Note del corso di Fisica per MATFIN

M. Billò

a.a. 2011/2012

Indice

Capitolo 1

Concetti introduttivi

Impostazione del corso Le principali motivazioni per lo studio della Fisica di base nel corso di laurea MATFIN sono a mio avviso, le seguenti:

- La Fisica formisce un paradigma di modellizzazione matematica applicata con successo nell'ambito di una scienza sperimentale. E' sorgente di metodi, analogie, idee essenziali per la modellizzazione matematica in altri ambiti, quali ad esempio quello economico-finanziario cui MATFIN è rivolta. Da questo punto di vista, ciò che conta in questo corso è il metodo più che gli specifici argomenti sviluppati. Tuttavia il metodo viene appreso solo sviluppandolo in concreti contesti fisici; se non si affrontano problemi espiciti, non si acquistano vere competenze utilizzabili poi in altri campi. Riassumendo: questo cercherà di essere un corso di fisica con enfasi (per quanto ne sarò capace) sugli aspetti matematici e metodologici, ed una scelta di argomenti basata in buona parte sulla loro generalità ed "esportabilità", al prezzo di tagliarne alcuni che dal punto di vista della fisica strettamente detta sono molto importanti. Cercherò inoltre di utilizzare talvolta esempi ed esercizi coinvolgenti concetti e quantità al di fuori dell Fisica strettamente detta.

- Nel corso di laurea triennale in Matematica vi sono ben due corsi di Fisica. Non averne, qui, creerebbe un debito eccessivo per chi volesse poi proseguire con la LM in Matematica.

La Fisica La Fisica si propone di dare una descrizione quantitativa di certi aspetti di base della natura e del nostro mondo, formulando *leggi*, matematicamente espresse ed il più possibile generali, che premettono di effettuare previsioni. Si basa sul *metodo scientifico* per raggiungere una conoscenza della realtà oggettiva affidabile, verificabile, condivisibile. Nel metodo scientifico si hanno due aspetti che interagiscono fra di loro: raccolta di evidenze empiriche misurabili attraverso osservazioni ed esperimenti; formulazione di ipotesi e teorie da sottoporre nuovamente a verifica sperimentale. Una sequenza più dettagliata del modo di procedere è la seguente.

- Osservazione di un fenomeno.
- Realizzazione di un esperimento per chiarire e quantificare il fenomeno, ottenendo delle misure [1].
- Definizione di un modello fisico (cioè una rappresentazione semplificata della situazione che ne coglie gli aspetti essenziali per il fenomeno che si sta studiando).
- Formulazione di un modello matematico, comprendente un insieme di equazioni che legano le varie grandezze fisiche coinvolte nel fenomeno.
- Formalizzazione di una teoria che renda conto di tali equazioni e sia in grado di spiegare altri fenomeni e prevedere quindi il risultato di altri opportuni esperimenti.
- Verifica sperimentale della teoria tramite esperimenti opportunamente concepiti e realizzati [2].

1.1 Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche sono i "tipi" di proprietà osservabili e misurabili. Esse sono definite *operativamente* tramite il confronto con una *unità campione* convenzionalmente definita. Tale confronto permette di assegnare un risultato quantitativo (cioè numerico) alla misura delle grandezze. Esistono evidentemente diversi tipi indipendenti di grandezze fisiche: con un campione di lunghezza (ad es un metro a nastro), operativamente non riesco a misurare un intervallo di tempo.

Grandezze fondamentali Si definiscono *grandezze fondamentali* un insieme di grandezze indipendenti sufficienti per poter definire ogni altra grandezza fisica in termini di esse. Per un sistema di grandezze fondamentali

[1] Nel processo di misura è necessaria anche un accurata valutazione degli errori ed una analisi statistica dei risultati, vedi la sez. 1.2.

[2] Un'affermazione scientifica ha la caratteristica di poter essere falsificabile tramite opportuni esperimenti.

si sceglie in modo convenzionale un insieme di campioni di misura; vi possono essere ovviamente diverse scelte di campioni, più o meno largamente adottate. In Fisica, ed in generale nella Scienza e nella Tecnologia, è quasi universalmente adottato il cosiddetto Sistama Internazionale (S.I.). Le grandezze fondamentali e le relative unità di misura nel S.I. sono riportate in tabella 1.1 Possiamo eventualmente considerare, in ambiti che esulano dalla

grandezza	simbolo	unità	simbolo
lunghezza	L	metro	m
massa	M	chilogrammo	Kg
tempo	t	secondo	s
temperatura assoluta	T	grado Kelvin	K
intensità luminosa	I	candela	cd
intensità di corrente	i	Ampere	A

Tabella 1.1: Le grandezze fondamentali coi loro simboli, le unità di misura corrispondenti e i simboli di quest'ultime nel S.I.

Fisica strettamente detta, anche altre grandezze (definite, magari, in modo meno rigoroso). Ad esempio, il valore monetario, che nel sistema europeo si misura in euro (€) e nel sistema americano in dollari. Sicuramente è una grandezza di tipo diverso dalla massa o dal tempo [3]. Potremmo ad esempio indicare tale grandezza come D (per "denaro").

Grandezze derivate Le *grandezze derivate* sono operativamente definite in termini di grandezze fondamentali. Ad esempio una misura di velocità (media) si ottiene dividendo la misura dello spazio percorso per quella del tempo di percorrenza: velocità = lunghezza/tempo. Similmente, l'accelerazione corrisponde a lunghezza/(tempo)^2.

Dimensionalità delle grandezze Il "tipo" di una grandezza in riferimento alle grandezze fondamentali è noto come *dimensione*, e viene indicato usando parentesi quadre. Il concetto è facilmente espresso tramite esempi, come nella tabella 1.2. Si può estendere questo concetto anche ad altri campi. Ad esempio, quali sono le "dimensioni" di un incremento annuale di capitale δC? Tale quantità corrisponde all'aumento totale di capitale (che è un valore monetario, cioè una grandezza fondamentale di tipo D, secondo quanto ipotizzato prima) diviso per il periodo di tempo in cui si è verificato (misurato

[3] Anche se il detto "il tempo è denaro" non è del tutto irragionevole.

grandezza derivata	dimensione	unità di misura
velocità	$[v] = [L\,t^{-1}]$	$\mathrm{m/\,s}$
accelerazione	$[a] = [L\,t^{-2}]$	$\mathrm{m/\,s^2}$
superficie	$[S] = [L^2]$	$\mathrm{m^2}$
volume	$[V] = [L^3]$	$\mathrm{m^3}$
densità volumica	$[\rho] = [M L^{-3}]$	$Kg/\,\mathrm{m^3}$
...	...	...

Tabella 1.2: Alcune grandezze derivate.

in anni). Abbiamo dunque

$$[\delta C] = \left[D\,t^{-1}\right] \ . \tag{1.1}$$

Quali sono invece, le dimensioni di un tasso annuo di interesse α? Il tasso di interesse corrisponde all'incremento annuo di capitale diviso per il capitale iniziale, quindi

$$[\alpha] = [\delta C/C] = \left[t^{-1}\right] \ . \tag{1.2}$$

Infatti si esprime usualmente come una percentuale (che è un numero puro) "all'anno" (o al mese, etc. ...).

Analisi dimensionale E' un potente strumento di controllo sulla validità delle relazioni che si suppone esistano fra certe grandezze (e delle soluzioni degli esercizi!!) che consiste nel controllare che le dimensioni di termini che vengono uguagliati o sommati siano le stesse, cioè che i termini siano omogenei. Supponiamo ad esempio di trovare una formula che lega lo spazio percorso s all'accelerazione a ed al tempo impegato t nel seguente modo:

$$s = \frac{1}{2} a\,t^2 \ . \tag{1.3}$$

Possiamo controllare che questa formula è dimensionalmente corretta: per il membro di sinistra, che è una lunghezza, si ha

$$[s] = [L] \ . \tag{1.4}$$

Per il membro di destra,

$$\left[\frac{1}{2} a\,t^2\right] = \left[a\,t^2\right] = \left[L\,t^{-2}\,t^2\right] = [L] \ . \tag{1.5}$$

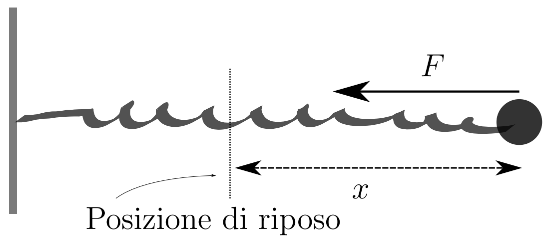

Figura 1.1: Una molla elongata esercita una forma di richiamo.

Nel secondo passaggio teniamo conto che il fattore $1/2$ è adimensionale, quindi è irrilevante in questa analisi dimensionale [4]; nel secondo inseriamo le dimensioni dell'accelerazione, riportate nella tabella 1.2; nel passaggio finale manipoliamo le dimensioni come grandezze algebriche. Una formula del tipo $s = at$ non sarebbe invece dimensionalmente corretta. Come altro esempio, la 2^a equazione della dinamica (equazione di Newton), che dicuteremo più avanti, collega la forza F agente su un punto materiale (modello ideale di certi sistemi fisici) alla massa m ed accelerazione a di tale punto:

$$F = m\,a\ . \tag{1.6}$$

Assumendo che tale equazione sia corretta, segue che le dimensioni di una forza sono

$$[F] = [m\,a] = [M\,L\,t^{-2}]\ . \tag{1.7}$$

L'unità di misura derivata per la forza nel S.I. è dunque il $Kg\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. L'importanza di tale unità di misura fa sì che le sia riservato un nome e un simbolo apposito, il Newton (N).

Costanti dimensionali In certi sistemi fisici compaiono dei parametri caratterizzanti (delle "costanti" del sistema) che possono essere dimensionali. Ad esempio, si trova sperimentalmente che le molle esercitano una forza di richiamo proporzionale all'elongazione cui sono soggette. Con riferimento alle notazioni della figura 1.1, si ha dunque

$$F = k\,x\ . \tag{1.8}$$

Dimensionalmente si deve avere (x è una lunghezza)

$$[F] = [k\,x] = [k]\,[x] = [k][L]. \tag{1.9}$$

[4] La sua correttezza non può quindi venire controllata tramite essa.

Le dimensioni di una forza sono date dall'eq. (1.7), quindi

$$[M L\, t^{-2}] = [k][L] \tag{1.10}$$

da cui, operando algebricamente sulle dimensioni, possiamo ricavare $[k]$:

$$[k] = [M\, t^{-2}]. \tag{1.11}$$

Dunque k è una costante dimensionale che caratterizza la molla (e varia da molla a molla).

Esercizio Calcolate le dimensioni della "costante di gravitazione universale" G che compare nella formula che descrive la forza di attrazione tra due punti materiali di masse m_1 e m_2 posti a distanza r:

$$F = G \frac{m_1\, m_2}{r^2} \ . \tag{1.12}$$

Grandezze adimensionali Sono grandezze derivate ottenute come rapporto di grandezze omogenee, e sono rappresentate da numeri puri. La presenza di grandezze adimensionali e coefficienti numerici in un'equazione non può essere controllata tramite l'analisi dimensionale. E' importante notare che solo grandezze adimensionali possono entrare in una formula come argomenti di una funzione che non sia semplicemente un monomio nelle varie grandezze da cui dipende.

Esempio Se τ è un tempo e x una posizione, una legge di moto del tipo

$$x(\tau) = \mathrm{e}^{\tau} \tag{1.13}$$

non è possibile. Il membro di destra non ha una dimensione definita, e pertanto non ha senso. Infatti, se espandiamo [5] in serie di Taylor l'esponenziale per τ piccoli, abbiamo

$$\mathrm{e}^{\tau} = 1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \ldots \ . \tag{1.16}$$

---

[5] Anche senza espandere in serie, se consideriamo la derivata dell'esponenziale abbiamo

$$\frac{d\mathrm{e}^{\tau}}{d\tau} = \mathrm{e}^{\tau} \ . \tag{1.14}$$

La derivata rispetto al tempo corrisponde al limite di un rapporto incrementale in cui si ha un intervallo di tempo a denominatore, quindi a livello dimensionale eq. (1.14) implica

$$[\mathrm{e}^{\tau}][t^{-1}] = [\mathrm{e}^{\tau}], \tag{1.15}$$

il che è impossibile.

I termine di questa espansione non sono omogenei: il primo è adimensionale, il secondo ha dimensione $[t]$, il terzo $[t^2]$, ... Una possible legge, dimensionalmente consistente, sarebbe invece la seguente:

$$x(\tau) = x_0\, \mathrm{e}^{\tau/\tau_0} \ , \tag{1.17}$$

dove x_0 ha le dimensioni di una lunghezza e corrisponde alla posizione al tempo $\tau = 0$ mentre τ_0 è una scala temporale di riferimento. In tal caso, l'argomento dell'esponenziale (e quindi l'esponenziale tutto) è adimensionale.

Angoli Un esempio molto importante di grandezze adimensionali è rappresentato dagli *angoli*. L'angolo θ tra due direzioni è definito scegliendo una

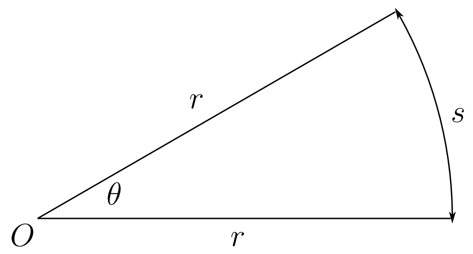

Figura 1.2: La definizione dell'angolo

circonferenza di raggio r qualsiasi, centrata nel punto di intersezione delle due direzioni, come il rapporto tra la lunghezza dell'arco di corconferenza s compreso tra le due direzioni e il raggio stesso, vedi figura 1.2:

$$\theta = \frac{s}{r} \ . \tag{1.18}$$

Dato che s è proporzionale ad r, questa definizione è indipendente dal raggio scelto. Quando gli angoli sono definiti tramite questa formula, essi sono numeri puri, ma si dice comunemente che sono "misurati in radianti". E' immediato trovare il valore di alcuni angoli particolari. Ad esempio, per un angolo giro, l'arco di circonferenza corrisponde a tutta la circonferenza, quindi

$$\text{angolo giro} : \theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ . \tag{1.19}$$

Un'angolo piatto è metà di un angolo giro, quindi corrisponde a π. Un angolo retto, che è metà di un angolo piatto, vale $\pi/2$. L'angolo al vertice di un triangolo equilatero, che è un terzo di angolo giro, vale $\pi/3$. Per gli angoli si usa spesso nella vita comune la notazione sessagesimale, in cui un angolo piatto corrisponde a 180°. Da questo possiamo dedurre la corrispondenza tra gradi sessagesimali e radianti:

$$180° = \pi \quad \Rightarrow \quad 1° = \frac{\pi}{180} \; . \tag{1.20}$$

Questo fattore di conversione ci permette di riesprimere angoli dati in gradi sessagesimali in radianti (cioè come numeri puri). Ad esempio, un angolo di 108° corrisponde a

$$108° = 108 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \; . \tag{1.21}$$

Esempio di uso dell'analisi dimensionale Consideriamo un semplice sistema fisico, detto pendolo ideale, che rappresenta la modellizzazione più semplice di un pendolo reale; vedi figura 1.3. In tale modello, qui sulla terra,

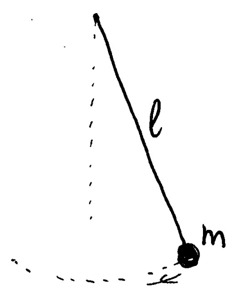

Figura 1.3: Modellizzazione di un pendolo ideale.

un punto materiale di massa m è sospeso senza attriti ad un punto tramite un file rigido di lunghezza l, inestensibile e di massa trascurabile. Il pendolo viene allontanato dalla posizione di equilibrio (la verticale) e lasciato libero di muoversi sotto l'influsso della gravità superficiale terrestre, che come è noto è caratterizzata dall'accellerazione di gravità $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Si verifica che il pendolo oscilla in maniera regolare con un periodo di oscillazione T (il periodo è il tempo necessario al pendolo per compiere un'oscillazione completa, avanti e indietro). Il periodo T può dipendere solo dal volore di m e di l e da g, che sono le uniche grandezza che entrano nel nostro modello. Assumiamo una dipendenza del tipo

$$T = c\, l^{\alpha}\, m^{\beta}\, g^{\gamma} \; , \tag{1.22}$$

dove c è una costante numerica, ed α, β, γ dei coefficienti che vorremmo determinare. L'analisi dimensionale di questa relazione ci fornisce la seguente relazione:

$$[T] = [l^{\alpha}\, m^{\beta}\, g^{\gamma}] = [L^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} t^{-2\gamma}], \tag{1.23}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo ricordato che l è una lunghezza, m è una massa e g un'accelerazione. Nel membro da sinistra, T è un tempo, quindi otteniamo

$$[t] = [L^{\alpha+\gamma} M^{\beta} t^{-2\gamma}]. \tag{1.24}$$

Nei due membri, tutte le grandezze fondamentali devono apparire alla stessa potenza; otteniamo pertanto il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma = &\ 0 \ , \\ \beta = &\ 0 \ , \\ -2\,\gamma = &\ 1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

che ha la soluzione $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1/2$. Otteniamo pertanto che la formula che esprime il periodo di oscillazione è

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{1.26}$$

Il coefficiente adimensionale c non può venir fissato tramite analisi dimensionale; quando studieremo questo modello otterremo che $c = 2\pi$.

Cambiamenti di unità di misura Per effettuare la conversione tra la misura di due grandezze effettuata rispetto ad unità di misura diverse è sufficiente (e sempre possibile: si tratta di grandezze omogenee!) esprimere la "vecchia" unità di misura in termini della "nuova". Ad esempio, nei paesi anglosassoni spesso si usa come misura di lunghezza l'inch (il "pollice"). Si ha che

$$1\,\text{inch} = 2.54\,\text{cm} = 2.54 \times 10^{-2}\ \text{m} \ . \tag{1.27}$$

Supponiamo di conoscere la misura di un area A in pollici quadri: $A = 4(\text{inch})^2$. Nel S.I. si avrà

$$A = 4(\text{inch})^2 = 4(2.54 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 4 \times (2.54)^2 \times 10^{-4}\,\text{m}^2 = 2.58 \times 10^{-3}\,\text{m}^2 \ . \tag{1.28}$$

Esempio Consideriamo un esempio al di fuori della fisica strettamente detta. Definiamo un (peculiare) indicatore economico I dato dal rapporto tra il prodotto interno lordo (P.I.L.) P e la superficie S di una nazione:

$$I \equiv \frac{P}{S} \ , \tag{1.29}$$

che (vagamente) rappresenta lo sfruttamento economico del territorio. Vogliamo confrontare tale indice tra U.S.A. e Eurozona, sapendo che i dati rilevanti (riferiti al 2014) sono espressi nella seguente tabella:

	U.S.A.	Eurozona
P	17.4×10^{12} dollari	13.4×10^{12} €
S	3717813 sq. ml	2628410 km^2

In tale tabella, sq. ml sta per "miglia quadre". L'indicatore I per gli Stati Uniti vale

$$I_{USA} = \frac{17.4 \times 10^{12} dollari}{3.717 \times 10^6 \text{miglia}^2} = 4.69 \times 10^6 \text{dollari/miglia}^2 \ . \tag{1.30}$$

Per la zona Euro abbiamo invece

$$I_{Euro} = \frac{13.4 \times 10^{12} \text{€}}{2.628 \times 10^6 \text{Km}^2} = 5.09 \times 10^6 \text{ €/Km}^2 \ . \tag{1.31}$$

Non possiamo confrontare direttamente i valori numerici dei due indici perché sono espressi in unità differenti. Le regole di conversione dalle unità U.S.A. a quelle europee sono i seguenti (il tasso di scambio è quello medio del 2014):

$$1 \text{ miglio} = 1609 \text{ m} \ , \quad 1 dollaro = 0.746\text{€} \ \ \text{(cambio di fine 2012)} \ . \tag{1.32}$$

Possiamo quindi riesprimere I_{USA} come segue:

$$I_{USA} = 4.69 \times 10^6 \times \frac{0.746\text{€}}{(1.609 Km)^2} = 1.35 \times 10^6 \text{ €/Km}^2 \ . \tag{1.33}$$

Confrontando tale valore con quello di I_{Euro} dato in eq. (1.31) vediamo che questo particolare indice è molto più alto per l'Eurozona (si ha $I_{Euro} = 3.76 I_{USA}$). Ciò è assai ragionevole, dato che vaste zone degli USA sono poco popolate e poco produttive in quanto desertiche o semi-desertiche.

1.2 Misure ed errori

Nell'effettuare la misura di una grandezza fisica si ricercano la *precisione* e l'*accuratezza*.

Precisione La precisione di una misura dipende da quanto essa è ben determinata, indipendentemente da quanto essa si avvicini al valore "vero" della grandezza oggetto di misura. E' legata in particolare alla scala minima che possiamo leggere sui nostri strumenti di misura.

Accuratezza L'accuratezza di una misura dipende da quanto essa si avvicina al valore vero della grandezza.

Stima dell'errore su una singola misura Effettuando una misura bisogna ovviamente cercare di evitare gli errori veri e proprii (errori di lettura, di posizionamento degli apparecchi, etc.), detti *errori sistematici*, per avere una buona accuratezza, ed utilizzare uno strumento con una risoluzione adeguata alla grandezza da misurare e agli scopi della misura stessa. Ad esempio, misurare un segmento l delle dimensioni di quello tracciato qui:

con un metro a nastro che segna solo i centimetri è poco sensato, perchè troppo impreciso. E' adeguato invece un righello riportante i millimetri. Per una misura singola di una grandezza f, il cui risultato sia un certo valore f_m, si deve stimare l'*errore massimo assoluto* Δf che si è potuto commettere. Il risultato della misura va quindi riportato come

$$f = f_m \pm \Delta f \ . \tag{1.34}$$

Nell'esempio precedente, il possibile errore massimo Δl nella misura del segmento l dovuto alla limitata precisione della scala è $0.5mm$. Tenendo conto che potremmo aver fatto qualche errore nel posizionamento del righello, e per tenerci sul sicuro, potremmo aumentare questo valore e pensare che l'errore massimo assoluto sia $\Delta l = 1mm$. Se per esempio otteniamo la misura $l_m = 4.7cm$, quello che possiamo dire con sicurezza è

$$l = (4.7 \pm 0.1)cm \ . \tag{1.35}$$

Errore relativo Più significativo dell'errore assoluto Δf è l'errore relativo, definito come il rapporto tra l'errore e il valore della grandezza misurata [6]:

$$\frac{\Delta f}{|f_m|} \ . \tag{1.36}$$

L'errore relativo è un numero puro, e viene espresso in percentuale. Nell'esempio precedente, abbiamo

$$\frac{\Delta l}{|l_m|} = \frac{0.1cm}{4.7cm} = 0.02 = 2\% \ . \tag{1.37}$$

Se l'errore di un millimetro dell'esempio precedente fosse stato per la misura di una lunghezza dell'ordine di chilometri, l'errore relativo sarebbe risultato bassissimo: avremmo fatto un lavoro eccezionale!

[6] A meno di termini di ordine superiore al primo in Δf, questa definizione coincide con $\Delta f/|f|$ dove f è il valore "vero" della nostra misura, che possimo stimare come $f = f_m \pm \Delta f$.

Cifre significative La presenza di un termine di errore nella misura ci dice che essa puó essere conosciuta con sicurezza solo fino ad un certo livello, cioè che il suo valore numerico ha solo un certo numero di *cifre significative*. L'ultima cifra significativa è quella che corrisponde all'ordine di grandezza dell'errore. Nell'esempio appena utilizzato, è corretto scrivere

$$l = 4.7cm \quad \text{(corretto)} \tag{1.38}$$

con *due* cifre significative: infatti in questo modo si comunica che l'ultima cifra significativa è quelle che corrisponde ai mm, e quindi che l'ordine di grandezza dell'errore è di $1mm$, che è in effeti l'errore massimo assoluto stimato. Il numero di cifre significative di una misura è collegato all'errore relativo su di essa. Se si hanno n cifre significative, questo indica che l'errore relativo è dell'ordine di grandezza di 10^{-n}. Nell'esempio precedente, l'errore relativo è 2×10^{-2}, cioè è dell'ordine di 10^{-2}, e la misura ha dunque due cifre significative. Se scrivessimo

$$l = 4.70cm \quad \text{(scorretto)} \tag{1.39}$$

con *tre* cifre significative, questo comunicherebbe un ordine di grandezza dell'errore corrispondente a quello dell'ultima cifra significativa, cioè $0.01cm = 0.1mm$, il che non corrisponde al vero. Notiamo inoltre che avremmo potuto correttamente scrivere la nostra misura come

$$l = 0.047\,\mathrm{m} \quad \text{(corretto)}\ . \tag{1.40}$$

Le cifre significative di tale scrittura rimarrebbero *due*: gli zeri iniziali non contano perché ci troviamo a doverli inserire semplicemente a causa dell'unità di misura scelta, grande rispetto al risultato. Se invece volessimo esprimere il risultato in termini di un'unità di misura piccola, quale il micron $\mu = 10^{-6}\,\mathrm{m}$, ci troveremmo di fronte ad una ambiguità. Infatti, effettuando l'equivalenza a partire da $l = 0.047\,\mathrm{m}$ troveremmo apparentemente

$$l = 47000\,\mu \quad \text{(scorretto)}\ . \tag{1.41}$$

Tale scrittura, però, avrebbe *cinque* cifre significative, e sembrerebbe implicare che noi conosciamo il risultato con un incertezza dell'ordine del valore dell'ultima cifra, cioè del micron. Infatti, se noi avessimo davvero effetuato la misura tramite qualche sofisticato strumento di misura in modo da avere davvero un errore massimo stimato di $1\,\mu$, la scriveremmo esattamente nello stesso modo. Per risolvere l'ambiguità, il modo corretto di scrivere la nostra misura è tramite la notazione esponenziale:

$$l = 4.7 \times 10^4\,\mu \quad \text{(corretto)}\ . \tag{1.42}$$

Le cifre significative in tal modo rimangono due, e si evidenzia che l'errore è dell'ordine dei $10^4\,\mu$, cioè del mm.

Propagazione dell'errore Supponiamo di voler valutare una grandezza tramite la sua espressione in funzione di altre grandezze delle quali si effettua una misura diretta. Come semplice esempio, consideriamo la misura dell'area A di una piastra rettangolare, vedi figura 1.4. Supponiamo di ottenerre, dalla

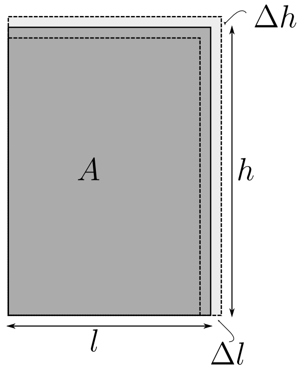

Figura 1.4: La grandezza da misurare è l'area A di una piastra rettangolare.

misura diretta dei suoi lati,

$$l = (4.5 \pm 0.1)cm \ , \quad h = (16.3 \pm 0.1)cm \ . \tag{1.43}$$

Per l'area abbiamo

$$A = lh = (4.5 \pm 0.1) \times (16.3 \pm 0.1)cm^2 \ . \tag{1.44}$$

A causa dei possibili errori sui lati, possiamo solo dire che il valore dell'area sarà presumibilmente compreso tra il valore minimo

$$4.4 \times 16.2cm^2 = 71.28cm^2 \tag{1.45}$$

ed il valore massimo

$$4.6 \times 16.4cm^2 = 75.44cm^2 \ . \tag{1.46}$$

Il valore centrale è $(75.44 + 71.28)/2cm^2 = 73.36cm^2$; la semi-distanza tra i valori estremi è $2.08cm^2$. Possiamo quindi concludere che

$$A = (73.36 \pm 2.08)cm^2 \ . \tag{1.47}$$

Notiamo che l'errore è dell'ordine del centimetro, e le cifre significative del risultato sono dunque solo due, tante quante quelle del fattore con meno cifre significative, l. In conclusione, dunque, il nostro risultato va scritto come

$$A = (73 \pm 2)cm^2 \ . \tag{1.48}$$

In generale, consideriamo una grandezza

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{1.49}$$

che dipende dalle variabili x_i, $i = 1, \ldots N$. La misura diretta di queste ultime fornisce i risultati [7] $x_i \pm \Delta x_i$. Supponendo gli errori Δx_i piccoli rispetto ai valori x_i e sviluppando al prim'ordine si ha per l'errore su f la seguente espressione:

$$\Delta f = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \ . \tag{1.50}$$

Alcune osservazioni su questa formula:

- il simbolo $\partial f / \partial x$ denota la "derivata parziale" di una funzione f di molti argomenti: $f = f(x, y, \ldots)$ fatta rispetto ad uno dei suoi argomenti. Rispetto a tale operazione, gli altri argomenti si comportano come costanti. Ad esempio, se $f = x\,y^2$, allora $\partial f / \partial x = y^2$ e $\partial f / \partial y = 2xy$.

- La presenza del *modulo* della derivata (che non è presente di per se' nello sviluppo di Taylor della funzione f) è dovuto al fatto che gli errori Δx_i sono per definizione positivi, ma dobbiamo considerare sia il caso in cui essi si aggiungono ad x_i sia quello in cui si sottraggono. Qualunque sia il segno della derivata parziale rispetto ad x_i, in uno dei due casi si ottiene un contributo positivo. Equivalentemente, si può scrivere come in eq. (1.50).

- Tutti i termini dell'eq. (1.50) sono omogenei: infatti la dimensione di $\partial f / \partial x_i$ è diminuita rispetto quella di f della dimensione di x_i, che però viene reintegrata dalla dimensione del suo errore Δx_i.

L'errore dunque si *propaga* dalle misure dirette alla quantità calcolate a partire da esse. Bisonga tenere ben presente questo effetto, che può portare ad incertezze grandi sul risultato finale anche a partire da misure relativamente precise.

Esempio Sulla Terra, un oggetto libero di cadere ha un'accelerazione costante diretta verso il basso (accelerazione di gravità) $g = (9.80 \pm 0.01)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Se denotiamo con z la coordinata verticale, la posizione di un oggetto in caduta libera in funzione del tempo può venire espressa, come vedremo in seguito, tramite la formula

$$z(t) = z_0 + v_0 t - 1/2 g\, t^2 \ . \tag{1.51}$$

[7] Per non appesantire eccessivamente la notazione, qui usiamo lo stesso simbolo per la grandezza ed il risultato della misura.

Qui z_0 rappresenta la posizione dell'oggetto, e v_0 la sua velocità all'istante $t = 0$ (potrebbe essere lanciato o spinto invece che semplicemente lasciato andare). Supponiamo di voler conoscere (senza averla potuta misurare direttamente) l'altezza dell'oggetto z_T ad un tempo $T = (2.0 \pm 0.1)\,\mathrm{s}$ determinato sperimentalmente, sapendo che la posizione iniziale è stata misurata essere $y_0 = (100.0 \pm 0.1)\,\mathrm{m}$, con velocità approssimativamente nulla: $v_0 = (0.0 \pm 0.1)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Utilizzando la legge del moto (1.51) abbiamo

$$z_T = z_0 + v_0 T - 1/2 g\, T^2 \ . \tag{1.52}$$

Coi valori riportati prima, si ottiene $z_T = 19.6\,\mathrm{m}$. Si hanno però errori su z_0, v_0, g

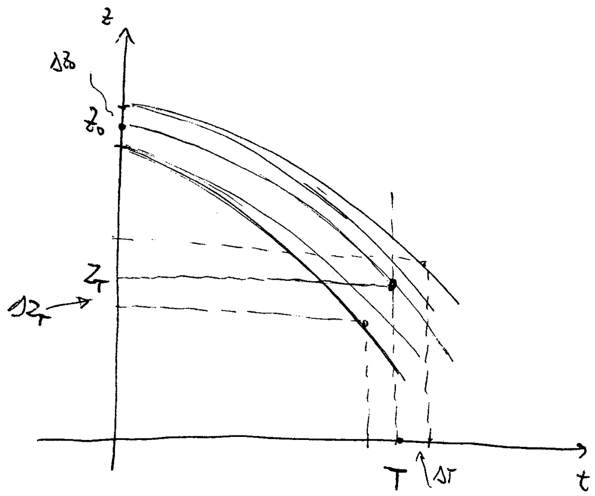

Figura 1.5: L'incertezza sui dati iniziali, e quindi sulla furma della curva $z(t)$, e quella sul tempo T portano ad un incertezza sul risultato finale z_T.

e T, che si propagano secondo la formula eq. (1.50) alla grandezza z_T:

$$\begin{aligned}\Delta z_T &= \left|\frac{\partial z_T}{\partial z_0}\right| \Delta z_0 + \left|\frac{\partial z_T}{\partial v_0}\right| \Delta v_0 + \left|\frac{\partial z_T}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial z_T}{\partial T}\right| \Delta T \\ &= \Delta z_0 + T\,\Delta v_0 + \frac{1}{2} T^2\,\Delta g + |v_0 - g\,T|\,\Delta T \ .\end{aligned} \tag{1.53}$$

Siccome stiamo lavorando al prim'ordine negli errori, possiamo ora in questa espressione inserire per $y_0, v_0, \ldots$ i valori misurati, senza errori. Otteniamo infine nel nostro caso, sostituendo i valori numerici dati prima per le misure e i loro errori, $\Delta z_T = 2.2\,\mathrm{m}$. La nostra stima per la grandezza z_T è dunque affetta da un incertezza piuttosto grande, ed ha due sole cifre significative:

$$z_T = (19 \pm 2)\,\mathrm{m} \ . \tag{1.54}$$

La figura 1.5 da' una descrizione grafica di tale incertezza.

La propagazione delle incertezze andrebbe tenuta in debito conto anche in ambiti diversi dalla Fisica.

Esempio Supponiamo di sapere che un capitale investito avrà nel tempo un andamento esponenziale secondo la legge

$$C(t) = C_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \ , \tag{1.55}$$

dove C_0 è il capitale iniziale, e α il tasso di interesse. Pensiamo di poter mettere insieme un capitale iniziale di un milione di euro, *give or take* diecimila euro: $C_0 = (10^6 \pm 10^4)$ €. Ipotizziamo inoltre di riuscire a spuntare un tasso di interesse (fisso) tra il 2 e il 4% all'anno: $\alpha = (0.03 \pm 0.01)$ (anno)$^{-1}$. Quale capitale C_{10} potremo avere tra 10 anni? Dall'eq. (1.55) risulta

$$C_{10} = C_0 \times \mathrm{e}^{\alpha t}\big|_{t=10\,\mathrm{anni}} = 10^6 \times \mathrm{e}^{0.03\times 10} \text{ €} = 1.3 \times 10^6 \text{ €} \ . \tag{1.56}$$

Tuttavia, le incertezze su C_0 ed α si propagano a C_{10}:

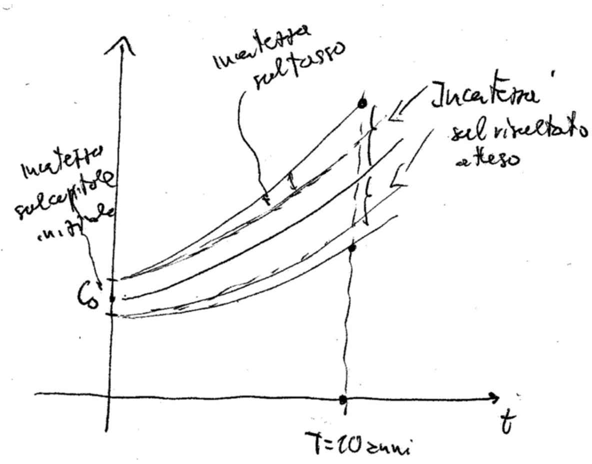

Figura 1.6: L'incertezza sul capitale iniziale e sul tasso di interesse determina un'incertezza sulla forma della funzione $C(t)$ e quindi sul capitale atteso a 10 anni.

$$\begin{aligned}\Delta C_{10} &= \left|\frac{\partial C_{10}}{\partial C_0}\right| \Delta C_0 + \left|\frac{\partial C_{10}}{\partial \alpha}\right| \Delta\alpha = \mathrm{e}^{\alpha t}\big|_{t=10\,\mathrm{anni}} \, \Delta C_0 + C_0 \ t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\big|_{t=10\,\mathrm{anni}} \, \Delta\alpha \\ &= 1.4 \times 10^5 \text{ €} \ . \end{aligned} \tag{1.57}$$

Possiamo dunque stimare il nostro capitale a 10 anni come

$$C_{10} = (1.30 \pm 0.14) \times 10^6 \text{ €}. \tag{1.58}$$

Il nostro guadagno nell'operazione, $C_{10} - C_0$, sarà di (300000 ± 140000) €. L'incertezza è forte. La figura 1.6 da' una descrizione grafica di tale incertezza.

Propagazione dell'errore relativo in casi particolari Consideriamo una grandezza f ottenuta come prodotto di due altre:

$$f(x,y) = x\,y \; . \tag{1.59}$$

La formula di propagazione degli errori, eq. (1.50), applicata a questo caso ci dice che

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y = |y|\,\Delta x + |x|\,\Delta y \; . \tag{1.60}$$

Per l'errore relativo si ha allora

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \; . \tag{1.61}$$

Per un prodotto, gli errori relativi si sommano! La stessa cosa succede per un rapporto. Infatti, se $g = x/y$, si ha

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \Delta y = \frac{1}{|y|}\,\Delta x + \frac{|x|}{|y|}\,\Delta y \tag{1.62}$$

e quindi nuovamente

$$\frac{\Delta g}{|g|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \; . \tag{1.63}$$

Possiamo generalizzare questa proprietà considerando il caso, abbastanza comune, di una grandezza espressa come un monomio in molte variabili:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = c\,(x_1)^{k_1}\,(x_2)^{k_2} \ldots (x_N)^{k_N} \; , \tag{1.64}$$

dove c è una costante. Le derivate parziali di f sono facilmente esprimibili: ad esempio,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c\,k_1 (x_1)^{k_1 - 1}\,(x_2)^{k_2} \ldots (x_N)^{k_N} = \frac{k_1}{x_1}\,f \; . \tag{1.65}$$

Similmente avviene per le altre variabili, quindi possiamo scrivere, per ogni $i = 1, \ldots N$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{k_i}{x_i}\,f \tag{1.66}$$

ed ottenere, applicando l'eq. (1.50) per la propagazione degli errori,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{|k_i|}{|x_i|}\,f\,\Delta x_i \; . \tag{1.67}$$

Per l'errore relativo si ha dunque la semplice espressione

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \sum_{i=1}^{N} |k_i| \frac{\Delta x_i}{|x_i|} \; . \tag{1.68}$$

Cifre significative per particolari grandezze derivate Dalla relazione tra il numero di cifre significative e l'ordine di grandezza dell'errore relativo, descritta dopo l'eq. (1.38), segue che le formule del paragrafo precedente si possono esprimere in termini del numero di cifre significative, e danno origine alla seguente regola approssimata. Per una grandezza ottenuta tramite un prodotto, od un rapporto, il numero di cifre significative è quello del fattore che ne ha di meno.

Misure ripetute - Istogramma delle frequenze Finora abbiamo analizzato misure singole e abbiamo considerato

- la precisione consentita dallo strumento di misura;
- la possibile presenza di errori sistematici, che si cerca di ridurre il più possibile.

Tali due fattori portano a stimare un errore massimo assoluto per ogni misura. Anche svolgendo al meglio gli esperimenti e le misure, tuttavia, ci sono sempre delle fluttuazioni e delle incertezze non eliminabili, dette *errori casuali* o incertezze statistiche; esse fanno si che, effettuando molte misure della stessa grandezza nelle stesse condizioni sperimentali, esse differiscono tra di loro e dal valore vero che si suppone esistere. Tali differenze sono visibili se la precisione della misura è comparabile con l'ordine di grandezza delle incertezze statistiche stesse, cioè in qualche modo se la precisione della misura è spinta al limite. Effettuando un insieme di misure $\{x_i\}$, con $i = 1, \dots N$, esse possono essere rappresentate in un istogramma di frequenza come in figura 1.8. L'asse delle ascisse rappresenta la grandezza x (in una certa unità di misura) ed è suddiviso in intervallini corrispondenti alla precisione della misura (ad esempio, intervalli di ampiezza $1mm$ se stiamo effetuando misure di lunghezza con un righello la cui scala riporta i millimetri). Possiamo etichettarli con un indice α. I valori misurati x_i risultano distribuiti nei vari intervallini e sull'asse delle ordinate si riporta il numero di misure che cadono in ognuno di essi, divisa per il numero totale di misure, cioè la frequenza f_α con cui le misure cadono in esso. L'istogramma delle frequenza mostra che le misure si addensano in una zona all'interno della quale ci aspettiamo si trovi il valore "vero".

Media Quale è la migliore stima del valore vero che possiamo estrarre dal nostro insieme di misure? Da molti punti di vista si può mostrare che la stima più affidabile è data dalla *media* delle misure

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \ . \tag{1.69}$$

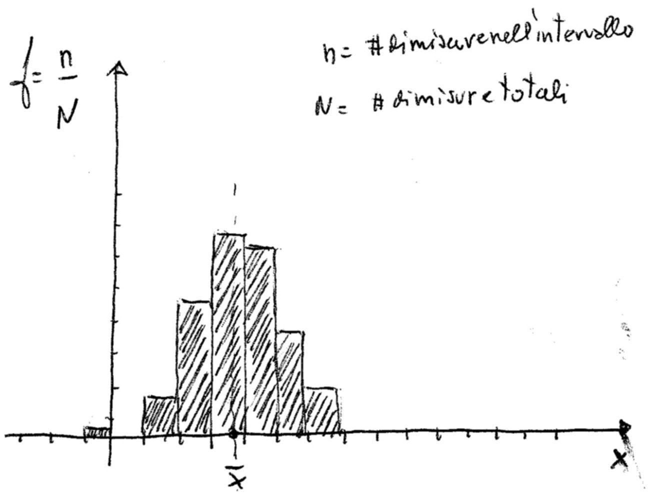

Figura 1.7: Istogramma delle frequenze per un set di misure della variabile x. La media è indicata come $\bar{x}$.

In termini dell'istogramma delle frequenze, se denotiamo con $\hat{x}_\alpha$ i valori centrali di ogni intervallino, la media può essere anche stimata tramite la formula

$$\sum_\alpha \hat{x}_\alpha \, f_\alpha \; . \tag{1.70}$$

Varianza empirica L'istogramma delle frequenze mostra che le misure hanno una certa dispersione intorno alla media, cioè possono essere più o meno addensate intorno ad essa. Come ottenere una descrizione quantitativa di tale dispersione? Definiamo gli *scarti* ξ_i di ogni singola misura rispetto alla media:

$$\xi_i = x_i - \bar{x} \; . \tag{1.71}$$

Il segno di uno scarto non è molto significativo, quello che conta è il suo modulo $|\xi|$ che rappresenta la distanza della misura x_i dalla media $\bar{x}$. Spesso si considera il quadrato di tale distanza, cioè lo *scarto quadratico* ξ_i^2. La grandezza quantitativa che meglio rappresenta la dispersione delle misure intorno alla media è la "varianza empirica"

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2}{N-1}} \; . \tag{1.72}$$

La curva normale degli errori Nella maggior parte delle situazioni, se si fa un numero elevatissimo di misure (in modo idealizzato, quindi, se si prende

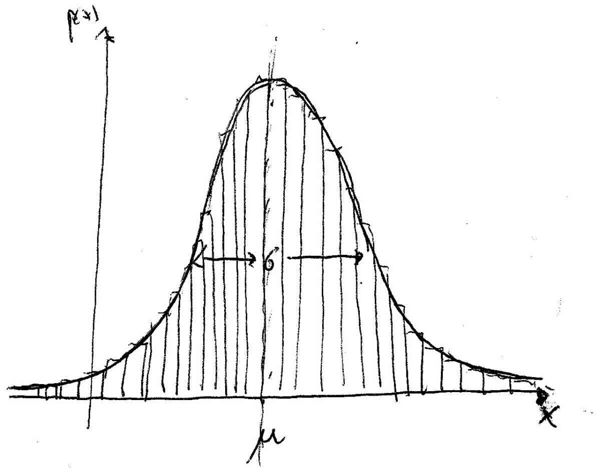

Figura 1.8: Nel limite di un grande numero di misure l'istogramma delle frequenze tende ad una curva continua, la curva normale degli errori di Gauss.

il limite $N \to \infty$) e si rendono gli intervallini nell'asse delle ascisse sempre più piccoli, si puó mostrare che le frequenze ottenute assumono la forma di una funzione continua $p_g(x)$, detta distribuzione normale degli errori, o curva di Gauss, che è descritta dell'equazione

$$p_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ . \tag{1.73}$$

La curva $p_g(x)$ è la *densità di probabilità* di ottenere come risultato di una misura il valore x. Ciò significa che probabilità $P([a, b])$ di otenere un risultato $x \in [a, b]$ è data da [8]

$$P([a, b]) = \int_a^b dx\, p(x) \ , \tag{1.75}$$

come illustrato in figura 1.9. Data una distribuzione di probabilità $p(x)$ possiamo calcolare il *valore medio* della variabile x come

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, p(x) \ . \tag{1.76}$$

[8]Oviamente, la probabilità di ottenere un qualche x deve essere uno: siamo certi di ottenere un qualche risultato! Questo vuol dire che ogni corretta distribuzione di probablità deve essere *normalizzata*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) = 1 \ , \tag{1.74}$$

il che è vero per la distribuzione gaussiana data in eq. (1.73), come segue dalla formula (1.78).

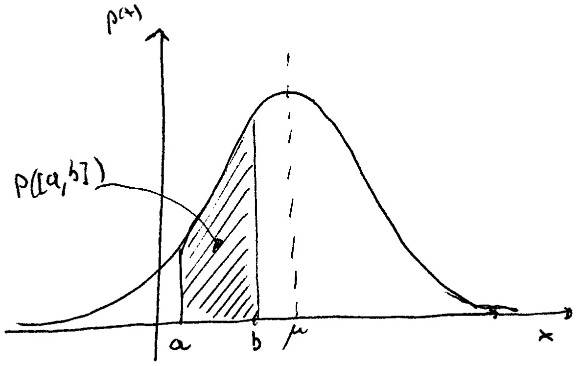

Figura 1.9: La propabilità totale di ottenere una misura nell'intervallo $[a, b]$ è data dall'integrale della densità di probabilità, cioè dal'area sottesa alla curva in tale intervallo.

Questa definizione è analoga alla definizione di media nel caso di un numero finito di misure data in eq. (1.70). Per la distribuzione gaussiana si trova

$$\langle x \rangle = \int dx\, x\, p_g(x) = \mu \; ; \tag{1.77}$$

il parametro μ rappresenta dunque il valor medio della grandezza x.

Esercizio Mostrate come questo risultato segue, come quelli per i valori medii seguenti, tramite opportuni cambi di variabile, dalla seguente formula che descrive una importantissima classe di integrali definiti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^k\, \mathrm{e}^{-a\,y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n+1\ , \\ \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}a^{-(2n+1)/2} & \text{se } k = 2n\ , \end{cases} \tag{1.78}$$

dove $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 1$.

Se consideriamo il valor medio dello scarto quadratico rispetto alla media troviamo

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\mu\langle x \rangle + \mu^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x^2 \rangle, \tag{1.79}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato l'eq. (1.77) e il fatto che la distribuzione è normalizzata. Effettuando il calcolo del valor medio di x^2 usando eq. (1.78) si trova infine

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2\ . \tag{1.80}$$

Il parametro σ in eq. (1.73) rappresenta dunque il limite continuo della varianza empirica s definita in eq. (1.72) ed è detto *varianza*; esso fornisce una misura della "larghezza" della distribuzione. Ricapitolando, la relazione tra i parametri "empirici" di un set di N misure e i parametri della curva normale che descrive ciò che accadrebbe per infinite misure è l seguente:

$$\bar{x} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu\ , \quad s \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sigma\ . \tag{1.81}$$

Errore sulla media Avendo effettuato un set di molte misure, possiamo stimare il valore vero tramite la media empirica $\bar{x}$. Quale incertezza si deve attribuire a questa stima? Questa domanda si puó rifrasare come segue: se facessimo molte serie di N misure, calcolando di ciascuna la media empirica, come si distribuirebbero tali medie? Si può mostrare che esse tenderebbero a seguire nuovamente una distribuzione di tipo gaussiano, con una varianza data da

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\ , \tag{1.82}$$

se σ è la varianza della distribuzione corrispondente a una singola serie di misure (nel limite di N grande). In pratica, dunque, possiamo stimare empiricamente la varianza della media $\sigma_{\bar{x}}$ tramite la quantità

$$\delta = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2}{N(N-1)}} \tag{1.83}$$

e scrivere il risultato di una serie di misure come

$$\bar{x} \pm \delta \ . \tag{1.84}$$

Esercizio Suponiamo di aver misurato il periodo di oscillazione T di un pendolo, ottenendo la seguente lista di misure:

$$1.1\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.3\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.2\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.4\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.2\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.3\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.2\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.1\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.3\,\mathrm{s}\ ,\quad 1.2\,\mathrm{s}\ . \tag{1.85}$$

Qual'è la miglior stima che possiamo dare del periodo T e della sua incertezza?