

Capitolo 8

Integrali di curva e di superficie

Studiamo ora gli integrali definiti, invece che su intervalli o su parti di piano, su curve e su superfici. Conviene premettere alcune considerazioni sui limiti di funzioni definite su curve e, successivamente, su superfici.

In questa parte introdurremo certe notazioni e anche certi termini che non sono affatto standardizzati. Riassumiamo alcuni termini nella tabella seguente

Termine che uso io	Altri termini
integrale di curva di prima specie	integrale curvilineo; integrale curvilineo di prima specie.
integrale di curva di seconda specie	integrale di linea; integrale di linea di seconda specie.
integrale di superficie di prima specie	integrale superficiale.
integrale di superficie di seconda specie	integrale di superficie; integrale di flusso.

Il fatto da ricordare è questo: gli integrali di prima specie integrano funzioni (a valori reali) definite su curve o su superfici; gli integrali di seconda specie integrano campi vettoriali definiti su curve o su superfici.

N.B. Per ragioni tipografiche, alcune figure di questo capitolo si trovano alla fine del capitolo stesso.

8.1 Funzioni definite su curve: la densità

Funzioni definite su curve, anche a valori vettoriali, si sono già incontrate: abbiamo incontrato il campo vettoriale che ad ogni punto di una curva associa la tangente oppure la normale alla curva nel punto stesso. Queste funzioni possono intendersi come funzioni definite, per esempio, su \mathbb{R}^3 , con dominio il sostegno della curva. La definizione dei limiti per tali funzioni presenta però una particolarità che va evidenziata. Sia γ una curva semplice e regolare,

8.2. GLI INTEGRALI DI CURVA

parametrizzata da

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b].$$

La curva è semplice. Dunque, ogni coppia di punti \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 di γ individua un arco

$$\mathbf{r}(t), \quad s \in [t_0, t_1],$$

con t_0 ed t_1 gli unici valori del parametro che verificano

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1).$$

Introduciamo la notazione $\gamma_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}$ per indicare quest'arco e la notazione $L_{\gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)}$ per indicarne la lunghezza (si veda il paragrafo (6.1.2):

$$L_{\gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)} = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{r}'(\nu)| \, d\nu.$$

Sia $f(\mathbf{r})$ una funzione definita nei punti del sostegno di γ . Chiamiamo *densità* della funzione f nel punto $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \in \gamma$ il limite seguente:

$$\rho_f(\mathbf{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t_0 + h)) - f(\mathbf{r}(t_0))}{L_{\gamma(\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0+h))}}. \quad (8.1)$$

Notare che il rapporto incrementale ha per denominatore non lo scarto h del parametro, ma la lunghezza dell'arco che congiunge $\mathbf{r}(t_0)$ con $\mathbf{r}(t_0+h)$. Naturalmente, il denominatore è lo scarto del parametro se il parametro è s , il parametro d'arco. Se l'arco rappresenta un "filo" di materiale non omogeneo e se $f(\mathbf{r})$ rappresenta la massa totale tra l'estremo $\mathbf{r}(a)$ e il punto \mathbf{r} della curva, allora il limite precedente, se esiste, rappresenta la usuale densità di massa del "filo". Però, la funzione $f(\mathbf{r})$ non è necessariamente positiva, e potrebbe essere una componente di un campo vettoriale, caso che si è già incontrato definendo la normale a γ in \mathbf{r}_0 . Infatti, la definizione di limite (8.1) è quella usata nella definizione del versore normale.

8.2 Gli integrali di curva

Integrali di funzioni definite su curve possono definirsi in vari modi. Per dare definizioni significative, è necessario avere come guida degli esempi tratto dalla fisica. Prendiamo come guida il problema di calcolare la massa totale di un "filo", nota la sua densità e il problema di calcolare il lavoro di una campo di forze su un punto che si muove lungo una curva. Il primo esempio conduce alla definizione di integrale di curva di prima specie mentre il secondo esempio conduce alla definizione di integrale di curva di seconda specie.

8.2.1 Integrali di curva di prima specie

Consideriamo l'esempio seguente:

Esempio 218 supponiamo che $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ parametrizzi un arco realizzato con un materiale non omogeneo, di densità $\rho(\mathbf{r})$. Ricordando la definizione di densità, la massa dell'arco si approssima dividendolo in segmenti di lunghezza δ , molto piccola, e sommando la massa dei singoli pezzetti. Il modo migliore di fare ciò, anche se non necessariamente il più semplice dal punto di vista del calcolo, consiste nel ricondursi alla parametrizzazione canonica, rappresentando l'arco come $s \rightarrow \mathbf{r}(s)$, $s \in [0, L]$; dividere $[0, L]$ con N punti s_i , $s_i = iL/N$ e quindi costruire

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho(\mathbf{r}(s_i)) [s_{i+1} - s_i] = \sum_{i=0}^{N-1} \rho(\mathbf{r}(s_i)) L/N.$$

Studiare quindi il comportamento di queste somme per $N \rightarrow +\infty$, ossia quando la finezza della suddivisione dell'arco tende a zero. Questa è niente altro che la costruzione dell'integrale della funzione $s \rightarrow \rho(\mathbf{r}(s))$ sull'intervallo $[0, L]$. ■

Sia ora $f(\mathbf{r})$ una generica funzione, per semplicità continua. L'esempio precedente suggerisce di definire

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \, ds$$

come segue: prima rappresentiamo l'arco in forma canonica, ossia mediante il parametro d'arco e quindi definiamo

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \, ds =_{\text{def}} \int_0^L f(\mathbf{r}(s)) \, ds. \quad (8.2)$$

Questa definizione richiede che l'arco γ sia regolare, ed è suggerita dal significato fisico che vogliamo attribuire all'integrale. Per il calcolo pratico conviene però evitare di rappresentare in forma canonica l'arco. Conviene di più lavorare con la parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, inizialmente assegnata. Notiamo che si passa dalla parametrizzazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ alla parametrizzazione canonica per mezzo del cambiamento di variabile $t = t(s)$. Dunque l'integrale a destra di (8.2) è, in realtà,

$$\int_0^L f(\mathbf{r}(t(s))) \, ds.$$

8.2. GLI INTEGRALI DI CURVA

Ossia, in (8.2), solo per semplicità di notazioni, abbiamo sostituito il simbolo $\mathbf{r}(s)$ alla notazione più completa $\mathbf{r}(t(s))$. La funzione $s = s(t)$, ossia la funzione inversa della funzione $t(s)$, è derivabile, con derivata

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|.$$

La sostituzione di variabile $s = s(t)$ nell'integrale a destra di (8.2) mostra che vale:

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (8.3)$$

Se l'arco è in \mathbb{R}^3 , quest'integrale è

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Se l'arco è cartesiano, parametrizzata da

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in [a, b]$$

allora

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds = \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx.$$

L'integrale appena definito si chiama *integrale di curva* di prima specie. La definizione stessa mostra che esso non dipende dalla parametrizzazione scelta per rappresentare la curva. Più ancora, se si cambia la variabile t mediante la trasformazione $t = t(\tau) = b + a - \tau$, $\tau \in [a, b]$, il valore dell'integrale non cambia, ossia:

Teorema 219 *l'integrale di curva di prima specie non cambia né cambiando la parametrizzazione né cambiando il verso di percorrenza dell'arco.*

Il fatto che l'integrale di curva di prima specie non dipenda dalla parametrizzazione mostra che, per ogni fissata funzione $f(\tau)$, esso è una **proprietà geometrica** della curva. Il fatto che l'integrale di curva di prima specie non cambi valore cambiando il verso di percorrenza si scrive come segue:

$$\int_{-\gamma} f(\mathbf{r}) ds = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds$$

Notiamo infine la disuguaglianza seguente:

Teorema 220 Sia $f(\mathbf{r})$ una funzione continua e sia $|f(\mathbf{r})| < M$ in ogni punto \mathbf{r} del sostegno di γ . Allora,

$$\left| \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \, ds \right| \leq ML_{\gamma}.$$

In particolare, si consideri un arco γ parametrizzato da

$$\gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b]$$

ed una sua parte γ_{ϵ} parametrizzata da

$$\gamma_{\epsilon} : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, \epsilon].$$

Vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow a^+} \int_{\gamma_{\epsilon}} f(\mathbf{r}) \, ds = 0. \quad (8.4)$$

Notiamo infine che se si divide un arco γ in γ_1 e γ_2 ,

$$\begin{aligned} & \gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, c] \\ \gamma_1 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b]; \quad & \gamma_2 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [b, c]; \end{aligned}$$

allora vale

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \, ds = \int_{\gamma_1} f(\mathbf{r}) \, ds + \int_{\gamma_2} f(\mathbf{r}) \, ds. \quad (8.5)$$

Osservazione 221 La definizione di integrale di curva di prima specie è stata data assumendo che l'arco sia regolare. La (8.5) mostra come definire l'integrale nel caso di un arco regolare a tratti: se l'arco γ si “decompone” in (per esempio) due sottoarchi γ_1 e γ_2 regolari, si sceglie la (8.5) come definizione di integrale su γ . ■

8.2.2 Integrali di curva di seconda specie

La definizione che ora andiamo a dare generalizza quella che si usa in fisica per il calcolo di un lavoro.

Esempio 222 Supponiamo che in ogni punto \mathbf{r} dello spazio agisca una forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$. Un punto materiale di massa m sia vincolato a descrivere un arco $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Il parametro t rappresenta ora il tempo. Si vuol valutare il lavoro compiuto dalla forza. Dividendo ancora il percorso del punto in tanti “piccoli pezzetti”, interessa

8.2. GLI INTEGRALI DI CURVA

ora valutare il prodotto scalare della forza agente su ciascun “pezzetto” per lo spostamento del punto. Lo spostamento è un vettore, a differenza della lunghezza percorsa che è un numero. Quando t varia da t_i a t_{i+1} lo spostamento è circa $\mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ e quindi il lavoro compiuto è circa

$$[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)](t_{i+1} - t_i).$$

La somma di tutti questi “lavori elementari” è

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)](t_{i+1} - t_i)$$

e, per calcolare il lavoro della forza bisogna studiare il comportamento di queste somme, quando la finezza della suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ tende a zero. Si sa che in questo modo si arriva a calcolare l'integrale su $[a, b]$ della funzione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t). \quad \blacksquare$$

Seguendo il suggerimento dell'esempio precedente definiamo l'*integrale di curva di seconda specie* come segue: si assegna un campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ e un arco γ , parametrizzato da $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Si definisce

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =_{\text{def}} \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (8.6)$$

Nel caso particolare $n = 3$ e $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ si trova:

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

Osservazione 223 Una curva semplice e chiusa si chiama anche un *circuito* e l'integrale di un campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ lungo una curva chiusa si chiama anche la *circuitazione* del campo vettoriale lungo γ . Quando la curva γ è semplice e chiusa, l'integrale su γ si indica anche col simbolo

$$\oint_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad \blacksquare$$

E' immediato verificare, usando la formula di cambiamento di variabili:

Teorema 224 *Il valore dell'integrale di curva di seconda specie non muta cambiando parametrizzazione; cambia di segno cambiando verso di percorrenza.*

La prima affermazione mostra che, per ogni fissato campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{R})$, l'integrale di curva di seconda specie è una **proprietà geometrica** della curva. La seconda affermazione si esprime scrivendo

$$\int_{-\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

E' ovvio inoltre che se si divide un arco γ in due archi γ_1 e γ_2 ,

$$\begin{aligned} \gamma_1 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b]; & \quad \gamma_2 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [b, c]; \\ \gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, c] & \end{aligned}$$

allora vale

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.7)$$

Esattamente come nell'osservazione 221, la (8.7), può usarsi per estendere la definizione di integrale di curva di seconda specie ad archi regolari a tratti. L'arco γ ottenuto percorrendo prima γ_1 e poi γ_2 si indica col simbolo $\gamma_1 + \gamma_2$. Questo simbolo non indica soltanto l'unione insiemistica dei sostegni perché per il calcolo dell'integrale bisogna anche specificare il verso di percorrenza. Con questa notazione, la (8.7) si scrive anche

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

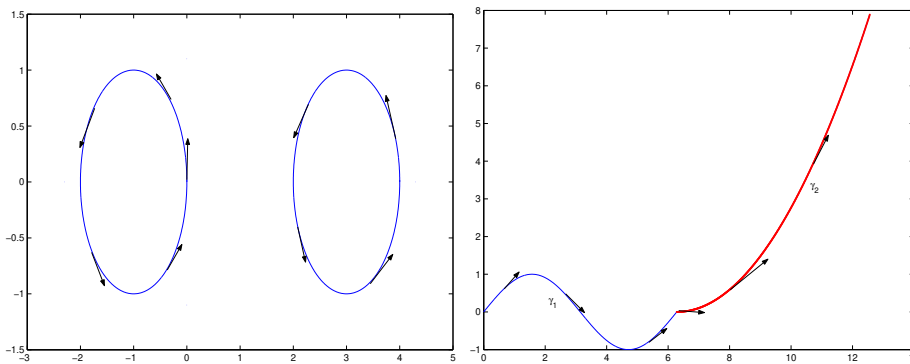
Quest'osservazione suggerisce la notazione seguente: siano γ_1 e γ_2 due archi, non necessariamente "sottoarchi" del medesimo. Col simbolo $\gamma_1 + \gamma_2$ intendiamo di percorrere prima l'arco γ_1 , preso col suo verso di percorrenza, e quindi l'arco γ_2 preso col suo verso di percorrenza. Col simbolo $\gamma_1 - \gamma_2$ si intende di percorrere prima l'arco γ_1 , col suo verso di percorrenza, e poi l'arco γ_2 col verso di percorrenza negativo. Definiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \\ \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

8.2. GLI INTEGRALI DI CURVA

Consideriamo ora la figura 8.1. La figura a sinistra rappresenta due archi, γ_1 e γ_2 tali che né $\gamma_1 + \gamma_2$ né $\gamma_1 - \gamma_2$ rappresentano un arco. La figura a destra rappresenta due archi, ciascuno col proprio verso di percorrenza, tali che $\gamma_1 + \gamma_2$ rappresenta un arco mentre $\gamma_1 - \gamma_2$ non rappresenta un arco. La figura 8.2

Figura 8.1: “Operazioni” sugli archi



rappresenta a sinistra l'arco γ_1

$$\gamma_1 : x = (1 - t)^2, \quad y = (1 - t)^3, \quad t \in [0, 1] \quad (8.8)$$

e, nel medesimo piano, l'arco γ_2 :

$$\gamma_2 : x = t, \quad y = t, \quad t \in [1, 2] \quad (8.9)$$

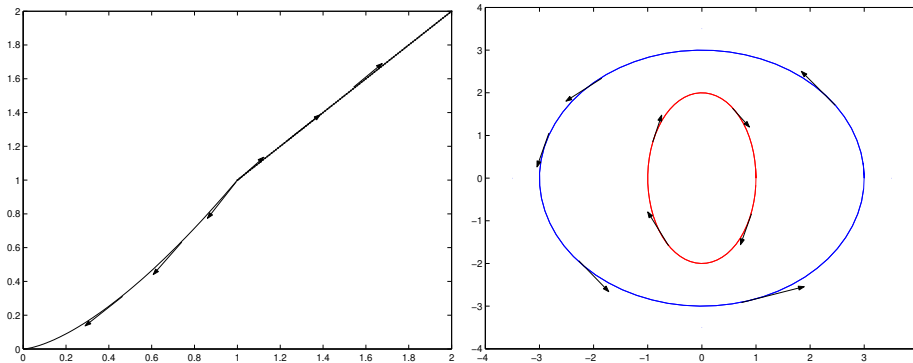
ciascuno con indicato il verso di percorrenza. E' chiaro che $\gamma_1 + \gamma_2$ non è un arco, mentre $\gamma_1 - \gamma_2$ lo è. La figura a destra rappresenta un caso tipico, che useremo più volte. Si noti che la curva “esterna” e la curva “interna” sono percorse in verso opposto. Per gli integrali di curva di seconda specie può darsi un risultato analogo alla (8.4). Usando le medesime notazioni, si ha:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow a^+} \int_{\gamma_\epsilon} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (8.10)$$

fatto che si prova facilmente introducendo la parametrizzazione dell'arco¹. Ricordando però che l'integrale di curva di seconda specie cambia segno cambiando il verso di percorrenza, si possono enunciare due risultati che non hanno analogo per gli integrali di curva di prima specie. Supponiamo che un arco

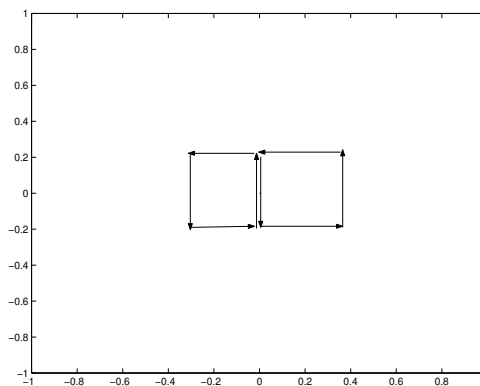
¹come diremo al paragrafo 8.2.3, questa proprietà immediatamente discende dalla (8.4).

Figura 8.2: Gli archi (8.8) e (8.9) a sinistra. A destra una regione delimitata da due archi



ripassi due volte su un arco γ_1 , percorrendolo in versi opposti. Allora, nel calcolo dell'integrale γ_1 non dà contributo. In particolare, si consideri la figura 8.3. Nella figura, i due lati affiancati vanno pensati sovrapposti e sono il sostegno dell'arco γ_1 . Sono stati disegnati soltanto affiancati per chiarezza. Indichiamo con γ_s la curva il cui sostegno è il quadrato di sinistra e con γ_d

Figura 8.3: Archi che “si elidono”



quella il cui sostegno è il quadrato di destra. Nella somma

$$\int_{\gamma_s} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_d} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

il contributo di γ_1 si elide e si trova

$$\int_{\gamma_s+\gamma_d} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_s} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_d} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (8.11)$$

ove γ è la curva il cui sostegno è il rettangolo che si ottiene sopprimendo il lato comune ai due quadrati, col verso di percorrenza indicato. Naturalmente nelle considerazioni precedenti il fatto che le curve siano ottenute per mezzo di segmenti rettilinei non ha alcuna importanza. Una seconda osservazione, **semplice ma importante**, è la seguente: siano γ_0 e γ_τ (τ è un parametro) due segmenti

$$\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}_0, \quad t \in [0, a] \quad \gamma_\tau : \mathbf{r} = \mathbf{r} + t\mathbf{u}, \quad t \in [0, b].$$

Supponiamo che

$$\|\mathbf{u}_0\| = 1, \quad \|\mathbf{u}\| = 1.$$

e consideriamo i due integrali

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma_\tau} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Supponiamo che il campo vettoriale sia continuo e che “il segmento γ_τ tenda a sovrapporsi a γ_0 ”. Questo vuol dire che il secondo segmento dipende da un parametro, diciamo $\tau \in [0, 1]$, ossia che

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau), \quad b = b(\tau).$$

Assumiamo che queste funzioni dipendano da τ in modo continuo e che sia

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad b(0) = a.$$

In tal caso:

Teorema 225 *Si ha:*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_0} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

La dimostrazione è ovvia. Infatti,

$$\Phi(t, \tau) = [\mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau) + t\mathbf{u}(\tau))] \cdot \mathbf{u}(\tau)$$

è una funzione continua delle due variabili t e τ e inoltre

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_0.$$

Dunque,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{b(\tau)} \Phi(t, \tau) dt = \int_0^a \Phi(t, 0) dt = \int_\gamma \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

si veda il paragrafo 4.2.4. In particolare,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\tau} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma_0} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Dunque,

Corollario 226 *Nelle ipotesi dette sopra si ha*

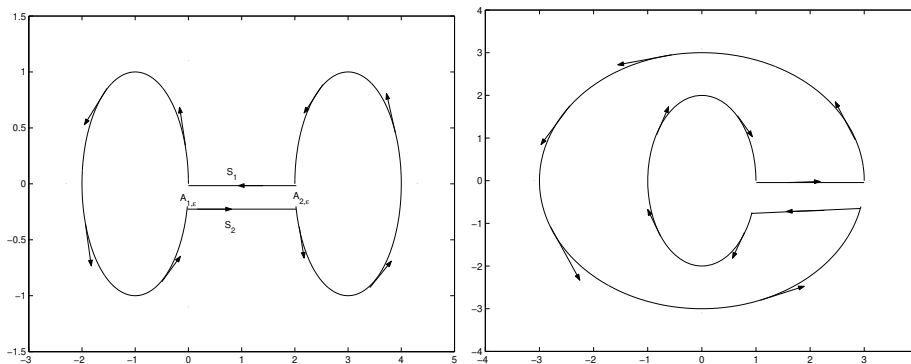
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\int_{-\gamma_\tau} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_0} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right] = 0.$$

Ossia, Il contributo dei due integrali tende ad elidersi. Questo è il corollario che useremo più avanti. Ora, usiamo sia la (8.10) che il Corollario 226 per giustificare l'uso della notazione

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2}$$

anche nel caso in cui $\gamma_1 + \gamma_2$ non è un arco. Torniamo a considerare la figura 8.1 a sinistra. Si confronti questa figura con la figura 8.4, a sinistra. La figura di

Figura 8.4: Integrali di curva di seconda specie ed archi che “si elidono”



sinistra rappresenta una curva semplice e chiusa, chiamiamola γ_ϵ , dipendente

8.2. GLI INTEGRALI DI CURVA

dal parametro ϵ , lunghezza degli archi (indicati con $A_{1,\epsilon}$, $A_{2,\epsilon}$) “rimossi” dalle ellissi di destra e di sinistra, che chiamiamo rispettivamente γ_1 e γ_2 . Dunque,

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_\epsilon} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{S_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ & - \int_{A_{1,\epsilon}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{A_{2,\epsilon}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Facendo tendere ϵ a zero, l'integrale sugli archi $A_{1,\epsilon}$, $A_{2,\epsilon}$ tende a zero per la (8.10), mentre la somma degli integrali sui due segmenti tende a zero per il Corollario 226. Dunque,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Ciò spiega perché è necessario considerare espressioni del tipo

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2}$$

anche nel caso in cui $\gamma_1 + \gamma_2$ non è un arco. La figura 8.4, a destra, mostra una spiegazione analoga nel caso illustrato nella figura 8.1, a destra.

Osservazione 227 Si noti che in ambedue gli esempi, gli archi i cui integrali approssimano quello su $\gamma_1 + \gamma_2$ sono semplici. Fissato il verso di percorrenza su γ_1 , quello su γ_2 viene automaticamente determinato se si vuol avere un'approssimazione con un arco semplice. In particolare, nel caso delle due curve di Jordan, una nella regione interna dell'altra, usa prendere la curva più esterna orientata positivamente e quindi quella più interna orientata negativamente. Più avanti vedremo la ragione di tale scelta. ■

Infine, supponiamo di avere due curve γ_1 e γ_2 , non necessariamente semplici:

$$\gamma_1 : t \rightarrow \mathbf{r}(t) \quad t \in [a, b]; \quad \gamma_2 : \tau \rightarrow \rho(\tau) \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Diciamo che le due curve hanno *gli stessi estremi* quando

$$\mathbf{r}(a) = \rho(\alpha), \quad \mathbf{r}(b) = \rho(\beta).$$

In questa definizione si è tenuto conto del verso di percorrenza delle curve: i due “primi estremi” devono coincidere ed i due “secondi estremi” devono coincidere. In tal caso:

Lemma 228 *Nelle ipotesi dette sopra, $\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva chiusa e*

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

8.2.3 Integrali di curva di prima e di seconda specie

E' interessante confrontare le definizioni degli integrali di curva di prima e seconda specie nel caso particolare in cui $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{i}$. In questo caso

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt$$

mentre

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Questi due integrali non si riconducono l'uno all'altro nemmeno nel caso in cui $y(t)$ e $z(t)$ sono identicamente zero. Infatti, in tal caso essi vengono ad essere, rispettivamente,

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt, \quad \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|x'(t)| dt.$$

Ciò nonostante, esiste una relazione tra gli integrali di prima e seconda specie, che ora mostriamo. Consideriamo l'arco

$$\gamma : x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]$$

Ricordiamo che con $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ si è indicato il versore tangente alla curva nel punto \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{r}(t)) &= \frac{\mathbf{t}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{i} \\ &+ \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{j} + \frac{z'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Sia

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r})\mathbf{i} + V_2(\mathbf{r})\mathbf{j} + V_3(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

un campo vettoriale definito sulla curva γ . Introduciamo la funzione

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \left\{ \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{i} \right. \\ &+ \left. \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{j} + \frac{z'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}\mathbf{k} \right\}. \end{aligned}$$

Si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds. \quad (8.12)$$

Talvolta questa formula si trova scritta in modo diverso. Notiamo che

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} \\ n_2 &= \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} \\ n_3 &= \frac{z'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} \end{aligned}$$

sono i coseni direttori della tangente $\mathbf{t}(\mathbf{r}(t))$. Per questo la formula (8.12) si trova anche scritta come segue:

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} [V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3] ds.$$

Notiamo infine che la (8.10) si può derivare dalla (8.4), usando la (8.12).

8.2.4 Integrali di curva di seconda specie e forme differenziali

L'integrale di curva di seconda specie si calcola quando è dato un campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Dunque, possiamo vedere il campo vettoriale come operante sulla curva γ : il campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ associa un numero alla curva γ . Vedremo che altri campi vettoriali si usano per associare numeri alle superfici. Dunque conviene distinguere i due casi, introducendo termini e notazioni diverse. Nel caso che stiamo considerando, il campo vettoriale agisce su una curva. Invece di indicarlo col simbolo $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, indichiamolo col simbolo²

$$f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz. \quad (8.13)$$

Non vogliamo dare nessun significato particolare ai simboli dx , dy e dz . Essi, come si è notato, sono suggeriti dalla formula (8.7). Ricordiamo però che nel caso dell'integrale su un intervallo, si conserva la notazione “ dx ” perché questa aiuta a ricordare certe formule. Come vedremo, qualcosa di analogo accade anche in questo caso. La (8.13) si chiama 1-forma differenziale (il numero 1 ricorda che si agisce su una curva, un oggetto che, intuitivamente³, ha dimensione 1, come un segmento o un filo). L'integrale di curva di seconda specie si chiama anche *l'integrale di curva della* 1-forma differenziale e si indica anche col simbolo

$$\int_{\gamma} f dx + g dy + h dz$$

(sottintendendo la dipendenza di f , g e h da x , y e z). Una regola mnemonica per ottenere la formula (8.7), per esempio nel caso $n = 3$ è la seguente: si ricordi che le funzioni f , g ed h dipendono da (x, y, z) . Allora, si sostituisca x con $x(t)$, y con $y(t)$, z con $z(t)$ ovunque queste lettere compaiono; e si interpreti “ d ” come segno di derivata; e quindi dx si sostituisce con $x'(t) dt$,

²suggerito dalla formula (8.7).

³e solo sotto condizioni di regolarità: esistono curve dalla parametrizzazione continua ma non derivabile, che hanno per sostegno un quadrato. Il prototipo di tali curve si chiama “curva di Peano”.

dy con $y'(t) dt$ e dz con $z'(t) dt$. Infine, si integri da a fino a b , ottenendo la (8.7). Questa è una prima buona ragione per usare la notazione delle forme differenziali. Più avanti ne vedremo altre. Una forma differenziale si indica spesso con una lettera greca minuscola tratta dalla fine dell'alfabeto, come ω ,

$$\omega = f dx + g dy + h dz .$$

Con tale notazione l'integrale della forma differenziale si indica

$$\int_{\gamma} \omega .$$

Infine, diciamo che la forma differenziale

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

è di classe C^1 quando sono di classe C^1 i suoi coefficienti, ossia le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, e $h(x, y, z)$.

Osservazione 229 Si noti che il simbolo dx è una forma differenziale: quella di coefficienti $f = 1$ e $g = h = 0$. Questa forma differenziale si chiama anche il differenziale della variabile x . Questo termine “differenziale” ha un significato diverso da quello introdotto al Cap. 4. Esistono relazioni tra questi due diversi concetti, che però non illustriamo. ■

8.2.5 Il flusso

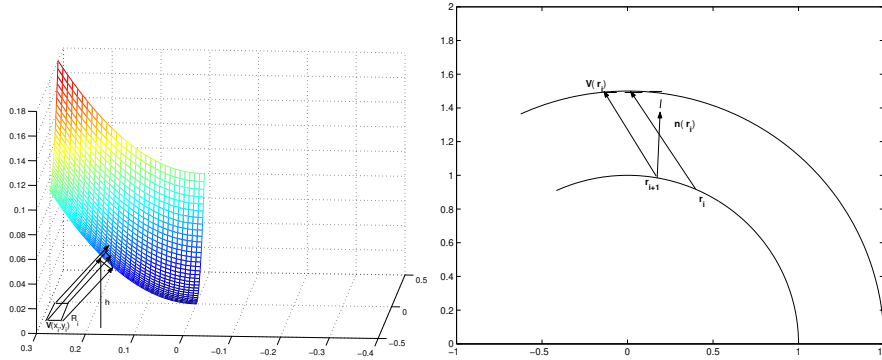
Sia

$$\mathbf{V}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale che ad ogni punto del piano $z = 0$ associa un vettore di \mathbb{R}^3 . Sia \mathcal{D} un dominio di integrazione e supponiamo che $\mathbf{V}(x, y)$ sia continuo sulla chiusura di \mathcal{D} . Possiamo pensare che il piano $z = 0$ sia immerso in un fluido che scorre in modo che quando una particella si trova nel punto $(x, y, 0)$ ivi abbia la velocità $\mathbf{V}(x, y)$ e mantenga tale velocità dopo che ha lasciato il piano $z = 0$. Il flusso attraverso \mathcal{D} è la quantità di fluido che traversa \mathcal{D} nell'unità di tempo. Per calcolarla⁴ procediamo in questo modo. Approssimiamo \mathcal{D} mediante un numero finito di rettangoli R_i , come nella definizione dell'integrale doppio. Una particella che si trova in un punto $(x, y, 0) \in R_i$ descrive nell'unità di tempo il segmento rettilineo che congiunge $(x, y, 0)$ con $V(x, y)$. Infatti, abbiamo detto che la velocità non cambia dopo che la particella ha lasciato il piano $z = 0$. Dunque, nell'unità di tempo le particelle che escono dal rettangolo R_i riempiono una specie di parallelepipedo, con “faccia superiore” non piana, di base R_i . L'altezza varia da punto a punto, come in figura 8.5, a sinistra. Se

⁴più correttamente dovremmo dire “per definirla”.

Figura 8.5: Il flusso



il rettangolo è “piccolo” l’altezza sarà circa uguale a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(x_i, y_i)$ ove (x_i, y_i) è per esempio il vertice in basso a sinistra del rettangolo R_i . Dunque il volume di questo solido è approssimato da

$$h(\text{Area di } R_i) = [\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(x_i, y_i)](\text{Area di } R_i).$$

Si noti che l’area di R_i è positiva mentre l’altezza può anche essere negativa; ossia, il volume si prende “con segno” perché non è indifferente che il fluido scorra verso l’alto o verso il basso. Sommiamo ora i contributi di tutti i singoli rettangoli. Si trova una somma integrale di quelle che definiscono l’integrale

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{V}(x, y) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy.$$

Scegliamo quindi questa formula come definizione di flusso attraverso il dominio di integrazione \mathcal{D} . Più avanti vedremo la definizione di flusso attraverso una superficie non piana. Ora, definiamo il flusso di un campo piano attraverso una curva. Supponiamo che uno strato liquido riempi il piano (x, y) e che il campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

rappresenti la velocità con cui una particella traversa la posizione (x, y) . Sia γ un arco regolare, parametrizzata da

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Si chiama flusso del campo \mathbf{V} attraverso la curva γ la quantità di fluido che nell’unità di tempo traversa la curva. Per calcolarlo, dividiamo la curva

in archi γ_i mediante i punti \mathbf{r}_i . Supponiamo per semplicità che questi archi abbiano tutti la medesima lunghezza l . Supponiamo che la particella che traversa il punto $(x, y) \in \gamma$ mantenga la velocità $\mathbf{V}(x, y)$ anche dopo aver traversato la curva. Se gli archi sono “molto piccoli”, la velocità delle singole particelle di liquido che traversano l’arco γ_i si potrà approssimare mediante $\mathbf{V}(x_i, y_i)$. Nell’unità di tempo, queste particelle di liquido riempiono una parte di piano che all’incirca è un parallelogramma la cui base misura l e la cui altezza misura $[\mathbf{V}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{n}(x_i, y_i)]$ ove $\mathbf{n}(x_i, y_i)$ è la normale a γ nel punto \mathbf{r}_i , si veda la figura 8.5, a destra. La somma

$$\sum_i [\mathbf{V}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{n}(x_i, y_i)] l$$

è una somma integrale che per $l \rightarrow 0$ approssima

$$\int_{\gamma} [\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] ds.$$

Si sceglie quindi quest’integrale come definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una curva. Il flusso cambia segno cambiando il verso di percorrenza lungo la curva perché cambiando verso di percorrenza cambia il verso sulla normale. Supponiamo ora che la curva γ sia semplice e chiusa. In questo caso, usa privilegiare la normale esterna \mathbf{n}_e :

$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} [y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}]$$

e quindi il flusso uscente dalla regione Ω_{γ} delimitata da γ è

$$\int_a^b [f(x(t), y(t))y'(t) - g(x(t), y(t))x'(t)] dt = \int_{\gamma} -g dx + f dy.$$

8.3 Analisi vettoriale nel piano

Mostriamo che calcolare l’integrale di certi campi vettoriali equivale al calcolo di integrali multipli. Questo studio va sotto il nome di *analisi vettoriale*.

8.3.1 Una considerazione preliminare

Consideriamo una funzione

$$y = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Questa funzione identifica la curva semplice

$$\gamma_f : x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Sia ora $F(x, y)$ una funzione (continua) delle due variabili x ed y e consideriamo l'integrale

$$\int_a^b F(x, f(x)) dx.$$

Questo è l'integrale

$$\int_{\gamma_f} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

ove

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(x, y) = F(x, y)\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Col linguaggio delle forme differenziali,

$$\int_a^b F(x, y(x)) dx = \int_{\gamma_f} F dx.$$

Infatti, $x'(t) = 1$. Analogamente, se

$$x = h(y), \quad y \in [\alpha, \beta],$$

sia γ_h la curva identificata da questo grafico. Si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(h(y), y) dy = \int_{\gamma_h} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r}$$

ove ora $\mathbf{W} = 0\mathbf{i} + F(x, y)\mathbf{j}$. E' importante esaminare la figura 8.6 e rendersi conto dei versi di percorrenza scelti su queste curve.

8.3.2 Formula di Green

Siano ora γ_f e γ_g due curve cartesiane definite sul medesimo intervallo,

$$y = f(x) \quad x \in [a, b]$$

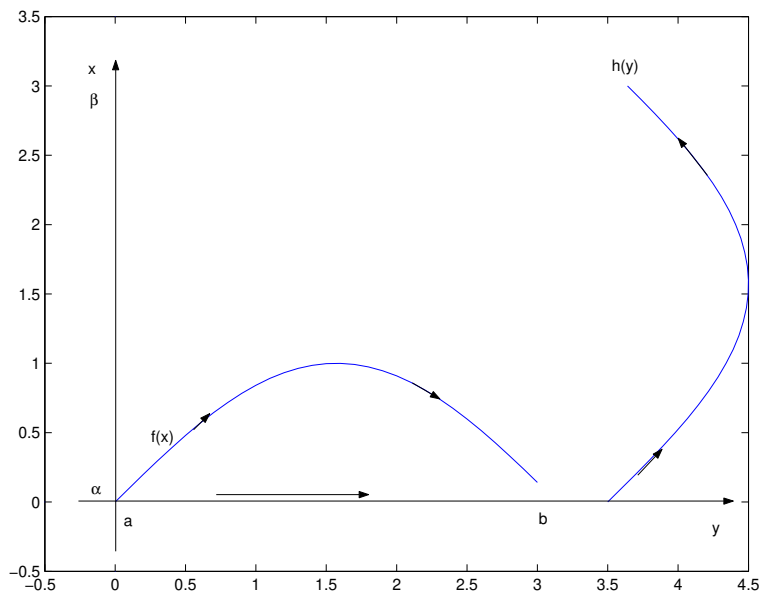
e

$$y = g(x) \quad x \in [a, b].$$

Supponiamo inoltre che per ogni $x \in (a, b)$ sia⁵

$$g(x) > f(x).$$

Figura 8.6: Versi di percorrenza



Indichiamo con Ω la regione delimitata dai due grafici e dai segmenti verticali per $x = a$ e per $x = b$ congiungenti i due grafici. Il segmento si considera nel caso in cui l'uguaglianza non valga in uno dei due estremi. Si veda la figura 8.7, a sinistra. Si noti che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è sostegno di una curva chiusa. Ricordando le nostre convenzioni, indicheremo col medesimo simbolo sia la curva che il suo sostegno; e quindi la indicheremo col simbolo $\partial\Omega$ e, sempre per le nostre convenzioni, $\partial\Omega$ è orientata in senso antiorario. Vogliamo calcolare

$$\int_{\Omega} F_y(x, y) dx dy.$$

Quest'integrale si calcola come segue:

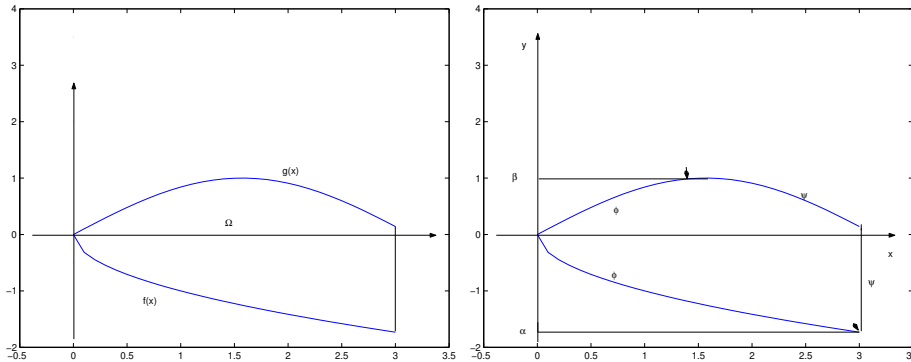
$$\int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} F_y(x, y) dy \right] dx = \int_a^b [F(x, g(x)) - F(x, f(x))] dx = \int_{\gamma_g} \mathbf{V} d\mathbf{r} - \int_{\gamma_f} \mathbf{V} d\mathbf{r}$$

ove

$$\mathbf{V}(x, y) = F(x, y)\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

⁵Non si esclude che l'uguaglianza valga negli estremi dell'intervallo.

Figura 8.7: Formula di Green



Guardando i versi di percorrenza, si vede che

$$\int_{\Omega} F_y(x, y) dx = \int_{\partial\Omega} [-\mathbf{V}] \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.14)$$

Si noti che in questo calcolo il segmento verticale dà contributo nullo. Sia ora $G(x, y)$ una funzione derivabile. Si vuol calcolare

$$\int_{\Omega} G_x(x, y) dx dy.$$

Proiettando la regione Ω sull'asse delle ordinate si trova un segmento $[\alpha, \beta]$. La frontiera di Ω è ancora grafico di due funzioni, la funzione $\phi(x)$ e la funzione $\psi(x)$, si veda la figura 8.7, a destra. I pallini con la freccia servono ad indicare i punti nei quali i due grafici si congiungono. Il grafico di $\psi(x)$ include il segmento verticale. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G_x(x, y) dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} G_x(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [G(\psi(y), y) - G(\phi(y), y)] dy \\ &= \int_{\gamma_{\psi}} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_{\phi}} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} d\mathbf{r} \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{W}(x, y) = 0\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}.$$

Si noti che in questo calcolo il segmento verticale dà contributo non nullo, mentre darebbe contributo nullo un eventuale segmento orizzontale sulla frontiera di Ω . Combinando i due calcoli precedenti si trovano le due formule seguenti:

$$\int_{\Omega} [G_x(x, y) - F_y(x, y)] dx dy = \int_{\partial\Omega} [F dx + G dy] , \quad (8.15)$$

ottenuta sottraendo la (8.14) con la (8.15). Sommandole si trova invece

$$\int_{\Omega} [G_x(x, y) + F_y(x, y)] dx dy = \int_{\partial\Omega} [-F dx + G dy] . \quad (8.16)$$

Osservazione importante

Le formule (8.15) e (8.16) valgono anche se la regione con cui si lavora è delimitata da più di due grafici e più in generale essa vale per qualsiasi regione di Jordan Ω_γ , delimitata da una curva γ regolare a tratti. Quindi non c'è più ragione di fare intervenire i trapezoidi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, e quindi di indicare con lettere maiuscole le funzioni da integrare. Per questo, da ora in poi useremo la notazione più usuale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [g_x(x, y) - f_y(x, y)] dx dy &= \int_{\partial\Omega} [f dx + g dy] , \\ \int_{\Omega} [g_x(x, y) + f_y(x, y)] dx dy &= \int_{\partial\Omega} [-f dx + g dy] , \end{aligned}$$

La formula

con le lettere minuscole. Le due formule precedenti sono tra loro equivalenti (si passa dall'una all'altra cambiando f in $-f$). Hanno però due diversi significati fisici, e per questo è bene conservarle ambedue. Inoltre, ambedue la formula hanno un equivalente nello spazio \mathbb{R}^3 , ma in tal caso le due formule che si ottengono non possono ridursi l'una all'altra con una semplice trasformazione.

$$\int_{\Omega} [g_x(x, y) - f_y(x, y)] dx dy = \int_{\partial\Omega} f dx + g dy . \quad (8.17)$$

si chiama *formula di Green*.

Osservazione 230 Si noti che $[g_x(x, y) - f_y(x, y)]$ è la componente lungo il versore \mathbf{k} del rotore del campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. La formula (8.17) si scrive quindi come

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial\Omega} f \, dx + g \, dy. \quad (8.18)$$

Col linguaggio dei campi vettoriali la formula si interpreta come segue: il flusso del rotore del campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y)$ attraverso la superficie piana Ω è uguale alla circuitazione del campo vettoriale stesso lungo $\partial\Omega$. Naturalmente si sottintende che $\partial\Omega$ sia positivamente orientata. ■

Osservazione 231 Torniamo a considerare la formula

$$\int_{\Omega} [g_x(x, y) + f_y(x, y)] \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} [-f \, dx + g \, dy]. \quad (8.19)$$

Quest'uguaglianza si chiama *Teorema della divergenza nel piano*. Come si è detto, essa è una diversa formulazione della formula di Green. Come tale, esso sotto le medesime condizioni, ma ha una diversa interpretazione fisica, che ora illustriamo. Consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{W}(x, y) = g(x, y)\mathbf{i} + f(x, y)\mathbf{j}.$$

A destra della (8.19) figura il flusso del campo vettoriale \mathbf{W} , uscente dalla regione Ω (regione interna alla curva regolare a tratti $\partial\Omega$). A sinistra figura la divergenza di \mathbf{W} . Dunque la (8.19) si scrive anche come

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{W}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{W}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_e \, ds. \quad (8.20)$$

Essa si interpreta come segue: il flusso *uscende* da γ del campo vettoriale \mathbf{W} è uguale all'integrale su Ω della divergenza di \mathbf{W} . Quest'interpretazione in particolare spiega l'uso del termine "divergenza". ■

8.3.3 Formula di Green e forme differenziali

Si è detto che il simbolo “d” si conserva dentro il simbolo di integrale perché aiuta a ricordare le formule. In apparenza ciò non accade per la formula di Green. E’ però possibile introdurre dei simboli comodi come segue. Se $f(x, y)$ è una funzione, con $df(x, y)$ indichiamo la forma differenziale

$$df(x, y) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Se ω è una 1-forma differenziale, definiamo

$$d\omega = d\{f dx + g dy\} = f_x dx dx + f_y dy dx + g_x dx dy + g_y dy dy.$$

Ora introduciamo le regole seguenti:

$$dx dx = 0, \quad dy dy = 0, \quad dy dx = -dx dy, \quad (8.21)$$

suggerite dalle regole con le quali si calcola il prodotto vettoriale, (esplicitamente usato nella formula (8.18)):

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}.$$

In questo modo si trova

$$d\omega = [-f_y + g_x] dx dy \quad (8.22)$$

e questo è proprio l’integrando dell’integrale doppia in (8.17). Dunque, un modo per ricordare la (8.17) è di scriverla come

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} [f dx + g dy] = \int_{\Omega} d[f dx + g dy] = \int_{\Omega} d\omega. \quad (8.23)$$

Osservazione 232 Introdurremo più avanti il Teorema di Stokes in \mathbb{R}^3 , che vale per curve che sono bordo di calotte. Il Teorema di Green è il caso particolare del Teorema di Stokes in \mathbb{R}^3 che si ottiene quando la curva è una curva di Jordan e quando la superficie è la regione interna alla curva. ■

La 2-forma differenziale $d\omega$ si chiama anche il *differenziale esterno* (o più brevemente il *differenziale*) della 1-forma ω .

8.3.4 Le forme differenziali e le aree piane

Scriviamo la formula di Green scegliendo come forma differenziale la seguente:

$$\omega = -y dx + x dy$$

Si trova

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_{\Omega_{\gamma}} 2 dx dy$$

e l'integrale a destra è il doppio dell'area di Ω_{γ} . Si trova quindi:

Teorema 233 *Sia γ una curva di Jordan orientata positivamente e sia Ω_{γ} la sua regione interna. L'area di Ω_{γ} è data da*

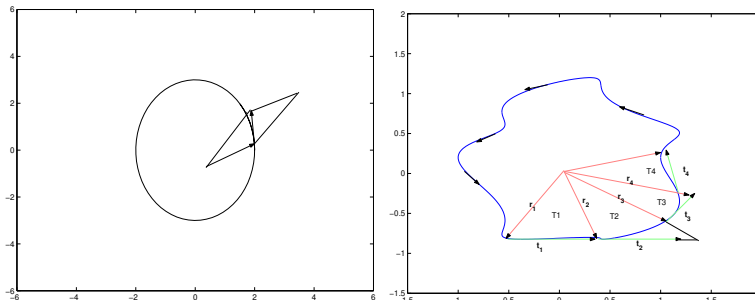
$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} -y dx + x dy.$$

Questa formula è un caso particolare del Teorema di Green e quindi si prova calcolando

$$\int_{\Omega_{\gamma}} 1 dx dy$$

mediante successive integrazioni per parti. E' però interessante vedere un'argomento geometrico che conduce a questa formula. Sia $\gamma: t \rightarrow \mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ un arco piano regolare, semplice e chiuso e sia Ω_{γ} la sua regione interna. Per semplicità di esposizione, assumiamo che l'origine degli assi appartenga alla regione interna Ω_{γ} (caso a cui ci si può sempre ricondurre mediante una traslazione). Si consideri la figura 8.8. Il punto $\mathbf{r}(t)$ varia sull'arco.

Figura 8.8: Area di una regione di Jordan



Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in "piccoli" intervalli, dividendolo con i punti t_i (equidistanti per semplicità). Approssimiamo l'arco $\mathbf{r}(t), t \in [t_i, t_{i+1}]$ col segmento di tangente

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_i) + \mathbf{r}'(t_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

come in figura 8.8. Consideriamo i triangoli di vertici l'origine, il punto $\mathbf{r}(t_i)$ e il secondo estremo del segmento di tangente. Si potrebbe provare che quando la finezza della partizione di $[a, b]$ tende a zero, la somma delle aree di questi triangoli tende all'area di Ω_γ , pur di intendere l'area di tali triangoli con segno, in modo da cancellare eventuali parti di area coperte più volte. L'area (con segno) di ciascuno di questi triangoli è la metà della componente lungo l'asse z del prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{r}(t_i)$ e $\mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$. Per approssimare l'area di Ω_γ dobbiamo quindi sommare la componenti lungo l'asse verticale di

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}(t_i) \wedge \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Si trova così

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [x(t_i)y'(t_i) - y(t_i)x'(t_i)](t_{i+1} - t_i).$$

Al tendere a zero della finezza della partizione queste somme approssimano

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \frac{1}{2} \int_\gamma [-y dx + x dy]. \quad (8.24)$$

L'argomento precedente non è rigoroso, ma può pienamente giustificarsi. Chiediamoci ora se l'integrale precedente restituisce l'area di Ω_γ , oppure l'area col segno negativo. Si vede subito dalla figura 8.8 che la somma delle aree dei triangoli viene positiva quando l'orientazione della curva è concorde con quella di \mathbb{R}^2 ; ossia quando la curva è orientata positivamente.

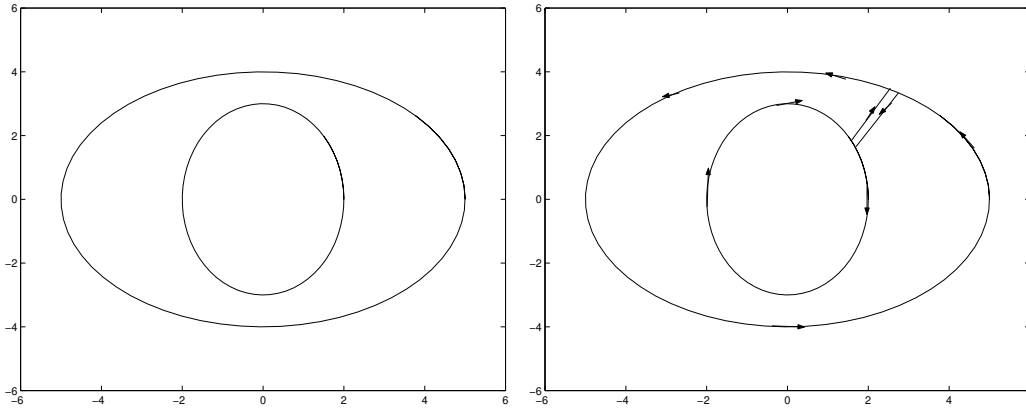
8.3.5 Le estensioni

La *formula di Green* è stata provata per una regione molto particolare. Si è già notato che essa vale sotto condizioni molti più generali. E infatti:

Teorema 234 *Le uguaglianze (8.18) e (8.16) valgono per ogni regione Ω_γ , con γ curva regolare a tratti e per ogni coppia di funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ di classe $C^1(\Omega_\gamma)$, continue sulla chiusura di Ω_γ .*

Mostriamo ora un'estensione importante di queste formule. Quest'estensione è suggerita dalla figura (8.4). Si tratta di un'estensione di queste formule a regioni delimitate da più curve, come nel caso rappresentato dalla figura 8.9, a sinistra, dove le curve sono due, γ_1 e γ_2 , il sostegno dell'una contenuto nella regione interna all'altra. Chiamiamo Ω la regione delimitata dalle curve γ_1 e γ_2 e sia $\mathbf{V}(x, y) \in C^1(\Omega)$ un campo vettoriale continuo sulla chiusura di Ω . Introduciamo due segmenti, S_1 ed S_2 , come nella figura a destra, e due piccoli tagli uno su γ_1 e l'altro su γ_2 , in corrispondenza a tali segmenti. Si ottiene in questo modo una curva $\tilde{\gamma}$ che verifica sia le condizioni della formula di Green

Figura 8.9: Estensione della formula di Green



che quelle della formula della divergenza. Vale quindi

$$\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} [g_x(x, y) - f_y(x, y)] dx dy = \int_{\tilde{\gamma}} f dx + g dy,$$

$$\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} [g_x(x, y) + f_y(x, y)] dx dy = \int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds.$$

Quando S_1 ed S_2 tendono l'uno all'altro gli integrali lungo i due segmenti si elidono, gli integrali sui due tagli tendono a zero (si ricordino la (8.10) e il Teorema 226.) e l'integrale sulla regione interna a $\tilde{\gamma}$ tende all'integrale su Ω . Si trova quindi

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} dx dy = \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{V} dx dy = \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds - \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds.$$

Si noti che il segno negativo viene perchè la curva interna va considerata orientata negativamente, mentre abbiamo convenuto che nel simbolo \int_{γ} la curva chiusa debba essere orientata positivamente. Nel caso particolare in cui si abbia

$$\text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0,$$

La formula precedente mostra che Se la divergenza di un campo vettoriale è nulla, il flusso del campo vettoriale entrante attraverso γ_1 è uguale a quello uscente attraverso γ_2 . Si discutano risultati analoghi ai precedenti, nel caso in cui la regione delimitata dalla curva più esterna contenga vari “buchi”, ciascuno delimitato da una curva di Jordan regolare a tratti.

Osservazione 235 Si osservi che se il campo vettoriale è di classe $C^1(\Omega_{\gamma_1})$ allora le relazioni precedenti si ottengono semplicemente per differenza:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot dx \, dy &= \int_{\Omega_{\gamma_1}} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot dx \, dy - \int_{\Omega_{\gamma_2}} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot dx \, dy \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_e \, ds - \left[\int_{\gamma_2} \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_e \, ds \right]. \end{aligned}$$

In questa formula, $\tilde{\mathbf{n}}_e$ è la normale esterna ad Ω_{γ_2} e quindi interna ad Ω ; e γ_2 è percorsa in senso positivo rispetto a Ω_{γ_2} e quindi in senso negativo rispetto a Ω . ■

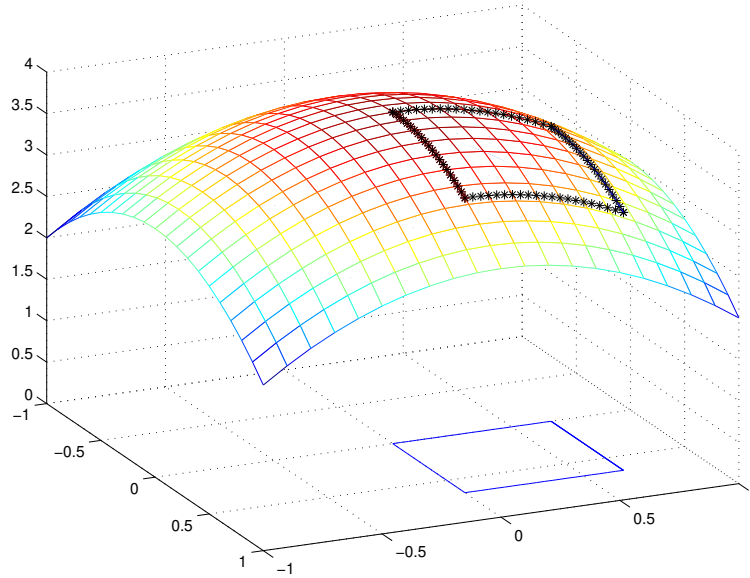
8.4 Integrali di superficie

La lunghezza di un arco è stata definita nel paragrafo 6.1.2. Invece, non si è definita l'area di una calotta. Questo è il primo argomento che ora studiamo. Definiremo poi l'integrale su una calotta. Come nel caso delle curve, vedremo che serve definire due tipi diversi di integrali.

8.4.1 Area di una calotta

Consideriamo una calotta $\mathbf{r}(u, v)$ con (u, v) variabili in una regione Ω_γ delimitata da una curva semplice chiusa γ , regolare a tratti. Sia inoltre $\mathbf{r}(u, v)$ di classe $C^1(\Omega_\gamma)$. Ricordiamo che la chiusura di Ω_γ è un dominio di integrazione. Dunque, è possibile approssimare la regione Ω_γ mediante tanti piccoli rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati, si vedano l'osservazione 204 e il paragrafo 7.1.3. Fissiamo l'attenzione su uno di questi rettangoli e sulla sua immagine sulla superficie (si veda la figura 8.10). Per semplicità di notazioni, supponiamo che esso sia un quadrato col vertice a sinistra in basso nel punto $(0, 0)$ e che al punto $(0, 0)$ corrisponda il punto $(0, 0, 0)$ (si noti che questo non è il caso illustrato dalla figura). Consideriamo il lato $(t, 0)$ del quadrato, $0 \leq t \leq \tau$. Ad esso corrisponde una curva $\mathbf{r}(t, 0)$ sulla superficie, la cui tangente in $(0, 0, 0)$ è parallela al vettore $\mathbf{r}_u(0, 0)$. Consideriamo il segmento di tangente $\mathbf{r}_u(0, 0)t$, $0 \leq t \leq \tau$. In modo analogo, a partire dall'altro lato di vertice $(0, 0)$,

Figura 8.10: Area di una calotta



arriviamo a considerare il segmento $\mathbf{r}_v(0,0)t$, $0 \leq t \leq \tau$. Questi due segmenti (uscanti da $(0,0,0)$) appartengono al piano tangente e in generale non stanno sulla superficie; ma, se τ è “piccolo” il parallelogramma che essi individuano differisce “per poco” dall’immagine del quadrato sulla superficie. Dunque l’area di tale parallelogramma approssima l’area della parte di superficie che viene descritta quando (u, v) varia nel quadrato. L’area del parallelogramma è $\tau^2 \cdot |\mathbf{r}_u(0,0) \wedge \mathbf{r}_v(0,0)| = \tau^2 |\mathbf{N}(0,0)|$. Si ripeta questo argomento per ciascuno dei rettangoli e si sommino i risultati. Quello che si trova è una somma di Riemann per l’integrale doppio la funzione $|\mathbf{N}(u, v)|$. Ciò giustifica la definizione seguente:

Definizione 4 Sia

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) \quad (u, v) \in \Omega$$

una superficie regolare. Sia γ una curva semplice e chiusa con sostegno in Ω e sia

$$\Sigma : \quad (u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) \quad (u, v) \in \Omega_\gamma$$

la calotta corrispondente. Si chiama area della calotta Σ il numero

$$\int_{\Omega_\gamma} |\mathbf{N}(u, v)| \, du \, dv. \quad \blacksquare$$

Usando la regola per il cambiamento di coordinate degli integrali doppi e il Teorema 202 si potrebbe provare:

Teorema 236 *Due superfici equivalenti, ossia che differiscono solo per la parametrizzazione, hanno la medesima area. Inoltre, l'area non muta cambiando l'orientazione della superficie.*

Se la superficie è data in forma cartesiana,

$$z = f(x, y),$$

la sua area è

$$\int_{\Omega_\gamma} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx \, dy.$$

Come ulteriore caso particolare, consideriamo il caso di una superficie di rotazione, descritta da

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \omega_\gamma = D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

In questo caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(\sqrt{x^2 + y^2}) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

e quindi l'area è data da

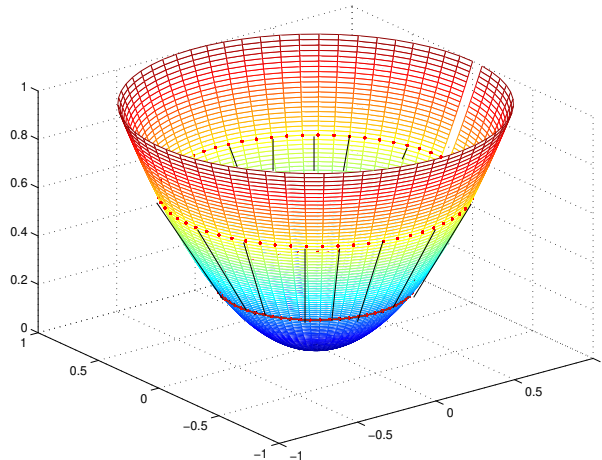
$$\int_{D_R} \sqrt{1 + [f'(\sqrt{x^2 + y^2})]^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R r \sqrt{1 + [f'(r)]^2} \, dr \right\} d\theta = 2\pi \int_0^R r \sqrt{1 + [f'(r)]^2} \, dr.$$

Anche questa formula si chiama formula di Guldino e si interpreta facilmente. Dividendo l'intervallo $[0, R]$ mediante i punti r_i , l'integrale si approssima mediante la somma dei numeri

$$(2\pi r_i) \left[(r_{i+1} - r_i) \sqrt{1 + [f'(r_i)]^2} \right]$$

e questa è l'area di un tronco di cono "iscritto" nella superficie, come in figura 8.11

Figura 8.11: Calotta di rotazione (caso particolare: paraboloidi di rotazione)



8.4.2 Densità superficiale

Si abbia una funzione che ad ogni calotta di una superficie associa un numero. Per esempio, se la superficie è realizzata con una lamiera, la funzione che ad una calotta della superficie associa la sua massa o, nelle applicazioni all'elettrologia, la sua carica. Indichiamo con $m(\Sigma)$ questa funzione. La densità (di massa, di carica ecc.) media su Σ è il numero

$$\rho(\Sigma) = \frac{m(\Sigma)}{A(\Sigma)}.$$

In questa formula, $A(\Sigma)$ è l'area della calotta Σ . Vogliamo ora passare dalla densità media alla densità puntuale. Per questo, supponiamo che la superficie sia parametrizzata da

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$$

e supponiamo che la superficie sia **semplice**, ossia supponiamo che questa trasformazione sia iniettiva. Fissiamo un punto \mathbf{r}_0 sulla superficie,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

Sia Q_l un quadrato di lato l il cui centro è (u_0, v_0) e sia \mathcal{C}_l l'immagine del quadrato sulla superficie. Si considera quindi il limite

$$\rho(\mathbf{r}_0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{m(\mathcal{C}_l)}{A(\mathcal{C}_l)}.$$

Se questo limite esiste finito, lo chiamiamo la densità della funzione m . In realtà questa definizione è più delicata di quanto possa sembrare perchè per il calcolo del limite si sono privilegiati i quadrati. Niente garantisce che se si fossero scelti dei dischi⁶ si sarebbe trovato il medesimo limite e in effetti generalmente ciò non avviene. Diciamo che, sotto “ipotesi di regolarità” della funzione m ciò non accade. Ma non abbiamo i mezzi necessari per specificare quali siano queste ipotesi. Il procedimento inverso a questo, porta a definire gli integrali di superficie di prima specie.

8.4.3 Integrali di superfici di prima specie

Così come per le curve, anche sulle superfici si definiscono due tipi diversi di integrali. Il primo è suggerito dal problema del calcolo della massa di una superficie, quando si conosce la densità ρ , che può variare da punto a punto. Ricordando la definizione di densità, per esempio di massa, non meraviglia che per ritrovare la massa totale della calotta che si ottiene quando (u, v) varia in una regione Ω_γ , delimitata da una curva di Jordan γ , si debba calcolare

$$\int_{\Omega_\gamma} \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| \, du \, dv.$$

In generale, un integrale della forma

$$\int_{\Omega_\gamma} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| \, du \, dv. \quad (8.25)$$

(con $f(x, y, z)$ funzione continua definita sulla calotta) si chiama *integrale di superficie di prima specie* o semplicemente *integrale superficiale*. E' chiaro che il valore dell'integrale non cambia cambiando l'orientazione della superficie, dato che nell'espressione dell'integrale figura non direttamente \mathbf{N} , ma il suo modulo. Oltre a ciò si potrebbe provare:

Teorema 237 *L'integrale di superficie di prima specie non muta cambiando parametrizzazione.*

Invece di usare la notazione (8.25) si usa in genere la notazione

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) \, d\Sigma \quad \text{oppure} \quad \int_{\Sigma} f(x, y, z) \, dA$$

(A iniziale di “area”. Talvolta si scrive dS).

⁶o peggio ancora dei rombi che diventano via via più “lunghi e sottili”.

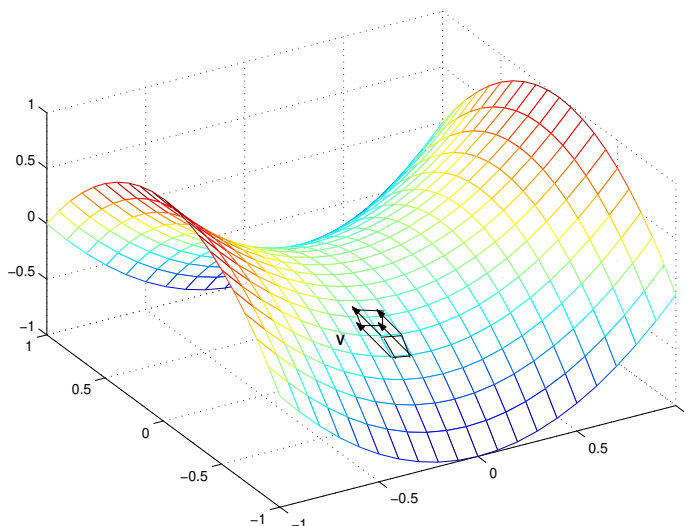
8.4.4 Integrale di superficie di seconda specie

L'integrale di superficie di seconda specie è suggerito dal calcolo del flusso attraverso una superficie, che ora definiamo. Sia $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vettoriale che però ora non interpretiamo come campo di forze. Piuttosto pensiamo che un fluido riempia tutto lo spazio e che la particella che passa per il punto (x, y, z) ci passi con velocità $\mathbf{V}(x, y, z)$. Vogliamo calcolare la quantità di fluido che, nell'unità di tempo, traversa la superficie. Approssimiamo ancora la superficie con tanti piccoli parallelogrammi che giacciono sui piani tangenti, come abbiamo fatto per il calcolo dell'area. Sia \mathcal{P} uno di essi. La quantità di fluido che nell'unità di tempo lo attraversa è il volume del parallelepipedo che ha \mathcal{P} per base e la cui altezza è, circa,

$$\frac{\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)}{|\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)|} \cdot \mathbf{V}(x_0, y_0, z_0)$$

(“circa”, perché il campo vettoriale non è costante su \mathcal{P}). Si veda la figura 8.12. Il volume va calcolato ora con segno perché non è indifferente che il fluido passi

Figura 8.12: Flusso attraverso una superficie



dall'una all'altra parte della superficie, ed è dato da

$$\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)$$

(si ricordi che $|\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)|$ è circa l'area di \mathcal{P} e che $\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)$ è l'area “con segno”). Sommando i contributi di tutti i parallelogrammi si trova una delle somme di Riemann che approssimano l'integrale di $\mathbf{V}(x, y, z) \cdot \mathbf{N}(x, y, z)$. Ciò suggerisce di definire l'integrale di superficie di seconda specie

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{N}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, du \, dv. \quad (8.26)$$

Una notazione più semplice che si usa per indicare questo integrale è

$$\int_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\Sigma. \quad (8.27)$$

In questa notazione si sottintende la dipendenza da u e da v . Si noti che l'integrale di superficie di seconda specie è uguale a

$$\int_{\Sigma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dA$$

con $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ il versore normale alla superficie. Si prova:

Teorema 238 *Il valore dell'integrale di superficie di seconda specie non muta cambiando la parametrizzazione della superficie. Esso cambia di segno cambiando l'orientazione.*

Osservazione 239 L'integrale di superficie di seconda specie è un “integrale orientato”: esso cambia segno cambiando il verso della normale, ossia l'orientazione della superficie. Consideriamo ora il caso particolare in cui la superficie Σ è un dominio di integrazione, $\Sigma = \mathcal{D}$, del piano (u, v) e quindi è parametrizzata da

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 0, \quad (u, v) \in \Sigma.$$

Sia inoltre

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}(x, y) = h(x, y)\mathbf{k}.$$

In questo caso, se la superficie è orientata positivamente

$$\int_{\Sigma} \mathbf{V}(x, y) \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma} h(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathcal{D}} h(x, y) \, dx \, dy,$$

l'usuale integrale doppio di $h(x, y)$. Se però la superficie è orientata negativamente, la normale punta verso il basso e

$$\int_{\Sigma} \mathbf{V}(x, y) \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma} h(x, y) \, dy \, dx,$$

e questo vale

$$- \int_{\mathcal{D}} h(x, y) \, dx \, dy,$$

l'usuale integrale doppio cambiato di segno. ■

8.4.5 Integrale di superficie di seconda specie e forme differenziali

Sia nel calcolo del lavoro, integrale di curva di prima specie, che nel calcolo del flusso, integrale di superficie di seconda specie, interviene un campo vettoriale, ma le proprietà fisiche di tali campi sono sostanzialmente diverse. E' quindi utile individuare un formalismo matematico che permetta di distinguere un caso dall'altro e di distinguere anche visivamente se un campo vettoriale si vuol usare per il calcolo di un'integrale di curva o di superficie. Per arrivare a ciò, vediamo una formula esplicita per il calcolo dell'integrale (8.27), più esplicita della formula (8.26). Ricordiamo che

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u, v) &= (x_u \mathbf{i} + y_u \mathbf{j} + z_u \mathbf{k}) \wedge (x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j} + z_v \mathbf{k}) \\ &= [y_u z_v - z_u y_v] \mathbf{i} + [z_u x_v - x_u z_v] \mathbf{j} + [x_u y_v - y_u x_v] \mathbf{k}.\end{aligned}$$

L'espressione esplicita di (8.27) è

$$\int_{\Omega} \{f(x, y, z)[y_u z_v - z_u y_v] + g(x, y, z)[z_u x_v - x_u z_v] + h(x, y, z)[x_u y_v - y_u x_v]\} du dv \quad (8.28)$$

(la dipendenza di x, y, z da u e da v non si è indicata per brevità). Se $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ è il campo vettoriale che si vuol integrare su una superficie, indichiamolo col simbolo

$$f dy dz + g dz dx + h dx dy. \quad (8.29)$$

Scriviamo inoltre

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad dy = y_u du + y_v dv, \quad dz = z_u du + z_v dv. \quad (8.30)$$

Usando le "regole di calcolo" (8.21) è ora facile ricostruire l'espressione dell'integrale (8.28). L'integrando si ottiene sostituendo le (8.30) in (8.29) e usando le (8.21) (rispetto ai simboli du e dv). Si trova:

$$\begin{aligned}dy dx &= y_u z_u du du + y_u z_v du dv + y_v z_u dv du + y_v z_v dv dv \\ &= (y_u z_v - y_v z_u) du dv \\ dz dx &= (z_u x_v - z_v x_u) du dv \\ dx dy &= (x_u y_v - x_v y_u) du dv\end{aligned}$$

come serve per il calcolo dell'integrale (8.28). Un'espressione della forma (8.29) si chiama una 2-forma differenziale (il numero 2 ricorda che si vuole integrarla

su una superficie, intuitivamente un “foglietto” di dimensione 2.) Anche le 2-forme differenziali si indicano con lettere greche minuscole,

$$\omega = f \, dy \, dz + g \, dz \, dx + h \, dx \, dy .$$

Completiamo le regole (8.21) imponendo:

$$\begin{aligned} dx \, dx = 0, & & dy \, dy = 0, & & dz \, dz = 0, \\ dy \, dx = -dx \, dy, & & dz \, dx = -dx \, dz, & & dz \, dy = -dy \, dz. \end{aligned} \quad (8.31)$$

(anche queste regole sono suggerite dalle regole del prodotto vettoriale). Con queste notazioni, la (8.28) si ottiene dalla (8.29) sostituendo x, y, z con $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$; usando le regole di calcolo precedenti e quindi integrando su Ω .

8.5 Analisi vettoriale nello spazio

Studiamo ora l’analisi vettoriale nello spazio.

8.5.1 Formula della divergenza e formula di Gauss

L’uguaglianza (8.23) correla le 1-forme differenziali e gli integrali su aree piane. Mostriamo che esiste una formula analoga, che correla gli integrali delle 2-forme differenziali (ossia, i flussi di campi vettoriali) e gli integrali di volume. Limitiamoci a considerare il caso di regioni Ω convesse. Non è difficile mostrare che la formula che troveremo vale anche se la regione Ω può rappresentarsi come unione o differenza di regioni convesse. Cosiccome abbiamo fatto per la riduzione degli integrali multipli ad integrali iterati, indichiamo con Ω_z la proiezione sul piano (x, y) di Ω ,

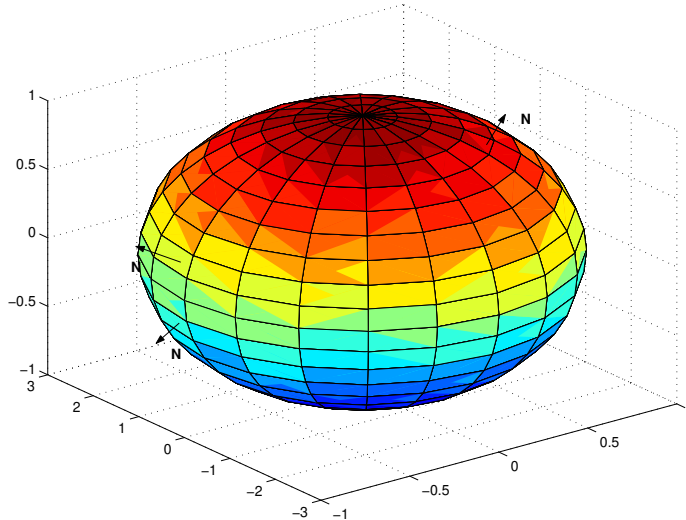
$$\Omega_z = \{(x, y) \mid \text{esiste } z \text{ tale che } (x, y, z) \in \Omega\} .$$

Analogamente definiamo Ω_x ed Ω_y . Sia $(x, y) \in \Omega_z$. La retta verticale per (x, y) interseca Ω in un segmento $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$. Richiediamo che le funzioni $\phi(x, y), \psi(x, y)$ siano di classe C^1 . Proprietà analoghe richiediamo anche per le intersezioni con le rette parallele agli assi delle ascisse e delle ordinate. Sotto queste condizioni, la regione Ω viene ad essere delimitata da “pezzi” di superfici regolari. In ciascun punto di tali superfici è possibile definire la normale. La normale non sarà generalmente definita nei punti in cui due “pezzi” diversi si congiungono. Per semplicità noi supporremo che in ogni punto di $\partial\Omega$ sia possibile definire la retta normale. Vedremo più avanti come indebolire questa condizione.

8.5. ANALISI VETTORIALE NELLO SPAZIO

Consideriamo un punto $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, \psi(x_0, y_0))$ della superficie $z = \psi(x, y)$. Se un punto $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ di questa superficie appartiene ad Ω , tutto il segmento che lo congiunge a \mathbf{r}_0 è in Ω perché Ω è convessa. Dunque, è possibile definire la normale entrante e la normale uscente da Ω nel punto \mathbf{r}_0 . Applichiamo in ogni punto P di Ω la normale uscente ad Ω in tale punto. Tale vettore normale lo indichiamo col simbolo $\mathbf{N}_e(P)$ (l'indice “ e ” indica “normale esterna” o uscente dalla superficie). Per esempio, fissiamo l'attenzione sulla

Figura 8.13: Una sfera e la parte “sotto l'equatore”



“parte inferiore” della superficie Ω in Fig. 8.13, parametrizzata da

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \phi(x, y)\mathbf{k} \quad (x, y) \in \Omega_z.$$

Nel caso specifico si tratta di una sfera e se ne considera la parte “sotto l'equatore”. Abbiamo definito la normale

$$\mathbf{N}(x, y) = (\mathbf{i} + \phi_x(x, y)\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{j} + \phi_y\mathbf{k}) = -\phi_x(x, y)\mathbf{i} - \phi_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Essendo positivo il coefficiente di \mathbf{k} , la normale punta verso l'alto. Dunque entra in Ω . Invece, noi vogliamo la normale che esce da Ω . Dobbiamo quindi cambiare segno alla $\mathbf{N}(x, y)$ e scegliere

$$-\mathbf{N}(x, y) = -(\mathbf{i} + \phi_x(x, y)\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{j} + \phi_y\mathbf{k}) = \phi_x(x, y)\mathbf{i} + \phi_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Definizione 5 Indicheremo con $\mathbf{N}_e(\mathbf{r})$ la normale nel punto \mathbf{r} alla superficie Σ che racchiude Ω , orientata verso l'esterno di Ω . ■

Vediamo esplicitamente un esempio.

Esempio 240 La superficie sia la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si tratta quindi di una superficie assegnata in modo implicito. I due emisferi superiore ed inferiore sono parametrizzati rispettivamente da

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Si vede facilmente che se si vuole la normale **esterna**, ossia uscente da Ω , bisogna parametrizzare l'emisfero superiore scegliendo **prima** x e **poi** y ; nell'emisfero inferiore bisogna scegliere **prima** y e **poi** x . ■

Sia ora $T(x, y, z)$ una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_z} \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_z} T(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int_{\Omega_z} T(x, y, \phi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

La normale **esterna** alla superficie di Ω , nei punti $(x, y, \psi(x, y))$, rispettivamente $(x, y, \phi(x, y))$, è:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_e(x_0, y_0, z_0) &= -\psi_x(x_0, y_0)\mathbf{i} - \psi_y(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{N}_e(x_0, y_0, z_0) &= \phi_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + \phi_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_z} T \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_e dx dy.$$

Indichiamo con Σ_z le due calotte di parametrizzazione $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$. Con questa notazione e chiamando \mathbf{n}_e il versore

$$\mathbf{n}_e = \frac{\mathbf{N}_e}{|\mathbf{N}_e|},$$

l'ultimo integrale è uguale a

$$\int_{\Sigma_z} T \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e d\Sigma = \int_{\Sigma_z} T \mathbf{k} \cdot d\Sigma.$$

8.5. ANALISI VETTORIALE NELLO SPAZIO

Si noti che i grafici delle funzioni $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ possono non esaurire tutta la frontiera di Ω , ma una parte della frontiera che non appartiene a tali grafici è parte di un cilindro verticale. Ha quindi per normale un vettore ortogonale a \mathbf{k} e quindi non dà contributo al calcolo dell'integrale. In modo analogo si mostra che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_y} S \mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_e dx dy = \int_{\Sigma_y} S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_e d\Sigma, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} R(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_x} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_e dy dz = \int_{\Sigma_x} R \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_e d\Sigma \end{aligned}$$

(le definizioni di Σ_x e Σ_y sono analoghe a quella di Σ_z). Sommando i tre integrali si trova

Teorema 241 (della divergenza) *Sia Ω una regione convessa e limitata, la cui frontiera è sostegno di una superficie regolare. Vale*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} R(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) \right] dx dy dz \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (R\mathbf{i} + S\mathbf{j} + T\mathbf{k}) dx dy dz = \int_{\Omega} \nabla \cdot (R\mathbf{i} + S\mathbf{j} + T\mathbf{k}) dx dy dz \\ &= \int_{\partial\Omega} \{R\mathbf{i} + S\mathbf{j} + T\mathbf{k}\} \cdot d\Sigma. \end{aligned}$$

La superficie Σ è orientata scegliendo la normale uscente da Ω .

Nell'ultimo integrale si intende che la superficie è orientata mediante la normale esterna.

Il teorema della divergenza ha la seguente interpretazione: il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie è uguale all'integrale di volume della divergenza del campo vettoriale stesso. Il flusso è positivo quando il campo vettoriale "esce" da Ω . In tal caso, l'integrale della divergenza è positivo, e ciò, come si è già notato, spiega l'uso del termine "divergenza". Consideriamo ora un caso particolare: supponiamo che il campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y, z)$ sia il gradiente di una funzione $\phi(x, y, z)$, a valori reali. In questo caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \phi(x, y, z) &= \nabla \cdot \nabla \phi(x, y, z) \\ &= \phi_{xx}(x, y, z) + \phi_{yy}(x, y, z) + \phi_{zz}(x, y, z) = \Delta \phi(x, y, z) \end{aligned}$$

e quindi si trova:

$$\int_{\Omega} \Delta\phi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \nabla\phi \cdot d\Sigma.$$

Questo caso particolare del *Teorema della divergenza* va sotto il nome di *Formula di Gauss*.

In fisica hanno importanza quei campi vettoriali che hanno flusso nullo attraverso ogni superficie chiusa. Tali campi si chiamano *campi solenoidali*. Una condizione sufficiente perchè un campo vettoriale sia solenoidale è che la sua divergenza sia nulla. Questa condizione è solo sufficiente come prova l'esempio seguente:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

(proporzionale al campo elettrico di una carica puntiforme, il cui flusso attraverso una sfera concentrata nella carica non è nullo, nonostante che $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$). Se accade che il campo è ovunque definito e di classe C^1 allora il campo è solenoidale se e solo se la sua divergenza è nulla.

Vediamo ora di scrivere il *Teorema della divergenza* con l'uso del simbolismo delle forme differenziali. Sia

$$\omega = R \, dy \, dz + S \, dz \, dx + T \, dx \, dy.$$

Usando le regole (8.31) si trova

$$d\omega = (R_x + S_y + T_z) \, dx \, dy \, dz. \tag{8.32}$$

Per uniformità, usa chiamare “*3-forma differenziale*” un'espressione della forma

$$f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Essa è niente altro che la funzione scalare $f(x, y, z)$. Si usa questa notazione, per intendere che questa funzione va integrata su una regione dello spazio \mathbb{R}^3 , con l'avvertenza però che il segno cambia per ogni inversione nell'ordine dei tre simboli dx , dy e dz . Ossia, per esempio,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= -f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz, \\ f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= f(x, y, z) \, dy \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Con queste notazioni, il Teorema della divergenza si scrive

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega. \quad (8.33)$$

In questa formula si intende di aver orientato la normale verso l'esterno di Ω .

Estensioni

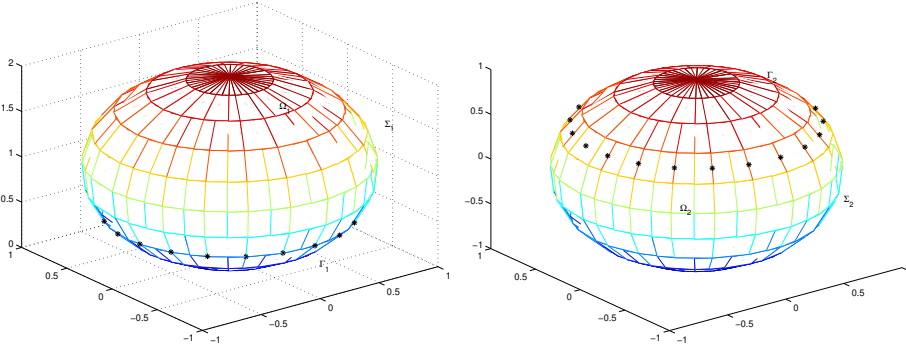
Estendiamo ora la formula della divergenza a regioni più generali. Consideriamo due casi:

Caso 1.

Supponiamo di avere due regioni Ω_1 e Ω_2 su ciascuna delle quali vale il teorema della divergenza, e supponiamo che

- le due regioni non siano contenute l'una nell'altra, ma si intersechino.

Figura 8.14: Le due regioni



Indichiamo con Ω_d e Ω_u rispettivamente l'unione delle due regioni la differenza $\Omega_1 - \Omega_2$:

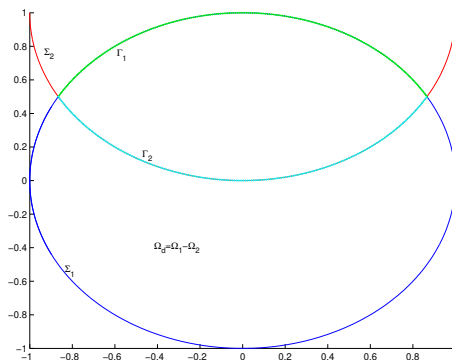
$$\begin{aligned} \Omega_d &= \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \Omega_1, \text{ e anchor } \notin \Omega_2 \}, \\ \Omega_u &= \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \Omega_1 \text{ oppure } \mathbf{r} \in \Omega_2 \}. \end{aligned}$$

Supponiamo che una 2-forma differenziale ω (equivalentemente, un campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{r})$) sia di classe $C_1(\mathbb{R}^3)$. Consideriamo la regione Ω_d . In questa regione, la (8.33) diviene:

$$\int_{\Omega_d} d\omega = \int_{\Omega_1} d\omega - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} d\omega = \int_{\partial\Omega_1} \omega - \int_{\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \omega. \quad (8.34)$$

Si noti che l'uguaglianza vale perché $\Omega_1 \cap \Omega_2$ è convessa, come unione di regioni convesse. La figura 8.15 mostra una sezione dell'insieme su cui si lavora. L'insieme $\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ è unione di due parti: una parte della frontiera di Ω_1 che chiamiamo Γ_1 e una parte della frontiera di Ω_2 che chiamiamo Γ_2 . Chiamiamo invece Σ_1 e Σ_2 le parti rimanenti delle frontiere di Ω_1 e di Ω_2 . Proseguiamo ora le uguaglianze in (8.34). Si ha:

Figura 8.15: Una sezione della regione



$$\left[\int_{\partial\Omega_1} \omega \right] - \left\{ \int_{\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \omega \right\} = \left[\int_{\Sigma_1} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega \right] - \left\{ \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega \right\}$$

$$\int_{\Sigma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\partial(\Omega_1 - \Omega_2)} \omega.$$

Ciò prova che la formula della divergenza vale anche nella regione non convessa ottenuta come differenza di due regioni convesse.

Osservazione 242 Si noti un problema nel calcolo precedente: la frontiera di $\Omega_1 - \Omega_2$ non è regolare e quindi l'uguaglianza in (8.35) non è perfettamente giustificata da quanto abbiamo detto prima. Però la dimostrazione della formula della divergenza si ottiene con una catena di integrazioni per parti, che possono giustificarsi anche nel caso in esame. ■

Caso 2.

Passiamo ora a considerare la regione $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Si noti che Ω non è una regione convessa e che

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

ove Σ_1 è la parte della frontiera di Ω_1 che non è contenuta in Ω_2 ; Σ_2 è la parte della frontiera di Ω_2 che non è contenuta in Ω_1 . Sia inoltre

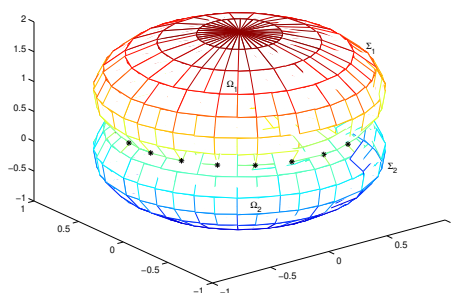
$$\Gamma_1 = [\partial\Omega_1] \cap \Omega_2, \quad \Gamma_2 = [\partial\Omega_2] \cap \Omega_1.$$

La figura 8.14 mostra, separatamente a sinistra ed a destra, le due regioni con indicate le varie parti della frontiera. Le stelle indicano la curva in cui si intersecano. La figura 8.16 mostra l'unione delle due regioni, con la parte delle due frontiere "visibile dall'esterno". E' chiaro che

$$\Sigma = \partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Però, né la regione è convessa, né la frontiera è regolare. Ciò nonostante, argomenti analoghi a quelli visti sopra portano a concludere che il teorema della divergenza vale anche nella regione $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Figura 8.16: Ancora la regione



Osservazione 243 Si potrebbe provare che la classe delle regioni per cui vale il Teorema della divergenza è assai ampia: tutte le regioni limitate la cui frontiera è una superficie regolare *orientabile*. Discuteremo il concetto di orientabilità di una superficie più avanti. Per ora diciamo soltanto che se una superficie regolare ha per sostegno la frontiera di una regione limitata, essa si dice *superficie chiusa*⁷. ■

Caso 3.

E' il caso in cui la regione Ω_2 sia contenuta nella regione Ω_1 , come può essere il caso di due palle concentriche. In tal caso è facile vedere che la (8.35) vale ancora. Però ora

$$\partial(\Omega_1 - \Omega_2) = [\partial\Omega_1] \cup [\partial\Omega_2].$$

La normale va scelta uscente da $\Omega_1 - \Omega_2$. E quindi sulla frontiera di Ω_1 va scelta la normale uscente da Ω_1 ; sulla frontiera di Ω_2 va scelta la normale entrante in Ω_2 .

8.5.2 La formula di Stokes: il caso delle superfici parametriche

La *formula di Stokes* dà un'ulteriore relazione che ora collega integrali di curva nello spazio e integrali di superficie.

Osservazione 244 Abbiamo specificato “curva nello spazio” per intendere che se in queste considerazioni interviene la normale alla curva, come nell'osservazione 245, questa va calcolata con la regola con cui si calcola la normale alla curva nello spazio; ossia, $\mathbf{n}(s)$ è colineare ed ha lo stesso verso di $\mathbf{t}'(s)$. E ciò anche se, per caso, la curva che si considera appartiene ad un piano. ■

⁷Non si confonda il termine “superficie chiusa” col termine “insieme chiuso”.

Consideriamo una superficie parametrica Σ

$$\Sigma : \quad (u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \Omega.$$

Supponiamo che la parametrizzazione sia iniettiva e di classe C^2 . Consideriamo una curva semplice e chiusa, con sostegno in Ω :

$$\gamma : \quad t \rightarrow u(t)\mathbf{i} + v(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a, b].$$

Indichiamo con Ω_γ la regione interna alla curva γ . La regione Ω_γ è contenuta in Ω e la restrizione di $\mathbf{r}(u, v)$ alla chiusura di Ω_γ definisce una calotta che indichiamo con Σ_1 . Diciamo che la calotta Σ_1 ha per bordo⁸ la curva γ_1 parametrizzata da

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \\ &= x(u(t), v(t))\mathbf{i} + y(u(t), v(t))\mathbf{j} + z(u(t), v(t))\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

La scelta del verso di percorrenza della curva γ stabilisce un'orientazione su γ_1 mentre la scelta di considerare \mathbf{i} come primo elemento della base di \mathbb{R}^2 stabilisce un'orientazione sulla normale a Σ_1 . Le due orientazioni non hanno relazioni tra loro: per esempio sia

$$\Sigma : \quad \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\mathbf{k}.$$

Le due curve

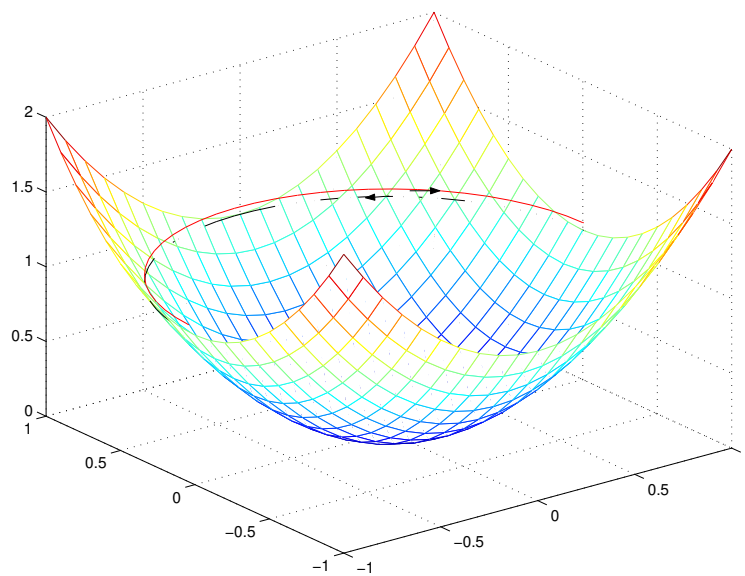
$$\gamma : \quad t \rightarrow \frac{1}{2}[\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}], \quad \tilde{\gamma} : \quad t \rightarrow \frac{1}{2}[\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}],$$

identificano la medesima calotta, ma le corrispondenti curve γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$ hanno orientazioni opposte. Volendo correlare un'integrale sulla superficie Σ_1 con l'integrale sul suo bordo, dobbiamo correlare le due orientazioni. Per fissare le idee, consideriamo assegnata *l'orientazione della* superficie, ossia il verso positivo della normale e scegliamo di conseguenza quella sulla curva, ma niente vieta di fare il contrario e talvolta questo è effettivamente utile.

Definizione 6 Diciamo che l'orientazione della calotta Σ_1 e quella del suo bordo γ_1 sono concordi quando vale la *regola d'* Ampère: una persona in piedi sulla superficie nel verso positivo della normale, vede un punto mobile sulla curva passare dalla sua destra alla sua sinistra. ■

⁸Si tratta di una definizione matematicamente non soddisfacente, come si è notato al paragrafo 6.3.1.

Figura 8.17: Le due orientazioni del bordo



Osservazione 245 Facendo tendere ad un punto della curva la posizione della persona che osserva il moto, si vede che l'orientazione della calotta e quella del suo bordo sono concordi quando i tre versori della tangente alla curva, della normale alla curva e della normale alla superficie, presi in quest'ordine, formano un sistema di riferimento positivo. Supponiamo che un punto $P(t)$ di γ_1 percorra la curva a partire da $P(a)$, portandosi dietro questo sistema di riferimento. Dato che la parametrizzazione della superficie è iniettiva, il punto $P(t)$ torna alla posizione iniziale quando $t = b$. E alla fine del giro il sistema di riferimento viene a trovarsi nella posizione che aveva all'inizio. Ricordiamo che in queste considerazioni $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/\|\mathbf{t}'(s)\|$. ■

Vale:

Teorema 246 (di Stokes) Valgano le ipotesi dette sopra, in particolare sia iniettiva e di classe C^2 la parametrizzazione della superficie. Sia γ_1 il bordo di Σ_1 e Σ_1 e γ_1 abbiano orientazioni compatibili. Sia $\mathbf{V}(x, y, z)$ un campo vettoriale di classe C^1 , definito su Ω . Vale

$$\int_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\Sigma = \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.35)$$

Il calcolo che prova questo teorema è in appendice. Il significato fisico del teorema di Stokes è il seguente: La circuitazione del campo vettoriale lungo il bordo di Σ_1 è uguale al flusso attraverso Σ_1 del rotore del campo vettoriale stesso. Notiamo che, con le notazioni introdotte per le forme differenziali, anche il *Teorema di Stokes* si scrive

$$\int_{\Sigma_1} d\omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega. \quad (8.36)$$

Infatti, se ω è una 1-forma differenziale i cui coefficienti sono le componenti del campo vettoriale \mathbf{V} , è immediato calcolare che $d\omega$ è quella 2-forma differenziale i cui coefficienti sono le componenti del rotore di \mathbf{V} . Confrontiamo ora le espressioni dei teoremi di Green e di Stokes scritte mediante le formule differenziali. Si vede che essi si possono ambedue scrivere nella forma generale (8.36).

Osservazione 247 Si osservi che nel calcolo l'iniettività della parametrizzazione non si è usata. L'iniettività si è solo usata per l'interpretazione data nell'Osservazione 245. Dunque, la formula (8.35) vale senza quest'ipotesi, pur di intendere che l'integrale a destra sia sostituito da

$$\int_a^b \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Però in tal caso la curva γ potrebbe essere semplice e la curva γ_1 potrebbe non esserlo; e quindi il valore dell'integrale non dipenderebbe soltanto dagli enti geometrici Σ e γ_1 , ma dalla loro parametrizzazione, ciò che non ha senso fisico. Si veda anche l'osservazione 248. ■

8.5.3 Estensioni

Una prima estensione della formula di Stokes si incontra nel caso in cui la calotta è delimitata da due curve, come nella figura 8.18 a sinistra. Procedendo come nel caso piano (paragrafo 8.3.5), ossia operando due tagli vicini come nella figura a destra, ci si riconduce al caso che abbiamo già trattato e quindi per una superficie siffatta la formula di Stokes assume l'aspetto

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Il segno negativo di fronte al secondo integrale dipende dal fatto che la curva γ_2 va orientata in modo discorde rispetto a quello della superficie, si veda la

Figura 8.18: Estensione al caso del cilindro

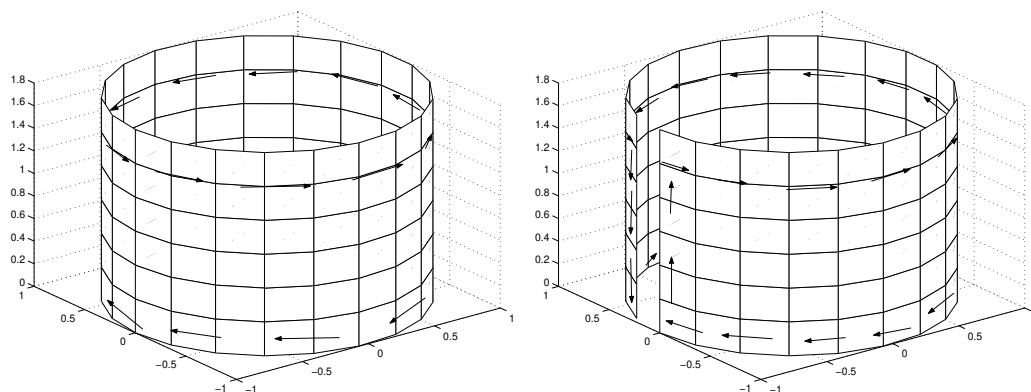


figura. In questo caso diremo che il **bordo** di Σ è costituito dalle due curve γ_1 , orientata in modo concorde, e γ_2 , orientata in modo discorde, rispetto a Σ . Si estendono facilmente queste considerazioni al caso in cui il bordo è costituito da più curve. Ricapitolando, abbiamo introdotto la formula di Stokes per superfici date in forma parametrica. Inoltre, abbiamo esplicitamente supposto che sia possibile orientare la calotta ed il suo bordo in modo concorde. Il fatto è che ciò talvolta non può farsi e questo è tanto più importante perchè molto spesso in pratica è necessario usare il teorema di Stokes nel caso in cui la superficie è ottenuta “incollando” tanti pezzi di superfici parametriche. Chiameremo **calotta composta** una calotta così ottenuta. Si noti che passando da un pezzo di superficie ad un altro, la normale può variare in modo discontinuo, si veda la figura 8.19 E’ chiaro dalla figura che

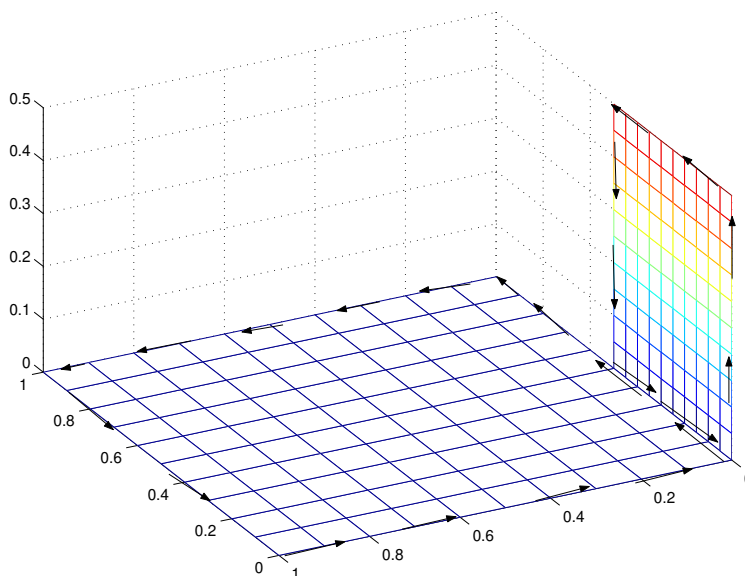
$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega$$

e che la formula di Stokes può applicarsi sia a Σ_1 che a Σ_2 ; che il contributo degli integrali sul lato comune si elide e quindi che l’integrale precedente è uguale alla circuitazione del campo vettoriale sui segmenti che delimitano la superficie, opportunamente orientati. Indicando con γ la curva che ha tali segmenti come sostegno, vale ancora

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega.$$

La discontinuità della normale non costituisce quindi un problema. Queste

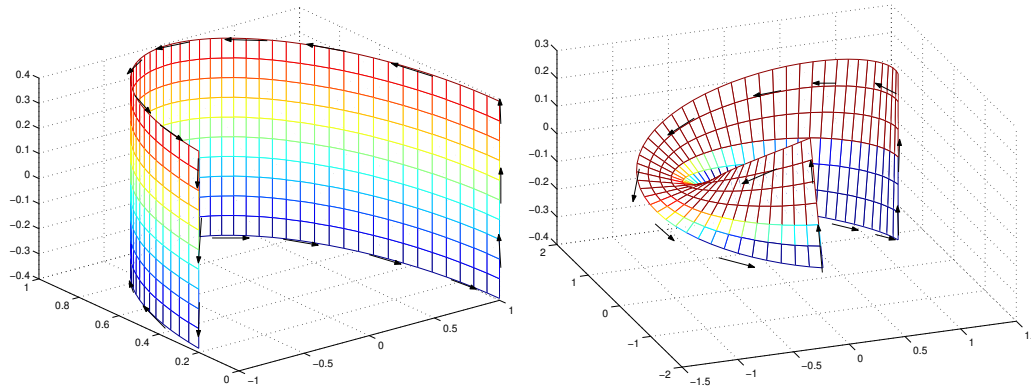
Figura 8.19: Estensione ad una superficie non regolare



considerazioni sono però soltanto apparentemente semplici. Per renderci conto delle difficoltà, appliciamole alle superfici nelle due figure 8.20. Queste sono superfici regolari, il cui bordo è una curva regolare a tratti, e quindi l'applicazione della formula di Stokes non presenta problemi. Modifichiamo ora le superfici come in figura 8.21. E' ancora ovvio che la formula di Stokes vale. Ma, modifichiamo ulteriormente le superfici, portando i segmenti affiancati a coincidere. Nel caso della superficie a sinistra, la formula di Stokes vale ancora, nella forma generalizzata perché ora il bordo è costituito da due curve. Infatti, gli integrali sui due segmenti si elidono. Invece, tali integrali si **sommano** nel caso della superficie a destra e quindi per tale superficie, che si chiama *nastro di Möbius*, la formula di Stokes non vale.

Osservazione 248 Si noti che nè il cilindro nè il nastro di Möbius sono superfici "semplici", ossia con parametrizzazione iniettiva; ma in un caso la formula di Stokes vale mentre nell'altro non vale; o meglio, vale la formula di Stokes nell'accezione dell'Osservazione 247, che semplicemente significa: contare due volte il contributo dei segmenti che si sovrappongono. Notiamo però che la posizione dei tali segmenti sul nastro di Möbius è arbitraria: possiamo fare un taglio nella posizione che vogliamo e applicare il Teorema di Stokes alla superficie ottenuta. D'altra parte il campo vettoriale cambia da

Figura 8.20: La costruzione del nastro di Möbius



punto a punto e questo vuol dire che il valore dell'integrale cambia a seconda della posizione del taglio, ossia a seconda del modo che usiamo per calcolare l'integrale. Dunque, tale integrale non dipende dalle sole proprietà geometriche del nastro di Möbius, e non ha alcun significato fisico. ■

Si suggerisce di costruire un modello del nastro di Möbius usando una striscia di carta, e di vedere che il suo bordo consiste di un'unica curva. La circuitazione del campo vettoriale lungo tale curva non ha alcuna relazione col flusso del rotore attraverso il nastro. Il nastro di Möbius è una superficie regolare, anche se con parametrizzazione non iniettiva. Dunque, l'unico punto in cui può cedere l'argomentazione che porta alla formula di Stokes è il punto in cui si cerca di orientare la superficie ed il bordo in modo concorde. Infatti, ciò non può farsi. Per vedere ciò, conviene lavorare col versore normale

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}. \quad (8.37)$$

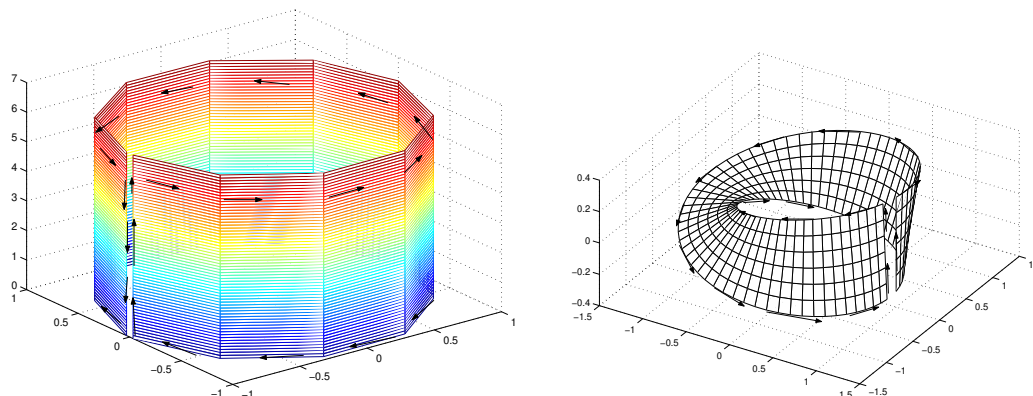
Questo versore è ben definito perchè $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ non è mai nullo. Dunque,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u(u, v) & \mathbf{r}_v(u, v) & \mathbf{n}(u, v) \end{bmatrix}$$

non si annulla mai: o è sempre positivo, o è sempre negativo. Con la scelta fatta per $\mathbf{n}(u, v)$, esso è sempre positivo. Sia ora γ una curva chiusa che gira lungo tutto il nastro di Möbius,

$$\gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t)$$

Figura 8.21: Il cilindro e il nastro di Möbius



Sia $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(t))$. La funzione $\mathbf{n}(t)$ varia con continuità, ma la continuità è un concetto locale: niente dice dei valori che $\mathbf{n}(t)$ prende in punti “lontani”. Chiediamoci allora cosa accade di $\mathbf{n}(a)$ e di $\mathbf{n}(b)$. Costruendo un modello del nastro di Möbius, si vede immediatamente che

$$\mathbf{n}(a) = -\mathbf{n}(b).$$

E quindi, non è possibile orientare la curva γ in modo concorde alla superficie. Ciò da una parte spiega come mai la formula di Stokes non vale per il nastro di Möbius e dall'altra conduce alle seguenti definizioni:

Definizione 7 Sia Σ una superficie composta. Essa si chiama una varietà se il versore normale $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, definito da (8.37), esiste per ogni \mathbf{r} , ed è funzione continua di \mathbf{r} . La varietà si dice orientabile se lungo ogni arco chiuso $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, si ha

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(a)) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(b)). \quad \blacksquare$$

La formula di Stokes vale per varietà orientabili, il teorema della divergenza vale in regioni Ω la cui frontiera è una varietà orientabile.

Osservazione 249 Le superfici sono state introdotte parametricamente, ma anche come “superfici di livello” di funzioni $F(x, y, z)$, si veda il capitolo 5. Se la funzione $F(x, y, z)$ è di classe C^1 e il suo gradiente non si annulla, allora le superfici definite da

$$F(x, y, z) = c$$

sono superfici orientabili. \blacksquare

8.6 Appendici

8.6.1 Appendice: fatti da ricordare

Ricordiamo che:

- se

$$\omega = f dx + g dy + h dz, \quad V = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

i coefficienti di $d\omega$ sono le componenti del rotore di \mathbf{V} , ossia di $\nabla \wedge V$.

- Se

$$\omega = f dy dz + g dz dx + h dx dy, \quad V = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

allora

$$d\omega = (\nabla \cdot \mathbf{V}) dx dy dz = (\operatorname{div} \mathbf{V}) dx dy dz.$$

Questi fatti vanno ricordati, insieme alla formula seguente, che si ricava facilmente:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot [\nabla f] = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f.$$

8.6.2 Appendice: osservazioni sulla terminologia

Gli argomenti trattati in questo capitolo vanno sotto il nome di “Analisi Vettoriale”. I termini usati per indicare i singoli argomenti sono però variabili da autore ad autore (praticamente solo il termine “Teorema di Stokes” è usato da tutti nel medesimo modo, quando applicato alle curve nello spazio). Per esempio, l’integrale di curva di prima specie si chiama anche *integrali curvilineo* mentre l’integrale di curva di seconda specie si chiama anche *integrale di linea*.

I due integrali di superficie si chiamano anche, rispettivamente, *integrale superficiale*

ed *integrale di flusso*. Le varie formule integrali che abbiamo incontrato hanno nomi variabili: la formula di Green (nel piano) talvolta si chiama anche *formula di Riemann* ed è niente altro che la particolarizzazione a curve piane della formula di Stokes nello spazio. Il Teorema della divergenza (nello spazio) si chiama anche *Teorema di Gauss* o *formula do Ostrogradski* e talvolta “Formula di Green” ed ha una particolarizzazione al piano che ancora si chiama “formula di Green”. E’ quindi opportuno memorizzare il significato fisico dei vari teoremi per saperli identificare in contesti diversi.

8.7 Appendice: Una dimostrazione del Teorema di Stokes

Dimostriamo il teorema di Stokes in un caso particolare: supponiamo cioè che la superficie Σ sia cartesiana, parametrizzata da

$$\Sigma : \quad (x, y) \rightarrow (x, y, z(x, y)).$$

Però per maggior chiarezza indichiamo con (u, v) i punti di Ω ; ossia imponiamo la condizione $x = x(u, v) = u$, $y = y(u, v) = v$. Notiamo che in questo caso particolare la calotta ed il suo bordo sono orientate in modo concorde quando la curva γ è orientata positivamente; ossia quando una punto mobile su γ vede la regione interna Ω_γ alla sua sinistra. Sia $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{i} + g(x, y, z) \mathbf{j} + h(x, y, z) \mathbf{k}$ il campo vettoriale. Nel nostro caso particolare, si ha

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Inoltre, $f_x = f_u$, $f_y = f_v$ ed analogia notazione per g ed h . Dunque si calcola:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f \, dx + g \, dy + h \, dz &= \int_{\gamma} \left\{ f \, du + g \, dv + \left(h \frac{\partial z}{\partial u} \, du + \frac{\partial z}{\partial v} \, dv \right) \right\} \\ &= \int_{\gamma} f \, du + g \, dv + h(z_u \, du + z_v \, dv) = \int_{\gamma} (f + h z_u) \, du + (g + h z_v) \, dv \\ &= \int_{\Omega_\gamma} d[(f + h z_u) \, du + (g + h z_v) \, dv] \\ &= \int_{\Omega_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (g + h z_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f + h z_u) \right\} \, du \, dv \\ &= \int_{\Omega_\gamma} [(g_u + g_z z_u) - (f_v + f_z z_v) + (h_u z_v - h_v z_u)] \, du \, dv. \end{aligned}$$

Mostriamo che anche il flusso del rotore è uguale a questo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{\Sigma} &= \int_{\Omega_\gamma} \{ (h_v - g_z)(-z_u) - (f_z - h_u)z_v + (g_u - f_v) \} \, du \, dv \\ &= \int_{\Omega_\gamma} [(g_u + g_z z_u) - (f_v + f_z z_v) + (h_u z_v - h_v z_u)] \, du \, dv. \end{aligned}$$

Ciò prova l'uguaglianza cercata.