Capitolo 9

Campi conservativi

In questo capitolo studieremo l'esistenza del potenziale di un campo vettoriale, equivalentemente, di una primitiva di una forma differenziale. Cambieremo un po' le notazioni perché in molte applicazioni il potenziale si indica col simbolo V. Quindi useremo un altro simbolo, per esempio $\mathbf{F}$, per indicare il campo vettoriale.

9.1 Potenziale

Supponiamo che il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definito su una regione Ω sia il gradiente di una funzione[1] $V(\mathbf{r})$ di classe C^1. Si sa dalla fisica che la funzione V si chiama il $\boxed{\textit{potenziale}}$ del campo vettoriale e che un campo vettoriale dotato di potenziale si chiama $\boxed{\textit{conservativo}}$. I campi conservativi hanno grande importanza per le applicazioni.

> Si faccia attenzione a non confondersi con i segni: in fisica, $V(\mathbf{r})$ si chiama il potenziale del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ mentre $-V(\mathbf{r})$ ne è l' $\boxed{\textit{energia potenziale}}$. In fisica si lavora più frequentemente con l'energia potenziale di $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, ossia con la funzione $-V(\mathbf{r})$, talvolta indicata come "energia potenziale $V(\mathbf{r})$". In questo caso $V(\mathbf{r})$ non è il potenziale di $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ma di $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Vogliamo dare condizioni atte a riconoscere se un assegnato campo vettoriale è conservativo su una regione Ω e, se lo è, vogliamo calcolarne il potenziale. Per evitare complicazioni puramente tecniche assumeremo che i campi vettoriali e le funzioni siano definiti e con la regolarità che verrà richiesta in una regione

[1] ricordiamo che col termine "funzione" si indica sempre una funzione univoca.

$\tilde{\Omega}$ e che la regione Ω in cui si lavora abbia chiusura contenuta in $\tilde{\Omega}$. In questo modo le derivate delle funzioni sono automaticamente continue sia su Ω che sulla sua chiusura. Col termine "curva" inoltre intenderemo "curva regolare a tratti". Vediamo subito una condizione necessaria che deve essere soddisfatta dai campi conservativi. Premettiamo quest'osservazione:

Lemma 250 *Vale*

$$\oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, d\mathbf{r} = 0$$

per ogni *curva chiusa* γ *di sostegno in* Ω *se e solo se*

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, d\mathbf{r}$$

per ogni *coppia di curve* γ_1 *e* γ_2 aventi gli stessi estremi.

Dim. Per la dimostrazione, basta notare che se le due curve γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi, allora $\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva chiusa, si veda il Lemma 228, e quindi

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} \,. \quad \blacksquare$$

Noto ciò, proviamo:

Teorema 251 *Se* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *è un campo conservativo su una regione* Ω *allora*

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = 0$$

su ogni curva chiusa di sostegno in Ω. *Equivalentemente,*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r}$$

ha il medesimo valore su tutte le curve γ *di sostegno in* Ω*, che hanno i medesimi estremi.*

Dim. Calcoliamo l'integrale di $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ integrale su un arco γ. Sia

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k} \,.$$

Si trova

$$\int_\gamma V_x \,\mathrm{d}x + V_y \,\mathrm{d}y + V_z \,\mathrm{d}z =$$

$$\int_a^b [V_x(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + V_y(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + V_z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)] \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), y(t), z(t)) = V(x(b), y(b), z(b)) - V(x(a), y(a), z(a)) \,.$$

Dunque, in questo caso particolare, l'integrale non dipende dalla curva γ, ma solo dai suoi estremi. In particolare è nullo se gli estremi coincidono, ossia se la curva è chiusa. ∎ Il teorema precedente non è immediatamente usabile, perché richiede infinite verifiche; una per ciascuna curva chiusa di sostegno in Ω. Ciò può lievemente migliorarsi. Notando che ogni curva di sostegno in Ω si può approssimare mediante poligonali, si potrebbe provare:

Lemma 252 *Accade che*

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = 0$$

per ogni *curva γ di sostegno in Ω se e solo se*

$$\oint_P \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = 0$$

per ogni poligonale *P di sostegno in Ω.*

Proviamo ora che le condizioni necessarie appena individuate sono anche sufficienti:

Teorema 253 *Un campo vettoriale di classe C^1*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{i} + g(\mathbf{r})\mathbf{j} + h(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

ammette potenziale $V(\mathbf{r})$ se e solo se la sua circuitazione lungo ogni *poligonale chiusa e semplice di sostegno in Ω è nulla.*

Dim. La condizione necessaria si è già provata. Mostriamo che essa è anche condizione sufficiente. Per fissare le idee, supponiamo $\mathbf{r} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e quindi

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k} \, .$$

Fissiamo un punto $\mathbf{r_0}$ qualsiasi in Ω e costruiamo una funzione $V(\mathbf{r})$ in questo modo: sia $P_\mathbf{r}$ una poligonale che congiuge $\mathbf{r_0}$ con $\mathbf{r}$. L'integrale

$$\int_{P_\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{c}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{c}$$

dipende solo dagli estremi della poligonale, ossia dai punti $\mathbf{r_0}$ e $\mathbf{r}$, dato che l'integrale sulle poligonali chiuse è nullo. Essendo $\mathbf{r_0}$ fissato, il valore dell'integrale dipende solo dal secondo estremo $\mathbf{r}$ della curva. Dunque la funzione

$$V(\mathbf{r}) = \int_{P_\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{c}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{c}$$

è ben definita. Mostriamo che essa è derivabile e che le sue derivate parziali sono le componenti di $\mathbf{F}$. Consideriamo per questo la derivata rispetto ad x,

$$V_x(x,y,z)=\lim_{hh\to 0}\frac{V(x+h,y,z)-V(x,y,z)}{h}\,.$$

Calcoliamo $V(x+h,y,z))$ percorrendo prima la curva $P_{\mathbf{r}}$, che congiunge $\mathbf{r_0}$ con $\mathbf{r}$, e poi il segmento parametrizzato da

$$\mathbf{c}_1(t)=x+th\,,\qquad c_2(t)=y\,,\qquad c_3(t)=z\,,\qquad t\in[0,1]\,.$$

Questo segmento congiunge il punto di coordinate (x,y,z) col punto di coordinate $(x+h,y,z)$. Indichiamo con S questo segmento, cosìche

$$\begin{aligned}V(\mathbf{r}+\mathbf{h})-V(\mathbf{r})&=\left[\int_{\gamma_{\mathbf{r}}}\mathbf{F}(\mathbf{c})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{c}+\int_S\mathbf{F}(\mathbf{c})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{c}\right]-\int_{\gamma_{\mathbf{r}}}\mathbf{F}(\mathbf{c})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{c}\\&=\int_S\mathbf{F}(\mathbf{c})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{c}=\int_0^1[u(x+th,y,z)]h\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Dunque, (usando il Teorema 139 nel passaggio dalla penultima all'ultima riga)

$$\begin{aligned}V_x(x,y,z)&=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h,y,z)-V(x,y,z)}{h}\\=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^1[u(x+th,y,z)]h\,\mathrm{d}t\right]&=\lim_{h\to 0}\int_0^1 u(x+th,y,z)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 u(x,y,z)\,\mathrm{d}t=u(x,y,z)\end{aligned}$$

come si voleva. In modo analogo si trattano le altre derivate. ∎

Osservazione 254 Ricordiamo che la circuitazione di un campo di forze lungo una curva chiusa si interpreta come il lavoro che il campo compie su un punto che percorre la curva. Il teorema precedente mostra quindi che un campo è conservativo se e solo se esso compie lavoro nullo su ogni punto che percorre una qualsiasi curva chiusa di sostegno in Ω.

Inoltre:

Teorema 255 *Due diversi potenziali del medesimo campo vettoriale, definiti su una medesima regione Ω, hanno differenza costante.*

Dim. Perchè la loro differenza $U(x,y,z) = V_1(x,y,z) - V_2(x,y,z)$ ha derivate parziali tutte nulle. Dunque è costante su ogni poligonale e quindi sulla regione Ω. ∎ L'uso del Teorema 253 per verificare se un campo vettoriale è conservativo, richiede infinite verifiche e quindi non può usarsi per risolvere problemi concreti. Per dare un criterio utilizzabile in pratica, ricordiamo la nostra ipotesi, che il campo vettoriale sia di classe C^1. Quindi il potenziale, se esiste, è di classe C^2 e quindi il *Teorema di Schwarz* relativo all'eguaglianza delle derivate miste mostra:

Teorema 256 *Se il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = u(x,y,z)\mathbf{i} + v(x,y,z)\mathbf{j} + w(x,y,z)\mathbf{k}$$

di classe C^1 è conservativo, valgono le uguaglianze

$$u_y = v_x\,, \qquad u_z = w_x\,, \qquad v_z = w_y \tag{9.1}$$

in ogni punto di Ω.

Dim. Infatti, sia

$$\mathbf{F}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\mathbf{i} + V_y(x,y,z)\mathbf{j} + V_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

Ossia, per esempio, $u = V_x$, $v = V_y$. Il Teorema di Schwarz mostra che

$$u_y = V_{x,y} = V_{y,x} = v_x\,.$$

Le altre uguaglianze si ottengono in modo analogo. ∎

Osservazione 257 Le condizioni (9.1) sono state scritte per campi vettoriali su $\mathbb{R}^3$, ma naturalmente valgono anche per campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$. Se $n = 2$ queste condizioni si riducono a

$$u_y = v_x\,, \qquad u_x = v_y\,. \quad \blacksquare \tag{9.2}$$

Le condizioni (9.1) sono le condizioni per avere

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0\,.$$

Un campo vettoriale il cui rotore è nullo si dice $\boxed{\textit{irrotazionale}}$. Il Teorema 256 si riformula quindi come segue:

Teorema 258 *Ogni campo conservativo è irrotazionale.*

L'esempio seguente mostra che il viceversa non vale:

Esempio 259 Si consideri il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ dato da

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}\,. \tag{9.3}$$

Il campo vettoriale (9.3) è rappresentato nella figura 9.1, a sinistra. Si vede immediatamente che questo campo vettoriale verifica, ove è definito, le uguaglianze (9.2); però non è conservativo perchè, calcolando la circuitazione lungo la circonferenza parametrizzata da

$$\gamma: \qquad x = r\cos t\,, \quad y = r\sin t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si trova

$$r^2 \int_\gamma \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\, \mathrm{d}t = 2r^2\pi \neq 0\,.$$

Dunque, il potenziale non esiste, grazie al Teorema 251. Se si prova ad usare la costruzione nel Teorema 253, si trova una funzione $V(x,y)$ che però non è estendibile con continuità a tutto il piano privato della sola origine: la funzione che si ottiene non ammette estensione continua ad almeno una semiretta uscente dall'origine. ∎

Osservazione 260 Il campo vettoriale (9.3) è il campo di forze prodotto da un filo percorso da corrente elettrica, in un piano ad esso perpendicolare. Si sa che tale campo di forza può fornire energia ad una particella che è vincolata a percorrere una traiettoria circolare centrata sul filo. Questo campo di forze è rappresentato nella figura 9.1, a sinistra. ∎

Ricapitolando, abbiamo una condizione necessaria e sufficiente perché un campo sia conservativo, espressa dal Teorema 253. Questo teorema però richiede di fare infinite verifiche, e non è praticamente usabile. Abbiamo poi una semplice condizione necessaria, espressa dal Teorema 256. Però l'esempio precedente mostra che questa condizione non è sufficiente. Essa però diviene sufficiente se la regione su cui si lavora ha una semplice proprietà geometrica:

Definitione 8 Una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice $\boxed{\textit{semplicemente connessa}}$ se vale

$$\Omega_\gamma \subseteq \Omega$$

per ogni curva di Jordan γ il cui sostegno è in Ω. Una regione Ω di $\mathbb{R}^3$ si dice $\boxed{\textit{semplicemente connessa}}$ se due qualsiasi punti di Ω possono congiungersi con una curva regolare[2] ed inoltre se ogni curva regolare semplice e chiusa in Ω è bordo di una superficie parametrica semplice il cui sostegno è contenuto in Ω. ∎

Intuitivamente, una regione di $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connessa quando "non ha buchi". Una regione di $\mathbb{R}^3$ semplicemente connessa può avere "buchi" che però devono essere "localizzati". Per esempio, una corona circolare non è semplicemente connessa in $\mathbb{R}^2$ mentre un guscio sferico è semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$. Invece, togliendo da $\mathbb{R}^3$ un cilindro (illimitato in ambedue le direzioni) la regione rimanente non è semplicemente connessa. Una classe (molto particolare) di insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^3$ è quella degli insiemi convessi. Proviamo ora:

Teorema 261 *Sia* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *un campo vettoriale di classe* C^1 *su una regione* Ω. *Supponiamo che* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *sia* irrotazionale. *Se la regione* Ω *è* semplicemente connessa *allora il campo è conservativo.*

<u>Dim</u>. Proviamo il teorema in $\mathbb{R}^2$. Per provare che il campo è conservativo, dobbiamo provare che vale

$$\oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

su ciascuna curva regolare, semplice e chiusa γ di sostegno in Ω. Sia Ω_γ la regione interna a γ. Dato che la regione Ω è semplicemente connessa, Ω_γ è tutta contenuta in Ω e quindi si può usare il *Teorema di Green,* ossia il *Teorema di Stokes sul piano.* Si ha quindi

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = 0$$

perché il rotore è nullo. La dimostrazione del teorema in $\mathbb{R}^3$ è analoga: bisogna ricordare che, per ipotesi, ogni curva regolare, semplice e chiusa contenuta in Ω è bordo di una calotta parametrica semplice Σ, tutta contenuta nella regione Ω, sulla quale si può usare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes, detta γ la poligonale e Σ la calotta[3], vale

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = 0 \, .$$

L'esistenza del potenziale segue dall'arbitrarietà della γ, si veda il Teorema 253. ∎

[2]questo fatto è automaticamente vero perché Ω è una regione, ossia un aperto connesso. E' stato enunciato esplicitamente per maggior chiarezza.

[3]orientando Σ e γ con la regola d'Ampère

Osservazione 262 • Un disco del piano, o una palla in $\mathbb{R}^3$, sono regioni semplicemente connesse. Dunque ogni campo irrotazionale è localmente conservativo. Difficoltà possono sorgere solamente se ci si "allontana troppo" dal punto di partenza.

- Applicando quest'osservazione al campo vettoriale dell'Esempio 259, possiamo dire che questo campo vettoriale ammette potenziale per esempio in ogni semipiano o in ogni angolo che non contiene l'origine.

- La condizione sulla regione Ω è solamente sufficiente. Il potenziale di un campo vettoriale (irrotazionale) può esistere anche in una regione che non è semplicemente connessa, come mostra l'esempio seguente. Il campo vettoriale è definito su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}\,.$$

  Questo campo vettoriale ammette potenziale su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, dato da

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\,. \quad \blacksquare \tag{9.4}$$

9.1.1 Il calcolo del potenziale

Il Teorema 253 insegna a costruire il potenziale di un campo conservativo: basta calcolarne gli integrali lungo curve di forma "semplice", per esempio poligonali che congiungono un punto $\mathbf{r_0}$ fissato col generico punto $\mathbf{r}$ della regione. E' ovvio perè che questa via è praticamente percorribile solamente se due punti della regione possono congiungersi con un segmento, in modo da avere integrali facilmente calcolabili. Il caso più semplice è quello in cui Ω è una regione stellata rispetto ad un punto $\mathbf{r_0}$ (si veda la definizione al paragrafo 3.1.1). In questo caso esiste un punto $\mathbf{r_0}$ che può essere congiunto al generico punto $\mathbf{r}\in\Omega$ mediante un segmento

$$t \to \mathbf{r_0} + t(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\,, \qquad t\in[0,1]\,.$$

In tal caso, Dalla dimostrazione del Teorema 253,

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r_0}+t[\mathbf{r}-\mathbf{r_0}])\cdot[\mathbf{r}-\mathbf{r_0}]\,\mathrm{d}t\,.$$

Peró questa non è l'unica costruzione possibile e non è la più semplice nemmeno nel caso di una regione stellata. Di solito, è più semplice risolvere, con successivi calcoli di primitive, le equazioni

$$V_x(x,y,z) = u(x,y,z)\,, \qquad V_y(x,y,z) = v(x,y,z)\,, \qquad V_z(x,y,z) = w(x,y,z)\,.$$

Vediamo ciò su un esempio.

Esempio 263 Sia

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\qquad \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\,.$$

In questo caso,

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\\ v(x,y,z)&=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\\ w(x,y,z)&=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.\end{aligned}$$

Si noti che la funzione non è definita nell'origine; ma sembra di intuire che su ogni curva di Jordan regolare che non passa per l'origine si possa appoggiare una calotta regolare che non incontra l'origine, alla quale applicare il Teorema di Stokes. Inoltre, si vede facilmente che il campo vettoriale verifica le uguaglianze (9.1). Si può quindi sperare di costruirne un potenziale in ogni regione semplicemente connessa che non contiene l'origine. Per questo si noti che integrando rispetto ad x l'uguaglianza

$$V_x(x,y,z)=u(x,y,z)=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

si trova

$$V(x,y,z)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\Phi(y,z)\,.$$

Derivando rispetto ad y ed uguagliando a $v(x,y,z)$ si trova

$$\Phi_y(y,z)=0$$

e quindi $\Phi(y,z)$ non dipende dalla variabile y:

$$\Phi(y,z)=\Phi(z)\,.$$

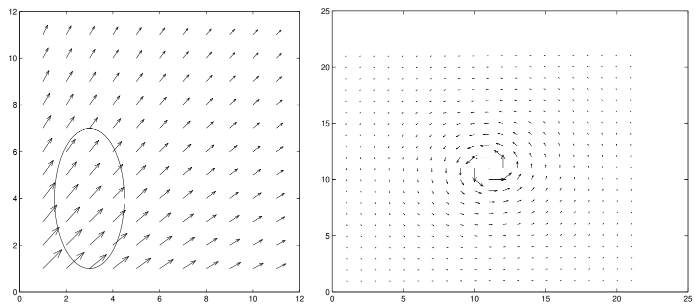
Derivando ora $V(x,y,z)$ rispetto a z ed uguagliando a $w(x,y,z)$ si trova

$$\Phi'(z)=0$$

e quindi $\Phi(z)$ viene ad essere costante. il campo vettoriale proposto ammette quindi come potenziali le funzioni

$$V(x,y,z)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c$$

Figura 9.1: Un campo vettoriale conservativo ed uno non conservativo



ove c è una qualsiasi costante. Si osservi che il campo vettoriale dell'esempio precedente è quello gravitazionale (cambiato di segno) e che il potenziale trovato è il potenziale newtoniano (cambiato di segno). La figura 9.1, a destra, mostra la restrizione del campo vettoriale al piano $x = 0$. ∎

Ricordiamo nuovamente che la condizione di irrotazionalità è necessaria per l'esistenza del potenziale mentre la condizione che la regione sia semplicemente connessa è solamente sufficiente. Un campo irrotazionale potrebbe annettere potenziale anche su una regione non semplicemente connessa. Il potenziale (9.4) mostra un caso di questo tipo.

9.2 Il linguaggio delle 1-forme differenziali

Gli stessi argomenti che abbiamo visto sopra possono riformularsi col linguaggio delle forme differenziali. In tal caso usa una terminologia un po' diversa. Consideriamo il campo vettoriale e la forma differenziale

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{i} + g(\mathbf{r})\mathbf{j} + h(\mathbf{r})\mathbf{k}\,, \qquad \omega = f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}x + g(\mathbf{r})\,\mathrm{d}y + h(\mathbf{r})\,\mathrm{d}z\,.$$

Allora:

- la condizione $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$ (campo irrotazionale) equivale alla condizione

$$\mathrm{d}\omega = 0\,. \tag{9.5}$$

Una forma differenziale che verifica (9.5) si dice $\boxed{\textit{chiusa}}$.

- la funzione $V(\mathbf{r})$ verifica $\nabla V(\mathbf{r})$ se e solo se

$$\mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \omega \,. \tag{9.6}$$

Una funzione $V(\mathbf{r})$ per cui vale (9.6) si chiama una $\boxed{\textit{primitiva}}$ della 1-forma differenziale ω.

- una forma differenziale dotata di primitive si dice $\boxed{\textit{esatta}}$.

Possiamo quindi riformulare i teoremi visti per i campi differenziali in questo modo:

- una 1-forma differenziale esatta ha integrale nullo su ogni curva chiusa;
- una 1-forma differenziale esatta è chiusa;
- 1-forma differenziale chiusa su una regione semplicemente connessa è esatta.

Il linguaggio delle forme differenziali è particolarmente comodo quando si vuol passare al caso di forme differenziali di ordine superiore, come ora vediamo.

9.3 Primitive di 2-forme differenziali

Consideriamo ora una 2-forma differenziale

$$\omega = f\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,.$$

In certe applicazioni ha interesse sapere quando esiste una 1-forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} = \omega$$

con $\tilde{\omega}$ di classe C^2. Una condizione necessaria è:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}[\,\mathrm{d}\tilde{\omega}] = 0.$$

Infatti, sia

$$\tilde{\omega} = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z \,.$$

Allora, come si è visto,

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} = [c_y - b_z]\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z + [a_z - c_x]\,\mathrm{d}z\;\mathrm{d}x + [b_x - a_y]\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \,.$$

Dunque,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\,\mathrm{d}\tilde{\omega}] &= [c_{yx} - b_{zx}]\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + [a_{zy} - c_{xy}]\,\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x + [b_{xz} - a_{yz}]\,\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= [(a_{zy} - a_{yz}) + (b_{xz} - b_{zx}) + (c_{yz} - c_{xy})]\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\end{aligned}$$

e l'ultima espressione è nulla per il Teorema di Schwarz. La condizione $\mathrm{d}\omega = 0$ si scrive esplicitamente

$$f_x(x, y, z) + g_y(x, y, z) + h_z(x, y, z) = 0\,. \tag{9.7}$$

Una 2-forma differenziale ω che verifica

$$\mathrm{d}\omega = 0$$

si dice $\boxed{\textit{chiusa}}$. Se esiste, una 1-forma differenziale $\tilde{\omega}$ per cui

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} = \omega$$

si dice una $\boxed{\textit{primitiva}}$ di ω; e una 2-forma differenziale dotata di primitive si dice ancora $\boxed{\textit{esatta}}$. Proviamo:

Teorema 264 *Una 2-forma differenziale chiusa su un rettangolo è anche esatta.*

<u>Dim</u>. Infatti, supponiamo che la (9.7) valga e mostriamo un modo per costruire la $\tilde{\omega}$. Uguagliando i coefficienti di ω e di $\tilde{\omega}$, si vede che i coefficienti $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ devono verificare

$$c_y - b_z = f\,, \tag{9.8}$$

$$a_z - c_x = g\,, \tag{9.9}$$

$$b_x - a_y = h\,. \tag{9.10}$$

Proviamo a vedere se si trova una 1-forma $\tilde{\omega}$ che verifica queste uguaglianze e che ha nullo uno dei coefficienti, per esempio il coefficiente c. In tal caso, da (9.8) e (9.8) si trova

$$\begin{aligned}a(x, y, z) &= c_1(x, y) + \int_{z_0}^{z} g(x, y, s)\,\mathrm{d}s \\ b(x, y, z) &= c_2(x, y) - \int_{z_0}^{z} f(x, y, s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

dove $c_1(x,y)$ e $c_2(x,y)$ sono arbitrarie funzioni, indipendenti da z. E ora mostriamo che le funzioni $c_1(x,y)$ e $c_2(x,y)$ si possono determinare in modo che valga anche la (9.10). Per ottenere ciò basta

$$\frac{\partial}{\partial x}c_2(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}c_1(x,y)=\Phi(x,y,z)=h(x,y,z)+\int_{z_0}^{z} f_x(x,y,s)\,\mathrm{d}s+\int_{z_0}^{z} g_y(x,y,s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{9.11}$$

Notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z)=f_x(x,y,z)+g_y(x,y,z)+h_z(x,y,z)=0$$

e quindi in realtà

$$\Phi(x,y,z)=\Phi(x,y)\,.$$

Notato ciò, si vede che ci sono infiniti modi per soddisfare (9.11). Un modo è di scegliere

$$c_1(x,y)=0\,,\qquad c_2(x,y)=\int_0^x \Phi(s,y)\,\mathrm{d}s\,.\quad\blacksquare$$

9.4 Alcune formule importanti

Nel corso della trattazione precedente, abbiamo visto che tutte le 0-forme, tutte le 1-forme e tutte le 2-forme (di classe C^2) verificano[4]

$$\mathrm{d}[\,\mathrm{d}\omega]=0 \tag{9.12}$$

D'altra parte quest'uguaglianza si verifica facilmente anche per le 3-fome (e anzi, per le 3-forme si ha addirittura $\mathrm{d}[f\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z]=0$. Vogliamo vedere l'aspetto particolare che questa formula assume quando si vuole scrivere per mezzo degli operatori differenziali. Ricordiamo che:

- se
$$\omega=f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z\,,\qquad V=f\mathbf{i}+g\mathbf{j}+h\mathbf{k}$$
i coefficienti di $\mathrm{d}\omega$ sono le componenti del rotore di $\mathbf{V}$, ossia di $\nabla\wedge V$.

- Se
$$\omega=f\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z+g\,\mathrm{d}z\;\mathrm{d}x+h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\qquad V=f\mathbf{i}+g\mathbf{j}+h\mathbf{k}$$
allora
$$\mathrm{d}\omega=(\nabla\cdot V)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z\,.$$

[4]nel caso delle 0-forme, ossia delle funzioni $f(x,y,z)$, la (9.12) è niente altro che il Teorema di Schwarz.

Dunque, la (9.12) assume la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= \nabla \wedge [\nabla f] = 0\,, \\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} &= \nabla \cdot [\nabla \wedge \mathbf{V}] = 0\,. \end{aligned}$$

Queste formule vanno ricordate insieme a quella, già incontrata e facilmente ricavabile,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot [\nabla f] = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\,.$$