# Capitolo 5

# Funzioni implicite ed estremi vincolati

I termini "curva" o "superficie" hanno vari significati, tra loro interdipendenti. E' comodo conoscere da subito il significato di curva o superficie parametrica: diremo che una curva è $\boxed{\textit{definita parametricamente}}$ quando è espressa mediante un'equazione

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \qquad t \in (a, b)$$

(se la curva è in $\mathbb{R}^3$ c'è anche una terza componente, $z = z(t)$). Una superficie è definita parametricamente quando è definita mediante una trasformazione da una regione $\Omega$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$,

$$x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,, \qquad (u, v) \in \Omega\,.$$

Osserviamo che ogni grafico di funzione è una curva, o una superficie, definita parametricamente. Infatti, considerando la funzione $f(x)$ della variable $x \in (a, b)$, il suo grafico è identificato dalle equazioni

$$x = t\,, \quad y = f(t) \qquad t \in (a, b)\,.$$

In modo analogo, se la funzione dipende da due variabili $x$ ed $y$, il suo grafico è la superficie parametrica

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = f(u, v)\,.$$

Se accade che una curva è grafico di una funzione $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$, diciamo che $\gamma$ è una $\boxed{\textit{curva cartesiana}}$. In modo analogo si definiscono le $\boxed{\textit{superfici cartesiane}}$ come quelle superfici che sono grafici di funzioni di due variabili. Chiameremo "curva" anche l'insieme immagine della parametrizzazione.

Al Cap. 6 saremo più precisi su questo punto. D'altra parte, si sa che la geometria analitica definisce curve e superfici mediante equazioni: l'equazione $x^2 + y^2 = R^2$ definisce una circonferenza di raggio $R$ (se $R > 0$; altrimenti definisce un solo punto). In questo paragrafo vogliamo dare condizioni perché un'equazione definisca una "curva" o una "superficie" in un senso che spegheremo, e vogliamo studiare problemi di massimo e di minimo "vincolati" a tali curve o superfici.

# 5.1 Insiemi di livello

Sia $F(\mathbf{r})$ una funzione definita su una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}$ e si voglia studiare l'equazione $F(\mathbf{r}) = c$. Gli insiemi

$$\mathcal{F}_c = \{\mathbf{r} \,|F(\mathbf{r}) = c\}$$

si chiamano $\boxed{\textit{insiemi di livello}}$ della funzione $F(\mathbf{r})$. Più precisamente, l'insieme $\mathcal{F}_c$ si chiama l'insieme di livello $c$. Notiamo esplicitamente che l'insieme di livello è un sottinsieme del dominio della funzione e non del suo grafico. Per esempio se $\mathbf{r} = (x, y)$ l'insieme di livello si ottiene concettualmente con i tre passi seguenti:

- si costruisce il grafico della funzione, che è in $\mathbb{R}^3$;
- si taglia il grafico col piano $z = c$;
- si proietta ortogonalmente la sezione ottenuta sul piano $(x, y)$, ottenendo l'insieme $\mathcal{F}_c$.

L'insieme $\mathcal{F}_c$ può avere la natura più varia, come mostrano gli esempi seguenti, nei quali $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $c = 0$:

- **Esempio 1.** Se $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, l'insieme $\mathcal{F}_0$ è vuoto.
- **Esempio 2.** Se $F(x, y) = x^2 + y^2$, l'insieme $\mathcal{F}_0$ è costituito dal solo punto 0.
- **Esempio 3.** Se la funzione $F(x, y)$ è identicamente nulla, $\mathcal{F}_0$ è $\mathbb{R}^2$;
- **Esempio 4.** Se $F(x, y) = (\operatorname{sgn} x) + 1$ allora $\mathcal{F}_0$ è il semipiano $\{(x, y) \,|x < 0\}$;
- **Esempio 5.** Se $F(x, y) = 1 + (\operatorname{sgn} y)(\operatorname{sgn} x)$ l'insieme di livello è l'unione del secondo e quarto quadrante (assi coordinati esclusi).

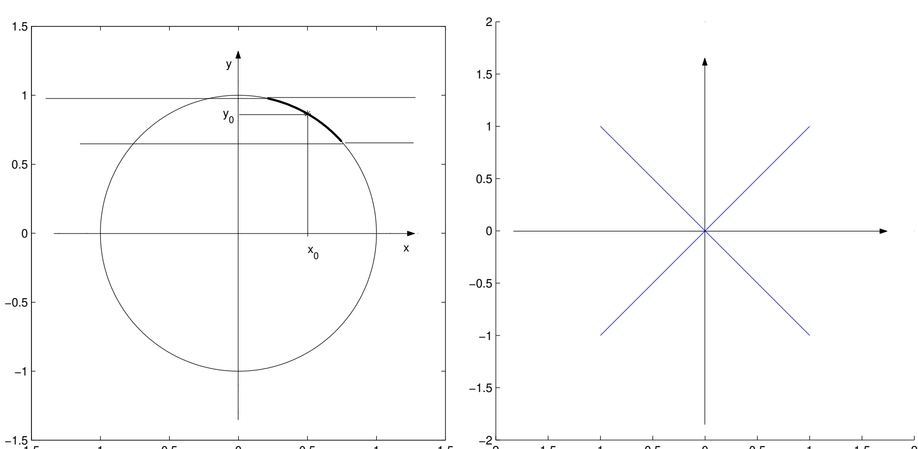
- **Esempio 6.** Se $F(x,y) = y - x^2$ allora $\mathcal{F}_0$ è la parabola $y = x^2$, e quindi è una curva definita parametricamente da $x = t$, $y = t^2$ .
- **Esempio 7.** se $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ allora $\mathcal{F}_0$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Quest'insieme è anche immagine della curva parametrizzata da
$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \qquad t \in [0, 2\pi)\,.$$

Esaminiamo più in dettaglio l'**esempio 7.** Come si è visto, si tratta di una curva parametrica. Se $(x_0, y_0)$ è una soluzione, ossia un punto di $\mathcal{F}_0$, allora anche $(x_0, -y_0)$ è soluzione; e quindi l'insieme delle soluzioni non è un grafico di funzione (univoca). E' però vero che se $|y_0| \neq 0$, tagliando l'insieme delle soluzioni con una striscia

$$y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon\,,$$

con $\epsilon$ abbastanza piccolo, si trova il grafico di una funzione $y = y(x)$. Si veda la figura (5.1), a sinistra. In questo caso particolare è facile determinare

Figura 5.1: Esistenza o non esistenza della funzione implicita




esplictamente la funzione, perché

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{se} y_0 > 0\,, \qquad y(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{se} y_0 < 0\,.$$

Se invece $y_0 = 0$, l'insieme

$$\{(x,y)\ |y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon\} \cap \{(x,y)\ |x^2 + y^2 = 1\}$$

non è grafico di una funzione $y = y(x)$. E' però grafico di una funzione $x = x(y)$. Per contrasto, vediamo l'esempio seguente:

- **Esempio 8** E' ancora $c = 0$ mentre la funzione $F(x, y)$ è

$$x^2 - y^2 = 0\,.$$

  Quest'equazione è soddisfatta dai punti di ambedue le bisettrici e l'intersezione delle bisettrici con un intorno di $O$ non è un grafico, né di una funzione $y = y(x)$ né di una funzione $x = x(y)$, si veda la figura (5.1), a destra.

Si pone quindi questo problema: supponiamo che l'insieme $\mathcal{F}_c$ sia non vuoto, e se ne conosca un suo punto $\mathbf{r_0}$. Vogliamo dare condizioni sotto le quali esiste un intorno $W$ di $\mathbf{r_0}$ tale che $W \cap \mathcal{F}_c$ sia una curva o una superficie cartesiana. Limitandoci al caso $n = 2$ oppure $n = 3$. Se $n = 2$, vogliamo capire se l'equazione

$$F(x, y) = c$$

si può "risolvere" rispetto per esempio ad $y$, intendendo $x$ come "parametro libero" ottenendo come grafico della funzione $(x, y(x))$ l'insieme $W \cap \mathcal{F}_c$; Se $n = 3$, vogliamo capire se l'equazione

$$F(x, y, z) = c$$

si può "risolvere" rispetto per esempio a $z$, intendendo $(x, y)$ come "parametro libero" ottenendo come grafico della funzione $(z, z(x, y))$ l'insieme $W \cap \mathcal{F}_c$. Quando ciò accade, si dice che l'equazione considerata *definisce implicitamente* la funzione, rispettivamente $y = y(x)$ oppure $z = z(x, y)$. Ciò si vedrà nel prossimo paragrafo, nel quale illustreremo anche il caso di un sistema di due equazioni in tre variabili:

$$F_1(x, y, z) = c_1\,, \qquad F_2(x, y, z) = c_2\,.$$

Ci si chiede se, in un opportuno intorno di un punto $(x_0, y_0, z_0)$, è possibile risolvere questo sistema rispetto a due "incognite" per esempio $y$ e $z$, intendendo $x$ come "parametro libero". Se ciò può farsi diremo che si è definita implicitamente una funzione, che si interpreta come curva ottenuta come intersezione di due superfici.

## 5.2 Il teorema della funzione implicita

Ricordiamo il problema: si ha un'equazione (o un sistema di equazioni) di cui si conosce una soluzione: si vuol sapere se l'insieme delle soluzioni è, localmente in un intorno di tale punto, una curva o una superficie cartesiana. Considereremo con qualche dettaglio il caso di equazioni $F(x, y) = c$ mentre ci limiteremo ad enunciare i risultati in due casi più generali.

### 5.2.1 Curve piane definite implicitamente

Ricordiamo il problema che si vuole studiare: Consideriamo l'equazione Sia $(x_0, y_0)$ una soluzione dell'equazione

$$F(x, y) = c\,. \tag{5.1}$$

Vogliamo dare condizioni sufficienti per l'esistenza di un intorno $W$ di $(x_0, y_0)$ e di una funzione $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$ tali che

$$\{(x, y) \in W \;| f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in W \;| y = y(x)\}$$

oppure

$$\{(x, y) \in W \;| f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in W \;| x = x(y)\}\,.$$

La condizione che stiamo cercando è data dal teorema seguente:

**Teorema 159 (della funzione implicita)** $\boxed{\textit{Teorema della funzione implicita}}$
*Sia $F(x, y)$ una funzione di classe $C^1(\Omega)$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Se*

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$$

*esiste un intorno $W$ di $(x_0, y_0)$ tale che*

$$W \cap \{(x, y) \;| F(x, y) = F(x_0, y_0)\}$$

*è grafico di una funzione $y = y(x)$, oppure $x = x(y)$. Più precisamente, se $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ allora l'equazione (5.1) definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ di classe $C_1$, e vale*

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F f_y(x_0, y_0)}\,;$$

*Se $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ allora l'equazione (5.1) definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ di classe $C_1$, e vale*

$$x'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}\,.$$

*Se ambedue le componenti di $\nabla F(x_0, y_0)$ sono non nulle, allora l'equazione $F(x, y) = f(x_0, y_0)$ definisce implicitamente sia una funzione $y = y(x)$ che una funzione $x = x(y)$.*

Presentiamo (una parte della) dimostrazione di questo teorema, fissando l'attenzione sul caso $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Il punto $(x_0, y_0)$ è uno dei punti nel quale vale l'uguaglianza (5.1), ossia si ha

$$F(x, y) = c = F(x_0, y_0)\,. \tag{5.2}$$

In tal caso, proviamo Si ha:

**Teorema 160** *Valga $F(x_0, y_0) = c$. Sia $F(x, y)$ di classe $C^1$ e sia $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sotto queste condizioni,* esistono *un intorno $U$ di $x_0$ ed un intorno $V$ di $y_0$ ed* esiste *un'*unica *funzione $y = y(x)$ definita in $U$ ed a valori in $V$ che ha per grafico l'insieme (5.2) ossia tale che*

- $y(x_0) = y_0$,
- $F(x, y(x)) = c$ *per ogni* $x \in U$,
- $y(x) \in V$.

*Questa funzione è di classe $C^1$ e inoltre*

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}\,. \tag{5.3}$$

**Dim.** Per seguire questa dimostrazione, si guardi la figura 5.2. In questa figura, $x_0 = y_0 = 3$ e il punto $(x_0, y_0)$ è indicato con un asterisco. Per il *teorema della permanenza del segno,* vale $F_y(x, y) > 0$ in un intorno $W$ di $(x_0, y_0)$. Siano $\tilde{U}_0$ un intorno di $x_0$ e $\tilde{V}_0$ un intorno di $y_0$ tali che se $x \in \tilde{U}_0$, $y \in \tilde{V}_0$ allora $(x, y) \in W$. Limitiamoci a considerare le coppie $(x, y)$ con $x \in \tilde{U}_0$, $y \in \tilde{V}_0$. Siano $y_1$, $y_2$ elementi di $\tilde{V}_0$ tali che

$$y_1 < y_0 < y_2\,.$$

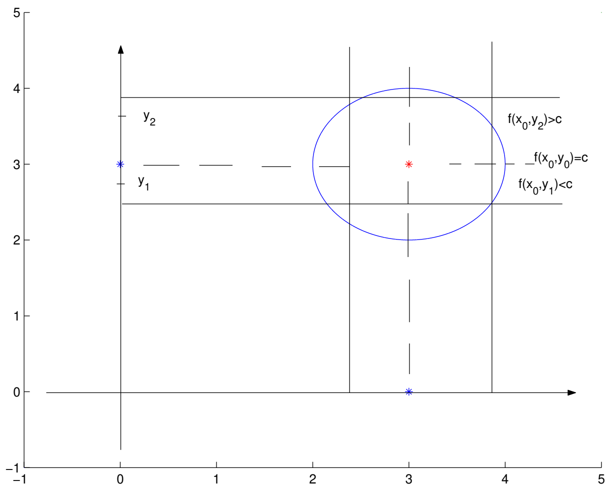
Consideriamo la funzione $\phi(y) = F(x_0, y)$. Questa funzione è continua e strettamente crescente e $\phi(y_0) = c$. Dunque, $\phi(y_1) < c$, $\phi(y_2) > c$. Il *Teorema della permanenza del segno* mostra l'esistenza di un intorno $U \subseteq \tilde{U}_0$ di $x_0$ tale che

$$F(x, y_1) < c\,, \qquad F(x, y_2) > c \qquad \forall x \in U\,;$$

e, per ogni fissato $x \in U$, la funzione $y \to F(x, y)$ è strettamente crescente. Dunque, per $x$ fissato, esiste un unico numero $y = y(x) \in \tilde{V}$ tale che

$$F(x, y(x)) = c\,.$$

Figura 5.2: La dimostrazione del teorema della funzione implicita




Ciò prova l'esistenza della funzione $y(x)$. Omettiamo la dimostrazione della regolarità. Accettando il fatto non provato che $y(x)$ è derivabile, si derivino i due membri dell'uguaglianza

$$F(x, y(x)) = 0\,.$$

Si trova, per il Teorema 135,

$$0 = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x)$$

e quindi

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}\,.$$

Calcolando per $x = x_0$ si trova la (5.3) ∎ La funzione $y = y(x)$ cosìcostruita si dece $\boxed{\textit{definita implicitamente}}$ dall'equazione (5.1).

## 5.2.2 Superfici definite implicitamente

Consideriamo ora l'equazione

$$F(x, y, z) = c = F(x_0, y_0, z_0)\,. \tag{5.4}$$

Vogliamo dare condizioni sotto le quali sia possibile considerare due delle tre variabili come "parametri liberi" e risolvere rispetto alla terza, ottenendo quindi per esempio una $\boxed{\textit{funzione implicita}}$

$$z = z(x, y)$$

che interpretiamo come equazione cartesiana di una superficie. Limitiamoci ad enunciare il teorema che dà una condizione solamente sufficiente per l'esistenza della funzione implicita.

**Teorema 161** *Sia $F(\mathbf{r}, z)$ una funzione a valori reali della variabile $(\mathbf{r}, z) \in \mathbb{R}^n$ ( $z$ indica l'ultima componente del vettore $(\mathbf{r}, z)$ e pertanto è un numero reale). Supponiamo che la funzione sia di classe $C^1$ e che valga*

$$F(\mathbf{r_0}, z_0) = c\,, \qquad F_y(\mathbf{r_0}, z_0) \neq 0\,.$$

*Esiste un intorno $W$ di $(\mathbf{r_0}, z_0)$ ed esiste un'unica funzione $z = z(\mathbf{r})$ tale che*

$$\{(\mathbf{r}, z) \in W \mid F(\mathbf{r}, z) = c = F(\mathbf{r_0}, z_0)\} = \{(\mathbf{r}, z) \in W \mid z = z(\mathbf{r})\}\,.$$

*La funzione $z(\mathbf{r})$ è di classe $C^1$ ed il suo gradiente è (indicando con $x^1$,..., $x^{n-1}$ le componenti di $\mathbf{r}$)*

$$-\frac{1}{F_z(\mathbf{r_0}, z_0)} \left[\begin{array}{cccc} F_{x^1}(\mathbf{r_0}, z_0) & F_{x^2}(\mathbf{r_0}, z_0) & \dots & F_{x^{n-1}}(\mathbf{r_0}, z_0) \end{array}\right]'\,. \qquad \blacksquare$$

Nel caso particolare $\mathbf{r} = (x, y)$ la funzione che si trova è

$$z = z(x, y)\,,$$

ossia la rappresentazione parametrica di una superficie cartesiana.

**Osservazione 162** Il teorema precedente si può applicare ad una qualsiasi delle variabili, purché la derivata parziale relativa sia non nulla; per esempio, si potrà applicare alla prima invece che all'ultima componente. ∎

### 5.2.3 Curve intersezione di due superfici

Studiamo ora un sistema di due equazioni in tre incognite. Consideriamo prima di tutto un esempio:

**Esempio 163** Studiamo il problema

$$x^2 + y = 1\,, \qquad y - x + z = 0\,.$$

Questo sistema può scriversi come

$$z = x^2 + x - 1\,, \qquad y = 1 - x^2\,,$$

ossia il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni valore di $x$. Diremo che questo sistema definisce implicitamente le due funzioni $z(x) = x^2 + x - 1$ e $y(x) = 1 - x^2$ o meglio diremo che definisce una funzione della variabile reale $x$, a valori in $\mathbb{R}^2$. ∎

Consideriamo in generale il sistema delle due equazioni in tre incognite

$$f(x, y, z) = c\,, \qquad g(x, y, z) = d\,. \tag{5.5}$$

Supponiamo che $(x_0, y_0, z_0)$ risolva questo sistema e, fissato $x_0$, consideriamo la funzione $\mathbf{F}(y, z)$ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(y, z) = \begin{bmatrix} F(x_0, y, z) \\ G(x_0, y, z) \end{bmatrix}.$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è

$$j(x_0, y, z) = \det \begin{bmatrix} F_y(x_0, y, z) & F_z(x_0, y, z) \\ F_y(x_0, y, z) & F_z(x_0, y, z) \end{bmatrix}.$$

Vale:

**Teorema 164** *Siano $F(x, y, z)$ e $F(x, y, z)$ funzioni di classe $C^1$ e sia*

$$j(x_0, y_0, z_0) \neq 0\,.$$

*Esiste un intorno $W$ di $(x_0, y_0, z_0)$ ed una unica funzione di classe $C^1$*

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

*da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, tale che*

$$\{\ (x, y, z) \in W,\ \textit{soluzioni di (5.5)}\} = \{(x, y, z)\ |y = \phi(x), z = \psi(x)\}\,.$$

*La derivata della funzione $x \to \begin{bmatrix} \phi(x) & \psi(x) \end{bmatrix}'$ è*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \phi(x_0) \\ \psi(x_0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ G_x(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}.$$

Omettiamo la dimostrazione. Naturalmente diremo che la funzione (5.6) è *definita* $\boxed{\textit{implicitamente}}$ dal sistema di equazioni (5.5).

## 5.3 Il teorema della funzione inversa ed i cambiamenti di variabili

Il $\boxed{\textit{teorema della funzione inversa}}$ si può vedere come ulteriore caso del teorema della funzione implicita, nel caso in cui l'equazione da risolvere sia

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

ma conviene vederlo come studio dei $\boxed{\textit{cambiamenti di variabile}}$. Cominciamo ad illustrarlo nel caso più semplice $n = 1$. Abbiamo quindi una funzione $F(x)$ di una sola variabile $x$ definita su un intervallo $(a, b)$ ed ivi di classe $C^1$. Se la sua derivata non si annulla, si ha $F'(x) > 0$ oppure $F'(x) < 0$ in ogni punto di $(a, b)$ e quindi $F(x)$ è strettamente monotona su $(a, b)$. Dunque è invertibile. E' naturale investigare se l'osservazione precedente possa estendersi al caso di funzioni di più variabili. Lo studio di questo problema conduce al "teorema della funzione inversa", di cui ora illustriamo l'interesse. Abbiamo visto che talvolta conviene rappresentare i punti di $\mathbb{R}^3$ mediante coordinate sferiche oppure, a seconda delle applicazioni, cilindriche. In altri casi si usano coordinate ellittiche che, sul piano, sono date dalle trasformazioni

$$x = ra\cos\theta\,, \qquad y = rb\sin\theta\,, \qquad r > 0\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

In generale si ha questa situazione: si hanno due regioni $\Omega$ ed $\Omega'$ di $\mathbb{R}^n$ (conviene considerarle in due "copie diverse" di $\mathbb{R}^n$) e una trasformazione invertibile $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ da $\Omega'$ con immagine uguale ad $\Omega$. In questo caso i punti di $\Omega$ si possono rappresentare, invece che con le loro coordinate cartesiane, con quelle del punto $\mathbf{r}$ di $\Omega'$ che univocamente gli corrisponde. Per esempio lavorando con coordinate polari nel piano,

$$\mathbf{r} = (r, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi)\,, \qquad \mathbf{x} = (x, y)\ :\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\,. \end{cases}$$

Questa è una trasformazione invertibile dalla striscia $\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ alla regione $\Omega$ che è il piano $\mathbb{R}^2$ privato del semiasse $\{(x, y)\,, x \leq 0\}$. Per molte applicazione è necessario che la trasformazione sia oltre che invertibile anche differenziabile e con inversa essa stessa differenziabile. In pratica non è difficile riconoscere che la trasformazione con cui si lavora è differenziabile, e spesso anche riconoscere che è invertibile; è più difficile calcolare esplicitamente l'inversa e verificare che essa è differenziabile. Fortunatamente il teorema seguente dà una condizione sufficiente per l'invertibilità (si noti: solamente locale) e per la differenziabilità della funzione inversa.

**Teorema 165 (teorema della funzione $\boxed{\text{inversa}}$)** *Sia* $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ *una funzione definita su un aperto* $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ *ed a valori in* $\mathbb{R}^n$*, di classe* $C^1(\Omega')$*. Sia* $\mathbf{r_0} \in \Omega'$ *un punto in cui il determinante jacobiano è* diverso da zero:

$$\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0}) \neq 0\,.$$

*Sotto tali condizioni esistono un aperto* $A$ *contenente* $\mathbf{r_0}$ *ed un aperto* $B$ *contenente* $\mathbf{x_0} = \mathbf{F}(\mathbf{r_0})$ *con queste proprietà:*

- *la funzione* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *è biunivoca su* $A$*, con immagine uguale a* $B$*. La restrizione di* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *all'aperto* $A$ *ammette quindi funzione inversa definita sull'aperto* $B$*. Indichiamola col simbolo* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$*.*

- *La funzione* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *è di classe* $C^1(B)$*;*

- *vale*

$$J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x_0}) = [J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0})]^{-1}\,, \qquad \mathbf{x_0} = \mathbf{F}(\mathbf{r_0})\,. \tag{5.7}$$

  *Ossia, la matrice jacobiana delle funzione inversa* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *calcolata in* $\mathbf{x_0}$ *è* $[J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0})]^{-1}$*.*

Si noti che, accettando la differenziabilità della funzione inversa, la formula per $J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x_0})$ discende dalla formula di derivazione a catena. Infatti, sia $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ la funzione inversa di $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e supponiamo di sapere che la funzione $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ è differenziabile. Per la definizione di funzione inversa,

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}\,.$$

La matrice jacobiana della trasformazione $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$ è $I$, la matrice identità. Dunque, dalla formula di derivazione a catena,

$$I = J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x_0})J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0})\,, \qquad x_0 = \mathbf{F}(\mathbf{r_0})$$

ossia

$$J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x_0}) = [J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0})]^{-1}\,.$$

E' importante notare che il teorema della funzione inversa afferma:

1. l'invertibilità locale;

2. la regolarità dell'inversa.

Invece, l'invertibilità su tutta $\Omega$ generalmente non vale, come prova il caso delle coordinate polari nel piano. Per esse, lo jacobiano è uguale ad $r$ e quindi non nullo per $r > 0$ e qualunque $\theta$; ma se vogliamo una trasformazione biunivoca dobbiamo imporre a $\theta$ di appartenere ad un intervallo di lunghezza non maggiore di $2\pi$. Il teorema della funzione inversa ha numerose dimostrazioni,

tutte interessanti. In appendice mostriamo una dimostrazione nel caso di una trasformazione da $\mathbb{R}^2$ in sé, basata sul teorema della funzione implicita.

In questo capitolo assumeremo che $F$ sia di classe $C^1$ e che gli zeri di $\nabla F$ siano isolati. Ricordiamo che i punti nei quali $\nabla F(x_0, y_0) = 0$ si chiamano *punti critici* della funzione $F$.

## 5.4 Ulteriori esempi

Ricordiamo che il *Teorema della funzione implicita* dà una condizione sufficiente perchè un insieme di livello sia localmente grafico di una funzione: se $F(x, y)$ è di classe $C^1$, se esiste $(x_0, y_0)$ tale che $F(x_0, y_0) = c$ e se $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste un intorno $W$ di $(x_0, y_0)$ la cui intersezione con l'insieme di livello è grafico di una (unica) funzione

$$y = y(x)\,.$$

Analogo risultato vale se $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. In questo caso la funzione è $x = x(y)$. Si ricordi che questa condizione è solamente sufficiente, e non necessaria, come prova l'esempio seguente:

**Esempio 166** La funzione $F(x, y) = (x - y)^2$ definisce implicitamente la funzione $x = y$. Ma in $(0, 0)$ le sue derivate sono identicamente nulle. ∎

Fissiamo un punto $(x_0, y_0)$ tale che $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. Chiamiamo *curva di livello* o *curva definita implicitamente* l'insieme

$$\gamma = \{(x, y)\,|F(x, y) = F(x_0, y_0)\}\,.$$

Si noti che potrebbero esistere punti $(x, y) \in \gamma$ nei quali il gradiente si annulla. Noi abbiamo richiesto solamente che $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. Ovviamente, ogni grafico di funzione è una curva definita implicitamente dall'equazione

$$F(x, y) = y - f(x) = 0\,.$$

Si ricordi che avevamo già notato che gni grafico di funzione è anche curva definita parametricamente. Se $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, esiste un intorno $W$ di $(x_0, y_0)$ tale che $W \cap \gamma$ è grafico di una funzione. Per esempio di una funzione $y = y(x)$. E' quindi possibile definire la tangente in $(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$ a tale grafico. Per definizione, la chiamiamo $\boxed{\textit{tangente alla curva}}$ $\gamma$ nel punto $(x_0, y_0)$. La retta tangente è

$$\begin{aligned} y &= y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \\ &= y(x_0) - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Essendo $F(x, y(x))$ identicamente nulla, la sua derivata è zero. La derivata per $x = x_0$ è

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & y'(x_0) \end{array}\right],$$

ossia, $\nabla F(x_0, y_0)$ è ortogonale alla tangente. Per definizione, diremo che il gradiente è $\boxed{\textit{ortogonale}}$ *alla curva.* Si ha quindi: Dunque:

**Teorema 167** *Sia $\gamma$ è una curva di livello di una funzione $F(x, y)$ di classe $C^1$. Il gradiente di $F(x, y)$ in ciascuno dei punti di $\gamma$ che non sono punti cretici di $F$, è ortogonale alla curva stessa.*

Per concludere, mostriamo che niente può dirsi nei punti nei quali le condizioni del teorema della funzione implicita non valgono. Abbiamo già visto (esempio 166) una funzione che non soddisfa alle condizioni del teorema della funzione implicita, ma che definisce implicitamente una funzione regolare. D'altra parte:

**Esempio 168** Consideriamo l'equazione

$$F(x, y) = y^2 - x^2 = 0\,.$$

Le due derivate parziali si annullano in $(0, 0)$. L'equazione si risolve facilmente, trovando le soluzioni

$$y = x\,, \qquad y = -x\,.$$

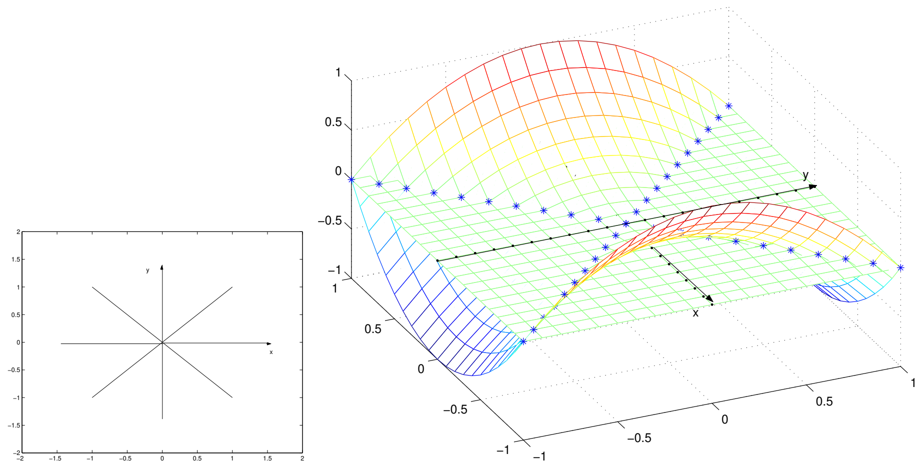
La figura 5.3 a sinistra mostra che l'insieme di livello non è una curva cartesiana in nessun intorno dell'origine. A destra mostra la superficie (un paraboloide a sella) di cui si considera l'insieme di livello. Consideriamo ora l'equazione

$$F(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

Ancora si annullano le due derivate parziali di $F(x, y)$ in $(0, 0)$. L'equazione definisce però un'unica funzione,

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,.$$

Figura 5.3: Il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$




Questa funzione non è derivabile in $y = 0$. Il suo grafico è nella figura 5.4, a destra mentre a sinistra è rappresentata la funzione di cui si calcola la curva di livello. ∎

Infine, consideriamo l'esempio seguente

**Esempio 169** La funzione che si considera è

$$f(x, y) = \{[(x-2)^2 + y^2][(x+2)^2 + y^2]\}^{1/5}\,, \tag{5.8}$$

il cui grafico è riportato nella figura 5.5, a sinistra. A destra si riportano alcune delle sue curve di livello, corrispondenti a varie quote. Si noti che, per quote basse, la "curva di livello" si spezza in due curve e per quota uguale a 0 si riduce a due punti (i due punti di minimo della funzione). La funzione ha un punto di sella di coordinate (0,0, 1). La curva di livello 1 ha un "punto doppio" in $(0, 0)$. ∎

Il teorema della funzione implicita asserisce che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ (ed $f(x, y)$ è di classe $C^1$) allora in un intorno di $(x_0, y_0)$ la curva di livello

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

è grafico di una funzione $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$. Si sa già che curva di livello può essere un grafico anche se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. L'esempio seguente ribadisce questo fatto.

Figura 5.4: Esiste la funzione implicita anche se le condizioni del teorema non sono soddisfatte

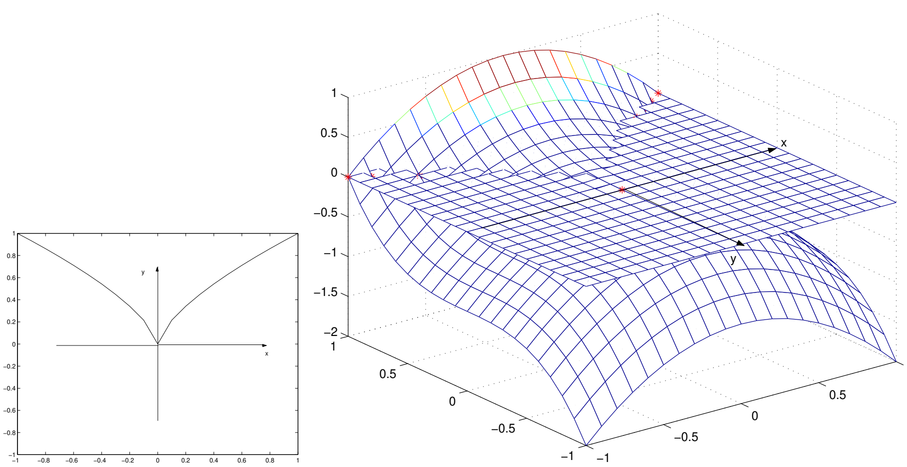
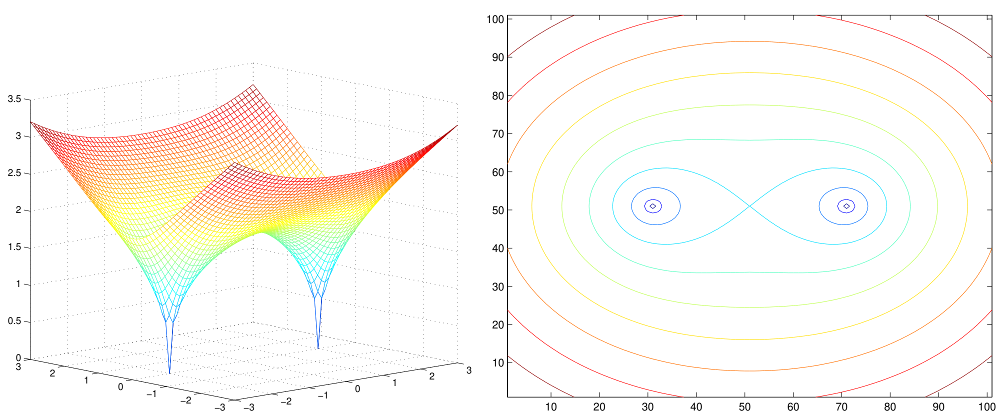



Figura 5.5: Il grafico della funzione (5.8)



**Esempio 170** La funzione è

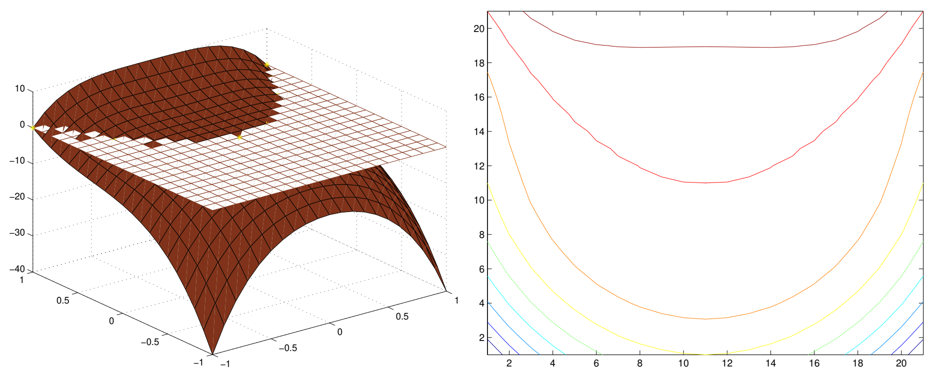
$$f(x,y) = y^3 - x^2y^2 + x^2y - x^4$$

e il punto $(x_0, y_0)$ è $(0,0)$. E': $\nabla f(0,0) = 0$. Ciò nonostante, la curva di livello $f(x,y) = f(0,0) = 0$ è la parabola $y = x^2$ perché

$$f(x,y) = (y - x^2)(y^2 + x^2)\,.$$

La figura 5.6 mostra a sinistra il grafico di $z = f(x,y)$ e la sua intersezione col piano $z = 0$; a destra varie curve di livello della funzione.

Figura 5.6: Gradiente nullo ma curva di livello regolare



### 5.4.1 Superfici assegnate in modo implicito e curve intersezione di due superfici

Cosìcome le curve, anche le superfici possono assegnarsi in modo implicito. Sia $F(\mathbf{r}) = F(x,y,z)$ una funzione di tre variabili, di classe $C^1$, e si voglia risolvere l'equazione

$$F(x,y,z) = c\,.$$

Sia $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto che verifica l'equazione. Dal *Teorema delle funzioni implicite* si sa che se

$$F_z(\mathbf{r}_0) \neq 0$$

allora esiste un intorno $W$ di $\mathbf{r_0}$ ed esiste una funzione $z = \phi(x,y)$ per cui

$$\{(x,y,z) \in W \mid F(x,y,z) = c\} = \{(x,y,z) \in W \mid z = \phi(x,y)\}\,.$$

Ossia, localmente l'insieme delle soluzioni è il grafico della funzione $z = \phi(x, y)$. Discorso analogo vale se una delle altre due derivate parziali è non nulla. Di conseguenza, se $\nabla F(x, y, z)$ non si annulla, ogni insieme di livello di $F(\mathbf{r})$ è "fatto di tanti pezzi di grafici, e quindi di superfici". Usa considerare anche un tale insieme una *superficie* definita però in modo $\boxed{\textit{implicito}}$. Si abbiano ora due superfici definite in modo implicito da

$$f(x, y, z) = c\,, \qquad g(x, y, z) = d\,.$$

I punti $(x, y, z)$ che appartengono all'intersezione dei due sostegni risolvono il sistema

$$f(x, y, z) = c\,, \qquad g(x, y, z) = d\,. \tag{5.9}$$

Sia $(x_0, y_0, z_0)$ una soluzione di questo sistema. Se lo jacobiano

$$\det \begin{bmatrix} f_y(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

non è nullo, si sa (dal Teorema 164) che l'insieme delle soluzioni di (5.9) che appartiene ad un opportuno intorno $W$ di $(x_0, y_0, z_0)$ ha forma

$$y = \phi(x)\,, \qquad z = \psi(x)$$

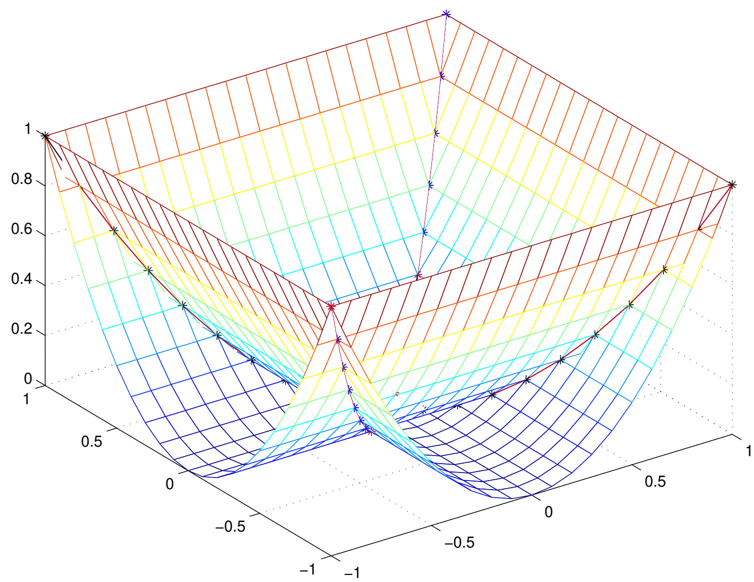
e quindi è una curva cartesiana di $\mathbb{R}^3$; ossia, localmente l'insieme delle soluzioni di (5.9) è una curva. Chiameremo ancora $\boxed{\textit{curva}}$ l'insieme di tali soluzioni e, più precisamente, diremo che si tratta di una curva ottenuta come intersezione di due superfici. La figura 5.7 illustra l'intersezione dei due cilindri $z = x^2$ e $z = y^2$.

## 5.5 Estremi vincolati

Diremo che un punto $\mathbf{r}_0$, rispettivamente o di $\gamma$ o di $\Sigma$, è un *massimo relativo,* oppure *un minimo relativo,* di $g(\mathbf{r})$ $\boxed{\textit{vincolato}}$ a $\gamma$ o a $\Sigma$ quando è un massimo o un minimo della restrizione di $g(\mathbf{r})$ alla curva $\gamma$ o, rispettivamente, alla superficie $\Sigma$. In questo capitolo vogliamo dare condizioni necessarie per gli estremi vincolati, che estendano la condizione "derivata prima nulla nei punti estremi".

**Osservazione 171** Daremo condizioni solamente necessarieche devono venir soddisfatte da un punto $\mathbf{r_0}$ di massimo o di minimo vincolato ad una curva $\gamma$ o ad una superficie $\Sigma$, definite implicitamente come curve, rispettivamente superficie, di livello di una funzione di classe $C^1$. Quindi interessa solamente

Figura 5.7: Intersezione di due cilindri




considerare il comportamento di $F$ e di $g$ in un intorno di $\mathbf{r_0}$. Dunque, non sarà necessario assumere che il gradiente di $F$ sia ovunque diverso da zero. Basterà assumere che sia $\nabla F(\mathbf{r_0}) \neq 0$. Per continuità, il gradiente $\nabla F(\mathbf{r})$ sarà diverso da zero in un intorno di $\mathbf{r_0}$. ∎

Esamineremo con qualche dettaglio il caso degli estremi vincolati ad una curva piana e, per sommi capi, il caso degli estremi vincolati ad una superficie ed ad una curva dello spazio.

### 5.5.1 Estremi vincolati ad una curva piana

Considerando ancora il caso di funzioni di due variabili, vogliamo studiare gli estremi di una funzione $g(x,y)$ vincolati ad una curva $\gamma$; ossia, considerando i punti di minimo[1], vogliamo studiare quei punti $(x_0,y_0)$ del sostegno di $\gamma$ con questa proprietà: esiste un intorno $I$ di $(x_0,y_0)$ tale che se $(x,y) \in I$ appartiene anche al sostegno di $\gamma$ allora si ha

$$g(x_0,y_0) \leq g(x,y)\,.$$

[1] i punti di massimo si trattano in modo analogo

Ovviamente, un caso è banale: se la curva $\gamma$ è descritta parametricamente,

$$x = x(t)\,, y = y(t) \qquad t \in (a, b)$$

il problema si riduce a studiare i punti di minimo relativo della funzione di una sola variabile $t \to g(x(t), y(t))$. Il caso interessante è il caso in cui la curva è descritta in modo implicito. Il problema di caratterizzare i punti di minimo ha carattere locale e, come si è detto, nell'intorno di un punto nel quale il gradiente non si annulla, ogni curva di livello può scriversi in forma parametrica. Però, in pratica, trovarne l'espressione parametrica è tutt'altro che facile. Vogliamo quindi dare una condizione necessaria soddisfatta dai punti di minimo, senza dover esplicitare la curva di livello. Ricapitolando, è data una una funzione $F(x, y)$ di classe $C^1$ e un punto $(x_0, y_0)$. Assumiamo

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq 0\,.$$

E' data una funzione $g(x, y)$ di classe $C^1$ e supponiamo che $(x_0, y_0)$ sia punto di minimo della $g(x, y)$ vincolato alla curva di livello

$$F(x, y) = F(x_0, y_0)\,.$$

Una condizione necessaria che deve essere soddisfatta è data dal teorema seguente.

**Teorema 172** *Siano $F(x, y)$ e $g(x, y)$ funzioni di classe $C^1$ su una regione $\Omega$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto tale che*

$$\nabla F(x_0, y_0) \neq 0\,.$$

*Sia $\gamma$ la curva di livello*

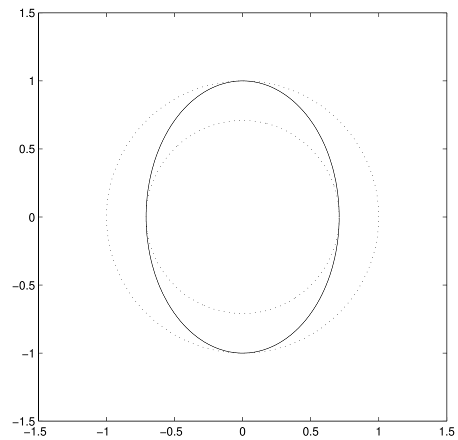
$$F(x, y) = F(x_0, y_0)\,.$$

*Sia $(x_0, y_0)$ un punto di massimo o di minimo di $g(x, y)$, vincolato alla curva $\gamma$. In tal caso esiste un numero $\lambda$ tale che*

$$\nabla g(x_0, y_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0)\,.$$

Il numero $\lambda$ si chiama *moltiplicatore di Lagrange* e quando si usa il teorema precedente per la ricerca degli estremi vincolati si diche che si usa il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*. Posponiamo la dimostrazione formale del teorema e presentiamone prima di tutto una giustificazione di tipo geometrico.

Figura 5.8: Estremi vincolati e curve di livello




**Considerazioni geometriche che giustificano il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.** Fissiamo l'attenzione sul punto $(x_0, y_0)$ di $\gamma$ e consideriamo la curva di livello $\sigma$ di $g(x, y)$,

$$\sigma : \qquad g(x, y) = g(x_0, y_0) .$$

Il punto $(x_0, y_0)$ appartiene sia a $\gamma$ che a $\sigma$. Supponiamo che la $\gamma$ passi da una parte all'altra di $\sigma$. In questo caso la $\gamma$ passa da una parte del piano in cui vale

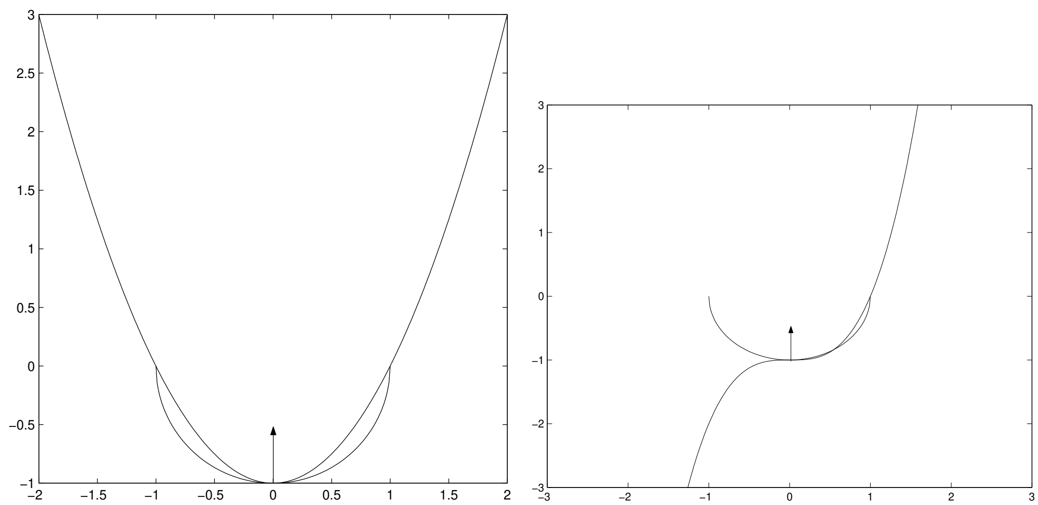
$$g(x, y) < g(x_0, y_0)$$

ad una parte del piano in cui vale

$$g(x, y) > g(x_0, y_0)$$

e quindi il punto $(x_0, y_0)$ non è né di massimo né di minimo. Dunque, nei punti di massimo e di minimo vincolati, le due curve di livello $\gamma$ e $\sigma$ si toccano senza attraversarsi. La fig. 5.8 illustra questo caso. Usando gli sviluppi di Taylor si prova che le due curve $\gamma$ e $\sigma$ si attraversano nel loro punto comune $(x_0, y_0)$ se le tangenti in tale punto si attraversano. Dunque nei punti di massimo e di minimo vincolato le due curve devono avere la medesima retta tangente e quindi la medesima retta normale. Questo caso è illustrato dalla figura 5.9 a sinistra mentre la figura 5.9 a destra mostra che le due curve di livello possono attraversarsi anche nel caso in cui le tangenti coincidono. Sappiamo che la normale ad una curva di livello è nella direzione del gradiente della funzione e

Figura 5.9: Grafici tangenti e estremi vincolati



quindi nei punti di massimo oppure di minimo vincolato, $\nabla F(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono vettori colineari: esiste un numero $\lambda$ tale che $\nabla g(x_0, y_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0)$. Dunque, studiando il sistema della tre equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \\ \lambda F_x(x,y) = g_x(x,y) \\ \lambda F_y(x,y) = g_y(x,y) \end{array} \right. \tag{5.10}$$

nelle tre incognite $\lambda$, $x$ ed $y$, si determinano dei punti tra i quali necessariamente si trovano gli estremi vincolati di $g(x,y)$.

**Osservazione 173** Gli argomenti di tipo geometrico che abbiamo usato non sono rigorosi e inoltre fanno intervenire la curva di livello $\sigma$. Dunque implicitamente richiedono di lavorare in punti nei quali il gradiente della funzione $g(x,y)$ non si annulla. Il teorema vale però anche se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$. Infatti, la dimostrazione analitica presentata più avanti non fa uso di condizioni sul gradiente di $g(x,y)$. I punti nei quali si annulla il gradiente di $g(x,y)$ si trovano dalle (5.10) scegliendo $\lambda = 0$. ∎

## Alcuni esempi

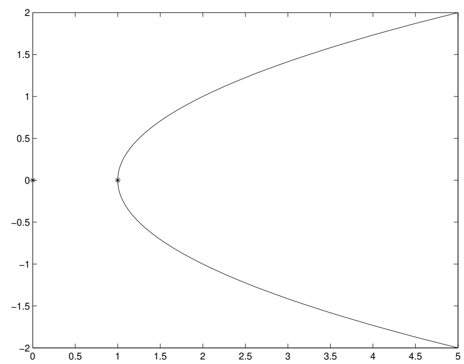
**Esempio 174** Si voglia calcolare il punto su una curva piana, più vicino all'origine; ossia si voglia minimizzare sulla curva la funzione

$$g(x,y) = x^2 + y^2 \,.$$

Consideriamo il caso delle quattro curve seguenti:

- la curva è implicitamente definita da
$$y^2 - x + 1 = 0$$
ed è rappresentata in figura 5.10. E' facile vedere geometricamente che

Figura 5.10




il punto del sostegno più vicino all'origine è il punto $(1, 0)$ e questo è l'unico punto per cui esiste un $\lambda$ tale che
$$\begin{cases} y^2 - x + 1 = 0 \\ -1 + 2\lambda x = 0 \\ y + \lambda y = 0\,. \end{cases}$$
Il valore di $\lambda$ è $1/2$.

- Se $F(x, y) = (y^2 - x + 1)^2$ si ha il medesimo problema; ma ora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange non è applicabile perchè le derivate parziali di $F(x, y)$ si annullano contemporaneamente. Tentando ugualmente di scrivere il sistema (5.10) si trova
$$\begin{cases} (y^2 - x + 1)^2 = 0 \\ -(y^2 - x + 1) + \lambda x = 0 \\ 2(y^2 - x + 1) + \lambda = 0\,. \end{cases}$$
Questo sistema non dà informazioni perché scegliendo $\lambda = 0$ si vede che ogni $(x, y)$ per cui $y^2 - x + 1 = 0$ risolve le tre equazioni.

- Sia invece $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Ovviamente, ogni punto della circonferenza minimizza la distanza. Però le due derivate parziali di $F(x,y)$ si annullano in $(0,0)$. Dato che $(0,0)$ non appartiene alla curva, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può usarsi. Il sistema (5.10) è ora

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0\,. \end{cases}$$

  Ogni valore $(x,y)$ per cui $x^2+y^2 = 1$ risolve questo sistema (con $\lambda = -1$).

- Sia $F(x,y) = 2x^2+y^2-1$. Ancora, ambedue le derivate parziali di $F(x,y)$ si annullano in $(0,0)$, che però non appartiene alla curva. Dunque, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può usarsi. Il sistema (5.10) diviene:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x + \lambda x = 0 \\ y + \lambda y = 0\,. \end{cases}$$

  Le soluzioni sono ora

$$\begin{array}{lll} x = 0 & y = \pm 1 & \text{con } \lambda = -1 \\ y = 0 & x = \pm 1/\sqrt{2} & \text{con } \lambda = -2. \end{array}$$

  Dato che $f(x,y)$ è l'ellisse in figura 5.8, i punti $(\pm\sqrt{2},0)$ sono di minimo mentre $(0,\pm 1)$ sono di massimo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, essendo solo basato sullo studio delle derivata prima, non permette di distinguere un caso dall'altro. ∎

Infine, applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per il calcolo dei punti estremi di una funzione di una sola variabile.

**Esempio 175** Sia $g_0(x)$ una funzione derivabile della sola variable $x \in \mathbb{R}$. Introduciamo la funzione $g(x,y)$ di due variabili, costante rispetto ad $y$, data da

$$g(x,y) = g_0(x)\,.$$

Calcolare i punti estremi di $g_0(x)$ è come calcolare i punti estremi della funzione $g(x,y)$ vincolati alla curva

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{ove } F(x,y) = y\,.$$

Si noti che la funzione $F(x,y)$ è di classe $C^1$ ed ha gradiente non nullo:

$$\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi i punti estremi si possono calcolare mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ossia risolvendo il sistema seguente nelle tre incognite $x$, $y$ e $\lambda$:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 & \text{ossia} \quad y = 0 \\ \\ \nabla g(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) & \text{ossia} \quad \begin{cases} g_0'(x) = 0 \cdot \lambda \\ 0 = 1 \cdot \lambda \end{cases} \end{cases}$$

La prima riga impone di limitarsi a considerare punti dell'asse delle ascisse. Dall'ultima riga si vede che deve essere $\lambda = 0$. La penultima impone di guardare i valori di $x$ per cui $g_0'(x) = 0$. Si ritrova quindi la condizione che la derivata prima deve annullarsi nei punti estremi. ∎

### Dimostrazione analitica del Teorema di Lagrange

Vediamo ora una dimostrazione analitica del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che si presta a ulteriori generalizzazioni. Valgano le ipotesi del teorema e sia $(x_0, y_0)$ un punto di estremo di $g(x,y)$ vincolato alla curva di livello

$$F(x,y) = c = F(x_0, y_0)\,.$$

Dato che la funzione $F(x,y)$ è di classe $C^1$ e che $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione $F(x,y) = c$ definisce una curva piana, in un opportuno intorno di $(x_0, y_0)$ che si può esprime localmente mediante l'equazione $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$. Per fissare le idee supponiamo che valga la rappresentazione $y = y(x)$ cosìche

$$F(x, y(x)) = c\,. \tag{5.11}$$

Il punto $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ è un punto di minimo vincolato per la funzione $g(x,y)$. Questo vuol dire che esiste un intorno $I$ di $x_0$ tale che se $x \in I$ allora vale

$$F(x, y(x)) = 0\,, \qquad g(x_0, y_0) \leq g(x, y(x))\,.$$

Imponendo che sia nulla la derivata prima di $g(x, y(x))$ per $x = x_0$ si trova

$$0 = \frac{\mathrm{d}g(x_0, y(x_0))}{\mathrm{d}x} = g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0) y'(x_0)\,.$$

Si ha quindi

$$0 = g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0) y'(x_0)\,. \tag{5.12}$$

Dal Teorema della funzione implicita si sa che

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}\,.$$

Sostituendo in (5.12) si trova

$$g_x(x_0,y_0)+\frac{-g_y(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}F_x(x_0,y_0)=0\,.$$

Dunque, posto

$$\lambda=\frac{g_y(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\,,$$

si vede che

$$g_x(x_0,y_0)=\lambda F_x(x_0,y_0)\,.$$

Anche le derivate rispetto ad $y$ verificano l'uguaglianza analoga,

$$g_y(x_0,y_0)=\lambda F_y(x_0,y_0)\,,$$

col medesimo valore di $\lambda$. Infatti,

$$g_y(x_0,y_0)-\lambda F_y(x_0,y_0)=g_y(x_0,y_0)+\frac{-g_y(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}F_y(x_0,y_0)=0\,.$$

Ciò completa la dimostrazione.

### 5.5.2 Estremi vincolati ad una superficie

Siano $F(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ due funzioni di classe $C^1$, definite in un intorno $U$ di $(x_0,y_0,z_0)$. Supponiamo che sia $F(x_0,y_0,z_0)=c$. Si ricordi che $(x_0,y_0,z_0)$ è *punto di minimo* di $g(x,y,z)$, $\boxed{\textit{vincolato}}$ a $F(x,y,z)=c$ se

$$F(x,y,z)=c \quad \text{implica} \quad g(x_0,y_0,z_0)\le g(x,y,z)\,.$$

La definizione si estende facilmente ai punti di massimo vincolato. Vale:

**Teorema 176** *Sia $(x_0,y_0,z_0)$ un punto di minimo o di massimo, vincolato a $F(x,y,z)=c$. Supponiamo che il gradiente di $F(x,y,z)$ non si annulli in $(x_0,y_0,z_0)$. Allora esiste un numero $\lambda$ per cui*

$$\lambda\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\nabla g(x_0,y_0,z_0)\,. \tag{5.13}$$

**Dim.** Studiamo il caso del punto di minimo. Per fissare le idee, supponiamo che sia $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Si espliciti $F(x,y,z)$ rispetto alla variabile $z$. Il punto $(x_0,y_0,z_0)$ è di minimo vincolato alla condizione $z-z(x,y)=0$, ossia, la funzione

$$g(x,y,z(x,y))$$

ha minimo libero in $(x_0, y_0)$. Dunque, ambedue le sue derivate parziali sono nulle:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) = g_x(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) + g_z(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) z_x(x_0, y_0) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) = g_y(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) + g_z(x_0, y_0, z(x_0, y_0)) z_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

Avendo supposto $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, si ha

$$z_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_z(x_0, y_0)}\,, \qquad z_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_z(x_0, y_0)}$$

ossia

$$g_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{-g_z(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} F_x(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$g_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{-g_z(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} F_y(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

Naturalmente vale anche

$$g_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{-g_z(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} F_z(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

Definendo

$$\lambda = -\frac{g_z(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

si trova che vale la (5.13). ∎

### 5.5.3 Estremi vincolati ad una curva dello spazio

Sia $F(\mathbf{r}) = F(x, y, z)$ una funzione di classe $C^1$ in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\gamma$ una curva in $\Omega$. Vogliamo dare una condizione necessaria che deve valere se un punto $\mathbf{r_0}$ è punto di estremo di $F(\mathbf{r})$ vincolato alla curva $\gamma$. Se la curva $\gamma$ è data in forma parametrica il probema si riduce immediatamente alla ricerca degli estremi di una funzione di una sola variabile. Quindi consideriamo il caso in cui $\gamma$ è data implicitamente, come intersezione di due superfici:

$$\gamma : \qquad g_1(x, y, z) = c\,, \quad g_2(x, y, z) = d\,.$$

Sia $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di $\gamma$, che è massimo oppure minimo di $F(\mathbf{r})$ vincolato a $\gamma$. Supponiamo che in $\mathbf{r_0}$ valga la condizione del teorema della funzione implicita. Privilegiando, per esempio, la variabile $x$, supponiamo che si abbia

$$\det \begin{pmatrix} g_{1,y}(x_0, y_0, z_0) & g_{1,z}(x_0, y_0, z_0) \\ g_{2,y}(x_0, y_0, z_0) & g_{2,z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0\,. \tag{5.14}$$

Si ricordi che sotto questa condizione la curva $\gamma$ si rappresenta, in un intorno di $(x_0, y_0, z_0)$, in forma cartesiana, come

$$y = y(x)\,, \qquad z = z(x)$$

e

$$y_0 = y(x_0)\,, \qquad z_0 = z(x_0)\,.$$

Dunque, la funzione della sola variabile $x$

$$F(x, y(x), z(x))$$

ha un punto di estremo in $x_0$ e quindi la sua derivata prima è ivi nulla:

$$0 = F_x(x_0, y_0, z_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(x_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(x_0)\,.$$

Usando questa condizione, si potrebbe provare il teorema seguente:

**Teorema 177** *Sia* $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ *punto di estremo della funzione* $F(x, y, z)$ *vincolato alla curva*

$$\gamma : \qquad g_1(x, y, z) = c\,, \quad g_2(x, y, z) = d\,.$$

*Valga inoltre la condizione (5.14). In tal caso esistono* due *numeri* $\lambda_1$ *e* $\lambda_2$ *tali che il punto* $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ *è punto estremale libero della funzione*

$$F(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)\,.$$

*Ossia, nel punto* $(x_0, y_0, z_0)$ *valgono contemporaneamente le condizioni seguenti:*

$$\begin{aligned} g_1(x_0, y_0, z_0) &= c\,, \\ g_2(x_0, y_0, z_0) &= d\,, \\ F_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_{1,x}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 g_{2,x}(x_0, y_0, z_0) &= 0\,, \\ F_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_{1,y}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 g_{2,y}(x_0, y_0, z_0) &= 0\,, \\ F_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_{1,z}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 g_{2,z}(x_0, y_0, z_0) &= 0\,. \end{aligned}$$

La coppia $(\lambda_1, \lambda_2)$ si chiama ancora $\boxed{\textit{moltiplicatore di Lagrange}}$ (vettoriale) ed i due numeri si chiamano $\boxed{\textit{moltiplicatori di Lagrange}}$.

### 5.5.4 Osservazione importante

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dà condizioni necessarie che devono essere soddisfatte da un punto di estremo vincolato, senza necessità di esplicitare preventivamente l'equazione del vincolo. In ciascuno dei tre casi esaminati, le condizioni possono scriversi come segue: si introduce la funzione

$$L(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) + \lambda \cdot g(\mathbf{r}) \,.$$

Nei primi due casi esaminati, $\lambda$ è un numero e $g(\mathbf{r})$ è una funzione a valori reali; nell'ultimo caso $\lambda$ è un vettore a due dimensioni, $g(\mathbf{r}) = \left[\begin{array}{cc} g_1(\mathbf{r}) & g_2(\mathbf{r}) \end{array}\right]$ e il punto indica il prodotto scalare. In tutti i casi la ricerca del minimo o massimo vincolato di $F(\mathbf{r})$ si riconduce alla ricerca dei punti estremali di $L(\mathbf{r})$. L'osservazione importante è questa: in generale gli estremi vincolati di $F(\mathbf{r})$ sono solamente punti estremali di $L(\mathbf{r})$. Non sono nè punti di massimo n'e punti di minimo di $L(\mathbf{r})$. La funzione $L(\mathbf{r})$ sopra introdotta si chiama $\boxed{\textit{lagrangiana}}$ del problema (di minimo, oppure di massimo).

## 5.6 Appendice: la dimostrazione del teorema 165

**La dimostrazione come conseguenza del Teorema della funzione implicita.** Come si è detto, consideriamo il caso $n = 2$. Scriviamo in componenti la relazione

$$\mathbf{x} = (x, y) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left[\begin{array}{c} \phi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{array}\right] , \qquad \mathbf{r} = (u, v) \in \Omega' \,.$$

Ossia scriviamo quest'uguaglianza come

$$x = \phi(u, v) \,, \qquad y = \psi(u, v) \,. \tag{5.15}$$

Vogliamo considerare questa come un sistema di equazioni nelle incognite $(u, v)$. Per ipotesi si sa che

$$\phi(u_0, v_0) = x_0 \,, \qquad \psi(u_0, v_0) = y_0 \,.$$

Si sa inoltre che $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ sono di classe $C^1$ e che

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0}) = \phi_u(u_0, v_0)\psi_v(u_0, v_0) - \phi_v(u_0, v_0)\psi_u(u_0, v_0) \neq 0 \,. \tag{5.16}$$

Consideriamo la prima equazione in (5.15), che scriviamo come

$$0 = f(u, v, x) = \phi(u, v) - x \,. \tag{5.17}$$

La (5.16) mostra che $f_u(u_0, v_0, x_0) = \phi_u(u_0, v_0) \neq 0$ oppure $f_v(u_0, v_0, x_0) = \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$. Sia per esempio

$$\phi_u(u_0, v_0) = f_u(u_0, v_0, x_0) \neq 0\,.$$

In tal caso si può risolvere l'equazione (5.17) rispetto alla variabile $u$ ottenendo, in un opportuno aperto $W$ contenente $(u_0, v_0, x_0)$,

$$u = U(v, x)\,, \qquad U(v_0, x_0) = u_0\,, \qquad \phi(U(v, x), v) = x\,,$$
$$U_v(v_0, x_0) = -\frac{f_v(u_0, v_0, x_0)}{f_u(u_0, v_0, x_0} = -\frac{\phi_v(u_0, v_0)}{\phi_u(u_0, v_0)}\,.$$

Quando $(u, v, x) \in W$ allora si ha $(v, x) \in H$, aperto contenente $(v_0, x_0)$ ed $u$ appartiene ad un intorno di $u_0$. Consideriamo ora l'equazione seguente, nell'aperto $H \times \mathbb{R}$:

$$0 = g(v, x, y) = \psi(U(v, x), v) - y\,.$$

Quest'uguaglianza è soddisfatta nel punto $(v_0, x_0, y_0)$. Mostreremo in seguito che $g_v(v_0, x_0, y_0) \neq 0$. Accettando ciò, il teorema della funzione implicita mostra che l'equazione si può risolvere rispetto a $v$, ottenendo una funzione $V(x, y)$ di classe $C^1$

$$v = V(x, y)\,.$$

Questa uguaglianza vale per $(v, x, y)$ in un opportuno aperto $K$ contenente $(v_0, x_0, y_0)$ e la funzione $V(x, y)$ è di classe $C^1$. Sostituendo $v = V(x, y)$ nell'uguaglianza $u = U(v, x)$ (si veda la (5.18)) si ottiene la soluzione del sistema (5.15)

$$u = U(V(x, y), x)\,, \qquad v = V(x, y)$$

e, ricordiamo, le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono di classe $C^1$. Vediamo ora quali restrizioni sono state imposte ai punti $(u, v)$ ed $(x, y)$. Questi sono rappresentati dalle condizioni

$$(u, v, x) \in W\,, \qquad (v, x, y) \in H \times \mathbb{R}\,, \qquad (v, x, y) \in K\,.$$

Si identifica così un aperto di $\mathbb{R}^4$, contenente il punto $(u_0, v_0, x_0, y_0)$. L'aperto $A$ detto nel teorema è la proiezione di quest'aperto sul piano $(u, v)$ mentre l'aperto $B$ è la proiezione sul piano $(x, y)$. Per completare la dimostrazione, proviamo che $g_v(v_0, x_0, y_0) \neq 0$. Usando l'espressione di $U_v(v_0, x_0)$ in (5.18) si trova

$$\begin{aligned} g_v(v_0, x_0, y_0) &= \psi_u(U(v_0, x_0), v_0)U_v(v_0, x_0) + \psi_v(U(v_0, x_0), v_0) \\ &\psi_u(u_0, v_0)\left[-\frac{\phi_v(u_0, v_0)}{\phi_u(u_0, v_0)}\right] + \psi_v(u_0, v_0) \\ &= \frac{1}{\phi_u(u_0, v_0)}\left[\phi_u(u_0, v_0)\psi_v(u_0, v_0) - \phi_v(u_0, v_0)\psi_u(u_0, v_0)\right] \\ &= \frac{1}{\phi_u(u_0, v_0)} J_{\mathbf{F}}(\mathbf{r_0}) \neq 0\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$