Capitolo 6

Curve e superfici

Le curve e le superfici in forma implicita sono già state incontrate. In questo capitolo studiamo le proprietà delle curve e delle superfici definite parametricamente. Saremo precisi nella definizione di curva mentre le "superfici" verranno definite in modo meno formale e preciso.

6.1 Curve parametriche

Conviene procedere per gradi nella definizione di curva. Una prima definizione, che verrà resa più precisa in seguito, è la seguente: Una trasformazione continua da un intervallo I in $\mathbb{R}^n$ si chiama $\boxed{\textit{curva parametrica}}$. Nella definizione di curva l'intervallo può essere chiuso o meno, limitato o meno. Se però l'intervallo è *chiuso e limitato* la curva si chiama un $\boxed{\textit{arco}}$. Una curva a valori in $\mathbb{R}^3$ si rappresenta in coordinate cartesiane nella forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad t \in I\,.$$

La curva si dice $\boxed{\textit{piana}}$ quando la sua immagine appartiene ad un piano di $\mathbb{R}^3$, ossia quando esistono numeri a, b, c, d, indipendenti da t, tali che per ogni valore di t valga

$$ax(t) + by(t) + cz(t) = d\,.$$

Quando la curva è piana ed appartiene al piano $z = 0$ essa si rappresenta semplicemente come

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}\,.$$

Notazione analoga quando la curva appartiene agli altri piani coordinati. Una curva si indica con una lettera greca minuscola:

$$\gamma : \quad t \to \mathbf{r}(t) \qquad t \in I\,.$$

In seguito noi ci limiteremo a considerare curve che hanno le seguenti proprietà di regolarità: la funzione $t \to \mathbf{r}(t)$ è derivabile su (a, b) con l'eccezione di un numero finito di punti t_i. Si richiede che in questi punti (ed anche in a e in b se l'intervallo è limitato) esistano i limiti direzionali di $\mathbf{r}'(t)$. Inoltre si richiede che per $t \neq t_i$ si abbia $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Una curva con tali proprietà si chiama $\boxed{\textit{regolare a tratti}}$ e si parla di curva $\boxed{\textit{regolare}}$ quando essa è ovunque derivabile, con $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ per ogni t. Sia γ una curva regolare e sia $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ un punto della sua immagine. Una almeno delle componenti di $\mathbf{r}(t)$, per esempio la prima componente $x(t)$, è invertibile in un intorno di t_0. Dunque l'immagine della restrizione di $\mathbf{r}(t)$ a tale intorno è anche immagine di una funzione di x. Si osservi che questo non implica che l'immagine di $\mathbf{r}(t)$ debba essere grafico di funzione, perch'e niente possiamo dire nei punti di t "lontani" da t_0. Questo è illustrato dalla figura 6.1, a sinistra, che riporta l'immagine, diciamo γ, della funzione

$$(\sin t)\mathbf{i} + t(\pi^2 - t^2)\mathbf{j}\,, \qquad t \in [-\pi, \pi]\,. \tag{6.1}$$

Si vede che quest'immagine non è grafico di funzione in nessun intorno di $(0, 0)$ nonostante che la funzione $x = \sin t$ sia invertibile. La sua inversa è

$$t = \text{arc } \sin x \tag{6.2}$$

e quindi la relazione tra x ed y è la funzione

$$y = [\text{arc } \sin x] \left\{\pi^2 - [\text{arc } \sin x]^2\right\}\,.$$

Il suo grafico è la parte spessa dell'immagine. Non esaurisce tutta la γ perché i valori di t ottenuti da (6.2) sono solamente quelli dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. E' appena il caso di notare che una curva, oltre che in coordinate cartesiane, può rappresentarsi, per esempio, in coordinate polari.

Esempio 178 La curva

$$x = t\cos t\,, \quad y = t\sin t\,, \qquad t > 0 \tag{6.3}$$

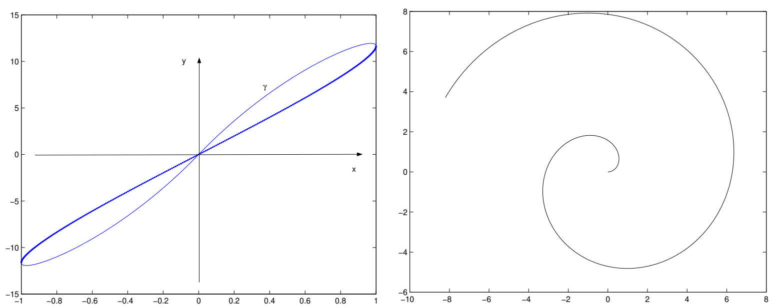
rappresenta una spirale, si veda la figura 6.1 a destra. Essa può anche rappresentarsi in coordinate polari, come

$$\theta = t\,, \quad \rho = t\,, \qquad t > 0. \quad \blacksquare$$

Consideriamo una curva piana. Questa si chiama $\boxed{\textit{curva cartesiana}}$ se è rappresentata mediante una parametrizzazione della forma

$$t \to t\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Figura 6.1: Le curve (6.1) e (6.3)



oppure

$$t \to x(t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}\,.$$

Più in generale, se $t \to \mathbf{r}(t)$ è una curva in $\mathbb{R}^n$, si dice che questa è una curva cartesiana quando una delle componenti della funzione $\mathbf{r}(t)$ ha la rappresentazione $x_i(t) = t$. Un arco si dice $\boxed{\textit{chiuso}}$ quando una sua parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ verifica $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Una curva, oppure un arco, si dice $\boxed{\textit{semplice}}$ quando $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}(t'')$ vale solamente per $t' = t''$ oppure se $t' = a$, $t'' = b$. L'interpretazione fisica del concetto di curva parametrica è suggerita dai problemi della meccanica: il parametro t rappresenta il tempo ed il punto $\mathbf{r}(t)$ rappresenta la posizione all'istante t di un punto massa mobile nel tempo. Quest'interpretazione spiega la condizione di continuità posta nella definizione di curva (un punto massa non fa salti). La funzione $t \to \mathbf{r}(t)$ si chiama in fisica la $\boxed{\textit{legge del moto}}$ e il vettore $\mathbf{r}'(t)$ rappresenta la $\boxed{\textit{velocità}}$ del punto all'istante t. Si noti che la velocità può essere discontinua, per esempio quando si verificano urti. Introduciamo ora il "verso di percorrenza" su una curva parametrica semplice: Il parametro t di una curva appartiene ad un intervallo (a, b) di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è un insieme ordinato. Dunque possiamo introdurre un $\boxed{\textit{ordine}}$ su una curva semplice γ di parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ dicendo che il punto $\mathbf{r}(t')$ viene prima del punto $\mathbf{r}(t'')$ quando $t' < t''$; ossia quando un punto mobile sulla curva traversa prima $\mathbf{r}(t')$ e poi $\mathbf{r}(t'')$. Si dice anche che, in tal caso, il punto $\mathbf{r}(t')$ *precede* $\mathbf{r}(t'')$. Nel caso che la curva sia semplice e chiusa, il punto $\mathbf{r}(a)$ coincide col punto $\mathbf{r}(b)$ e quindi sfugge alla definizione data di ordine.

Osservazione 179 La definizione di curva parametrica è una definizione soddisfacente per alcune applicazioni della fisica, ma non per tutte, ed è del tutto insoddisfacente per la geometria. Infatti, privilegia un modo di misurare il trascorrere del tempo. Ora, due orologi diversi possono segnare ore diverse perché sono stati azzerati in istanti diversi e anche perché uno va più velocemente dell'altro. Quindi il medesimo moto viene ad avere rappresentazioni diverse, a seconda dell'orologio che si usa per descriverlo. Dobbiamo quindi migliorare la definizione di curva, tenendo conto di ciò. Osservare una proprietà cruciale del tempo: il tempo non si ferma e va in una sola direzione. Questo vuol dire che se indico con τ il tempo segnato da un orologio, al medesimo istante un secondo orologio segnerà un diverso numero, diciamo t. La corrispondenza che a τ fa corrispondere t è continua (perché il tempo non fa salti) e monotona strettamente crescente (perché il tempo non si ferma e va in una sola direzione). Quest'osservazione è la chiave per capire la definizione generale di curva che daremo al prossimo paragrafo. ∎

6.1.1 I cambiamenti di parametro e la definizione di curva

Vogliamo ora completare la definizione di curva, tenendo conto delle ragioni esposte nell'osservazione 179. Si dice che si cambia *parametrizzazione* della curva γ quando si opera la sostituzione $t = t(\tau)$ purché la funzione $\tau \to t(\tau)$ sia continua e strettamente crescente da un intervallo J sull'intervallo I. In pratica noi assumeremo anche che questa trasformazione sia derivabile (e quindi che sia $t'(\tau) \geq 0$). Talvolta basterà supporre che la trasformazione sia derivabile a tratti. Rendendo più precisa la definizione di curva, si dice che $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ e $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$, $\tau \in J$ sono due diverse parametrizzazioni della stessa curva quando $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$ con la funzione $\tau \to t(\tau)$ strettamente crescente e suriettiva.[1] Questa definizione corrisponde al concetto fisicamente intuitivo che una stessa "curva" può descriversi con leggi orarie diverse. Sia ora

$$\gamma : \quad t \to \mathbf{r}(t) , \qquad t \in (a, b)$$

e si consideri la trasformazione

$$t \to b + a - t , \qquad t \in (a, b) .$$

[1]in modo più rigoroso: si introduce una relazione di equivalenza tra due curve definite parametricamente $\mathbf{r}(t)$ $t \in I$ e $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$, $\tau \in J$: esse sono equivalenti quando esiste una trasformazione continua e strettamente crescente $t(\tau)$ da J su I tale che $\mathbf{r}(t(\tau)) = \tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ per ogni $\tau \in (\alpha, \beta)$. E quindi si definisce $\boxed{\textit{curva}}$ una classe di equivalenza rispetto a tale relazione. Per provare che quella introdotta è effettivamente una relazione di equivalenza va ricordato che la funzione inversa di una funzione crescente è essa stessa crescente.

Questa trasformazione è monotona decrescente e quindi la curva di parametrizzazione

$$t \to \mathbf{r}(b-a-t)\,, \qquad t \in (a,b)$$

è diversa dalla γ. Intuitivamente, la seconda curva si ottiene "percorrendo la γ all'indietro". Quando si effettua questa trasformazione sul parametro della curva, si dice che "si è cambiato il verso di percorrenza della curva" e la curva cosìottenuta a partire dalla γ si indica col simbolo

$$-\gamma\,. \tag{6.4}$$

Ora, alcune proprietà che dovremo studiare cambieranno al cambiare della parametrizzazione, ossia della legge del moto. Altre non dipenderanno dalla parametrizzazione. Le considereremo proprietà "geometriche" della curva. Vediamo alcuni casi:

Teorema 180 *Parametrizzazioni diverse della medesima curva hanno la stessa immagine.*

L'immagine comune a tutte le parametrizzazioni di una curva γ si chiama il *sostegno* di γ. Dunque il sostegno è una proprietà geometrica della curva. Lo stesso dicasi della proprietà di essere curva chiusa o curva semplice:

Teorema 181 *Siano I e J due intervalli e siano $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ due curve parametriche. Sia $t(\tau)$ una trasformazione strettamente monotona da J in I, suriettiva, tale che*

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))\,.$$

Allora, la curva parametrica $\mathbf{r}(t)$ è chiusa se e solo se la curva parametrica $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ lo è; $\mathbf{r}(t)$ è semplice se e solo se $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ lo è.

Ossia, le proprietà di essere chiusa, o di essere semplice, non dipendono dalla particolare rappresentazione parametrica di una curva ma solo dalla curva stessa: sono quindi proprietà geometriche della curva. E' importante notare che le proprietà appena dette non cambiano nemmeno cambiando il senso di percorrenza della curva. Ossia:

La curva γ e la curva $-\gamma$ hanno il medesimo sostegno. L'una è

- semplice
- chiusa
- semplice e chiusa

se e solo se l'altra lo è.

Inoltre,

Teorema 182 *l'ordine sulla curva non muta cambiando parametrizzazione.*

E' proprio per ottenere ciò che si è imposto che i cambiamenti di parametro debbano essere strettamente crescenti. L'ordine su $-\gamma$ è invece l'opposto di quello su γ. Quando la trasformazione $t(\tau)$ da un intervallo J su un intervallo I è continua e strettamente monotona (crescente o meno) allora I è sia limitato che chiuso se e solo se J lo è. Dunque diremo che una curva è un $\boxed{\textit{arco}}$ quando una sua parametrizzazione è definita su un intervallo limitato e chiuso: la proprietà di essere un arco è una proprietà geometrica della curva e non cambia cambiando verso di percorrenza sulla curva, ossia essa è comune sia a γ che a $-\gamma$. invece, dipendono dalla parametrizzazione sia la velocità $\mathbf{r}'(t)$ che la proprietà di essere una curva cartesiana. Si consideri ora l'esempio seguente:

Esempio 183 le due curve

$$t \to (\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}\,, \quad t \in (0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad t \to (\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}\,, \quad t \in (0, 4\pi)$$

hanno il medesimo sostegno (la circonferenza $x^2+y^2 = 1$). Le due parametrizzazioni però non possono ricondursi l'una all'altra mediante un cambiamento di parametro (che deve essere strettamente crescente) perché la prima curva è semplice e l'altra non lo è. ∎

Gli archi semplici[2] hanno molte proprietà importanti. Tra queste:

Teorema 184 *Sia*

$$\gamma\ :\quad t \to \mathbf{r}(t)\,, \qquad t \in (a, b)$$

un arco semplice *(chiuso o meno). Esiste soltanto un* diverso *arco che ha il medesimo sostegno, e questo è l'arco $-\gamma$.*

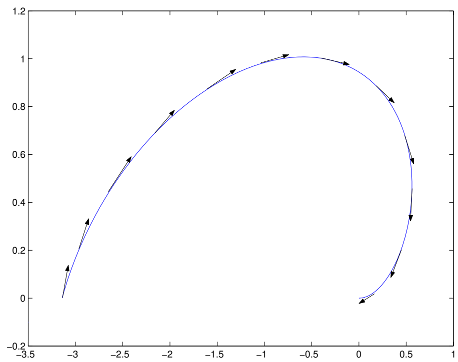
Grazie a questo risultato, trattando di archi semplici, possiamo usare un linguaggio più informale: se si sa che un insieme S è sostegno di un'arco semplice, possiamo parlare di "arco S" intendendo uno dei due archi che hanno S per sostegno. In generale si intende anche di aver fissato un verso di percorrenza su S, e in tal caso si sceglie quello dei due archi che corrisponde a tale verso. Per esempio, sia

$$S = \{(x, y, z)\ |x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x + y + z = 0\}\,.$$

L'insieme S è una circonferenza nello spazio. Possiamo parlare dell'"arco S" intendendo implicitamente di considerare S come sostegno di un arco semplice

[2] si ricordi che ogni curva chiusa è un arco.

Figura 6.2: La definizione di lunghezza: una curva e i suoi vettori approssimanti



e di scegliere una qualsiasi delle parametrizzazioni che corrispondono a tale arco. Se si stabilisce un verso di percorrenza su S, si viene a scegliere uno solo dei due archi che hanno S per sostegno. Si noti però che in generale non esiste un modo unico per la scelta del verso di percorrenza e quindi questo linguaggio informale non identifica univocamente l'arco. Vedremo che questa difficoltà si risolve nel caso delle curve semplici e chiuse.

6.1.2 Lunghezza di un arco

Studiamo il problema di definire un numero che rappresenti la "lunghezza" di un arco in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo per questo un arco (che indichiamo col simbolo γ) di parametrizzazione $t \to \mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$. Si sa che la tangente al grafico della funzione $t \to \mathbf{r}(t)$ nel punto $(t_0, \mathbf{r}(t_0))$ ha equazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)\,.$$

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ mediante i punti t_n, equidistanti, $t_0 = a, \ldots, t_N = b$ e approssimiamo l'arco con tanti segmenti di tangente, si veda la figura 6.2: l'arco $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ si approssima mediante il segmento di tangente

$$\mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)\,, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}]\,.$$

Sommiamo le lunghezze dei singoli segmenti di tangente. Ripetendo questo procedimento per ogni N si costruisce una successione di numeri (L_N). Se esiste $L = \lim L_N$, si sceglie questo numero L come "lunghezza" dell'arco

γ. Più precisamente, supponiamo che la funzione $\mathbf{r}(t)$ sia di classe C^1 e supponiamo che essa ammetta le derivate direzionali finite in ambedue gli estremi a e b. Per definire la lunghezza dell'arco, si divide l'intervallo $[a,b]$ in N parti uguali mediante i punti $\frac{kT}{N}$, $0 \leq k < N$ e $T = b - a$. Il segmento di tangente al grafico nel punto $(\frac{kT}{N}, \mathbf{r}(\frac{kT}{N}))$ ottenuto per $t \in (\frac{kT}{N}, \frac{(k+1)T}{N})$ ha lunghezza

$$\left|\left|\mathbf{r}'\left(\frac{kT}{N}\right)\right|\right| \cdot \frac{T}{N}\,.$$

La lunghezza totale dei segmenti di tangente è il numero

$$L_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\left|\mathbf{r}'\left(\frac{kT}{N}\right)\right|\right| \cdot \frac{T}{N}\,.$$

Se esiste, il numero $L = \lim L_N$ è l'integrale della funzione $||\mathbf{r}'(t)||$ sull'intervallo $[a,b]$. Dunque, definiamo la $\boxed{\textit{lunghezza}}$ dell'arco ponendo

$$L_\gamma = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||\ \mathrm{d}t\,. \tag{6.5}$$

Osservazione 185 Al numero L siamo giunti scegliendo di dividere l'intervallo $[a,b]$ in *parti uguali.* Non è difficile mostrare che allo stesso numero L si perviene considerando una qualsiasi partizione di $[a,b]$, la cui finezza tende a zero. Ci si può chiedere però a quale numero si giunge se, invece di "approssimare" il grafico con segmenti di tangente, si sceglie di approssimarlo con segmenti di secante. E' possibile provare che si giunge al medesimo numero L, dato da (6.5). ∎

Teorema 186 *La lunghezza di un arco non muta cambiando parametrizzazione.*

Dim. Sia $t = t(\tau)$ una trasformazione crescente da $[\alpha,\beta]$ su $[a,b]$. Sia inoltre essa ovunque derivabile cosìche $t'(\tau) \geq 0$. Sia $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$. La regola di cambiamento di variabile mostra che

$$\begin{aligned} L = \int_a^b \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t)\right|\right|\ \mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t(\tau))\right|\right| t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t(\tau))t'(\tau)\right|\right|\ \mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\right|\right|\ \mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$ ∎

Dunque, il numero che esprime la lunghezza di un arco è una proprietà geometrica dell'arco. Vale inoltre:

Teorema 187 *La lunghezza di un arco non muta cambiando il verso di percorrenza sulla curva. Ossia:*

$$L_\gamma = L_{-\gamma}\,.$$

Dim. Infatti, se $t'(\tau) < 0$ allora

$$\int_a^b \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t)\right|\right| \,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t(\tau))\right|\right| t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t(\tau))\right|\right| (-t'(\tau)\,)\,\mathrm{d}\tau$$

e $-t'(\tau) = |t'(\tau)|$. Dunque anche in questo caso vale

$$L = \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t(\tau))t'(\tau)\right|\right| \,\mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta \left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\right|\right| \,\mathrm{d}\tau\,. \quad ∎$$

Osservazione 188

- Un'interpretazione della formula (6.5) è la seguente: la parametrizzazione $t \to \mathbf{r}(t)$ si intende come legge del moto di un punto che percorre la curva. Allora, $\mathbf{r}'(t)$ è il vettore velocità del punto mobile all'istante t. La (6.5) si interpreta dicendo che l'integrale del modulo della velocità dà la lunghezza del cammino percorso.

- Sia γ una curva cartesiana, ossia

$$\gamma\ : \qquad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}\,.$$

  In questo caso,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}\,, \qquad |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,. \tag{6.6}$$

  La lunghezza dell'arco ottenuto quando $t \in [a, b]$ è quindi data da

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,. \quad ∎$$

Definiamo ora la funzione $s(t)$

$$s(t) = \int_a^t ||\mathbf{r}'(\nu)||\,\mathrm{d}\nu \qquad t \in [a, b]\,.$$

Se l'arco γ è regolare, $s'(t) > 0$ per ogni t. Ossia la trasformazione $t \to s(t)$ da $[a, b]$ su $[0, L]$ è un cambiamento di parametro per l'arco γ. Il numero $s \in [0, L]$ si chiama per questo il $\boxed{\textit{parametro d'arco}}$. Se come parametro di γ si sceglie s si trova una nuova parametrizzazione dell'arco γ, che indichiamo con $\mathbf{r}(s)$

e che si chiama la $\boxed{\textit{parametrizzazione canonica}}$ dell'arco. La sua proprietà importante è che

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s)\right| = 1\,.$$

Infatti, essendo $s(\nu)$ la funzione inversa di $\nu(s)$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(\nu(s)) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathbf{r}(\nu(s))\right]\nu'(s)$$
$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathbf{r}(\nu(s))\right]\frac{1}{s'(\nu(s))} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathbf{r}(\nu(s))\right]\frac{1}{|(\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\nu)\mathbf{r}(\nu(s))|}\,.$$

Dunque, quando la curva è data mediante la sua parametrizzazione canonica, la formula per la lunghezza si riduce a:

$$L = \int_0^L 1\,\mathrm{d}s\,.$$

Il parametro d'arco si presta allo studio delle proprietà geometriche delle curve. Però la parametrizzazione mediante il parametro d'arco è spesso piuttosto complicata e spesso non si presta a fare calcoli concreti. Concludiamo dicendo che in fisica la funzione $s = s(t)$ si chiama $\boxed{\textit{legge oraria}}$ del moto.

6.1.3 Proprietà differenziali delle curve piane e dello spazio

Studiamo prima di tutto il caso delle curve piane. Supponiamo che l'arco γ sia parametrizzata dalla sua lunghezza,

$$\gamma:\qquad s\to\mathbf{r}(s)\,,\qquad s\in[0,L]$$

e supponiamo che sia regolare a tratti; ossia che la funzione $s\to\mathbf{r}(s)$ sia ovunque continua; inoltre supponiamo che essa sia derivabile, con $|\mathbf{r}'(s)|\neq 0$ su $[0,L]$, con la possibile eccezione di un numero finito di valori $s_1,\ldots,\ s_k$ di s. In tali punti richiediamo che esistano finiti[3] i limiti direzionali i limiti direzionali di $\mathbf{r}'(s)$. Il versore

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s)$$

applicato nel punto $\mathbf{r}(s)$ si chiama il *versore* $\boxed{\textit{tangente}}$ alla curva nel punto $\mathbf{r}(s)$. Il versore tangente è definito salvo che in un numero finito di valori di s. Per

[3] ossia, richiediamo che esistano anche i limiti direzionali di $|\mathbf{r}'(s)|$ e che questi siano finiti.

ogni s nel quale $\mathbf{t}(s)$ è definito, introduciamo il versore $\mathbf{n}(s)$ ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e diretto in modo tale che la coppia $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ sia orientata positivamente (ossia, possa sovrapporsi ordinatamente ai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ degli assi coordinati mediante una rotazione e una traslazione di assi). Il versore $\mathbf{n}(s)$ si chiama il versore $\boxed{\textit{normale}}$ alla curva γ. Vale:

Teorema 189 *Sia γ una curva regolare, la cui parametrizzazione è di classe C^2. Allora il vettore $\mathbf{n}(s)$ è derivabile e in ogni punto è colineare col vettore $\mathbf{t}'(s)$.*

<u>**Dim.**</u> Infatti, $||\mathbf{t}(s)|| = 1$ per tutti gli s e quindi $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0$ per ogni s. Dunque, $\mathbf{n}(s) = \pm\frac{\mathbf{t}'(s)}{||\mathbf{t}'(s)||}$. Ciò mostra che per ogni valore di s i due vettori $\mathbf{t}(s)$ ed $\mathbf{n}(s)$ sono colineari. Fissiamo ora un valore s_0 in cui $\mathbf{r}(s)$ ammette derivata continua e supponiamo[4] che sia $\mathbf{n}(s_0) = +\frac{\mathbf{t}'(s_0)}{||\mathbf{t}'(s_0)||}$. Ciò vuol dire che

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s_0) & +\frac{\mathbf{t}'(s_0)}{||\mathbf{t}'(s_0)||} \end{bmatrix} > 0\,.$$

Per continuità, la disuguaglianza si conserva in un intorno di s_0 e ciò mostra che in un intorno di s_0 vale

$$\mathbf{n}(s) = +\frac{\mathbf{t}'(s)}{||\mathbf{t}'(s)||}\,.$$

Il denominatore non si annulla e quindi $\mathbf{n}(s)$ è derivabile. ∎

Osservazione 190 Si ricordi che la derivata del versore $\mathbf{t}(s)$ è il limite del rapporto incrementale

$$\frac{\mathbf{t}(s+h) - \mathbf{t}(s)}{h},$$

applicato in $\mathbf{r}(s)$. ∎

Supponiamo ora di lavorare con parametrizzazioni di classe C^2 di curve regolari, e studiamo $\mathbf{t}'(s)$. Si è visto nella dimostrazione del Teorema 189, che $\mathbf{t}'(s)$ è parallelo al versore $\mathbf{n}(s)$. Esiste quindi un numero $k(s)$ tale che

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)\,. \tag{6.7}$$

Il numero $k(s)$, che può essere positivo o negativo, si chiama la $\boxed{\textit{curvatura}}$ di γ nel punto $\mathbf{r}(s)$. Prendendo la norma dei vettori ai due membri di (6.7) si trova

$$|k(s)| = ||\mathbf{t}'(s)||\,.$$

[4]considerazioni analoghe se $\mathbf{n}(s_0) = -\frac{\mathbf{t}'(s_0)}{||\mathbf{t}'(s_0)||}$.

L'esempio seguente mostra che la curvatura può cambiare segno da punto a punto di una medesima curva; e mostra anche che per calcolare tangenti, normali e curvatura non è necessario parametrizzare preventivamente la curva col parametro d'arco.

Esempio 191 Sia $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$ cosìche

$$\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,.$$

Dalla *formula per la derivata della funzione inversa*

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r(x(s))}{\mathrm{d}x}x'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(s)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}(1, f'(x))\right\}\,.$$

Dunque,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}(x)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(1, f'(x))}{\sqrt{1+f'^2(x)}}\right]$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}\frac{1}{1+f'^2(x)}\left[(0, f''(x))\sqrt{1+f'^2(x)} - (1, f'(x))\frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}\right]$$
$$= \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^2}(-f'(x), 1) = k(x)\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}(-f'(x), 1)\,.$$

Si trova da qui

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}\,.$$

La curvatura ha quindi il segno di $f''(x)$. Si confronti con la definizione di curvatura data al par. 6.3 del testo di *Analisi Matematica 1.* ∎

Osserviamo ora che $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}(s) = 0$ e quindi, derivando,

$$0 = \mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}'(s) = k(s) + \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}'(s)\,. \tag{6.8}$$

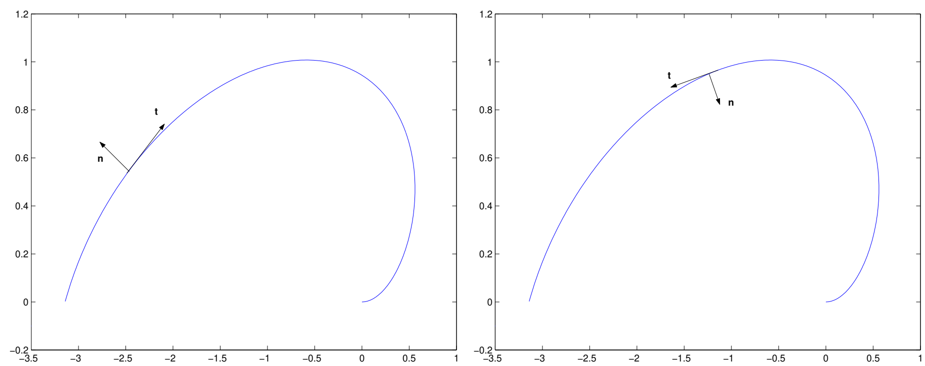
D'altra parte, $\mathbf{n}'(s)$ è ortogonale ad $\mathbf{n}(s)$ (perch'e $||\mathbf{n}(s)|| = 1$) e quindi

$$\mathbf{n}'(s) = \alpha(s)\mathbf{t}(s)\,.$$

Sostituendo nella (6.8) si vede che $\alpha(s) = -k(s)$. Ne viene che le due funzioni $\mathbf{t}(s)$ ed $\mathbf{n}(s)$ risolvono il sistema di equazioni differenziali

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)\,, \qquad \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s)\,. \tag{6.9}$$

Figura 6.3: Versore tangente e versore normale



Queste equazioni si chiamano $\boxed{\textit{Equazioni di Frenet}}$ per le curve piane. Il sistema di riferimento dato dai due versori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ (in quest'ordine) applicati nel punto $\mathbf{r}(s)$ si chiama il *riferimento* $\boxed{\textit{mobile}}$ sulla curva. La figura 6.3 illustra il riferimento mobile nel caso in cui la curva venga percorsa in due versi opposti. Studiamo ora il caso delle curve di $\mathbb{R}^3$. Intendiamo ancora che la curva sia parametrizzata dal parametro d'arco. La definizione del *versore* $\boxed{\textit{tangente}}$ $\mathbf{t}(s)$ è ancora

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s)\,.$$

Invece, la curvatura deve essere trattata in modo diverso. Assegnato il vettore $\mathbf{t}(s)$ tangente alla curva γ e di modulo 1, è ancora vero che $\mathbf{t}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$. Dunque privilegeremo, tra le infinite direzioni normali a $\mathbf{t}(s)$, la direzione di $\mathbf{t}'(s)$; ma non c'è alcun modo di privilegiare un verso su tale direzione. Dunque decidiamo di scegliere come versore normale il versore

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{||\mathbf{t}'(s)||}\,. \tag{6.10}$$

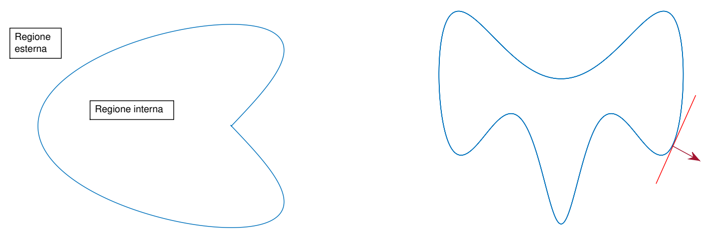
Chiamiamo questo il $\boxed{\textit{versore normale}}$ alla curva γ. Chiamiamo $\boxed{\textit{curvatura}}$ il numero $k(s)$ tale che

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s) \qquad \text{ossia} \qquad k(s) = ||\mathbf{t}'(s)|| = \mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{n}(s)\,.$$

In questo modo,

$$k(s) \geq 0 \qquad \forall s\,.$$

Figura 6.4: Le regioni interna ed esterna e la normale esterna



Osservazione 192 Se una curva regolare è piana, il suo versore normale è ovunque definito. Invece, una curva nello spazio potrebbe essere priva di versore normale su tutto un arco o addirittura ovunque. Ciò avviene se $\mathbf{t}'(s)$ è nullo. In particolare, può accadere che $\mathbf{t}'(s)$ sia identicamente zero su un intervallo. In questo caso, l'arco corrispondente è piano, parametrizzato da

$$\mathbf{r}(s) = s\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \,.$$

La definizione di versore normale data in $\mathbb{R}^3$ non si applica in questo caso. ▮

6.2 Curve piane

E' importante sapere che vale il teorema seguente, di enunciato del tutto intuitivo ma di dimostrazione molto complessa:

Teorema 193 (teorema di $\boxed{\textbf{Jordan}}$) *Sia γ una curva* piana *chiusa e semplice. Il complementare del sostegno di γ è unione di due* regioni. *Una di esse è* illimitata *(e si dice* $\boxed{\text{esterna}}$ *alla curva) mentre l'altra è* limitata *e si dice la regione* $\boxed{\text{interna}}$ *alla curva.*

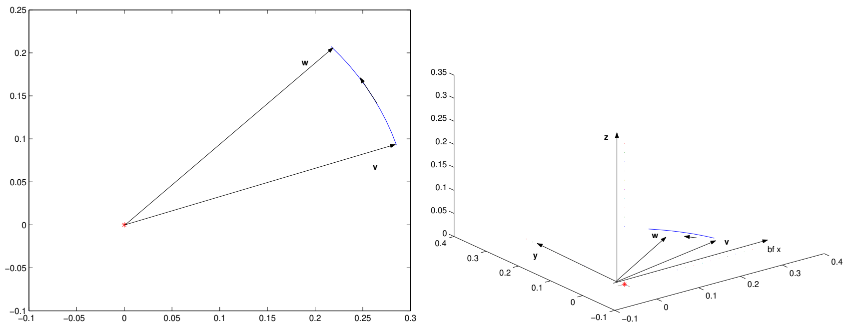
Il teorema è illustrato nella figura 6.4, a sinistra. Il sostegno di γ è la frontiera sia della regione interna che della regione esterna di γ (si veda il paragrafo 3.3 per la definizione di frontiera).

Esempio 194 La curva

$$x = 3\cos\theta \,, \qquad y = 2\sin\theta$$

ha per sostegno un'ellisse. La sua regione interna è la parte di piano delimitata dall'ellisse. La regione esterna è quella dei punti che "stanno fuori" dall'ellisse. ▮

Figura 6.5: Regola d'Ampère per una curva piana



Ovviamente, non esiste alcun "teorema di Jordan" per curve dello spazio! Usa chiamare *regione di* $\boxed{\textit{Jordan}}$ la regione interna ad una curva piana semplice e chiusa. Se γ indica la curva, conviene indicare con Ω_γ la sua regione interna. Vale:

Teorema 195 *Sia γ una curva semplice e chiusa. E':*

$$\Omega_\gamma = \Omega_{-\gamma}\,.$$

La regione interna ad una curva piana semplice e chiusa può essere assai complicata; ma nella maggior parte dei casi che si incontrano nelle applicazioni sarà facile identificarla. Nel paragrafo 6.1 abbiamo usato l'ordinamento su $\mathbb{R}$ per definire un ordine sulla curva γ. Nel par. 3.2.1 abbiamo notato che il piano può venire orientato con la regola seguente: la coppia dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati in O e presi in quest'ordine, è orientata positivamente quando la semiretta identificata da $\mathbf{v}$ deve ruotare in verso *antiorario* per portarsi su quellaidentificata da $\mathbf{w}$, percorrendo l'angolo minore possibile. Si veda la figura 6.5 a sinistra. Questa definizione può anche riformularsi mediante la *regola d'* $\boxed{\textit{Ampère}}$*:* una persona stando in piedi nell'origine del piano xy con la testa nel verso positivo dell'asse delle quote vede la semiretta muoversi in verso antiorario, e quindi la vede passare dalla sua destra alla sua sinistra. Sia ora γ una curva piana semplice e chiusa. Ricordiamo che il suo sostegno è sostegno, oltre che di γ, soltanto della seconda curva $-\gamma$, che si ottiene "andando all'indietro". Diciamo che γ è $\boxed{\textit{orientata}}$ *in modo concorde a* $\mathbb{R}^2$, o anche che è $\boxed{\textit{orientata positivamente}}$, se vale la *regola d'* $\boxed{\textit{Ampère:}}$ una persona in piedi in un punto della regione interna alla curva, stando in piedi come l'asse delle quote positivo, vede un punto mobile sulla curva passare dalla sua destra alla sua sinistra. In modo equivalente, si può anche dire che un insetto che segue il punto mobile su una curva semplice e chiusa vede la regione interna alla sua sinistra, si veda la figura 6.5 a destra. Altrimenti, diciamo che è orientata negativamente. Vale:

Teorema 196 *Delle due curve semplici e chiuse, γ e $-\gamma$, una è orientata positivamente e l'altra è oreintata negativamente.*

Supponiamo ora che la curva piana semplice e chiusa γ sia anche regolare, cosìche si possono definire sia il vettore tangente $\mathbf{t}(s)$ che il vettore normale $\mathbf{n}(s)$. Il vettore normale $\mathbf{n}(s)$ può puntare sia verso la regione interna che verso la regione esterna alla curva. Per il seguito avremo bisogno del vettore normale che punta verso la regione esterna alla curva γ (si veda la figura 6.4, a destra). Lo indicheremo col simbolo

$$\mathbf{n_e}(s)$$

e lo chiameremo la *normale* $\boxed{\textit{esterna}}$.

Osservazione 197 Al paragrafo 6.1.3 si è definito il vettore $\mathbf{n}(s)$ come il vettore normale a $\mathbf{t}(s)$, orientato in modo tale che la coppia ordinata $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ costituisca un sistema di riferimento positivo. Dunque $\mathbf{n}(s)$ punta verso la sinistra di $\mathbf{t}(s)$. Quando la curva è orientata positivamente, allora $\mathbf{n}(s)$ punta verso la regione interna alla curva. Quindi, in questo caso si ha $\mathbf{n}(s) = -\mathbf{n_e}(s)$. ∎

Torniamo ad usare il fatto che il sostegno di una curva semplice e chiusa è sostegno anche di una seconda curva, che si ottiene dalla prima "girando in verso opposto". Quest'osservazione permette di introdurre un linguaggio più informale, che tuttavia è limitato alle curve piane. Supponiamo che si sappia che un certo insieme del piano è il sostegno di una curva semplice e chiusa. Per esempio un quadrato o una circonferenza. Invece di scrivere esplicitamente la parametrizzazione della curva, possiamo indicare il sostegno e implicitamente intendere di scegliere quella curva semplice che ha il sostegno dato e che è orientata positivamente, senza dover esplicitamente scrivere una sua parametrizzazione. In particolare, se Ω è la regione interna ad una curva semplice e chiusa γ, e se vogliamo che γ sia orientata positivamente, potremo semplicemente indicarla come "frontiera di Ω", $\partial\Omega$.

Osservazione 198 Con questa convenzione, se γ è un sostegno di curva semplice e chiusa, si indica con γ (o, per ridondanza, $+\gamma$) la curva semplice e chiusa che ha il dato sostegno e che è orientata positivamente, e con $-\gamma$ quella che ha il dato sostegno ed è orientata negativamente. ∎

6.3 Le superfici

Studiamo ora le superfici in $\mathbb{R}^3$. Considerazioni analoghe a quello che hanno condotto a definire prima le curve parametriche e poi le curve come “oggetti geometrici” si possono ripetere per le superfici. Però sono alquanto complesse e quindi ci limiteremo a definire le superfici parametriche, mostrando quando certe proprietà che ci interessano sono indipendenti dalla parametrizzazione scelta.

6.3.1 Superfici definite parametricamente

Nel definire le curve è stato naturale partire da funzioni continue definite su intervalli. Per definire le superfici dobbiamo considerare funzioni continue di due variabili, definite quindi su un dominio contenuto in $\mathbb{R}^2$. richiederemo che il dominio sia una regione. Una funzione continua

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \tag{6.11}$$

il cui dominio è una regione di Ω si chiama una $\boxed{\textit{superficie}}$ *definita parametricamente.* L’immagine della funzione $\mathbf{r}(u,v)$ si chiama il $\boxed{\textit{sostegno}}$ *della superficie* mentre il punto (u,v) variabile in Ω si chiama il $\boxed{\textit{parametro}}$ della superficie. Una superficie si dice $\boxed{\textit{semplice}}$ quando valori diversi del parametro hanno per immagine punti diversi del sostegno. Una superficie si dice $\boxed{\textit{chiusa}}$ quando il suo sostegno è la frontiera di una regione di $\mathbb{R}^3$. Sia

$$\Sigma : \qquad (u,v) \to x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

una superficie. Diremo che la superficie è $\boxed{\textit{regolare}}$ quando la trasformazione (6.11) è di classe C^1 e inoltre la matrice jacobiana della trasformazione

$$\begin{bmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

ha rango 2, ossia il massimo possibile, in ogni punto della regione Ω. Cosìcome nel caso delle curve, una stessa superficie può parametrizzarsi in più modi. Senza entrare in eccessivi dettagli, diremo che una trasformazione

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} u(\alpha,\beta) \\ v(\alpha,\beta) \end{bmatrix}$$

è un cambiamento di parametro quando è definita su una regione $\tilde{\Omega}$, a valori in Ω; è iniettiva e suriettiva; è di classe C^1 e inoltre conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^2$, ossia il suo jacobiano è positivo in ogni punto:

$$\det \begin{bmatrix} u_\alpha(\alpha,\beta) & u_\beta(\alpha,\beta) \\ v_\alpha(\alpha,\beta) & v_\beta(\alpha,\beta) \end{bmatrix} > 0\,.$$

Si noti l'analogia con la nozione di cambiamento di parametro per una curva. Anche nel caso delle curve il cambiamento di parametro deve conservare l'orientazione, in tal caso l'orientazione di $\mathbb{R}$. E' ovvio che cambiando parametro non si cambia il sostegno di una superficie. Diremo equivalenti, e le identificheremo, due superfici che differiscono solamente per la parametrizzazione. Le funzioni definite su Ω, a valori in $\mathbb{R}^3$, sono particolari superfici, rappresentate da

$$\Sigma: \qquad (x,y) \to x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x,y)\mathbf{k}\,.$$

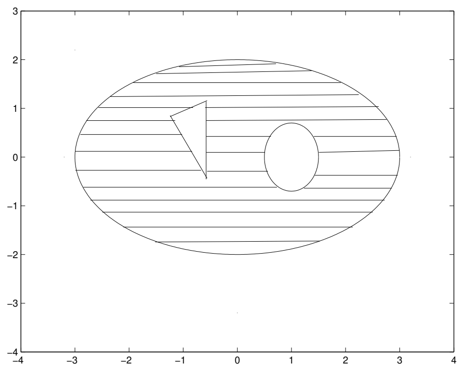
Esse si chiamano $\boxed{\textit{superfici cartesiane}}$. Il sostegno in questo caso è il grafico della funzione $z(x,y)$. Sia ora Ω_Γ una regione di Jordan e sia $\mathbf{r}(u,v)$ una funzione continua sull'insieme chiuso costituito dall'unione della regione Ω_Γ e del supporto di Γ. In tal caso la funzione $\mathbf{r}(u,v)$ si chiama $\boxed{\textit{calotta}}$. Ovviamente, la restrizione di $\mathbf{r}(u,v)$ ad Ω_Γ è una superficie. Conviene estendere la definizione di calotta in questo modo. Siano date, oltre alla Γ, anche le curve di Jordan γ_1, γ_2,..., γ_n i cui sostegni non si intersecano. Supponiamo che ciascuna di queste curve abbia sostegno in Ω_Γ. Indichiamo con K l'insieme chiuso i cui punti sono quelli del sostegno di Γ e della sua regione interna Ω_Γ, esclusi i punti della regione interna a ciascuna γ_i (e quindi inclusi i punti dei sostegni delle γ_i). La figura 6.6 mostra in tratteggio un esempio di insieme K. Se la funzione $\mathbf{r}(u,v)$ in (6.11) è continua su K essa si chiama $\boxed{\textit{calotta}}$. Si chiama $\boxed{\textit{sostegno}}$ della calotta l'immagine della funzione $\mathbf{r}(u,v)$. L'insieme dei punti interni di K è ancora una regione (anche se non più una regione di Jordan) e quindi la restrizione di $\mathbf{r}(u,v)$ a tale insieme è una superficie. Parleremo di $\boxed{\textit{calotta chiusa}}$ se accade che la calotta è frontiera di un insieme aperto di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione 199 Non si confonda il concetto di "insieme chiuso" con quello di "superficie chiusa" o di "calotta chiusa". La calotta di parametrizzazione

$$x = u\,, \qquad y = v\,, \qquad z = u + v$$

definita sul disco $u^2 + v^2 \le 1$ ha per sostegno un insieme chiuso; ma la calotta stessa è contenuta nel piano $z = x + y$ e quindi non è una calotta chiusa. ∎

Figura 6.6: Insieme su cui si proietta una calotta



Una superficie, oppure una calotta, si indica con una lettera greca maiuscola, come per esempio Σ o Γ. Il concetto seguente è molto delicato e noi ci limitiamo a darne una definizione grossolana. Supponiamo di avere una calotta Σ

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}\,, \qquad (u,v) \in K\,.$$

Supponiamo che la calotta sia semplice ossia che

$$x(u',v') = x(u,v)\,, \quad y(u',v') = y(u,v)\,, \quad z(u',v') = z(u,v)$$

possa aversi solo se $u = u'$ e $v = v'$. In tal caso si chiama $\boxed{\textit{bordo}}$ della calotta Σ l'immagine della frontiera dell'insieme K; ossia l'immagine delle singole curve che delimitano l'insieme K. La figura 6.7 mostra una calotta e il suo bordo.

Esempio 200 Si è detto che la definizione di bordo è insoddisfacente. Quest'esempio ne mostra la ragione. Consideriamo la calotta definita come segue. La funzione $\mathbf{r}(\theta, v)$ è

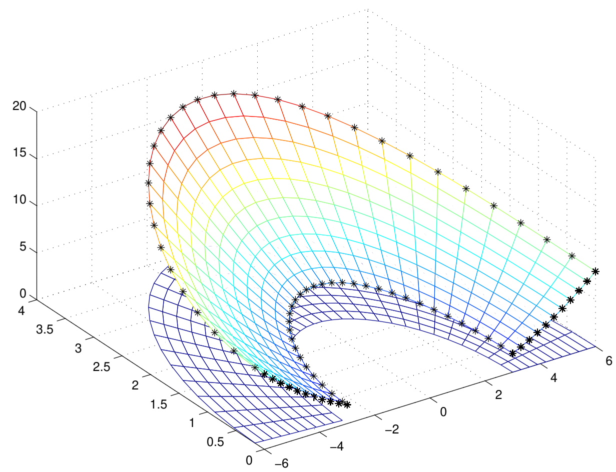
$$\Sigma : \qquad x = \cos\theta\,, \quad y = \sin\theta\,, \quad z = v\,. \tag{6.13}$$

Il dominio della funzione è

$$0 \le v \le 1\,, \qquad \epsilon \le \theta \le 2\pi$$

con $\epsilon > 0$. Si tratta di un cilindro a cui è stata tolta una striscetta, come in figura 6.8. Questa calotta è una calotta semplice e il suo bordo è costituito dai due archi di circonferenza (archi della circonferenza di sopra e di quella di

Figura 6.7: Una calotta ed il suo “bordo”

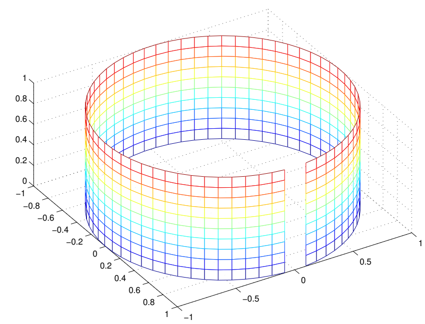


sotto, alle quali è tolto l’arco che corrisponde a $0 < \theta < \epsilon$) e dai bordi del taglio che le congiungono. Supponiamo ora di mandare ϵ a zero. In tal caso si trova un cilindro intero. La sua parametrizzazione non è più semplice, e quindi non possiamo più parlare di “bordo” secondo la nostra definizione, anche se appare naturale considerare le due circonferenze come il bordo del cilindro. Mentre il contributo dei due bordi del taglio “scompare”. Quest’esempio mostra che dovremmo dare un modo per definire il “bordo” anche per calotte che non sono semplici. Per esempio anche nel caso del cilindro ottenuto scegliendo $\theta \in [0, 2\pi]$. La soluzione ovvia è quella di scegliere come bordo l’immagine della frontiera dell’insieme K, in quest’esempio l’immagine del perimetro del rettangolo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. In questo modo si otterrebbe come bordo l’insieme delle due circonferenze ed anche il segmento verticale dei punti di coordinate $(1, 0, v)$, $0 \le v \le 1$. Questa soluzione però non è accettabile. Infatti lo stesso cilindro si parametrizza anche scegliendo come dominio della funzione (6.13) l’insieme

$$0 \le v \le 1 \,, \qquad -\pi \le v \le \pi$$

e con questa parametrizzazione si trova un’altro insieme come “bordo”: l’insieme costituito dalle due circonferenze e dal segmento dei punti $(-1, 0, v)$, $0 \le v \le 1$. Ossia, il bordo cosìdefinito viene a dipendere dalla particolare parametrizzazione che si sceglie. Ci sono vari modi per risolvere questa difficoltà: uno, più astratto, consiste nel considerare tutte le parametrizzazioni della calotta, ciascuna definita su un proprio insieme K. Si considerano quindi le immagini di tutte

Figura 6.8: Ancora una calotta col suo “bordo”



le frontiere di questi insiemi K e se ne fa l'intersezione. Noi seguiremo una via “più concreta” che si adatta ai casi semplici che incontreremo nelle applicazioni e che sarà illustrata al paragrafo 8.5.2. ∎

6.3.2 Il piano tangente e la normale a una superficie

Sia

$$\Sigma : \qquad (u,v) \to x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \qquad (u,v) \in \Omega$$

una superficie regolare e semplice. Fissiamo l'attenzione su un punto $\mathbf{r}_0$ del sostegno. Dato che la superficie è semplice, questo proviene da un unico punto (u_0, v_0) del dominio:

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)\,, \qquad \mathbf{r}_0 = x(u_0,v_0)\mathbf{i} + y(u_0,v_0)\mathbf{j} + z(u_0,v_0)\mathbf{k}\,.$$

Consideriamo ora il segmento per $\mathbf{u}_0$, parallelo all'asse delle ascisse, ossia la curva

$$\gamma : \qquad t \to (u_0 + t, v_0)$$

Questo identifica una curva sulla superficie, parametrizzata da

$$t \to x(u_0+t, v_0)\mathbf{i} + y(u_0+t, v_0)\mathbf{j} + z(u_0+t, v_0)\mathbf{k}\,.$$

La tangente a questa curva calcolata per $t = 0$, ossia in $\mathbf{r}_0$, è identificata dal vettore $\mathbf{v_1}$ (applicato in $\mathbf{r_0}$)

$$\mathbf{v_1} = x_u(u_0,v_0)\mathbf{i} + y_u(u_0,v_0)\mathbf{j} + z_u(u_0,v_0)\mathbf{k}\,. \qquad (6.14)$$

Analogamente, considerando un segmento per $\mathbf{u}_0$ parallelo all'asse delle ordinate, si trova una curva sulla superficie, la cui tangente in $\mathbf{r}_0$ è identificata dal vettore $\mathbf{v_2}$ (applicato in $\mathbf{r_0}$):

$$\mathbf{v_2} = x_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + y_v(u_0, v_0)\mathbf{j} + z_v(u_0, v_0)\mathbf{k}\,. \qquad (6.15)$$

In generale, il segmento

$$t \to (u_0 + at, v_0 + bt)$$

identifica una curva sulla superficie, il cui vettore tangente è identificato dal vettore

$$a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} \qquad \text{(applicato in } \mathbf{r_0})\,.$$

I vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ dipendono da (u_0, v_0):

$$\mathbf{v}_1(u_0, v_0)\,, \qquad \mathbf{v}_2(u_0, v_0)$$

e sono le due colonne della matrice jacobiana (6.12) e quindi sono linearmente indipendenti (infatti abbiamo assunto che la superficie sia regolare). Dunque al variare di a e di b in $\mathbb{R}$, i vettori $a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2}$ applicati in $\mathbf{r_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ descrivono un piano per $\mathbf{r_0}$, che si chiama il *piano* $\boxed{\textit{tangente}}$ alla superficie nel punto $\mathbf{r_0}$. Si noti esplicitamente che intendiamo di scegliere come sistema di riferimento cartesiano (in generale, obliquo) in questo piano le rette identificate al vettore $\mathbf{v_1}(u_0, v_0)$ per primo e quindi $\mathbf{v_2}(u_0, v_0)$. E' su questi assi cartesiani si sceglie per verso positivo quello dei rispettivi vettori. Dunque sul piano tangente è definita un'orientazione. Definiamo ora il $\boxed{\textit{vettore normale}}$ $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ ponendo

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{v_1}(u_0, v_0) \wedge \mathbf{v_2}(u_0, v_0)\,.$$

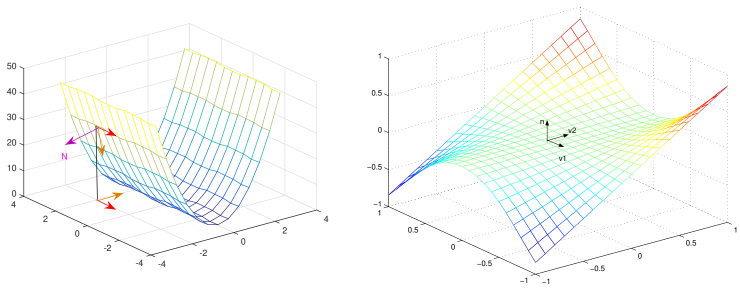
Il vettore $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ si intende applicato nel punto $\mathbf{r_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. E' ovvio:

Teorema 201 *Se la superficie semplice Σ è regolare, sia i vettori $\mathbf{v_1}(u_0, v_0)$, $\mathbf{v_2}(u_0, v_0)$ che il vettore normale $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ dipendono con continuità da (u_0, v_0).*

Si ricordi che la superficie si è supposta semplice. Quindi ogni $\mathbf{r_0}$ proviene da un unico punto $(u_0, v_0) \in \Omega$. Dunque in ogni punto di una superficie regolare e semplice il vettore normale $\mathbf{N}$ sopra definito è unico e questo vettore si potrà considerare come funzione del punto della superficie: $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r})$. Si è cosìdefinito un campo vettoriale sulla superficie. I concetti appena esposti sono

illustrati nella figura 6.9. Se la superficie è cartesiana si ha: $\mathbf{v}_1(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(x_0, y_0) =$

Figura 6.9: Il piano tangente e la normale ad una superficie



Per il seguito è importante ricordare la formula per $||\mathbf{N}(\mathbf{r})||$ nel caso di una superficie cartesiana:

$$||\mathbf{N}(x_0,y_0)|| = \sqrt{1+[z_x(x,y)]^2+[z_y(x,y)]^2}\,. \tag{6.16}$$

Si confronti questa formula con la (6.6). Studiamo ora come cambiano i vettori $\mathbf{v_1}(u_0,v_0)$, $\mathbf{v_2}(u_0,v_0)$ e il vettore $\mathbf{N}(u_0,v_0)$ sotto l'azione dei cambiamenti di parametro. Sia $u=u(t,s)$, $v=v(t,s)$ una trasformazione biunivoca (e di classe C^1) da una regione Ω' su Ω e consideriamo la parametrizzazione

$$\mathbf{r}(t,s) = x(u(t,s),v(t,s))\mathbf{i}+y(u(t,s),v(t,s))@@newl@@j+z(u(t,s),v(t,s))\mathbf{k}\,.$$

Le derivate rispetto ad t ed s si calcolano mediante la regola di derivazione a catena. Poniamo:

$$a=u_t(t,s)\,,\quad b=v_t(t,s)\,,\quad c=u_s(t,s)\,,\quad d=v_s(t,s)\,.$$

Per semplicità di notazioni, scriviamo x_u invece di $x_u(u(t,s),v(t,s))$ (e analoga notazione per le derivate di y e di z, e per le derivate rispetto a v). Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_t(t,s) = &\quad [x_u a + x_v b]\mathbf{i} + [y_u a + y_v b]\mathbf{j} + [z_u a + z_v b]\mathbf{k}\\ \mathbf{r}_s(t,s) = &\quad [x_u c + x_v d]\mathbf{i} + [y_u c + y_v d]\mathbf{j} + [z_u c + z_v d]\mathbf{k}\end{aligned}$$

La componente lungo il versore $\mathbf{k}$ del prodotto vettoriale $\mathbf{r}_t(t,s)\wedge\mathbf{r}_s(t,s)$ è

$$\begin{aligned}&[(x_u y_u ac + x_v y_v bd + x_u y_v ad + x_v y_u bc) - (y_u x_u ac + y_v x_v bd + y_u x_v ad + y_v x_u bc)]\\ &\qquad\qquad = (x_u y_v - x_v y_u)(ad-bc)\,.\end{aligned}$$

Proseguendo in modo analogo al calcolo delle altre componenti si trova:

Teorema 202 *Vale:*

$$\mathbf{r}_t(u(t,s),v(t,s))\wedge\mathbf{r}_s(u(t,s),v(t,s)) = (ad-bc)\mathbf{r}_u(u(t,s),v(t,s))\wedge\mathbf{r}_v(u(t,s),v(t,s))\,.$$

Il numero $ab-bc$ è lo jacobiano del cambiamento di parametro. Esso è positivo per la definizione di cambiamento di parametro.

Teorema 203 *effettuando un cambiamento di parametro la normale alla superficie non cambia né direzione <u>né verso</u>.*

Per questa ragione si dice che i cambiamenti di parametro (che hanno jacobiano positivo) lasciano invariata l'$\boxed{\textit{orientazione}}$ della superficie. Si dice che cambiano l'orientazione della superficie quelle trasformazioni che hanno jacobiano negativo.

6.4 Appendici

6.4.1 Appendice: le formule di Frenet per curve nello spazio

Torniamo a considerare le curve nello spazio e completiamo le considerazioni svolte al paragrafo 6.1.3. In quel paragrafo abbiamo definito la tangente $\mathbf{t}(s)$ e la normale $\mathbf{n}(s)$ ad una curva. Il piano identificato dai vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$, applicati in $\mathbf{r}(s)$, si chiama il *piano* $\boxed{\textit{osculatore}}$ alla curva nel punto $\mathbf{r}(s)$. Notiamo ora che $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}(s)$ è identicamente zero e quindi ha derivata nulla. Dunque,

$$\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}'(s) = -\mathbf{t}'(s)\cdot\mathbf{n}(s) = -k(s)\,. \qquad (6.17)$$

Introduciamo ora il versore $\mathbf{b}(s)$, definito da

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{n}(s)\,.$$

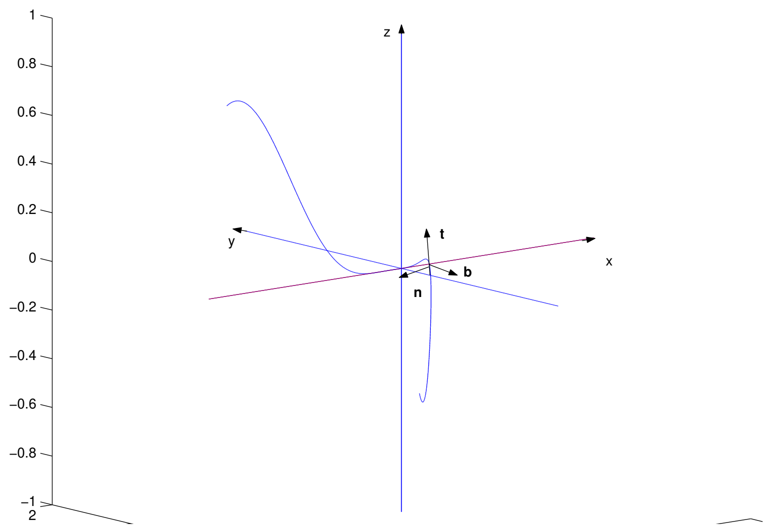
Il versore $\mathbf{b}(s)$ è quindi ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ ed orientato in modo tale che la terna $(\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s))$ sia orientata positivamente. Si veda la figura 6.10 per un esempio. Il sistema di assi cartesiano ortogonali che abbiamo descritto varia da punto a punto della curva. Per questa ragione si chiama *sistema di* $\boxed{\textit{riferimento mobile}}$ *sulla curva.* Il vettore $\mathbf{b}(s)$ si chiama il versore $\boxed{\textit{binormale}}$ alla curva. La derivata di $\mathbf{b}(s)$ è ortogonale a $\mathbf{b}(s)$ perché $||\mathbf{b}(s)||=1$ per ogni s e quindi appartiene al piano di $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ per ogni s. Si ha quindi

$$\mathbf{b}'(s) = \alpha(s)\mathbf{t}(s)+\beta(s)\mathbf{k}(s)\,.$$

D'altra parte,

$$\mathbf{b}'(s) = [\mathbf{t}'(s)]\wedge\mathbf{n}(s)+[\mathbf{t}(s)]\wedge\mathbf{n}'(s).$$

Figura 6.10: Riferimento mobile su una curva nello spazio



Ora, $\mathbf{t}'(s)$ è colineare con $\mathbf{n}(s)$ e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. Rimane quindi

$$\mathbf{b}'(s) = [\mathbf{t}(s)] \wedge \mathbf{n}'(s)\,.$$

Il vettore $[\mathbf{t}(s)] \wedge \mathbf{n}'(s)$ è ortogonale sia a $\mathbf{t}(s)$ che a $\mathbf{n}'(s)$. E' quindi un multiplo di $\mathbf{n}(s)$. Dunque, per ogni s esiste un numero $\tau(s)$ tale che

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)\,. \tag{6.18}$$

Da qui si trova

$$\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)\,.$$

Essendo $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ identicamente zero, derivando si trova anche che

$$\tau(s) = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}'(s)\,. \tag{6.19}$$

Il numero $\tau(s)$ può essere positivo negativo o nullo. Esso si chiama la $\boxed{\textit{torsione}}$ della curva. Cerchiamo ora di esprimere $\mathbf{n}'(s)$ mediante $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$. Ciò è possibile perchè $\mathbf{n}'(s)$, essendo ortogonale a $\mathbf{n}(s)$, è nel piano di $\mathbf{t}(s)$ e di $\mathbf{b}(s)$. Dunque

$$\mathbf{n}'(s) = \gamma(s)\mathbf{t}(s) + \delta(s)\mathbf{b}(s)\,. \tag{6.20}$$

Moltiplicando scalarmente i due membri di (6.20) per $\mathbf{t}(s)$ ed usando (6.17) si trova

$$\gamma(s) = -k(s)\,.$$

Analogamente, moltiplicando scalarmente (6.20) per $\mathbf{b}(s)$ ed usando (6.19) si trova

$$\delta(s) = \mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) = \tau(s)\,.$$

Si trova quindi che i versori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ verificano

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) &=& k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &=& -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &=& -\tau(s)\mathbf{n}(s)\,. \end{cases}$$

Si chiamano queste le $\boxed{\textit{equazioni di Frenet}}$ per curve di $\mathbb{R}^3$. Il sistema di riferimento dato dai tre versori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ applicati in $\mathbf{r}(s)$ si chiama ancora il *riferimento* $\boxed{\textit{mobile}}$ sulla curva.

6.4.2 Appendice: Curve in $\mathbb{R}^n$

La maggior parte delle considerazioni che abbiamo svolto si estendono senza alcuna difficoltà a curve

$$\gamma: \qquad t \to \mathbf{r}(t)\,, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Per esempio è ancora vero che una curva in $\mathbb{R}^n$ che è semplice è identificata dal suo sostegno a meno dell'orientazione; si definisce ancora la lunghezza dell'arco γ ponendo

$$L_\gamma = \int_a^b ||\dot{\mathbf{r}}(t)||\,\mathrm{d}t\,;$$

è quindi possibile definire il parametro d'arco. La tangente e la normale si definiscono ancora nel medesimo modo come per le curve in $\mathbb{R}^3$. Non esiste invece una unica “binormale”. Per completare il il riferimento mobile sulla curva si devono introdurre, oltre alla tangente ed alla normale, altri $n-2$ vettori e quindi le equazioni di Frenet diventano più complesse.