

# Capitolo 7

## Integrazione delle funzioni di più variabili

In questo capitolo introdurremo gli integrali di funzioni di due o tre variabili. Le idee che si seguono per definire l'integrale sono simili a quelle che si usano per definire l'integrale delle funzioni di una sola variabile e quindi le illustreremo per sommi capi<sup>1</sup>. Una differenza importante tra le definizioni di integrali per le funzioni di una o più variabili è nella scelta dei domini di integrazione. Per le funzioni di una variabile è naturale scegliere gli intervalli. Per le funzioni di più variabili c'è molta più libertà. Noi sceglieremo come domini di integrazione gli insiemi che sono delimitati da grafici di funzioni continue (si veda più avanti per una definizione più precisa). Tali insiemi si chiameranno domini di integrazione. Studieremo la definizione dell'integrale di una classe di funzioni che saranno costruite a partire da funzioni continue su insiemi chiusi e limitati.

---

<sup>1</sup>sul piano non si introduce una relazione d'ordine; e quindi non si introdurrà per l'integrale multiplo un concetto analogo a quello di integrale orientato che si introduce nel caso delle funzioni di una variabile. Esiste però nel piano un "verso positivo di rotazione". Questo permetterà di introdurre "integrali orientati" sulle superfici in un capitolo successivo.

Dovremo usare la seguente proprietà delle funzioni che sono **continue su un qualsiasi insieme insieme chiuso e limitato  $\mathcal{D}$** :

per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  con questa proprietà:  
se  $R$  è un qualsiasi rettangolo contenuto in  $\mathcal{D}$  le cui diagonali  
hanno lunghezza minore di  $\delta$  allora

$$0 \leq \max_R f - \min_R f \leq \epsilon.$$

La proprietà importante è che **la posizione di  $R$  in  $\mathcal{D}$  non ha importanza**. Inoltre, non abbiamo indicato esplicitamente le variabili della funzione perché questo risultato vale per funzioni di un qualsiasi numero di variabili (anche per funzioni di una sola variabile. In questo caso  $R = [a, b]$ , nonostante che questo risultato non sia stato provato nel corso di Analisi Matematica 1.) Questa proprietà delle funzioni continue su insiemi chiusi e limitati si chiama *continuità uniforme*.

Introduciamo prima l'integrale di funzioni di due variabili, che presenteremo con maggiori dettagli, e poi l'integrale delle funzioni di tre variabili, che presenteremo in modo più conciso.

## 7.1 Integrazione delle funzioni di due variabili

Chiameremo *dominio di integrazione semplice* un insieme che ha una delle proprietà seguenti:

- è trapezoide di una funzione  $y = g(x)$  continua definita su un intervallo limitato e chiuso (dell'asse delle ascisse) oppure  $x = g(y)$  continua su un intervallo limitato e chiuso (dell'asse delle ordinate);
- oppure è differenza insiemistica di trapezoidi.

Va notato esplicitamente che ogni dominio di integrazione semplice è limitato, per il Teorema di Weierstrass. Inoltre, **assumiamo che il dominio di integrazione semplice sia chiuso, ossia contenga i punti della sua frontiera.** Nel caso specifico di un dominio di integrazione semplice compreso tra due grafici di funzioni della variabile  $x \in [a, b]$ , includeremo nel dominio sia i due grafici che i due segmenti che lo delimitano a destra (punti di ascissa  $a$ ) ed a sinistra (punti di ascissa  $b$ ).

Un insieme **chiuso e limitato**  $\mathcal{D}$  si chiama *dominio di integrazione* quando si può rappresentare come unione di domini di integrazione semplici in modo tale che due qualsiasi di essi non abbiano punti interni comuni (ossia, gli eventuali punti comuni a due domini di integrazione semplici appartengono alle rette o ai grafici che li delimitano)<sup>2</sup>. Per brevità un dominio di integrazione semplice si chiamerà “dominio semplice” ma è importante ricordare che è un caso speciale di dominio di integrazione. In conclusione, un dominio di integrazione si rappresenta (non in modo unico) come unione di domini semplici

$$\mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \quad D_i \cap D_j \text{ privo di punti interni.} \quad (7.1)$$

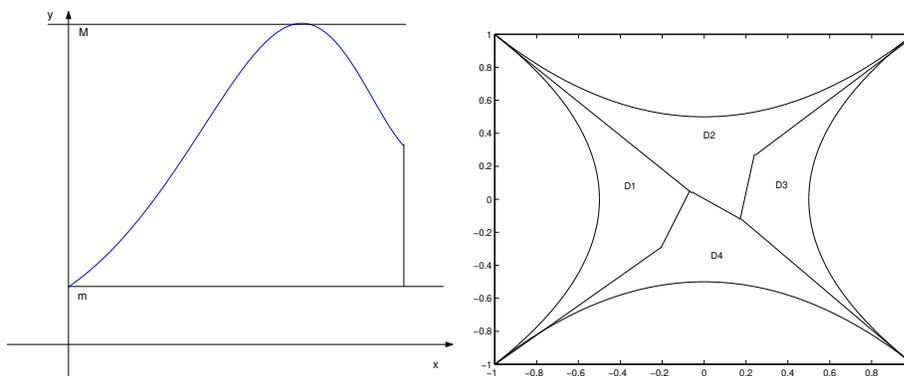
La figura 7.1 mostra esempi di domini di integrazione. Quello a sinistra è la parte del trapezoide di una funzione  $y = g(x)$   $x \in [a, b]$  che è sopra alla retta orizzontale  $y = m$  ed automaticamente sotto alla retta  $y = M = \max g(x)$ . E' quindi la differenza insiemistica tra il trapezoide di  $g(x)$  e quello della funzione che vale costantemente  $m$ . Il dominio di integrazione a destra è più complesso, suddiviso mediante grafici di varie funzioni  $y = y(x)$ , oppure  $x = x(y)$ , ciascuna continua e definita su un opportuno intervallo limitato e chiuso.

**Osservazione 204** Si noti che:

- un dominio di integrazione è un insieme chiuso e limitato. Questo implica che una funzione continua definita su un dominio di integrazione è limitata.
- Come abuso di linguaggio, se  $\Omega$  è un dominio di integrazione, talvolta chiameremo dominio di integrazione l'insieme dei suoi punti interni; ossia l'insieme  $\Omega$  privato delle curve che lo delimitano. Anche in questo caso, le funzioni continue che integreremo dovranno avere estensione continua alla frontiera dell'insieme.

<sup>2</sup>si faccia attenzione al fatto che “dominio” indica una insieme connesso ed aperto mentre i “domini di integrazione” sono insiemi chiusi.

Figura 7.1: Domini di integrazione



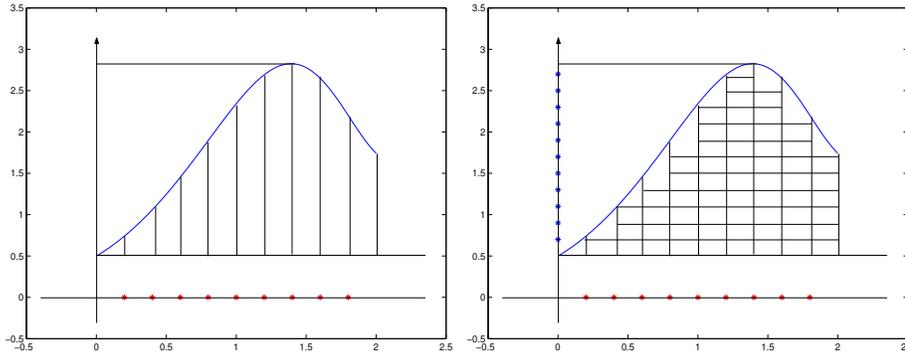
- uno stesso dominio di integrazione può rappresentarsi in più modi come unione di insiemi semplici: per esempio il trapezoide della funzione  $\sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  è un dominio di integrazione semplice che può rappresentarsi anche come  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  con  $\mathcal{D}_1$  il trapezoide di  $\sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$  e  $\mathcal{D}_2$  quello di  $\sin x$ ,  $\pi/2 \leq x \leq \pi$ .
- Si potrebbe provare che la chiusura di una regione di Jordan delimitata da una curva regolare è un dominio di integrazione; e quindi anche l'insieme ottenuto togliendogli la regione delimitata da una seconda curva di Jordan regolare lo è. ■

Introduciamo ora la classe di funzioni per cui definiremo l'integrale<sup>3</sup>. Chiamiamo *integrabile* una funzione  $f(x, y)$  definita su un dominio di integrazione  $\mathcal{D}$  (o almeno nei suoi punti interni) e con questa proprietà: E' possibile trovare una rappresentazione di  $\mathcal{D}$  come in (7.1) in modo tale che per ogni indice  $i$  la funzione  $f|_{\mathcal{D}_i}(x, y)$  ammetta estensione continua al dominio semplice  $\mathcal{D}_i$ . Ossia, **gli eventuali punti di discontinuità della funzione  $f(x, y)$  devono essere sulle rette o grafici che delimitano i domini semplici che compongono  $\mathcal{D}$ .**

<sup>3</sup>si potrebbe definire l'integrale anche per funzioni con proprietà assai più generali, ma questa classe di funzioni è sufficiente praticamente per tutte le applicazioni.

## 7.1. INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Figura 7.2: Suddivisione in rettangoli di un dominio di integrazione



### 7.1.1 La definizione di integrale

Sia  $f(x, y)$  una funzione integrabile. Per definirne l'integrale, procediamo in questo modo: definiamo l'integrale di  $f(x, y)$  su ciascuna dei domini semplici  $D_i$  e quindi definiamo l'integrale su  $\mathcal{D}$  come **somma** degli integrali sui domini  $D_i$ . Si noti che il dominio  $\mathcal{D}$  si potrà decomporre in più modi e quindi andrebbe provato che l'integrale di  $f(x, y)$  non dipende dalla decomposizione scelta per il dominio. Questo è vero ma noi non lo proveremo. Per semplicità limitiamoci a illustrare la definizione dell'integrale di  $f(x, y)$  sul dominio semplice rappresentato nella figura 7.1 a sinistra. Indichiamo con  $T$  tale dominio semplice,

$$T = \{(x, y), \quad 0 \leq a \leq b, \quad m \leq g(x) \leq M\}$$

Si segua il procedimento guardando la figura 7.2. Dividiamo  $[a, b]$  in  $N$  parti uguali con i punti  $a_0 = a$ ,  $a_k = k \frac{b-a}{N}$ . Consideriamo quindi i segmenti verticali i cui punti hanno ascissa  $a_k$  e che sono contenuti in  $T$ , come in fig. 7.2, a sinistra. Suddividiamo ora anche il segmento  $[m, M]$  dell'asse delle ordinate in  $L$  tratti uguali. Le rette orizzontali i cui punti hanno ordinata uguale ai punti di suddivisione dell'intervallo  $[m, M]$  disegnano una divisione dell'insieme  $T$  in rettangoli completamente contenuti in  $T$ , e inoltre **certi sottoinsiemi a lati non rettilinei, che escludiamo**. Si guardi la figura 7.2, a destra. In questo modo il trapezoide della funzione viene ad essere approssimato da una rete di al più  $NL$  rettangolini, che indichiamo con  $R_{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ ,  $0 \leq j \leq L - 1$ . Ciascuno di questi rettangoli ha area  $\frac{b-a}{N} \frac{M-m}{L}$ . Indichiamo con  $U_-$  la loro unione. Notiamo che nessuno dei rettangolini è a cavallo del grafico di  $g(x)$  e che  $U_- \subseteq T$ . Per ipotesi, la funzione  $f(x, y)$  appartiene alla classe

delle funzioni integrabili e quindi la sua restrizione a  $T$  ammette estensione continua a tutti i punti del dominio di integrazione  $T$ , che è chiuso e limitato. Indichiamo ancora con  $f(x, y)$  tale estensione, che è uniformemente continua. Costruiamo ora le somme

$$s_{N,L} = \sum_{i,j} \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}$$

$$S_{N,L} = \sum_{i,j} \max_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}$$

Queste somme sono estese a tutti i rettangoli che appartengono ad  $U_-$ . Ora usiamo l'uniforme continuità di  $f(x, y)$ . Si fissi un qualsiasi  $\epsilon > 0$  e il corrispondente  $\delta > 0$ . Se  $N$  ed  $L$  sono abbastanza grandi, diciamo  $N \geq N_0$ ,  $L \geq L_0$ , la diagonale di ciascuno dei rettangoli costruiti misura meno di  $\delta$  e quindi per  $N \geq N_0$ ,  $L \geq L_0$  si ha

$$0 \leq [\max_{R_{i,j}} f(x, y) - \min_{R_{i,j}} f(x, y)] < \epsilon.$$

In particolare

$$0 \leq S_{N_0, L_0} - s_{N_0, L_0} \leq \{\text{somma delle aree dei rettangoli}\} \epsilon \leq [(b-a)(M-m)] \epsilon.$$

Ma,

$$0 \leq \inf\{S_{N,L}\} - \sup\{s_{N,L}\} \leq S_{N_0, L_0} - s_{N_0, L_0} \leq \{\text{somma delle aree dei rettangoli}\} \epsilon \leq [(b-a)(M-m)] \epsilon.$$

Dunque

$$\inf\{S_{N,L}\} = \sup\{s_{N,L}\}$$

e questo numero si chiama l'integrale di  $f(x, y)$  sul trapezoide  $T$ . Esso si indica col simbolo

$$\int_T f(x, y) \, dx \, dy.$$

In modo analogo si definisce l'integrale su ogni altro dominio  $D_i$ . Si definisce quindi

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \sum_i \int_{D_i} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (7.2)$$

**Osservazione 205** E' ovvio dalla costruzione che abbiamo fatto che se  $f(x, y) \geq 0$  allora il suo integrale si interpreta come il volume del solido compreso tra

l'insieme  $\mathcal{D}$  del piano  $z = 0$  ed il grafico della funzione. Se in particolare si sceglie  $f(x, y)$  identicamente uguale ad 1, si trova un numero che ha senso interpretare come  $\boxed{\text{area}}$  del dominio di integrazione. Ossia **per definizione**:

$$\text{area di } \mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy. \quad (7.3)$$

Se accade che  $\mathcal{D}$  è grafico di una funzione  $y = g(x) \geq 0$  continua su  $[a, b]$  abbiamo due **diverse** definizioni di area: quella appena scritta e quella data durante il corso di Analisi Matematica 1: area del trapezoide di una funzione positiva uguale (per definizione!) al suo integrale. Si tratta di due definizioni diverse ma vedremo che conducono al medesimo numero. **Un fatto da sottolineare è questo:**  $\int_a^b g(x) \, dx$  è l'area del trapezoide solo se  $g(x) \geq 0$ . Invece, la (7.3) dà il valore dell'area anche quando  $\mathcal{D}$  è trapezoide di una funzione che cambia segno. ■

Talvolta, un integrale di una funzione di due variabili si chiama anche  $\boxed{\text{integrale doppio}}$ . Per contrasto, l'integrale di una funzione di una sola variabile,

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

si chiama anche  $\boxed{\text{integrale semplice}}$ .

### 7.1.2 Le proprietà dell'integrale

Le proprietà dell'integrale sono le stesse come nel caso degli integrali semplici:

- la linearità: se  $\alpha$  e  $\beta$  sono numeri e  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  sono funzioni continue sullo stesso dominio di integrazione  $\mathcal{D}$ , vale

$$\int_{\mathcal{D}} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx \, dy = \alpha \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy + \beta \int_{\mathcal{D}} g(x, y) \, dx \, dy;$$

- additività: se il dominio di integrazione  $\mathcal{D}$  è unione di due,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$

e se la funzione  $f(x, y)$  è integrabile sia su  $\mathcal{D}_1$  che su  $\mathcal{D}_2$ , allora è anche integrabile su  $\mathcal{D}$ , e viceversa; e inoltre

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathcal{D}_1} f(x, y) \, dx \, dy + \int_{\mathcal{D}_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

- monotonia:  $f(x, y) \leq g(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in \mathcal{D}$  implica

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_{\mathcal{D}} g(x, y) \, dx \, dy .$$

- Dalla monotonia si deduce

$$\left| \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \int_{\mathcal{D}} |f(x, y)| \, dx \, dy .$$

Anche il *teorema della media* si può riformulare. Indichiamo con  $A(\mathcal{D})$  l'area di  $\mathcal{D}$ , calcolata sommando le aree delle singole regioni che la compongono. Vale:

$$A(\mathcal{D}) \cdot \left( \min_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) \right) \leq \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy \leq A(\mathcal{D}) \cdot \left( \max_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) \right) .$$

Ne segue:

**Teorema 206** *Se  $\mathcal{D}_\epsilon$  è una circonferenza di raggio  $\epsilon$  e centro fissato vale*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\epsilon} f(x, y) \, dx \, dy = 0 .$$

### 7.1.3 Domini di integrazione definiti mediante curve di Jordan

Sia

$$\gamma : t \rightarrow x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

una curva di Jordan regolare. Applicando il *Teorema della funzione implicita* si vede che il sostegno è localmente un grafico e si potrebbe provare che il sostegno è grafico di un numero *finito* di funzioni. Dunque, l'unione della regione  $\Omega_\gamma$ , interna alla curva  $\gamma$  e del suo sostegno è un dominio di integrazione. Come si è notato all'osservazione 204, diremo che la regione  $\Omega_\gamma$  stessa è un dominio di integrazione e quindi è possibile:

- integrare una funzione su una regione di Jordan, se la funzione è continua sulla chiusura della regione;
- assegnare un'area ad una regione di Jordan (ciò che si fa integrando la funzione identicamente uguale ad 1);
- approssimare l'area di una regione di Jordan mediante la somma delle aree di un numero finito di rettangoli con lati paralleli agli assi coordinati.

Con lo stesso abuso di linguaggio illustrato all'osservazione 204, diremo ancora che una regione di Jordan si può approssimare mediante rettangoli.

### 7.1.4 Riduzione di integrali doppi ad integrali iterati

Torniamo a considerare le somme  $s_{N,L}$  ed  $S_{N,L}$  che servono per definire l'integrale doppio. Consideriamo per esempio le  $s_{N,L}$ :

$$s_{N,L} = \sum_{i,j} \left[ \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}.$$

Calcoliamo le somme prima di tutto sommando i termini che corrispondono a rettangolini che appartengono alla stessa striscia verticale, ossia scrivendo

$$\begin{aligned} s_{N,L} &= \sum_{i,j} \left[ \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N} \\ &= \sum_i \left\{ \sum_j \left[ \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \right\} \cdot \frac{b-a}{N}. \end{aligned}$$

Fissiamo un punto  $x_i$  in ciascuno degli intervalli  $[a_i, a_{i+1})$ . Si mostra che per  $L \rightarrow +\infty$  tende a zero la differenza tra la parentesi graffa e l'integrale

$$\int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy$$

ove  $x_i$  è un qualsiasi punto dell'intervallo  $[a_i, a_{i+1})$ ; e quindi che

$$\begin{aligned} s_{N,L} &= \sum_{i,j} \left[ \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N} \\ &= \sum_i \frac{b-a}{N} \int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy + \epsilon(L, N) \end{aligned}$$

con

$$\lim \epsilon(L, N) = 0;$$

Ma, per  $N \rightarrow +\infty$ , le somme

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy$$

convergono all'integrale della funzione di  $x$

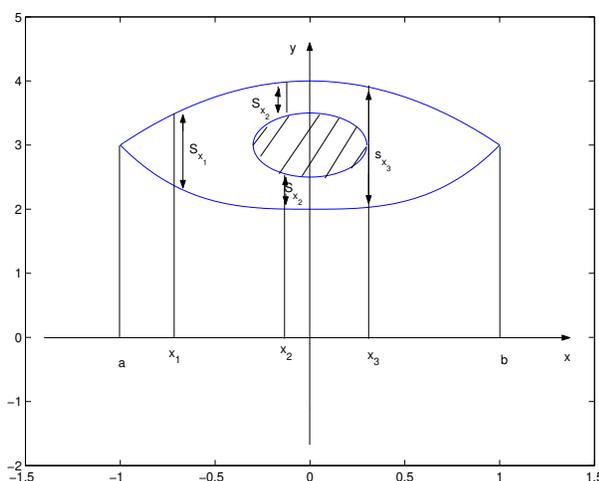
$$\int_0^{g(x)} f(x, y) dy,$$

ossia all'integrale iterato di  $f(x, y)$ . Dunque, per calcolare  $\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$  si può procedere come segue:

1. Si proietta ortogonalmente  $\mathcal{D}$  sull'asse delle ascisse, ottenendo un intervallo  $[a, b]$ ;
2. Si traccia la retta parallela all'asse delle ordinate e che passa da  $x \in [a, b]$ . Si indica con  $\mathcal{S}_x$  l'intersezione di tale retta con  $\mathcal{D}$ . L'insieme  $\mathcal{S}_x$  è unione di un numero finito di intervalli.
3. Si ha:  $\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\mathcal{S}_x} f(x, y) dy \right] dx$ .

Si veda la figura 7.3 Naturalmente la stessa procedura vale anche scambiando

Figura 7.3: Riduzione di un integrale doppio



il ruolo dell'asse delle ascisse con quello dell'asse delle ordinate. Consideriamo un caso particolare: supponiamo che  $\mathcal{D}$  sia il trapezoide della funzione  $k(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , e che la funzione integranda sia identicamente uguale ad 1. Sia inoltre  $k(x)$  non negativa. In tal caso,

$$\int_{\mathcal{D}} 1 dx dy = \int_a^b \left[ \int_0^{k(x)} 1 dy \right] dx = \int_a^b k(x) dx$$

in accordo con quanto detto nell'osservazione 205. Il metodo visto “riduce” il calcolo di un integrale doppio a quello di un integrale iterato, e quindi a quello di due integrali semplici. Però esso può anche usarsi al contrario, per ricondurre il calcolo di un integrale iterato calcolato prima rispetto ad  $x$  e poi rispetto ad  $y$  al calcolo di un integrale doppio; e quindi al calcolo di un integrale

iterato calcolato prima rispetto ad  $y$  e poi rispetto ad  $x$ . Quando si opera in questo modo su un integrale iterato si dice che si scambia l'ordine d'integrazione.

## 7.2 Integrazione delle funzioni di tre variabili

L'integrazione delle funzioni di tre variabili si introduce in modo del tutto analogo a quella relativa a funzioni di due variabili. Prima di tutto si scelgono i *domini di integrazione semplici*: questi sono i solidi delimitati dai grafici di due funzioni, per esempio

$$\phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$$

con  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , dove  $\mathcal{D}$  è un dominio di integrazione semplice per funzioni di due variabili. Anche i domini di integrazioni semplici per funzioni di tre variabili sono insiemi chiusi. Come dominio di integrazione per funzioni di tre variabili intendiamo l'unione di un numero finito di tali domini semplici, purché l'intersezione tra due qualsiasi di essi non contenga punti interni. Definiamo ora l'insieme delle funzioni integrabili. Una funzione definita su un dominio di integrazione si dice integrabile quando la sua restizione all'interno di ciascuno dei domini semplici ammette estensione continua al dominio semplice stesso. Ciò detto è facile dividere un dominio di integrazione in “piccoli” parallelepipedi e costruire le analoghe delle somme  $s_N$  ed  $S_N$  e quindi definire

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$$

come estremo comune ai due insiemi  $\{s_{N,L,K}\}$  ed  $\{S_{N,L,K}\}$  che ora verranno a dipendere da tre indici  $N, L, K$ . Si ottiene così un integrale che si chiama anche integrale triplo.

**Osservazione 207** Per definizione, il volume di un dominio di integrazione  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  è

$$\int_{\mathcal{D}} 1 dx dy dz. \quad \blacksquare$$

Le proprietà elencate al paragrafo 7.1.2 per gli integrali doppi valgono anche per gli integrali tripli. Per gli integrali tripli, il Teorema 210 si riformula come segue:

**Teorema 208** Sia  $(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$  una trasformazione continua da un dominio di integrazione  $\mathcal{D}_1$  ad un dominio di integrazione

$\mathcal{D}$ . Supponiamo che la trasformazione ammetta derivate parziali continue nei punti interni di  $\mathcal{D}_1$  e che le derivate abbiano estensione continua alla frontiera, e che il suo determinante jacobiano  $J(u, v, w)$  non si annulli. Per ogni funzione  $f(x, y, z)$  continua su  $\mathcal{D}$  si ha:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathcal{D}_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) J(u, v, w) du dv dw.$$

Invece, il metodo di riduzione va esaminato esplicitamente.

### 7.3 Formula di riduzione per gli integrali tripli

Il calcolo degli integrali tripli si può ricondurre al calcolo di integrali iterati. Illustriamo il metodo nel caso particolare in cui il dominio di integrazione  $\mathcal{D}$  è compreso tra due grafici

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Indichiamo con

$$\mathcal{D}_z = \{(x, y) \mid \exists w \text{ per cui } (x, y, w) \in \mathcal{D}\}$$

ossia la proiezione ortogonale di  $\mathcal{D}$  sul piano  $z = 0$ . Dunque:

- se  $(x, y) \notin \mathcal{D}_z$  allora la retta verticale per  $(x, y)$  non interseca  $\mathcal{D}$ ;
- se  $(x, y) \in \mathcal{D}_z$  allora la retta verticale per  $(x, y)$  interseca  $\mathcal{D}$  nel segmento verticale di estremi  $(x, y, \phi(x, y))$  e  $(x, y, \psi(x, y))$ . Si noti che questo segmento potrebbe essere ridotto ad un punto.

Vale:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathcal{D}_z} \left[ \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

In questo modo il calcolo dell'integrale triplo si è ricondotto al calcolo di un integrale semplice, seguito da quello di un integrale doppio<sup>4</sup>. Si veda la figura 7.4, a sinistra. Si può anche procedere in modo diverso: supponiamo di sapere che  $\mathcal{D}_z$  sia delimitato da due grafici, per esempio

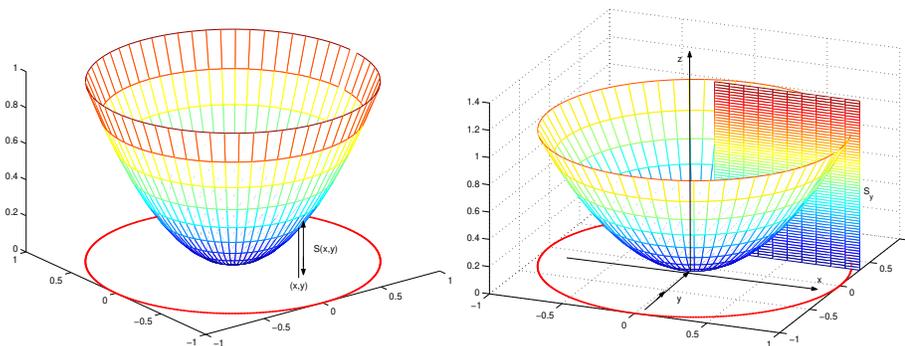
$$\mathcal{D}_z = \{(x, y) \mid h(y) \leq x \leq k(y)\}$$

---

<sup>4</sup>questo metodo di riduzione si chiama anche “metodo di riduzione per fili”.

### 7.3. FORMULA DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI TRIPLI

Figura 7.4: Riduzione per fili e per strati di un integrale triplo



e sia  $[a, b]$  il dominio comune ad  $h(y)$  e  $k(y)$ . Allora vale:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left[ \int_{\tilde{\mathcal{D}}_y} f(x, y, z) \, dx \, dz \right] dy$$

dove  $\tilde{\mathcal{D}}_y$  è l'intersezione di  $\mathcal{D}$  col piano parallelo agli assi  $x$  e  $z$ , passante per il punto  $(0, y, 0)$ <sup>5</sup>. Si veda la figura 7.4, a destra.

#### 7.3.1 Integrazione e Cambiamento di variabili

Nel caso degli integrali semplici, sotto opportune ipotesi si prova la formula

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt.$$

Si noti però che  $\phi^{-1}(a)$  può anche essere maggiore di  $\phi^{-1}(b)$ , ciò che è lecito perché nel caso degli integrali semplici abbiamo definito l'integrale orientato. D'altra parte, questa formula non si prova usando direttamente le proprietà dell'integrale. Piuttosto si prova che questa formula vale per il calcolo delle primitive, e quindi anche per il calcolo dell'integrale grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale. Mostriamo come a questa formula, sotto opportune ipotesi, si possa anche giungere direttamente dalla definizione di integrale semplice. Sia  $f(x)$  una funzione continua definita su in intervallo  $[a, b]$  e sia  $x = \phi(t)$  una funzione **monotona strettamente crescente** da un intervallo  $[\alpha, \beta]$  su  $[a, b]$ , che è anche derivabile. Bisogna ricordare questi fatti:

<sup>5</sup>questo metodo di riduzione si chiama anche “metodo di riduzione per strati”.

- nella definizione di integrale la suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  non è necessariamente fatta mediante punti equidistanti;
- nella definizione di integrale, si possono considerare le somme

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[a_{i+1} - a_i] \quad (7.4)$$

con punti  $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$  qualsiasi.

Quando la finezza della partizione tende a zero, le somme (7.4) tendono all'integrale

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Essendo la funzione  $\phi$  monotona e suriettiva, ogni  $a_i$  proviene da un unico  $\alpha_i$ ,

$$a_i = \phi(\alpha_i).$$

Dunque la somma (7.4) è anche uguale a

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[\phi(\alpha_{i+1}) - \phi(\alpha_i)].$$

Questa non è una somma di quelle che conducono alla definizione di un integrale, ma ad essa facilmente si riconduce. Infatti, dal Teorema di Lagrange, esiste un punto  $c_i$  tale che

$$[\phi(\alpha_{i+1}) - \phi(\alpha_i)] = \phi'(c_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Ricordando che i numeri  $\xi_i$  si possono scegliere in modo arbitrario, scegliamo  $\xi_i = \phi(c_i)$ . La monotonia di  $\phi$  mostra che  $c_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ . In questo modo la (7.4) diviene

$$\sum_{i=1}^n f(\phi(c_i))\phi'(c_i)[\alpha_{i+1} - \alpha_i]. \quad (7.5)$$

La finezza della partizione di  $[a, b]$  tende a zero se e solo se tende a zero la finezza della partizione di  $[\alpha, \beta]$ . Quando la finezza della partizione tende a zero, le somme (7.4) tendono all'integrale di  $f(x)$ , quelle di (7.5) tendono all'integrale di  $f(\phi(t))\phi'(t)$ . D'altra parte le due somme hanno lo stesso valore e quindi si trova

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

**Osservazione 209** Notiamo esplicitamente:

- in questo calcolo la **crescenza** di  $\phi$  si è usata: è  $\alpha_i < \alpha_{i+1}$  proprio perchè  $\phi$  è crescente. Se invece  $\phi$  decresce, sarà  $\beta < \alpha$  e in (7.5) si ha  $\alpha_{i+1} < \alpha_i$  e quindi al limite si trova

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Ma ora  $\beta < \alpha$  e quindi riordinando l'ordine degli estremi di integrazione si trova

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_\beta^\alpha f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ &= \int_\beta^\alpha f(\phi(t))[-\phi'(t)] dt = \int_\beta^\alpha f(\phi(t))|\phi'(t)| dt. \end{aligned}$$

- il ruolo del numero  $\phi'(c)$ : è il coefficiente che trasforma la lunghezza di  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  nella lunghezza di  $[a_i, a_{i+1}]$ . Si noti che se  $\phi'$  non si annulla su  $[a, b]$  (estremi inclusi) esistono numeri  $m, M$  tali che

$$m|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq |a_i - a_{i+1}| \leq M|\alpha_i - \alpha_{i+1}|. \quad \blacksquare$$

- Nel caso degli integrali semplici, la formula vale anche senza richiedere la monotonia di  $\phi$  perchè, intuitivamente, se per  $t$  che percorre  $[\alpha, \beta]$  il punto  $\phi(t)$  percorre più volte un intervallo  $[x', x''] \subseteq [a, b]$ , deve percorrerlo un numero **dispari** di volte, **in versi opposti**; e grazie all'esistenza dell'integrale orientato, i contributi dei passaggi 2 e 3 si elidono, lo stesso per i passaggi 4 e 5 ecc. Un fenomeno analogo non potrà aversi per funzioni di più variabili e quindi in tal caso dovremo imporre a  $\phi$  di essere biunivoca.  $\blacksquare$

Vediamo ora quali problemi si incontrano nel cercare di estendere il ragionamento appena fatto a funzioni di più variabili. In questo caso dovremo avere  $f(x, y)$  definita su un dominio di integrazione  $\mathcal{D}$  e dovremo avere una trasformazione  $(x, y) = \Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$  da un dominio di integrazione  $\mathcal{D}'$  nel dominio di integrazione  $\mathcal{T}$ . La  $\Phi$  dovrà essere **biunivoca** da  $\mathcal{D}'$  su  $\mathcal{D}$  e **differenziabile** (un'ulteriore condizione si dirà in seguito). L'integrale di  $f(x, y)$  si definisce suddividendo  $\mathcal{D}$  in tanti piccoli rettangoli, diciamo  $R_i$ . Un rettangolo  $R_i$  è immagine mediante  $\Phi$  di un sottoinsieme  $R'_i$  di  $\mathcal{D}'$  che però non è un rettangolo. Se la  $\Phi$  è lineare  $R'$  è un parallelogramma, altrimenti è una figura più complessa. Ciò nonostante, si potrà tentare di ripetere gli argomenti visti sopra se:

- si potrà trovare una relazione tra l'area di  $R_i$  e quella di  $R'_i$ ;
- l'area dei rettangoli  $R_i$  tende a zero se e solo se l'area degli insiemi  $R'_i$  tende a zero.

La relazione tra l'area di  $R_i$  e quella di  $R'_i$  è nota nel caso in cui la trasformazione  $\Phi$  sia lineare: è

$$(\text{area di } R_i) = |\det \Phi|(\text{area di } R'_i).$$

Qui  $\Phi$  indica la matrice della trasformazione  $\Phi$ , calcolata rispetto a coordinate ortogonali. Nel caso non lineare una formula analoga alla precedente ancora vale, con un errore che è di ordine superiore rispetto all'area di  $R'$ , quando questa tende a zero. Questo risponde alla prima questione. La seconda richiesta, l'area degli  $R_i$  tende a zero se e solo se l'area degli  $R'_i$  tende a zero, è soddisfatta quando  $\det \Phi \neq 0$  su  $\mathcal{D}'$ . Con queste informazioni, nel caso in cui  $\Phi$  sia una trasformazione lineare è relativamente facile provare il risultato seguente, mimando la dimostrazione vista sopra per il caso di funzioni di una variabile. Nel caso in cui  $\Phi$  sia non lineare, il risultato seguente vale ancora ma la dimostrazione è piuttosto complessa:

**Teorema 210** *Siano  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}'$  due domini di integrazione. Sia*

$$(x, y) = \Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$$

*una trasformazione invertibile da  $\mathcal{D}'$  su  $\mathcal{D}$ . Supponiamo che questa trasformazione sia di classe  $C^1$  su una regione  $\Omega$  che contiene  $\mathcal{D}'$ . Sia  $\det J(u, v)$  lo jacobiano della trasformazione. Supponiamo che  $\det J(u, v)$  non si annulli su  $\mathcal{D}'$ . Sotto queste condizioni vale:*

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{D}'} f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) \cdot |\det J(u, v)| du dv.$$

Come abbiamo detto, questo teorema estende il teorema di cambiamento di variabili negli integrali semplici. Nell'uso però esso ha un ruolo diverso. Nel caso degli integrali semplici il metodo di cambiamento di variabili si usa per trasformare la funzione in una di cui sia più facile trovare la primitiva. Nel caso degli integrali doppi si usa la trasformazione di variabili per passare da un dominio più complicato ad uno più semplice. Per esempio, si voglia calcolare

$$\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

con  $\mathcal{D}$  la circonferenza  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Esprimendo  $x$  ed  $y$  mediante le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ , si trova

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

#### 7.4. ALCUNI JACOBIANI CHE È IMPORTANTE RICORDARE

---

Notando che lo jacobiano della trasformazione è semplicemente  $\rho$ , il calcolo richiesto si riduce a quello dell'integrale iterato

$$\int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^2 d\rho \right] d\theta = \frac{2}{3}\pi.$$

**Osservazione 211** Si noti che lo jacobiano della trasformazione a coordinate polari si annulla nell'origine e quindi il Teorema 210 a rigore non può applicarsi. Si applichi però il teorema ad una corona circolare  $\epsilon \leq \rho \leq 1$  e poi si mandi  $\epsilon$  a zero. Il Teorema 206 mostra che il contributo della circonferenza di raggio  $\epsilon$  tende a zero e ciò giustifica l'uso delle coordinate polari per il calcolo precedente. ■

### 7.4 Alcuni jacobiani che è importante ricordare

Le trasformazioni di coordinate che si usano più comunemente sono le trasformazioni a coordinate polari o ellittiche nel piano, a coordinate cilindriche o sferiche nello spazio. Si ha:

coordinate	trasformazione	jacobiano
	Nel piano	
<b>polari</b> $(\rho, \theta)$	$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$	$\rho$
<b>ellittiche</b> $(\rho, \theta)$	$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$	$ab\rho$
	Nello spazio	
<b>cilindriche</b> $(\rho, \theta, z)$	$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$	$\rho$
<b>sferiche</b> $(\rho, \theta, \phi)$	$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$	$\rho^2 \sin \phi$

Si noti che nella formula di cambiamento di coordinate per gli integrali multipli compare il **valore assoluto** dello jacobiano, mentre la tavola precedente riporta lo jacobiano per sottolineare che i sistemi di coordinate che abbiamo introdotto, con le coordinate che si susseguono nell'ordine indicato nella definizione delle coordinate, hanno jacobiano positivo. Dunque la matrice jacobiana di tali trasformazioni non altera l'orientazione di  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.4.1 Volumi delimitati da superfici di rotazione

Consideriamo il grafico di una funzione sul piano  $(y, z)$ , descritto dall'equazione  $z = f(y)$ . Per fissare le idee, supponiamo che la funzione sia definita (e continua) su  $[0, Y]$  e che prenda valori positivi. Facendo ruotare i punti del grafico intorno all'asse  $z$ , si trova la superficie descritta dall'equazione

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Si vuol calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\};$$

ossia il volume dell'insieme compreso tra il piano  $z = 0$  e la superficie. Vogliamo quindi calcolare

$$\int_V dx \, dy \, dz.$$

Passiamo a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

Si calcola facilmente che lo jacobiano della trasformazione è  $r$ . Dunque va calcolato

$$\int_{\mathcal{R}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

L'insieme  $\mathcal{R}$  è ora

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq Y, 0 \leq z \leq f(r)\}.$$

Dunque, riducendo l'integrale triplo ad integrali iterati si trova

$$V = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^Y \left[ \int_0^{f(r)} 1 \cdot r \, dz \right] dr \right] d\theta = 2\pi \int_0^Y r f(r) \, dr. \quad (7.6)$$

Supponiamo invece che il grafico che si fa ruotare sia dato mediante una funzione  $y = f(z)$ ,  $0 \leq z \leq Z$ . Passando a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z, \end{cases}$$

si deve integrare ora sull'insieme

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq Z, \quad 0 \leq r \leq f(z)\}.$$

Dunque,

$$V = \int_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^z \left( \int_0^{f(z)} 1 \cdot r \, dr \right) dz \right] d\theta = \pi \int_0^Z f^2(z) \, dz. \quad (7.7)$$

Questa formula si chiama *Formula di Guldino*. L'interpretazione geometrica di queste formule si capisce facilmente approssimando gli integrali semplici mediante le somme di Riemann, che conducono alla definizione stessa degli integrali. Consideriamo prima di tutto l'integrale (7.6). Consideriamo una partizione dell'intervallo  $[0, Y]$  mediante i punti  $y_i$ . Le somme di Riemann inferiori hanno forma

$$2\pi \left[ \sum r_i f(r_i)(y_{i+1} - y_i) \right]$$

ove  $r_i$  è un punto di minimo della funzione  $r f(r)$  nell'intervallo  $[y_{i+1}, y_i]$ . Il punto  $(0, r_i, 0)$  dell'asse delle ordinate ruota, per descrivere la superficie, sulla circonferenza di raggio  $r_i$ . Dunque,  $2\pi r_i(y_{i+1} - y_i)$  è circa l'area della corona circolare descritta, durante la rotazione, dal segmento  $[y_{i+1}, y_i]$ . Dunque,  $2\pi r_i(y_{i+1} - y_i)f(r_i)$  è (circa) il volume del più alto "guscio cilindrico" che insiste su tale corona circolare, e che è sotto al grafico della funzione. Invece, le somme di Riemann dell'integrale (7.7) si ottengono dividendo il segmento  $[0, Z]$  con i punti  $z_i$ . Le somme di Riemann sono

$$\pi \left[ \sum f^2(\tilde{z}_i)(z_{i+1} - z_i) \right], \quad \tilde{z}_i \in [z_i, z_{i+1}].$$

Ciascun addendo  $\pi f^2(\tilde{z}_i)(z_{i+1} - z_i)$  rappresenta circa il volume di un cilindretto di raggio  $f(\tilde{z}_i)$  e base sul segmento  $[z_{i+1}, z_i]$ : in questo caso il volume si approssima come somma dei volumi di tali cilindretti. La figura 7.5 illustra a sinistra il primo ed a destra il secondo caso (il volume da calcolare è quello del solido compreso tra la parte di paraboloide disegnata ed il piano  $z = 0$ ).

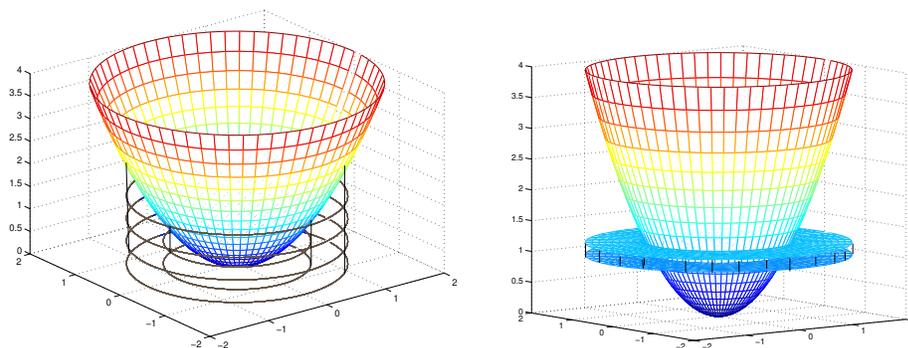
## 7.5 Appendici

### 7.5.1 Appendice: Integrali impropri

Nel caso degli integrali di una variabile, è stato naturale definire

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) \, dx.$$

Figura 7.5: Volume di una superficie di rotazione



Una definizione analoga nel caso di integrali doppi è molto più delicata. Per vedere la ragione, consideriamo una funzione  $f(x, y)$  definita su un insieme illimitato  $I$ , che interseca ogni disco

$$D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

in un dominio di integrazione. Allora, si può definire

$$\int_I f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I \cap D_R} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Però questa definizione privilegia i dischi. Niente garantisce che si giunga al medesimo limite se, invece di dischi, si considerano i quadrati

$$Q_R = \{(x, y) \mid |x| \leq R, |y| \leq R\}.$$

L'esempio seguente mostra che in generale usando dischi od usando quadrati si trovano comportamenti diversi.

**Esempio 212** L'insieme  $I$  è il primo quadrante e la funzione che si considera è

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$$

L'integrale su  $D_R$  si calcola immediatamente passando a coordinate polari:

$$\int_{D_R} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{\pi}{4} (1 - \cos R^2),$$

privo di limite per  $R \rightarrow +\infty$ . L'integrale su  $Q_R$  si calcola in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{Q_R} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) \, dx \, dy \\ &= \left[ \int_0^R \sin x^2 \, dx \right] \left[ \int_0^R \cos y^2 \, dy \right] + \left[ \int_0^R \cos x^2 \, dx \right] \left[ \int_0^R \sin y^2 \, dy \right]. \end{aligned}$$

Questi integrali non possono calcolarsi in modo esplicito, ma è possibile provare che il limite per  $R \rightarrow +\infty$  è finito. Infatti, si consideri per esempio

$$\int_0^R \cos x^2 \, dx = \int_0^1 \cos x^2 \, dx + \int_1^{+\infty} \cos x^2 \, dx.$$

Integrando per parti, proviamo che è finito il limite<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \cos x^2 \, dx \\ \int_1^R \cos x^2 \, dx &= \int_1^R [2x \cos x^2] \frac{1}{2x} \, dx = \int_1^R \frac{1}{2x} \, d \sin x^2 \\ &= \frac{1}{2R} \sin R^2 - \sin 1 + \int_1^R \frac{1}{2x^2} \sin x^2 \, dx. \end{aligned}$$

E ora,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \sin R^2 = 0$$

mentre

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{2x^2} \sin x^2 \, dx$$

esiste finito perché  $|\frac{1}{2x^2} \sin x^2| < M/x^2$  ed

$$\int_1^{+\infty} 1/x^2 \, dx = 1.$$

---

<sup>6</sup>con tecniche diverse si potrebbe anche provare che

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Questi due integrali si incontrano in problemi di ottica e si chiamano *integrali di* Fresnel.

Si può però provare che se esiste finito

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} |f(x, y)| \, dx \, dy \quad (7.8)$$

allora esiste finito

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} f(x, y) \, dx \, dy .$$

Sia inoltre  $\mathcal{D}_n$  una successione di domini di integrazione con questa proprietà: esiste un disco di raggio  $R_n$  contenuto in  $\mathcal{D}_n$ , ed  $R_n \rightarrow +\infty$ . Se vale (7.8) allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{D}_R} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} f(x, y) \, dx \, dy .$$

Questo numero si chiama *integrale improprio su  $\mathbb{R}^2$*  e la condizione (7.8) assicura che l'integrale improprio non dipende dal modo con cui viene calcolato, usando gli insiemi  $\mathcal{D}_n$  con la proprietà suddetta<sup>7</sup>, che  $\mathcal{D}_n$  contiene un disco di raggio  $R_n \rightarrow +\infty$ . Considerazioni del tutto analoghe valgono anche nel caso in cui si consideri una funzione  $f(x, y)$  definita su un dominio di integrazione  $\mathcal{D}$ , ma tale che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} |f(x, y)| = +\infty .$$

Sia  $D_\epsilon$  un disco di raggio  $\epsilon > 0$  e centro  $(x_0, y_0)$  e supponiamo che  $f(x, y)$  sia integrabile su  $\mathcal{D} - D_\epsilon$ . Supponiamo che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D} - D_\epsilon} |f(x, y)| \, dx \, dy = L < +\infty . \quad (7.9)$$

Allora esiste finito anche il limite seguente, che si chiama l' *integrale improprio* di  $f(x, y)$  su  $\mathcal{D}$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D} - D_\epsilon} f(x, y) \, dx \, dy .$$

Anche in questo caso, la condizione (7.9) assicura che i dischi non hanno ruolo privilegiato nella definizione dell'integrale.

**Esempio 213** Sia  $D$  il disco di centro  $(0, 0)$  e raggio 1 e sia

$$f(x, y) = \frac{1}{\left[ \sqrt{x^2 + y^2} \right]^\gamma} .$$

---

<sup>7</sup>invece se per esempio gli insiemi  $\mathcal{D}_n$  diventano via via "più lunghi e sottili", niente può dirsi del limite degli integrali calcolati su di essi.

Vogliamo capire per quali valori di  $\gamma$  la funzione  $f(x, y)$  è integrabile su  $D$ . Si deve quindi calcolare

$$\int_{D-D_\epsilon} \frac{1}{\left[\sqrt{x^2 + y^2}\right]^\gamma} dx dy.$$

Passando a coordinate polari, è immediato calcolare che quest'integrale è

$$2\pi \int_\epsilon^1 \rho \frac{1}{\rho^\gamma} d\rho.$$

Il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  esiste finito se e solo se

$$1 - \gamma > -1 \quad \text{ossia se} \quad \gamma < 2.$$

Si confronti col caso delle funzioni di una variabile:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx$$

esiste se e solo se  $\gamma < 1$ .

Considerazioni del tutto analoghe valgono per gli integrali tripli. In particolare, si consideri l'analogo dell'esempio 213 e si provi che

$$\int_{x^2+y^2+z^2 < 1} \frac{1}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]^\gamma} dx dy dz$$

esiste finito se e solo se  $\gamma < 3$ .

### 7.5.2 Appendice: Teorema dei valori intermedi e Teorema di Brouwer

Il Teorema dei valori intermedi per funzioni a valori reali e continue su una regione connessa è stato provato al cap. 4, si veda il Teorema 130. Mostriamo che la formula di cambiamento di variabili per gli integrali impropri permette di provare un teorema dei valori intermedi anche per funzioni da  $\mathbb{R}^3$  in sé:

**Teorema 214** ( dei valori intermedi ) *Sia  $\phi(\mathbf{r})$  una funzione che trasforma la palla*

$$B = \{\mathbf{r} = (x, y, z) \mid \|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

*in se stessa e che inoltre*

- è biunivoca;
- è di classe  $C^1$
- verifica  $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  nei punti della frontiera di  $B$ ; ossia nei punti tali che  $\|\mathbf{r}\| = 1$ .

Sotto queste ipotesi, la trasformazione  $\phi(\mathbf{r})$  è suriettiva.

**Dim.** Per assurdo, supponiamo che esista un punto  $\mathbf{r}_0$  che non appartiene all'immagine di  $\phi$ . Mostriamo in seguito che esiste una sferetta<sup>8</sup>  $B_1$  di centro  $\mathbf{r}_0$  nessuno dei cui punti appartiene all'immagine di  $\phi$ . Sia  $\epsilon > 0$  il raggio di  $B_1$ . Sia  $f(\mathbf{r})$  la funzione così definita:

- $f(\mathbf{r}) = 1$  se  $\mathbf{r} \in B$ ,  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon/2$ ;
- $f(\mathbf{r}) = 0$  altrimenti.

La funzione  $f(\mathbf{r})$  non è continua ma è integrabile e

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz > 0.$$

Calcoliamo quest'integrale usando la formula di sostituzione di variabile: L'integrale è anche uguale a

$$\int_B f(\phi(x, y, z)) J_\phi(x, y, z) dx dy dz.$$

Quest'integrale però è nullo, perché  $\phi(x, y, z)$  prende valori solo nell'insieme in cui la funzione  $f(x, y, z)$  è nulla. Questa contraddizione prova che il punto  $\mathbf{r}_0$  non può esistere. Per completare la dimostrazione, mostriamo ora l'esistenza della palla  $B_\epsilon$ . Proviamo che se la palla  $B_\epsilon$  non esiste allora anche  $\mathbf{r}_0$  appartiene all'immagine di  $\phi$ . Supponiamo quindi che ogni palla di centro  $\mathbf{r}_0$  contenga punti dell'immagine di  $\phi$ . In tal caso, esiste una successione  $\{\mathbf{r}_n\}$  di punti di  $B$  tale che  $\phi(\mathbf{r}_n) \rightarrow \mathbf{r}_0$ . Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, la successione  $\{\mathbf{r}_n\}$  ammette una s.successione convergente:  $\mathbf{r}_{n_k} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$  e

$$\lim_k \phi(\mathbf{r}_{n_k}) = \phi(\mathbf{r}_0).$$

Dunque, per continuità si ha

$$\phi(\hat{\mathbf{r}}) = \phi(\mathbf{r}_0).$$

Ciò completa la dimostrazione. ■ Naturalmente, la dimostrazione precedente può applicarsi al caso di funzioni definite su  $\mathbb{R}^2$ .

---

<sup>8</sup>si noti che  $\mathbf{r}_0$  potrebbe avere norma 1

**Osservazione 215** E' possibile provare che il teorema precedente vale supponendo solamente che la funzione  $\phi(\mathbf{r})$  sia continua e verifichi  $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  se  $\|\mathbf{r}\| = 1$ , senza richiedere né l'esistenza delle derivate né la biunivocità. ■

Un corollario importante è il seguente:

**Corollario 216** *Non esiste una funzione  $\phi(\mathbf{r})$  continua in  $B$  e tale che*

- $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  se  $\|\mathbf{r}\| = 1$ ;
- $\|\phi(\mathbf{r})\| = 1$  per ogni  $\mathbf{r} \in B$ .

**Dim.** Infatti, una tale funzione violerebbe il teorema dei valori intermedi. ■ Il teorema precedente ha una conseguenza importante, che va sotto il nome di *Teorema di punto fisso* di Brower.

**Teorema 217** *Sia  $\psi(\mathbf{r})$  una funzione continua che trasforma la palla (chiusa)  $B$  in se stessa. Esiste un punto  $\mathbf{r}_0 \in B$  tale che*

$$\psi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0 .$$

**Dim.** Accenniamo alla dimostrazione. Supponiamo che tale punto non esista. Allora, per ogni  $\mathbf{r} \in B$  si ha  $\psi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{r}$ . Consideriamo la semiretta di estremo  $\psi(\mathbf{r})$  e che passa per  $\mathbf{r}$ . Questa semiretta taglia la superficie della sfera in un punto che dipende da  $\mathbf{r}$ . Associando ad  $\mathbf{r}$  tale punto, si costruisce una funzione  $\phi(\mathbf{r})$  che verifica

$$\begin{aligned} |\phi(\mathbf{r})| &= 1 \quad \text{per ogni } \mathbf{r}, \\ \phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{r} \quad \text{se } \|\mathbf{r}\| = 1. \end{aligned}$$

Inoltre, si potrebbe provare che la funzione  $\phi(\mathbf{r})$  è continua. Il Corollario 216 mostra che tale funzione non può esistere. Si noti che la funzione  $\phi(\mathbf{r})$  non è biunivoca e nemmeno di classe  $C^1$ . Però, abbiamo detto che il Teorema 214 vale con la sola ipotesi che la  $\phi(\mathbf{r})$  sia continua, si veda l'osservazione 215. E quindi questa è la sola ipotesi necessaria per il Corollario 216. ■

*CAPITOLO 7. INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI DI PIÙ  
VARIABILI*

---