponiamo di appendere, qui sulla superficie della Terra, un corpo all'estremità di una molla. Al corpo sappiamo che è applicata una forza peso; ora, tuttavia, il corpo non cade. In compenso la molla subisce una elongazione rispetto alla sua condizione di riposo, vedi fig. 3.1.

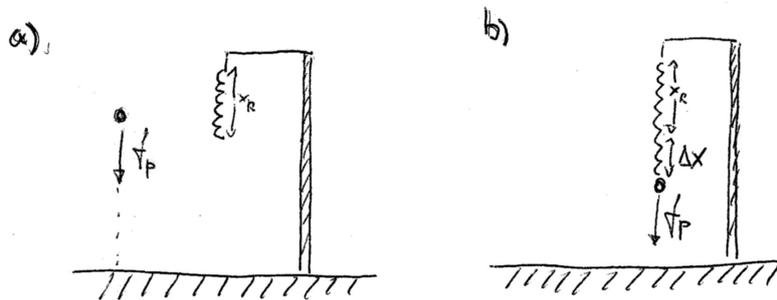


Figura 3.1: a) Un grave libero è soggetto ad una forza peso  $f_p$  che lo accelera verso il basso. b) Se appeso ad una molla, l'effetto della forza peso è di deformare la molla rispetto alla sua posizione di riposo  $x_R$ .

**La legge di Hooke** Corpi diversi, in generale, subiscono forze peso diverse e producono allungamenti diversi di una stessa molla. Supponiamo di avere una collezione di oggetti campione, ciascuno con una forza peso  $f_p$ , che producono il medesimo allungamento  $\delta x$ . Possiamo misurare l'allungamento totale  $\Delta x$  che si produce quando appendiamo  $n$  (due o più) di questi oggetti, che subiranno una forza peso totale  $F_p = n f_p$ , vedi fig. 3.2. Troviamo che (entro un certo limite, cioè prima che la molla si "snervi") si ha  $\Delta x = n \delta x$ . Possiamo dunque concludere che l'allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata (legge di Hooke):

$$\Delta x = k F , \quad (3.1)$$

dove  $k$  è una costante dimensionale che caratterizza la molla stessa.

**Il dinamometro** Questa proporzionalità ci permette di usare un *dinamometro*, cioè una molla opportunamente tarata, per misurare l'intensità delle forze, vedi fig. 3.3. Possiamo dichiarare che l'unità di forza corrisponde ad un certo allungamento del nostro dinamometro ed usare quest'ultimo come

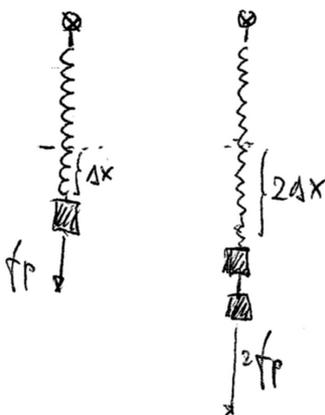


Figura 3.2: L'allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata.

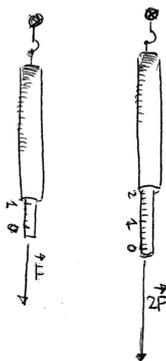


Figura 3.3: Dotando una molla di una scala per misurarne l'allungamento si ottiene uno strumento per misurare le forze applicate, detto dinamometro.

unità di misura dell'allungamento stesso in una scala graduata <sup>1</sup>. Se applicando al dinamometro una forza  $F$  leggiamo sulla scala dello strumento un allungamento pari a 2 unità, possiamo concludere che il modulo della forza applicata è 2, nella nostra unità.

**Natura vettoriale delle forze. Somma di forze.** Sperimentando con il dinamometro, è facile rendersi conto della natura *vettoriale* delle forze. infatti, come mostrato in fig. 3.4, si può anche tener conto della direzione in cui la forza applicata estende il dinamometro; in questo senso le forze applicate possono essere pensate come vettori. Se si confrontano, in questo quadro, le deformazioni prodotte da due forze  $\vec{F}_1$  ed  $\vec{F}_2$  con quella che si ottiene applicando entrambe le forze, si trova che la seconda corrisponde alla

<sup>1</sup>In effetti, nel S.I. è definita un'unità di forza, il Newton,  $1N = 1Kg\,m\,s^{-2}$ . Quello che sarà conveniente fare è di usare come unità della scala l'allungamento prodotto da  $1N$ .

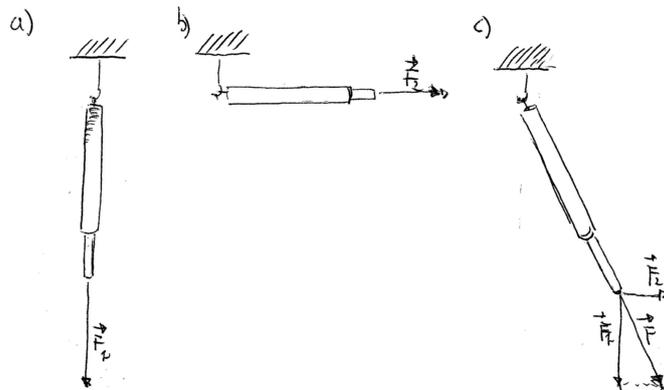


Figura 3.4: L'applicazione simultanea delle due forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , tenendo conto anche della direzione di deformazione, porta allo stesso effetto della somma vettoriale  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

deformazione prodotta dalla somma vettoriale  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ : le forze dunque si comportano a tutti gli effetti come vettori. Spesso la somma vettoriale delle forze agenti su un corpo è detta la (forza) *risultante*.

## 3.2 Le leggi fondamentali del moto

Le forze applicate agli oggetti, ed in particolare ai punti materiali, ne variano lo stato di moto, in un modo che è codificato in tre leggi.

### 3.2.1 La prima legge del moto

Nell'esperienza quotidiana si può avere l'impressione che sia necessario applicare una forza per mantenere in moto un oggetto. Questa impressione è però dovuta al fatto che spesso vi sono forze di attrito (che discuteremo in seguito) che si oppongono al moto. In realtà un corpo non soggetto a forze (cioè un corpo non interagente) tende a mantenere il suo stato di moto: questo è il principio di inerzia formulato da Galileo. Tale principio è stato riformulato come "prima legge del moto" da Newton, e può venire espresso con più precisione come segue:

Se un corpo non interagisce con altri corpi è possibile trovare un sistema di riferimento in cui esso ha accelerazione nulla, e si muove pertanto di moto rettilineo uniforme.

Non si può semplicemente dire che un corpo non interagente si muove di moto rettilineo uniforme, perchè, come discusso nel capitolo precedente, il tipo di moto dipende dal sistema di riferimento usato.

**Sistemi inerziali** Un sistema di riferimento in cui un corpo non soggetto a forze non accelera è detto un *sistema inerziale*.

- Un S.R. in moto relativo uniforme rispetto ad un sistema inerziale è anch'esso inerziale. Infatti, dalle trasformazioni ... è chiaro l'accelerazione nel nuovo sistema resta nulla se lo era nel sistema inerziale.
- Un S.R. che si muove con velocità costante rispetto alle stelle lontane è la migliore approssimazione di sistema inerziale.
- La Terra non è un sistema inerziale, perchè rispetto ad un sistema come al punto precedente ha un moto relativo accelerato a causa di suoi moti di rivoluzione e rotazione. Tuttavia, per esperimenti relativi a moti in porzioni limitate di spazio sulla superficie terrestre, possiamo considerare un S.R. ancorato alla terra come sufficientemente inerziale perchè le accelerazioni di cui sopra sono abbastanza piccole e spesso trascurabili rispetto a quelle in gioco.

Riassumendo, la prima legge del moto dice che, quando su un corpo non agisce complessivamente alcuna forza, la sua accelerazione è nulla, se valutata in un sistema di riferimento inerziale.

### 3.2.2 La seconda legge del moto

La seconda legge del moto ci dice cosa avviene quando su di un corpo si ha una forza risultante  $\vec{F}$  non nulla: il corpo accelera, e l'accelerazione è direttamente proporzionale ad  $\vec{F}$ . Questo viene usualmente scritto nella forma

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (3.2)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $m$  è detto *massa* (più precisamente, *massa inerziale*) del corpo. Esso rappresenta una caratteristica intrinseca di ogni corpo e può essere ricavato applicando una forza nota ad un corpo e misurandone la conseguente accelerazione.

**La quantità di moto** La seconda legge della dinamica, scritta nella forma (3.2), è valida quando la massa  $m$  è costante nel tempo. La si può però riscrivere in una forma diversa introducendo la *quantità di moto* di un corpo:

$$\vec{q} \equiv m\vec{v} . \quad (3.3)$$

La quantità di moto è un vettore avente direzione e verso del vettore velocità, e modulo  $m|\vec{v}|$ . In termini della quantità di moto, la seconda legge del moto si

può scrivere come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} . \quad (3.4)$$

Quando la massa è costante nel tempo, cioè quando  $dm/dt = 0$ , questa equazione si riduce alla (3.2); infatti, si ha in tal caso

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} . \quad (3.5)$$

Tuttavia, essa si applica anche al caso in cui la massa varii nel tempo.

**Interpretazione della seconda legge del moto** E' importante notare che l'eq. (3.2), o la (3.4), *non* va interpretata come una definizione della forza. L'equazione ha un contenuto non banale quando la forza  $\vec{F}$  applicata al corpo in una data posizione  $\vec{x}$  è nota. Allora, siccome  $\vec{a} = d^2\vec{x}/d^2t$ , si ha un'equazione differenziale per la legge oraria  $\vec{x}(t)$ . A volte l'equazione differenziale può essere molto semplice.

- Se la forza è nulla,  $\vec{F} = \vec{0}$ , l'eq. (3.2) ci dice che il punto non accelera, e si muove dunque di moto rettilineo uniforme.
- Se la forza  $\vec{F}$  è indipendente dalla posizione, come ad esempio avviene (con ottima approssimazione) è per un corpo in caduta libera in prossimità della superficie terrestre, che è soggetto alla forza peso, l'eq. (3.2) ci dice che un corpo di massa costante ha un'accelerazione costante, e si muove quindi di moto uniformemente accelerato.

### 3.2.3 Un'applicazione importante: il moto armonico

In altre situazioni, la forza applicata dipende dalla posizione. Un esempio semplice ma molto importante è quello in cui un oggetto è collegato all'estremità di una molla, vedi fig. 3.5, e lasciato libero di muoversi. Per semplicità

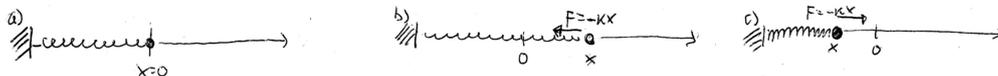


Figura 3.5: a) consideriamo una molla la cui posizione di riposo corrisponde ad  $x = 0$ . Un punto materiale attaccato all'estremità di una molla è soggetto ad una forza  $F = -kx$ , dove  $x$  corrisponde b) all'elongazione o c) alla compressione della molla stessa.

consideriamo il caso in cui l'oggetto è vincolato a muoversi in una direzione

sola. Abbiamo detto prima, vedi eq. (3.1), che per mantenere una molla allungata <sup>2</sup> di un tratto  $x$  è necessario applicare una forza esterna  $F_{\text{ext}} = kx$ . Questo significa che la molla così allungata esercita una forza di richiamo opposta

$$F(x) = -kx . \quad (3.6)$$

Si trova, con buona approssimazione, che tale espressione è valida anche per  $x < 0$ : quando la molla è compressa essa esercita una forza tendente a riportare l'estremo nella sua posizione di riposo il cui modulo è dato da  $k|x|$ , con  $k$  la stessa costante di Hooke che appare nel caso dell'allungazione. A questo punto, per un punto materiale di massa  $m$  collegato all'estremo di una molla e lasciato libero di muoversi, la seconda legge del moto, eq. (3.2), diviene l'equazione differenziale

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) . \quad (3.7)$$

Poniamo

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} . \quad (3.8)$$

La costante  $\omega$  ha le dimensioni di  $t^{-1}$ , cioè di frequenza. L'equazione del moto diviene quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 , \quad (3.9)$$

cioè un'equazione differenziale lineare del second'ordine, omogenea e a coefficienti costanti. La soluzione generica può essere scritta come <sup>3</sup>

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t , \quad (3.10)$$

con  $A$  e  $B$  costanti arbitrarie. Tali costanti possono essere fissate imponendo le "condizioni iniziali" del moto, ovverossia il valore della posizione  $x_0$  e della velocità  $v_0$  al tempo <sup>4</sup>  $t = 0$ . Siccome dall'eq. (3.10) segue che

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t , \quad (3.11)$$

le condizioni iniziali sono

$$x_0 = A , \quad v_0 = \omega B . \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>Scogliamo dunque un sistema di coordinate in cui  $x = 0$  quando l'estremo della molla si trova nella posizione di riposo.

<sup>3</sup>Oppure come  $x(t) = c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}$ .

<sup>4</sup>Potremmo scegliere un qualsiasi altro istante per fissare questo tipo di condizioni.

La legge oraria eq. (3.10) si può quindi esprimere come

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t , \quad (3.13)$$

o anche come

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) , \quad (3.14)$$

dove la costante  $C$  e l'angolo  $\phi$  sono legate a  $x_0$  e  $v_0$  dalle relazioni (mostrarle!)

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} , \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} . \quad (3.15)$$

Il moto descritto da questa legge oraria è *periodico*. Definiamo infatti il *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} , \quad (3.16)$$

che ha le dimensioni di un tempo siccome  $\omega$  e una frequenza (cioè  $[t^{-1}]$ ). Si ha allora

$$x(t + T) = x(t) , \quad (3.17)$$

e similmente per la velocità. Dopo un periodo, il punto si ritrova nella stessa posizione con la stessa velocità. In fig. 3.6 vengono rappresentati i grafici

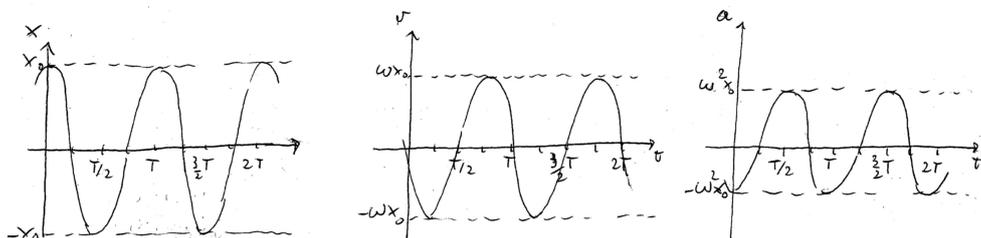


Figura 3.6: Grafico di allungamento, velocità ed accelerazione nel moto armonico  $x(t) = x_0 \cos \omega t$ . Si ha  $T = 2\pi/\omega$ .

della legge oraria, della velocità e dell'accelerazione del moto armonico, nel caso particolare in cui  $v_0 = 0$ .

### 3.2.4 La terza legge del moto

Le forze sono sempre interazioni tra oggetti diversi. La terza legge del moto di Newton dice che per due corpi interagenti

la forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata dal corpo 1 sul corpo 2 è opposta alla forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata dal corpo 2 sul corpo 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (3.18)$$

Alcune osservazioni:

- le forze si presentano in coppie: ad una forza di azione si contrappone sempre una forza di reazione.
- Le forze di azione e reazione, che sono dello stesso tipo, agiscono però su due oggetti diversi.

*Esempio* Ad esempio, la forza che agisce su un oggetto ( $O$ ) in caduta libera è la forza di gravità esercitata dalla Terra ( $T$ ) sull'oggetto stesso,  $\vec{F}_{TO}$ , di modulo  $mg$ , dove  $m$  è la massa dell'oggetto e  $g$  l'accelerazione di gravità. La forza di reazione  $\vec{F}_{OT} = -\vec{F}_{TO}$  è l'attrazione gravitazionale esercitata dall'oggetto sulla Terra, vedi fig. 3.7. Essa ha lo stesso modulo  $mg$ , ma induce un'accelerazione del

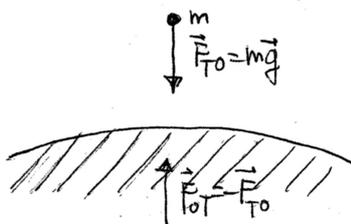


Figura 3.7: Azione e reazione tra un oggetto massivo e la Terra.

tutto trascurabile della Terra: infatti dall'eq. (3.2) si avrebbe  $\vec{a}_T = \vec{F}_{OT}/M_T$ , dove  $M_T$  è la massa della Terra, che è molto grande.

**Piano inclinato** Consideriamo un piano inclinato come in figura 3.8. Poniamo su di esso un oggetto di massa  $m$  che consideriamo poter scivolare sul piano senza impedimenti (in altre parole, trascuriamo la presenza di attrito, che considereremo invece in seguito). Conviene analizzare la situazione

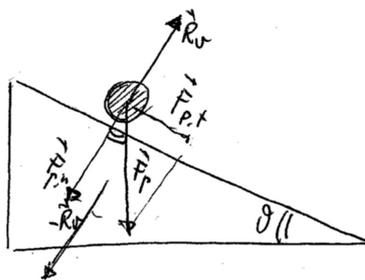


Figura 3.8: Forze e reazioni vincolari in un piano inclinato.

(che schematizziamo come bi-dimensionale trascurando la larghezza del piano inclinato) rispetto ad un sistema di assi ortogonali diretti l'uno lungo il

piano inclinato, l'altro normalmente ad esso. Sull'oggetto agisce la forza peso  $\vec{F}_p = m\vec{g}$ , diretta verso il basso. Se scomponiamo la forza peso nelle sue componenti tangenziali e normali al piano abbiamo

$$F_{p,t} = F_p \sin \theta = m g \sin \theta , \quad F_{p,n} = F_p \cos \theta = m g \cos \theta . \quad (3.19)$$

L'oggetto ha accelerazione nulla lungo la direzione normale (esso non penetra nella superficie del piano inclinato), pertanto vi è una forza di reazione vincolare  $\vec{R}_v$  esercitata dal piano sull'oggetto che annulla la componente normale della forza peso. In modulo, dunque,  $R_v = F_{p,n}$ . La terza legge del moto implica che anche l'oggetto esercita sul piano una forza, uguale ed opposta a  $\vec{R}_v$ . Questa, dato che il piano inclinato non accelera, è a sua volta contro-bilanciata da reazioni vincolari esercitate sul piano dalle superfici cui esso è vincolato. La componente tangenziale  $F_{p,t}$  non è invece bilanciata da alcuna reazione vincolare. L'oggetto dunque si muove lungo il piano inclinato sotto l'azione di  $F_{p,n}$  con un'accelerazione  $a$  determinata dalla seconda legge del moto:

$$m a = F_{p,t} = m g \sin \theta , \quad (3.20)$$

da cui  $a = g \sin \theta$ .

### 3.3 Alcuni tipi di forze macroscopiche e loro caratteristiche

Nella descrizione della dinamica di oggetti macroscopici si fa uso di un gran numero di idealizzazioni, a molti livelli. Nella *dinamica del punto materiale* si considera un intero oggetto come un solo punto materiale, di massa pari a quella dell'oggetto: ci si concentra sul suo moto, sotto l'influenza di forze esterne, come un tutt'uno e si trascurano tutti i suoi moti di rotazione, le sue deformazioni eccetera. Nella *dinamica del corpo rigido* si raffina la descrizione, e si tiene conto della forma dell'oggetto (descritta in modo idealizzato in termini di forme geometriche semplici) e dei moti di rotazione su se stesso. I corpi però non sono totalmente rigidi, e per tener conto delle deformazioni bisogna affinare ulteriormente la descrizione. Inoltre, cercando di essere sempre più precisi, i corpi non sono generalmente omogenei, e se si scende a livello microscopico anche i corpi costituiti da una sola sostanza chimica hanno una struttura discreta molecolare ed atomica. Insomma, la descrizione fisica della dinamica macroscopica è una descrizione efficace ottenuta tramite un modello idealizzato. Il livello di idealizzazione va scelto in base all'obiettivo che si ha nello studio di un dato fenomeno. Anche la descrizione delle forze agenti sugli oggetti macroscopici è in generale approssimata ed efficace; l'importante è che sia adeguata al problema che ci si pone.

**Forze macroscopiche e microscopiche** Le forze macroscopiche risultano in modo estremamente complicato da forze microscopiche che agiscono a livello molecolare e atomico. La descrizione precisa di queste ultime necessita in realtà di una descrizione quantistica. Esse nascono principalmente come effetto dei campi di forze elettriche tra i costituenti elementari. Dunque, le forze di contatto si riconducono all'effetto di campi di forze, e non c'è una distinzione intrinseca netta tra i due casi. Tuttavia, è spesso impraticabile ricondurre le forze alle loro origini microscopiche, e conviene considerarle in modo approssimato/idealizzato. Questo discorso vale, ad esempio, per le forze di attrito.

#### 3.3.1 Forze d'attrito

Consideriamo il moto di un oggetto che avviene a contatto di una superficie cui è fatto aderire da una forza "premente"  $\vec{N}$  normale alla superficie stessa (ad esempio, una cassa che viene trascinata sul pavimento). A causa delle irregolarità delle superfici a contatto e delle interazioni a livello microscopico tra i componenti dei due materiali, si viene a creare una forza, detta *forza*

*d'attrito*, che si oppone al moto dell'oggetto relativo alla superficie su cui scorre.

**Attrito statico** Supponiamo che l'oggetto sia fermo rispetto alla superficie. Applicando una forza  $\vec{F}$  parallela alla superficie, la cui intensità viene gradualmente aumentata, si trova che:

- inizialmente, cioè per  $F = |\vec{F}|$  piccolo, l'oggetto non si muove. Per la seconda legge del moto, ciò significa che si crea una *forza di attrito statico*  $\vec{f}_s = -\vec{F}$ , cosicché la forza totale applicata all'oggetto è nulla ed esso non accelera.
- Quando l'intensità della forza applicata  $F$  supera un certo valore  $f_{s,max}$ , l'oggetto inizia a muoversi:  $f_{s,max}$  è dunque la massima intensità raggiungibile dalla forza d'attrito statico. Sperimentalmente si trova che  $f_{s,max}$  dipende linearmente dal modulo della forza normale:

$$f_{s,max} = \mu_s N . \quad (3.21)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu_s$ , detto *coefficiente di attrito statico*, dipende dalla natura delle superfici a contatto, dalla loro rugosità e anche dalla loro composizione chimica.

**Attrito dinamico** Quando il corpo si è messo in moto, la forza di attrito non scompare: si ha una *forza di attrito dinamico*  $\vec{f}_d$ , il cui modulo assume tipicamente un valore inferiore ad  $f_{s,max}$ . Questa forza si oppone al moto relativo tra le due superfici, e quindi la forza totale agente sull'oggetto, che ne determina l'accelerazione, è  $\vec{F} - \vec{f}_d$ . Si trova sperimentalmente che l'intensità di tale forza è direttamente proporzionale alla forza premente:

$$f_d = \mu_d N . \quad (3.22)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu_d$ , è detto *coefficiente di attrito dinamico* e dipende dalla natura delle superfici a contatto, in particolare dalla loro rugosità e dalla loro composizione chimica.

**Piano inclinato scabro** Consideriamo un semplice apparato, che può essere utilizzato per valutare i coefficienti di attrito, consistente di un piano inclinato di cui sia possibile variare l'angolo di inclinazione  $\theta$ , vedi fig. 3.9. Sul piano inclinato viene appoggiato un'oggetto di massa  $m$ , che si appoggia sul piano tramite una superficie di contatto. In assenza di attrito, l'oggetto scivolerebbe per qualsiasi valore di  $\theta$ , con un'accelerazione  $g \sin \theta$  dovuta alla

componente della forza peso diretta lungo il piano inclinato, vedi eq. (3.20). In presenza di attrito, supponiamo di incrementare gradualmente l'inclina-

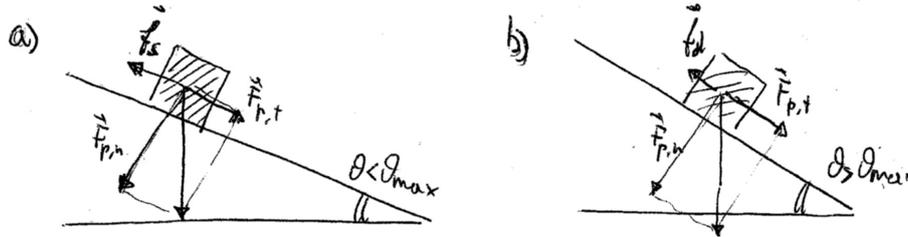


Figura 3.9: Piano inclinato scabro. a) Per inclinazioni  $\theta < \theta_{max}$  la forza di attrito statico compensa la componente tangenziale della forza peso e il blocco non si muove. b) per  $\theta > \theta_{max}$  la forza di attrito dinamico la compensa solo parzialmente e il blocco accelera, ma meno che in assenza di attrito.

zione del piano a partire. Inizialmente, per piccoli  $\theta$ , la forza di attrito statico compensa la componente tangenziale della forza peso: in modulo,

$$f_s = F_{p,t} = m g \sin \theta \quad (3.23)$$

e il blocco non si muove, fino ad un angolo massimo  $\theta_{max}$  per il quale il blocco si mette in movimento. In tale situazione, da un lato  $f_{s,max} = m g \sin \theta_{max}$ . Dall'altro, l'eq. (3.21) ci dice che  $f_{s,max}$  è proporzionale alla forza premente, cioè alla componente normale della forza peso:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{p,n} = m g \cos \theta_{max} . \quad (3.24)$$

Confrontando le due espressioni di  $f_{s,max}$  troviamo che

$$\mu_s = \tan \theta_{max} . \quad (3.25)$$

Per angoli maggiori di  $\theta_{max}$ , il blocco scivola sotto l'azione di una forza totale nella direzione tangenziale al piano data da

$$F_{p,t} - f_d = F_{p,t} - \mu_d F_{p,n} = m g \sin \theta - \mu_d m g \cos \theta . \quad (3.26)$$

Se, tramite un opportuno apparato, riusciamo a determinare per quale valore  $\theta_u$  dell'angolo il blocco, una volta messo in moto, scende di moto uniforme, allora dalla seconda legge del moto sappiamo che per tale valore la forza totale in eq.(3.26) si annulla, e quindi si ha

$$\mu_d = \tan \theta_u . \quad (3.27)$$

### 3.3.2 Forze di resistenza dipendenti dalla velocità

Gli oggetti macroscopici non si muovono generalmente (per lo meno, qui sulla superficie della Terra) nel vuoto, ma si trovano immersi in fluidi (nell'aria, o liquidi). Durante il loro moto, dunque, interagiscono con il mezzo in cui si trovano. Si crea così, in modo generalmente molto complicato a partire dalle interazioni microscopiche, una forza efficace, agente sull'oggetto, che si oppone al moto e che tipicamente dipende dalla velocità del corpo relativa al mezzo.

**Moto in un fluido viscoso** Un oggetto in moto all'interno di un fluido viscoso, vedi fig. 3.10 con velocità non troppo elevate, subisce una forza efficace, che si oppone al moto, proporzionale <sup>5</sup> alla velocità stessa:

$$\vec{F}_r = -k\vec{v}. \quad (3.28)$$

Questa relazione si applica anche a corpi molto piccoli (quali particelle di polvere) in moto nell'aria. Consideriamo il caso in cui il corpo sia libero di

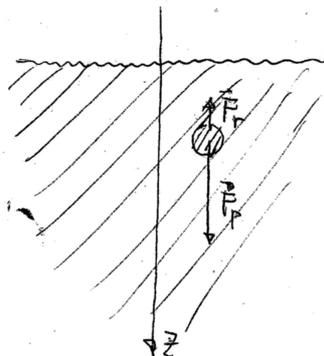


Figura 3.10: Un oggetto scende in un fluido viscoso subisce una forza resistente  $\vec{F}_r$  proporzionale alla velocità.

cadere nel fluido sotto l'influsso della sua forza peso  $\vec{F}_p = m\vec{g}$ . Consideriamo il problema come uni-dimensionale, considerando solo la direzione verticale  $z$  (orientata come in figura 3.10) e la velocità  $v = v_z$ . La seconda legge della dinamica eq. (3.2) ci dice che

$$m \frac{dv}{dt} = F_r + F_p = -kv + mg. \quad (3.29)$$

<sup>5</sup>Se il corpo è una sfera di raggio  $R$  si trova che il coefficiente  $k = 6\pi R\eta$ , dove  $\eta$  è un parametro caratteristico del fluido, detto viscosità.

Quest'equazione differenziale è della stessa forma di quella risolta in sez. ??, vedi eq. (??); in tal caso l'analogo ruolo dell'attrito viscoso era giocato dalla Tobin tax. La soluzione corrisponde dunque (mutatis mutandis) all'eq. (??):

$$v(t) = \frac{m g}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k t}{m}} \right) ; \quad (3.30)$$

il grafico di questa soluzione è disegnato in fig. 3.11. Notiamo che il corpo,

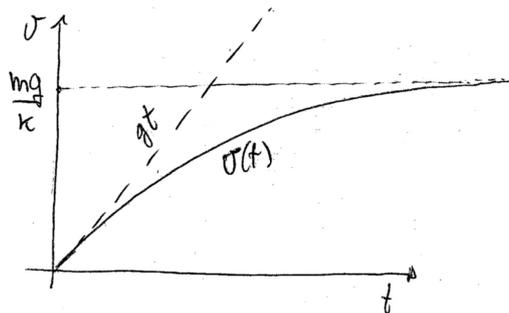


Figura 3.11: Il profilo temporale della velocità  $v(t)$  in eq. (3.30).

col tempo, raggiunge una velocità limite costante:

$$v_l = \frac{m g}{k} . \quad (3.31)$$

Alla velocità limite  $v_l$  il membro di destra dell'eq. (3.29) si annullerebbe. Si annullerebbe quindi la sua derivata, quindi la velocità non cambierebbe più.

**Resistenza dell'aria** Per oggetti estesi in movimento (che supponiamo per semplicità rettilineo, quindi unidimensionale) nell'aria (o in altri fluidi gassosi) si trova sperimentalmente che, perlomeno in un regime di velocità abbastanza ampio, essi subiscono una forza che si oppone al moto il cui modulo è proporzionale al quadrato della velocità:

$$F_r = -c v^2 . \quad (3.32)$$

Consideriamo il caso in cui un oggetto sia in caduta libera nell'aria (per semplicità, con velocità iniziale nulla). La legge del moto è, in totale analogia all'eq. (3.29),

$$m \frac{dv}{dt} = F_r + F_p = -c v^2 + m g . \quad (3.33)$$

Anche in questo caso, l'effetto della forza frenante è di far sì che la velocità, invece di aumentare indefinitamente, come avverrebbe sotto la sola azione della forza peso, raggiunga una velocità limite  $v_l$ . Come discusso dopo eq.

(3.31), la velocità limite è quella per cui il membro di destra dell'eq. (3.33) si annulla, e nel caso presente è dunque data da

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} . \quad (3.34)$$

L'equazione (3.33) è a variabili separabili:

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} = dt . \quad (3.35)$$

Con la condizione iniziale che  $v(0) = 0$ , risolviamo integrando tra  $t = 0$  e  $t$  nella variabile temporale <sup>6</sup> e tra 0 e  $v$  nel membro di sinistra:

$$\frac{1}{g} \int_0^v \frac{d\tilde{v}}{1 - \frac{c}{mg}v^2} = \int_0^t d\tilde{t} = t . \quad (3.36)$$

Cambiamo variabile di integrazione introducendo  $y = \sqrt{c/gm} \tilde{v}$ ; il membro

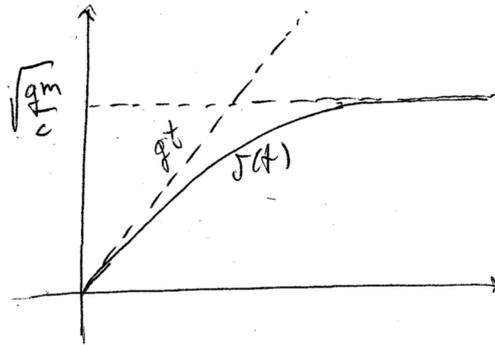


Figura 3.12: Il profilo temporale della velocità  $v(t)$  in eq. (3.39).

di sinistra diviene

$$\sqrt{\frac{m}{gc}} \int_0^{\sqrt{\frac{c}{gm}}v} \frac{dy}{1 - y^2} = \sqrt{\frac{m}{gc}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{c}{gm}}v \right) . \quad (3.37)$$

Abbiamo dunque

$$\tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{c}{gm}}v \right) = \sqrt{\frac{gc}{m}}t , \quad (3.38)$$

da cui la soluzione

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c}} \tanh \left( \sqrt{\frac{gc}{m}}t \right) . \quad (3.39)$$

Il grafico di questa funzione è riportato in fig. 3.12.

<sup>6</sup>Per evitare confusioni, rinominiamo le variabili di integrazione come  $\tilde{t}$  e  $\tilde{v}$ .

## 3.4 Origine microscopica delle forze macroscopiche e interazioni elettriche

La distinzione netta tra forze di contatto e campi di forza che si verifica a livello macroscopico è in realtà un effetto della estrema complicazione degli oggetti macroscopici in termini dei loro costituenti elementari. A livello di questi ultimi, le interazioni sono dovute a campi di forze. In particolare, la grande maggioranza dei fenomeni emergenti a livello macroscopico hanno la loro origine microscopica nelle *interazioni elettromagnetiche* di tali componenti elementari.

### 3.4.1 Cariche elettriche e forze coulombiane

Nel corso dei secoli si è scoperto che vi sono alcuni effetti di interazione a distanza tra oggetti macroscopici che non sono riconducibili all'interazione gravitazionale, e non dipendono quindi dalla massa degli oggetti, ma da un'altra proprietà detta "carica elettrica". Gli oggetti macroscopici hanno usualmente carica elettrica totale nulla, cioè sono "neutri", ed è per questo che le forze elettrostatiche non sono state immediate da individuare e descrivere anche se l'interazione elettromagnetica tra i costituenti fondamentali è enormemente più forte di quella gravitazionale. Tuttavia, tramite procedimenti anche semplici, quali ad esempio lo strofinio, alcuni materiali acquistano una carica elettrica. Ad esempio, dopo aver strofinato due bacchette di vetro sulla seta, esse si *respingono* tramite un'interazione a distanza. Similmente si respingono due bacchette di bachelite caricate per strofinio. Tuttavia una bacchetta di vetro ed una di bachelite, cariche, si *attraggono*. Sperimentando con altri materiali carichi per strofinio, si è trovato che essi o attraggono o respingono il vetro, e si comportano in modo opposto con la bachelite.

**Proprietà fondamentali della carica elettrica** Tramite queste ed altre esperienze più precise e sofisticate si è dunque stabilito che

- esistono in natura cariche elettriche di due tipi diversi. Cariche elettriche dello stesso tipo si respingono, di tipi opposti si attraggono.

Con esperimenti via via più raffinati si sono scoperte altre proprietà della carica elettrica. In particolare

- la carica elettrica è additiva, ma nella somma le cariche di tipo opposto vanno considerate con segno opposto: si hanno dunque cariche *positive* e *negative*. Notiamo che ciò implica che si possono formare aggregati

di cariche positive e negative globalmente neutri, cioè con carica totale  $Q = \sum q_i = 0$ . Questo è quanto avviene normalmente in un atomo, che è composto da elettroni e protoni, aventi carica opposta, in numero uguale, oltre che da neutroni di carica nulla. La materia ordinaria, composta di atomi, è dunque neutra. Tuttavia, è relativamente facile strappare alcuni elettroni agli atomi e certi procedimenti quali lo strofinio possono appunto provocare la migrazione di un certo numero di elettroni da un materiale all'altro, creando nell'uno un eccesso di cariche positive, nell'altro di cariche negative.

- La carica elettrica è conservata: in un sistema isolato, la carica totale  $Q$  è costante.
- La carica totale è *quantizzata*: tutte le cariche elettriche in natura sono multipli interi (relativi) di una unità fondamentale di carica  $e$ , pari al modulo della carica di un elettrone o un protone. Convenzionalmente, la carica dell'elettrone è considerata negativa:  $q_{el} = -e$ ; quella del protone è opposta a quella dell'elettrone:  $q_{prot} = e$ .

**Unità di misura nel S.I.** Tramite vari tipi di effetti che la carica elettrica produce, è possibile darle una definizione operativa come grandezza fisica. Nel S.I. la carica è definita come grandezza derivata dalla corrente elettrica (grandezza che per ora non abbiamo ancora discusso), basandosi sul fatto che la carica  $q$  trasferita in un certo intervallo di tempo da una data corrente  $j(t)$  è l'integrale della corrente nell'intervallo in questione:

$$q = \int dt j(t) . \quad (3.40)$$

Della corrente si dà nel S.I. una definizione operativa, e quindi una definizione di unità fondamentale, tramite la forza che si crea tra due conduttori paralleli attraversati da corrente. L'unità di misura della corrente nel S.I. è detta *ampere* (A). L'unità derivata per la carica è il *Coulomb* (C), con  $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$ . Questa unità corrisponde ad una quantità di carica piuttosto elevata rispetto a quelle in gioco in molti semplici fenomeni elettrici; ad esempio, l'ordine di grandezza della carica acquistata per strofinio da una bacchetta di bachelite è di  $10^{-6} \text{ C}$ . La carica elementare  $e$ , espressa in coulomb, è piccolissima:

$$e = 1.6021765 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (3.41)$$

In altri termini, 1 C corrisponde alla carica di un numero enorme, circa  $6.25 \times 10^{18}$ , di portatori elementari di carica (elettroni).

**La forza di attrazione coulombiana** Apparati sperimentali quali la bilancia di torsione hanno consentito di valutare sperimentalmente la forza di attrazione o repulsione tra le cariche elettriche. Si è trovato che due oggetti idealizzabili come puntiformi, dotati di cariche  $q_1$  e  $q_2$ , esercitano reciprocamente una forza. La forza esercitata dalla carica  $q_1$  sulla carica  $q_2$  vale

$$\vec{F}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} , \quad (3.42)$$

dove  $\vec{r}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$  è il vettore spostamento dalla posizione della prima carica  $\vec{x}_1$  a quella della seconda,  $\vec{x}_2$ ;  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  è il suo modulo (la distanza tra le cariche) e  $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$  il versore corrispondente, vedi fig. 3.13. Infine,  $k_e$  è una costante <sup>7</sup> che dipende dal sistema di unità di misura scelto. Nel S.I., con le forze espresse in Newton, la cariche in Coulomb e le distanze in metri, si ha

$$k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 . \quad (3.43)$$

(Esercizio: controllate la correttezza dimensionale di quest'espressione). Si

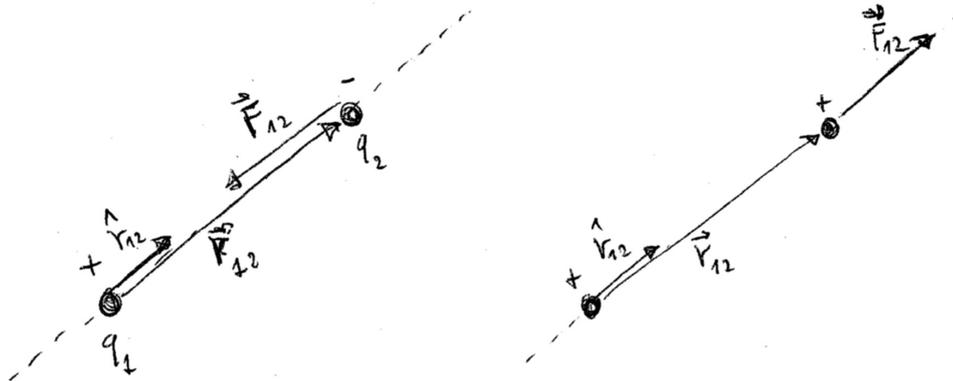


Figura 3.13: Forza coulombiana tra due cariche di segno discordi o concordi.

ha, per il principio di azione e reazione, che la forza esercitata da  $q_2$  su  $q_1$  vale  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Come rappresentato in figura 3.13,

- se  $q_1$  e  $q_2$  hanno segni opposti, la forza è attrattiva (tende a far diminuire la distanza):

$$\vec{F}_{12} = -k_e \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} . \quad (3.44)$$

- Se le cariche hanno lo stesso segno, essa è invece repulsiva:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} . \quad (3.45)$$

<sup>7</sup>La costante di Coulomb  $k_e$  viene anche spesso espressa come  $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$  in termini di un'altra costante  $\epsilon_0$  detta "costante dielettrica del vuoto".

**Additività delle forze coulombiane** La forza coulombiana è additiva nel senso della somma vettoriale. Dato un'insieme di cariche puntiformi  $q_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , la forza esercitata su una di esse, diciamo  $q_j$ , è data dalla somma vettoriale delle forze coulombiane esercitate su di essa da tutte le altre cariche:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = k_e q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ji}^2} \hat{r}_{ji}, \quad (3.46)$$

dove  $\vec{r}_{ij}$  è il vettore spostamento dalla posizione di  $q_i$  a quella di  $q_j$ .

*Esercizio* Consideriamo tre cariche uguali positive  $q = 2 \times 10^{-6}$  C poste ai lati di un triangolo equilatero di lato  $l = 0.1$  m. Quale forza agisce su ciascuna di esse? Con riferimento alla fig. 3.14, consideriamo la forza agente sulla carica 3; quella sulle altre due cariche è ricavabile per analogia. Le forze  $\vec{F}_{13}$  e  $\vec{F}_{23}$  agenti su di

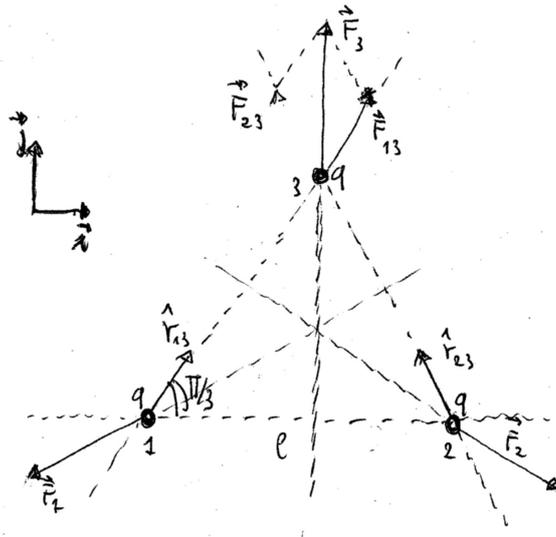


Figura 3.14: Forze coulombiane in una configurazione di cariche uguali poste ai vertici di un triangolo equilatero.

essa hanno lo stesso modulo

$$F = |\vec{F}_{13}| = |\vec{F}_{23}| = k_e \frac{q^2}{l^2}. \quad (3.47)$$

I versori  $\hat{r}_{13}$  e  $\hat{r}_{23}$  hanno componenti orizzontali opposte e componenti verticali uguali:

$$\hat{r}_{13} = \cos \frac{\pi}{3} \hat{i} + \sin \frac{\pi}{3} \hat{j} = \frac{1}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j}, \quad \hat{r}_{23} = \cos \frac{2\pi}{3} \hat{i} + \sin \frac{2\pi}{3} \hat{j} = -\frac{1}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j}. \quad (3.48)$$

La forza  $\vec{F}_3$  risultante sulla carica 3 è dunque diretta verticalmente:

$$\begin{aligned}\vec{F}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = F(\hat{r}_{13} + \hat{r}_{23}) = \sqrt{3}F\vec{j} = \sqrt{3}k_e \frac{q^2}{l^2}\vec{j} \\ &= \sqrt{3} \times 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{4 \times 10^{-12} \text{ C}^2}{\times 10^{-2} \text{ m}^2} \vec{j} = 6.23 \text{ N } \vec{j} .\end{aligned}\quad (3.49)$$

Le forze agenti sulla cariche 1 e 2 rispettivamente sono uguali in modulo, e dirette lungo i versori che si ottengono ruotando  $\vec{j}$  di, rispettivamente,  $2\pi/3$  e  $4\pi/3$ .

### 3.4.2 Il campo elettrico

Data una distribuzione di cariche  $q_i$  poste nei punti  $P_i$ , (dette cariche “sorgenti”), una qualsiasi carica “di prova”  $q$ , che supponiamo piccola per far sì che la sua presenza non possa alterare la distribuzione delle cariche sorgenti, posta in un punto  $P$ , subisce una forza coulombiana  $\vec{F}_q(P)$ , diversa da punto a punto, dovuta alla sua interazione con le cariche sorgenti e proporzionale alla carica  $q$  stessa, vedi le eq. (3.42,3.46). Similmente avverrebbe per un'altra carica di prova  $q'$  posta nello stesso punto, che subirebbe una forza proporzionale a  $q'$  ma per il resto uguale a quella subita dalla carica  $q$ :

$$\vec{F}_{q'}(P) = q' \frac{\vec{F}_q(P)}{q} . \quad (3.50)$$

Possiamo quindi interpretare la situazione come segue. Le cariche sorgenti generano un *campo elettrico*  $\vec{E}(P)$  corrispondente alla forza per unità di carica subita da una piccola carica di prova <sup>8</sup> posta nel punto  $P$ :

$$\vec{E}(P) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(P)}{q} . \quad (3.51)$$

In presenza del campo elettrico generato dalle sorgenti, una qualsiasi ulteriore carica  $q'$ , posta nel punto  $P$ , subisce una forza

$$\vec{F}_{q'} = q' \vec{E}(P) . \quad (3.52)$$

Notiamo che la forza ha la direzione del campo elettrico, ma verso uguale od opposto a seconda del segno della carica  $q'$ . Nel caso in cui le cariche sorgenti siano puntiformi, dall'eq. (3.46) e dalla definizione (3.51) segue che

$$\vec{E}(P) = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_{iP}^2} \hat{r}_{iP} , \quad (3.53)$$

dove  $\vec{r}_{iP} = \overline{P_i P}$  è il vettore spostamento dalla posizione  $P_i$  della  $i$ -ma carica al punto  $P$ ,  $r_{iP}$  il suo modulo e  $\hat{r}_{iP}$  il versore corrispondente.

<sup>8</sup>Questa è la ragione del limite  $q \rightarrow 0$  che si è inserito nell'eq. (3.51)

**Campi vettoriali** Il campo elettrico  $\vec{E}(P)$  è un *campo vettoriale*, ovvero esso corrisponde all'assegnazione di un vettore in ogni punto  $P$  dello spazio, vedi fig. 3.15:

$$P \mapsto \vec{E}(P) . \quad (3.54)$$

Il vettore  $\vec{E}$  può essere descritto tramite le sue componenti rispetto ad una

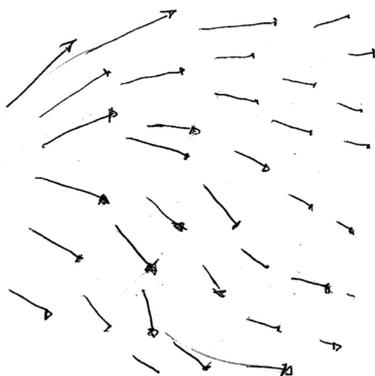


Figura 3.15: Un campo vettoriale assegna un vettore ad ogni punto dello spazio.

base fissata, ad esempio scrivendo  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ . Al punto  $P$  dello spazio possiamo associare delle coordinate, ad esempio delle coordinate cartesiane:  $P \leftrightarrow (x, y, z)$ , equivalenti al vettore spostamento  $\vec{x}$ , o qualsiasi altra terma di coordinate. In questo modo il campo vettoriale è esplicitamente dato da una terna di funzioni reali, le componenti  $E_x, E_y, E_z$ , di tre variabili reali, le coordinate  $x, y, z$ . Nel seguito del corso incontreremo svariati esempi di campi vettoriali.

**Il campo elettrico di un dipolo** Come esempio (importante) di campo elettrico creato da un insieme di cariche puntiformi, consideriamo il caso di due cariche uguali ed opposte,  $q$  e  $-q$ , poste a distanza  $d = 2a$  l'una dall'altra, vedi fig. 3.16. Tale configurazione è detta *dipolo elettrico*, e fornisce un utile modellizzazione di situazioni cui si ha una distribuzione di carica globalmente neutra, ma con il centro di carica positivo non coincidente con quello della cariche negative, come avviene ad esempio in alcune molecole. Il prodotto  $qd$  è detto “momento di dipolo”. Con la scelta del S.R. fatta in fig. 3.16, la carica  $q_1 = -q$  (negativa) è posta in  $\vec{x}_1 = a\vec{i}$ , la carica  $q_2 = q$  (positiva) in  $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -a\vec{j}$ . Secondo l'eq. (3.53), il campo elettrico prodotto da

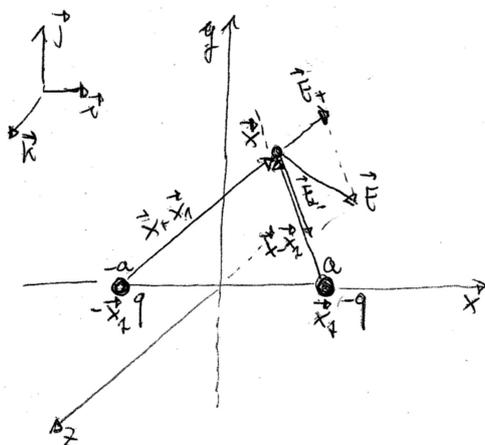


Figura 3.16: La configurazione di cariche detta dipolo elettrico.

queste sorgenti è dato, in un generico punto  $\vec{x}$ , da

$$\vec{E}(\vec{x}) = k_e \left\{ q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right\} = k_e q \left\{ -\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + \frac{\vec{x} + \vec{x}_1}{|\vec{x} + \vec{x}_1|^3} \right\}, \quad (3.55)$$

dove, rispetto all'eq. (3.53), abbiamo esplicitato il versore corrispondente allo spostamento  $\vec{x} - \vec{x}_1$  come  $(\vec{x} - \vec{x}_i)/|\vec{x} - \vec{x}_i|$ . Il sistema possiede un'evidente

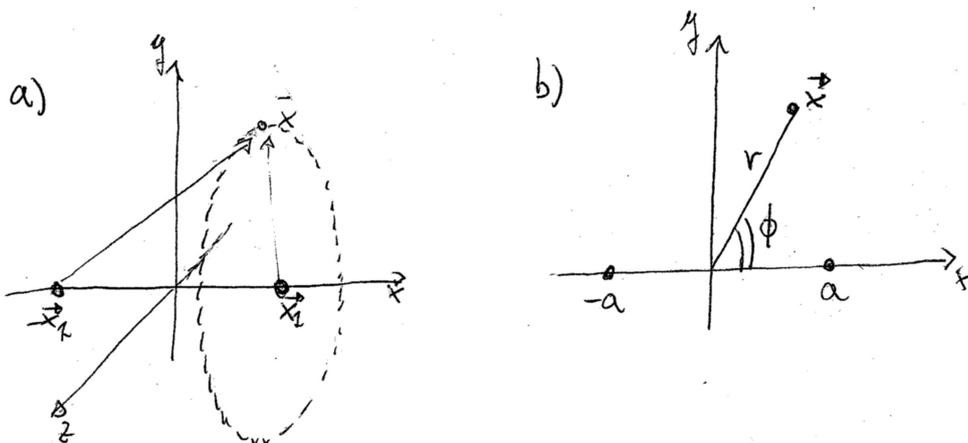


Figura 3.17: a) La configurazione di dipolo elettrico ha simmetria assiale intorno all'asse congiungente le due cariche. b) Nel piano  $(x, y)$  usiamo coordinate polari.

simmetria assiale per rotazioni intorno all'asse  $x$ . Grazie a tale simmetria possiamo effettuare il calcolo del campo elettrico in punti  $\vec{x}$  giacenti in un qualsiasi piano passante per l'asse  $x$ , ad esempio il piano  $(x, y)$ . Lo stesso valore del campo si avrà in tutti i punti collegati a questo da una rotazione

intorno all'asse  $x$ , di angolo arbitrario, vedi fig. 3.17 a). Con le notazioni di fig. 3.17 b) prendiamo dunque

$$\vec{x} = r \cos \phi \vec{i} + r \sin \phi \vec{j} \quad (3.56)$$

ottenendo così

$$\vec{x} - \vec{x}_1 = (r \cos \phi - a) \vec{i} + r \sin \phi \vec{j}, \quad \vec{x} + \vec{x}_1 = (r \cos \phi + a) \vec{i} + r \sin \phi \vec{j}. \quad (3.57)$$

Di conseguenza,

$$|\vec{x} - \vec{x}_1|^2 = r^2 - 2ra \cos \phi + a^2, \quad |\vec{x} + \vec{x}_1|^2 = r^2 + 2ra \cos \phi + a^2. \quad (3.58)$$

Il campo elettrico nel punto  $\vec{x}$  è quindi esprimibile in termini delle coordinate polari  $r, \phi$  del punto, come segue:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \phi) = k_e q \left\{ \left[ \frac{r \cos \phi + a}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r \cos \phi - a}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{i} \right. \\ \left. + \left[ \frac{r \sin \phi}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r \sin \phi}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{j} \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nel punti che giacciono sull'asse verticale,  $\vec{x} = (0, y)$ , per cui  $\cos \phi = 0$  e

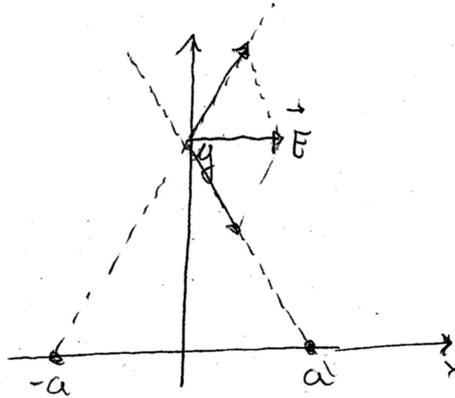


Figura 3.18: Il campo generato dal dipolo nei punti lungo l'asse  $y$  ha solo componente lungo l'asse  $x$ .

$r = |y|$ , la componente lungo  $\vec{j}$  del campo si annulla, e la sola componente è quella orizzontale, vedi fig. 3.18:

$$E_x(y) = \frac{2a}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.60)$$

Lungo l'asse orizzontale,  $\vec{x} = (x, 0)$ , si ha  $\phi = 0$  o  $\phi = \pi$ , e  $r = |x|$ . Nuovamente, la componente lungo  $\vec{j}$  si annulla e troviamo per la componente orizzontale (ricavare queste espressioni per esercizio: attenzione ai segni legati alla presenza di moduli!)

$$E_x(x) = \begin{cases} -k_e q \frac{4a|x|}{(x^2-a^2)^2}, & |x| > a, \\ 2k_e q \frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2}, & |x| < a. \end{cases} \quad (3.61)$$

In fig. 3.19a) viene descritta la direzione del campo nei punti lungo l'asse  $x$ ; in fig. 3.19b) vi è il grafico della componente  $E_x$  data in eq. (3.61).

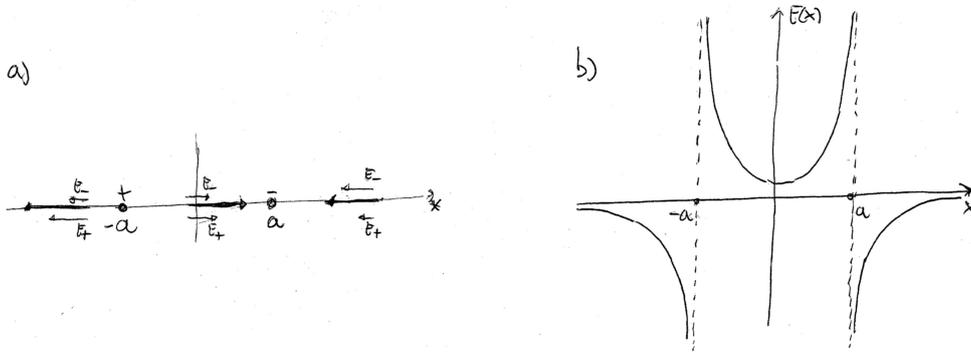


Figura 3.19: a) Direzione del campo di dipolo in punti lungo l'asse  $x$ . b) L'andamento della componente  $E_x(x)$  del campo nei punti lungo l'asse  $x$ .

**Andamento a grandi distanze del campo del dipolo** Estraiamo l'andamento dominante per  $r$  grande in eq. (3.59) scrivendo i denominatori che appaiono in tale espressione come segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3 \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \phi + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{r^3} \left(1 - 3\frac{a}{r} \cos \phi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

dove abbiamo utilizzato il seguente sviluppo di Taylor intorno a  $z = 0$ :

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\alpha z + O(z^2); \quad (3.63)$$

per noi  $z = 1/r$ , ed espandere intorno a  $z = 0$  corrisponde ad espandere intorno a  $r \rightarrow \infty$ . Similmente abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3 \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \phi + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{a}{r} \cos \phi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Inserendo questi sviluppi in eq. (3.59) otteniamo dopo semplici passaggi (lasciati come esercizio)

$$\vec{E}(r, \phi) = \frac{2k_e q a}{r^3} \left\{ (1 - 3 \cos^2 \phi) \vec{i} - 3 \sin \phi \cos \phi \vec{j} \right\} + O(1/r^4). \quad (3.65)$$

Il campo elettrico di un dipolo decresce dunque a lunga distanza come  $1/r^3$ , cioè molto più velocemente di quello dovuto ad una carica puntiforme, che va come  $1/r^2$ . Infatti, in un punto molto distante, i campi prodotti dalle due cariche puntiformi uguali ed opposte che compongono il dipolo divengono quasi uguali ed opposti, ed il termine dominante in  $1/r^2$  si elide.

### 3.4.3 Flusso del campo elettrico

**Linee di forza del campo elettrico** E' possibile dare una utile rappresentazione grafica del campo elettrico, che rende più intuitivi alcuni risultati matematici ad esso relativi. Essa è ottenuta tracciando delle linee orientate,

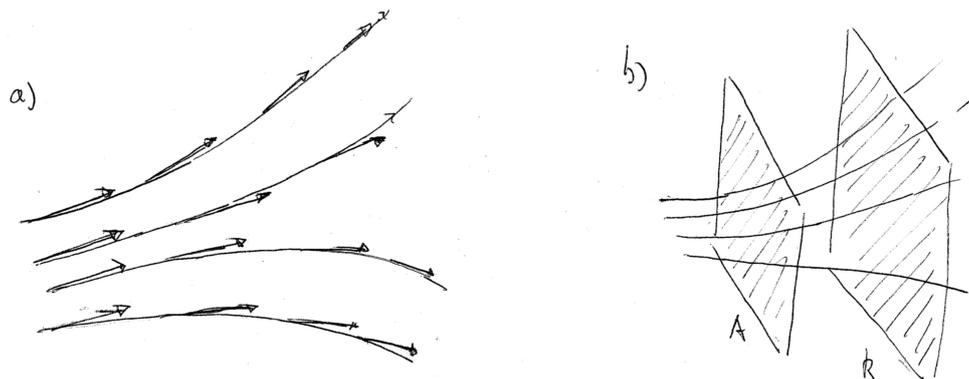


Figura 3.20: a) In ogni punto, il vettore appartenente al campo elettrico è tangente alla linea di forza. b) Il numero di linee di forza per unità di superficie che attraversano la zona A è superiore a quello nella zona B. Il campo è quindi più intenso nella zona A.

dette *linee di forza* del campo, tali che:

- in ogni punto il campo elettrico è tangente alle linee di forza, ed orientato come esse, vedi fig. 3.20a).
- Il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie ad esse perpendicolare è proporzionale <sup>9</sup> all'intensità (cioè al modulo) del campo in quella regione, vedi fig. 3.20b).

Ad esempio, il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme positiva è sempre diretto radialmente verso l'esterno, e le sue linee di flusso sono quindi delle semirette che si dipartono dalla posizione della carica, orientate verso l'esterno, vedi fig. 3.21a). Per una carica negativa il campo, e quindi le linee di forza, sono orientate verso la carica stessa, vedi fig. 3.21b). Il campo elettrico ha simmetria sferica, pertanto ha la stessa intensità in ogni punto di una superficie sferica di raggio  $r$  centrata nella carica, che ha area  $4\pi r^2$ . Se  $N$  è il numero di linee di campo che escono dalla carica, allora il numero di linee per unità di area che attraversano la superficie,  $W$  proporzionale all'intensità del campo, è  $N/(4\pi r^2)$ . Questo è consistente con la forma, eq. (3.53), del

<sup>9</sup>La costante di proporzionalità è scelta in modo arbitrario e conveniente per la rappresentazione grafica del particolare campo cui si è interessati.

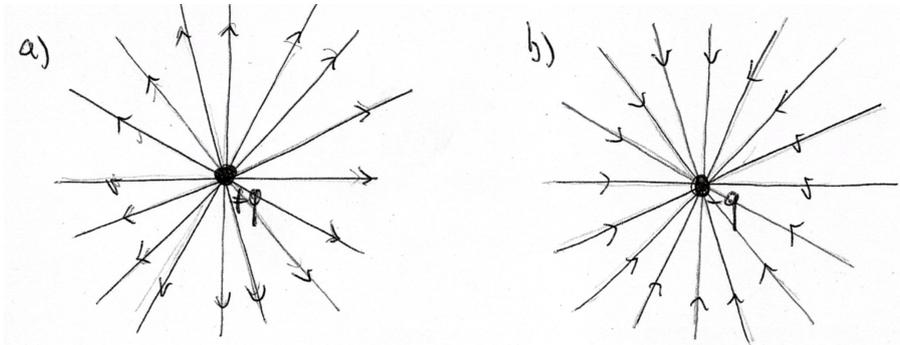


Figura 3.21: Linee di forza del campo coulombiano di a) una carica positiva, b) una carica negativa.

campo coulombiano. Questa osservazione corrisponde, *in nuce*, alla legge di Gauss che discuteremo in seguito. Come altro esempio, in fig. 3.22 sono

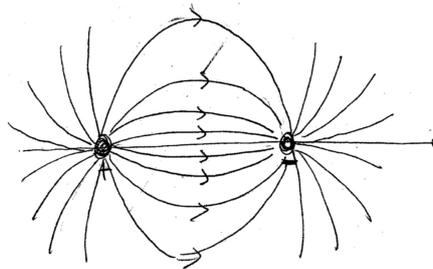


Figura 3.22: Linee di forza del campo di dipolo (proiezione su un piano; il campo ha simmetria assiale intorno all'asse  $x$ ).

rappresentate le linee di forza del campo di un dipolo.