Capitolo 3

Lo spazio lineare normato $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo richiamiamo e precisiamo alcuni concetti che dovrebbero essere noti dai corsi precedenti, in particolare dal corso di Geometria. Tratteremo

- lo spazio lineare $\mathbb{R}^n$.
- introdurremo "norme" e "distanze" in $\mathbb{R}^n$, che permetteranno di definire i punti di accumulazione, gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi. Ciò fatto sarà possibile studiare limiti continuità e derivabilità.
- introdurremo quindi il concetto di "insieme convesso" e di "insieme connesso".
- richiameremo le trasformazioni di coordinate in $\mathbb{R}^n$ e la loro relazione con l'orientazione dello spazio.
- introdurremo altri modi (altri "sistemi di coordinate") per rappresentare i punti di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.
- studieremo le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$.

I casi su cui insisteremo di più saranno i casi $n = 2$ ed $n = 3$.

3.1 Lo spazio lineare $\mathbb{R}^n$

Non intendiamo qui richiamare la definizione astratta di spazio lineare, vista nei corsi di Geometria. Ci limitiamo a richiamare le sole nozioni necessarie per lo studio di $\mathbb{R}^n$. Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono le n-ple ordinate di numeri reali che chiameremo indifferentemente "punti" o "vettori". E' bene essere precisi con la notazione. Una di tali n-ple si potrà scrivere come una sequenza ordinata di n numeri reali x_1, x_2, $\cdots$, x_n scritta in orizzontale o in verticale, ossia come

$$\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{array}\right] \qquad \text{oppure} \qquad \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right].$$

Noi useremo sempre la rappresentazione *in verticale.* Però, talvolta sarà conveniente scrivere in orizzontale, con un apice (segno di trasposizione). Ossia intendiamo

$$\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{array}\right]' = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right].$$

Notiamo inoltre che la definizione di $\mathbb{R}^n$ è suggerita dalla rappresentazione del piano in coordinate cartesiane. Quando $n = 2$ oppure $n = 3$, per indicare il punto $\left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]'$ useremo anche la notazione dellla geometria analitica, $P(x_1, x_2, x_3)$. Gli elementi di $\mathbb{R}^n$, ossia i "vettori", si indicheranno con una lettera in *grassetto:*

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right].$$

Ricordiamo che nei corsi di fisica i vettori si indicano con lettere in grassetto oppure con una freccia sovrapposta, $\vec{x}$; talvolta con una lettera maiuscola, X, oppure con una lettera sottolineata, $\underline{x}$. I numeri x_i si chiamano le $\boxed{\textit{componenti}}$ del vettore $\mathbf{x}$. Il vettore le cui componenti sono tutte nulle si chiama $\boxed{\textit{vettore nullo}}$ e si indica col simbolo $\mathbf{0}$ (da non confondere col simbolo 0 usato per l'elemento nullo di $\mathbb{R}$). In geometria analitica, il punto $\mathbf{0}$ si chiama anche $\boxed{\textit{origine}}$ delle coordinate e si indica col simbolo O, iniziale di "origine". Di regola, se $\mathbf{x}$ indica un vettore, le sue componenti si indicheranno come x_i. Ricordiamo che spesso i vettori si indicano col simbolo $\mathbf{v}$, iniziale di "vettore", ma anche col simbolo $\mathbf{r}$, iniziale di "raggio vettore". Questo per quanto riguarda le notazioni con cui si indicano gli elementi di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ però non è solo un isieme di elementi, ma è anche uno $\boxed{\textit{spazio vettoriale}}$[1]. Infatti gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si possono **moltiplicare** per numeri reali (che si chiamano anche $\boxed{\textit{scalari}}$) e si possono **sommare** tra loro. Se α è un numero reale, per definizione si ha

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} .$$

La somma dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si ottiene sommando le componenti corrispondenti: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}'$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{bmatrix}'$, la loro somma è

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} .$$

Si rinvia ai corsi di Geometria per le proprietà di queste operazioni. Ricordiamo però che se $n = 3$ l'operazione di somma appena definita corrisponde alla somma di vettori **con la regola del parallelogramma** nota dai corsi di Fisica. Come terminologia, diremo anche che $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è ottenuto traslando di $\mathbf{x}$ il vettore $\mathbf{y}$ o, in modo equivalente che è ottenuto traslando di $\mathbf{y}$ il vettore $\mathbf{x}$. Si considerino ora r vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$. Il vettore

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

(con α_i numeri reali) si chiama $\boxed{\textit{combinazione lineare}}$ dei vettori $\mathbf{v}_i$. L'insieme delle combinazioni lineari si chiama $\boxed{\textit{s.spazio lineare}}$ *generato dai vettori* $\mathbf{v}_1$, $\ldots$, $\mathbf{v}_r$ *di* $\mathbb{R}^n$. Esso contiene sempre $\mathbf{0}$, che si ottiene scegliendo nulli tutti gli α_i. Si potrebbe trovare $\mathbf{0}$ anche con altre scelte degli α_i. Se ciò non accade, i vettori $\mathbf{v}_i$ si chiamano $\boxed{\textit{linearmente indipendenti}}$. Ossia, i vettori $\mathbf{v}_i$ sono linearmente indipendenti quando

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

[1]si ricordi che uno spazio vettoriale si chiama anche $\boxed{\textit{spazio lineare}}$.

implica $\alpha_i = 0$ per tutti gli indici i. In questo caso l'insieme dei vettori $\mathbf{v}_i$ si chiama una $\boxed{\textit{base}}$ del s.spazio. Se $r = n$ e se i vettori $\mathbf{v}_i$ sono linearmente indipendenti, lo spazio da essi generato è $\mathbb{R}^n$ e si dice che i vettori $\mathbf{v}_i$ sono una base di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che ogni s.spazio lineare è esso stesso uno spazio lineare rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalari. Come $\boxed{\textit{base}}$ di $\mathbb{R}^n$ si potranno scegliere n vettori indipendenti qualsiasi. Scegliendo però i vettori $\mathbf{e}_k$,

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con 1 nella posizione k e gli altri elementi tutti nulli, si ha la $\boxed{\textit{base canonica}}$.

Esempio 97 Si sa dalla geometria analitica che i s.spazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\mathbf{0}$, $\mathbb{R}^2$ e le rette per l'origine. Se invece $n = 3$ i s.spazi sono $\mathbf{0}$, $\mathbb{R}^3$, le rette per l'origine ed i piani per l'origine. ∎

Siano ora X ed Y due s.insiemi di $\mathbb{R}^n$. Col simbolo $X + Y$ si intende l'insieme

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y}\,,\ \mathbf{x} \in X\,,\ \mathbf{y} \in Y\}\,.$$

A noi interessa in particolare il caso in cui Y è un s.spazio mentre X ha l'unico elemento $\mathbf{x}_0$. L'insieme $X + Y$ in questo caso si indica col simbolo

$$\mathbf{x}_0 + Y$$

e si chiama *s.spazio* $\boxed{\textit{affine}}$ di $\mathbb{R}^n$, parallelo ad Y, ottenuto traslando Y *di* $\mathbf{x}_0$ o anche *in* $\mathbf{x}_0$. Si noti che:

- Se $\mathbf{x}_0 \notin Y$ allora $\mathbf{0} \notin \mathbf{x}_0 + Y$.
- in generale, un s.spazio affine non è un s.spazio lineare. Lo è se e solo se si ha $\mathbf{x}_0 + Y = Y$ e ciò avviene se e solo se $\mathbf{x}_0 \in Y$;

Come terminologia, in generale chiameremo semplicemente "s.spazi" i s.spazi lineari mentre l'aggettivo "affine" non verrà mai omesso, salvo nei casi particolari seguenti, nei quali useremo i termini "retta" e "piano" propri della geometria:

- Gli spazi della forma $\{t\mathbf{y}_0\}_{t\in\mathbb{R}}$ (con $\mathbf{y}_0 \neq 0$) si chiamano $\boxed{\textit{rette per l'origine}}$ e $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}_0$, $t \in \mathbb{R}$, si chiama $\boxed{\textit{retta per } \mathbf{x}_0}$ parallela ad $\mathbf{y}_0$ (che deve essere non nullo).

- si chiama $\boxed{\textit{piano per l'origine}}$ *in* $\mathbb{R}^n$ l'insieme dei punti $\mathbf{x}$ le cui componenti $x_1, \ldots, x_n$ verificano l'equazione lineare

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdot + a_nx_n = 0\,.$$

  I parametri $a_1, \ldots a_n$ sono fissati, non tutti nulli. Se X è un piano per l'origine ed $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}'$ un punto fissato di $\mathbb{R}^n$, l'insieme $\mathbf{y} + X$ si chiama *piano per* $\mathbf{y}$ e si vede facilmente che le componenti dei suoi punti verificano

  $$a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) + \cdot + a_n(x_n - y_n) = 0\,.$$

Vettori colineari e rette parallele

Due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono $\boxed{\textit{colineari}}$ quando le componenti corrispondenti sono proporzionali, ossia quando esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tale che

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}\,.$$

Col linguaggio della geometria analitica, i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono colineari quando identificano la medesima retta uscente dall'origine. Consideriamo ora due rette,

$$\{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}\,,\ t \in \mathbb{R}\}\,, \qquad \{\mathbf{y}_0 + \tau\mathbf{w}\,,\ \tau \in \mathbb{R}\}\,. \tag{3.1}$$

Le due rette si dicono $\boxed{\textit{parallele}}$ quando i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono colineari. Geometricamente questo significa che un punto Q della seconda retta si ottiene da un punto P della prima retta, traslandolo mediante il vettore $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$, indipendente dai punti P e Q considerati. Due rette non parallele possono avere un punto comune, o meno. Nel secondo caso le rette si dicono $\boxed{\textit{sghembe}}$. Se le due rette hanno un punto comune, si dicono $\boxed{\textit{incidenti}}$. Ciò accade quando esistono t e τ tali che

$$\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{y}_0 + \tau\mathbf{w} \qquad \text{ossia} \qquad \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \tau\mathbf{w} - t\mathbf{v}\,.$$

Dunque, le due rette (3.1) sono incidenti se e solo se $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0$ appartiene al piano generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Osservazione 98 *Sia $m \neq 0$. Le due rette*

$$\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}_0\,, \qquad \mathbf{x}_0 + tm\mathbf{y}_0\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

coincidono. ∎

3.1.1 Connessione e convessità

I punti di una retta hanno rappresentazione

$$\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}_0 \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,. \tag{3.2}$$

Il punto $\mathbf{x}_0$ si ritrova scegliendo $t = 0$. Per questo, come si è detto, questa retta si chiama “retta per $\mathbf{x}_0$, parallela ad $\mathbf{y}_0$”. Sia ora $\mathbf{x}_1$ un secondo punto di $\mathbb{R}^n$. Chiediamoci se, per qualche selta di $\mathbf{y}$, la retta (3.2) contenga $\mathbf{x}_1$ ossia, come si dice, “passi anche per $\mathbf{x}_1$”. Ciò avviene quando per un certo valore t_1 del “parametro” t si ha

$$\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \,.$$

Questo è un insieme di n equazioni nelle n componenti di $\mathbf{y}$. L’uguaglianza si ottiene solo quando $\mathbf{y}$ è dato da

$$\mathbf{y} = \frac{1}{t_1}\left[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right] \,.$$

Il valore t_1 può scegliersi arbitrariamente, purché non nullo[2]. Dunque, scelto $t_1 = 1$, la retta per $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ si rappresenta come

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\left[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right] \,.$$

Il suo s.insieme

$$\{\mathbf{x}_0 + t\left[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right] \,, \quad t \in [0,1]\}$$

si chiama $\boxed{\textit{segmento}}$ congiungente $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}_1$. I punti $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}_1$ si chiamano gli $\boxed{\textit{estremi}}$ del segmento. Precisamente, $\mathbf{x}_0$, ottenuto per $t = 0$, si chiama il “primo estremo” ed $\mathbf{x}_1$, ottenuto per $t = 1$, si chiama il “secondo estremo”[3]. Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$, il segmento degenera nel punto $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + t\left[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right] = \mathbf{x}_0 + t\left[\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\right]$$

per ogni t. Definiamo ora cosa si intende per “spezzata” di $\mathbb{R}^n$. Questo termine indica un numero finito di segmenti che “si susseguono”; ossia tali che il secondo estremo di uno sia anche primo estremo del successivo; ossia, consideriamo un numero finito di segmenti I_1, I_2, …, I_k. Se accade che per $1 < j < k$ il primo estremo di I_{j+1} coincide col secondo estremo di I_j, l’insieme $\cup_{j=1}^k I_j$ si dice una $\boxed{\textit{spezzata}}$. Si dice che una spezzata $\cup_{j=1}^k I_j$ congiunge i due

[2] perchè, come si è già notato, la retta per $\mathbf{x}_0$ parallela ad $\mathbf{y}_0$ non muta sostituendo $\mathbf{y}_0$ con $m\mathbf{y}_0$, purch’e sia $m \neq 0$.

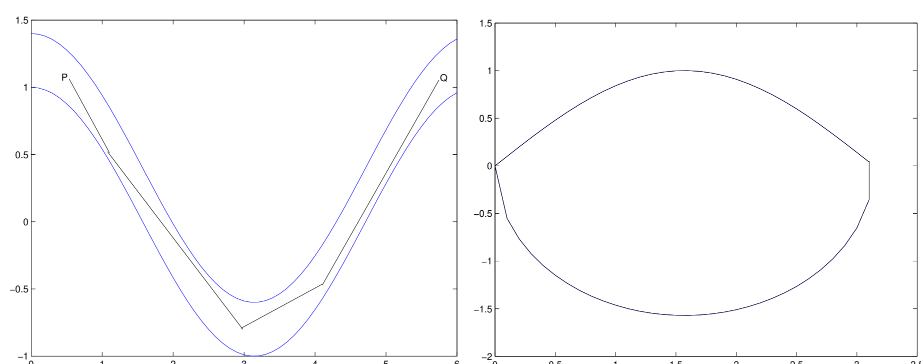
[3] si osservi che la sostituzione $t = 1 - \tau$, $\tau \in (0,1)$, scambia il primo col secondo estremo.

punti $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ quando $\mathbf{x}$ è il primo estremo di I_1 e $\mathbf{y}$ è il secondo estremo di I_k. Se accade che tali due punti coincidono, la spezzata si dice $\boxed{\textit{chiusa}}$. Sia ora A un s.insieme di $\mathbb{R}^n$. L'insieme A si dice $\boxed{\textit{connesso}}$ [4] quando ogni coppia di punti di A può essere congiunta con una spezzata i cui punti appartengono ad A. Inoltre, si considerano connessi anche gli insiemi costituiti da un solo punto. Un insieme che è sia aperto che connesso si chiama un $\boxed{\textit{dominio}}$. Può accadere che l'insieme connesso A contenga un punto $\mathbf{x}_0$ con questa proprietà: ogni altro punto $\mathbf{x}_1 \in A$ può essere congiunto ad $\mathbf{x}_0$ mediante un segmento contenuto in A; ossia mediante una spezzata costituita da un unico segmento. In tal caso l'insieme A si dice $\boxed{\textit{stellato}}$ *rispetto ad* $\mathbf{x}_0$. Sia ora C un s.insieme di $\mathbb{R}^n$. Si dice che C è $\boxed{\textit{convesso}}$

- quando è vuoto oppure contiene un solo punto
- oppure quando contiene il segmento congiungente due qualsiasi dei suoi punti.

Ossia, se a C appartengono almeno due punti, allora C è convesso quando è stellato rispetto a ciascuno dei suoi punti. La figura 3.1 rappresenta un insieme connesso, a sinistra, ed un insieme convesso, a destra. Per $n = 1$ le tre

Figura 3.1: Insieme connesso, a sinistra, e convesso a destra.



definizioni di insieme connesso per archi, stellato e convesso si riducono a quella di intervallo.

[4]più precisamente si dovrebbe dire "connesso per archi". La definizione che qui diamo non ha la forma più generale possibile. Però noi saremo principalmente interessati ad insiemi connessi che sono anche "aperti" e per tali insiemi la definizione data coincide con quella generale, che non riportiamo.

3.1.2 Vettori liberi e vettori applicati

L'uso dei vettori è suggerito dalle applicazioni fisiche: un "vettore" può rappresentare, per esempio, una forza o uno spostamento. Domanda ovvia: spostamento da dove, o forza applicata dove? I vettori come n-ple ordinate di numeri reali non permettono di rispondere a queste domande. Tali vettori possono usarsi per rappresentare uno "spostamento" nel senso della distanza percorsa, in una certa direzione e in un certo verso, indipendentemente da quale sia il punto di partenza; o una forza di una certa intensità diretta secondo una certa direzione e con un certo verso, indipendentemente da dove essa sia applicata. Per questa ragione, i vettori che abbiamo introdotto si chiamano in fisica $\boxed{\textit{vettori liberi}}$. Si può decidere di applicare tutti i vettori liberi in un punto convenzionalmente scelto. La scelta naturale è di applicarli nell'origine: i vettori liberi verranno interpretati anche come vettori applicati nell'origine e quindi, per esempio, il vettore $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}'$ rappresenta lo spostamento, in linea retta, da O al punto $P(1,3,5)$. Se vogliamo rappresentare un $\boxed{\textit{vettore applicato}}$ dobbiamo dare una coppia di vettori: il primo rappresenta il punto di applicazione e il secondo rappresenta il vettore (forza, spostamento,...) in esso applicato. A noi non serve essere troppo formali a questo proposito, ma è necessario sapere che:

- sui vettori applicati nel medesimo punto si fanno tutte le operazioni (sia quelle già introdotte che quelle che introdurremo) che possono farsi tra vettori liberi. Dunque, se $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}'$ rappresentano due vettori applicati nel medesimo punto, per esempio nel punto $P(4,4,4)$, la loro somma è il vettore $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}'$ ancora applicato in $P(4,4,4)$.
- **Non si fanno operazioni tra vettori applicati in punti diversi.**
- Un vettore $\mathbf{v}$ applicato in P può *spostarsi per parallelismo* in un vettore applicato in Q procedendo come segue: al vettore $\mathbf{v}$ applicato in P si fa corrispondere il vettore $\mathbf{v}$ applicato in Q.
- Se si vogliono fare operazioni tra vettori applicati in punti diversi, bisogna prima di tutto traslarli per parallelismo, applicandoli in un punto comune.

3.2 Basi e basi ordinate

Ricordiamo che una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di n vettori linearmente indipendenti. Un insieme non cambia se si cambia l'ordine col quale se ne elencano gli elementi. Se però B è un insieme finito e si stabilisce un ordine tra i suoi elementi, si dice che B è un insieme ordinato e se B è una base di $\mathbb{R}^n$, si dice che B è una $\boxed{\textit{base ordinata}}$. Per esempio, se si stabilisce di elencare gli elementi della base canonica elencando e_j al j–mo posto si ha una base ordinata, ma si ha una base ordinata anche se si stabilisce di elencarne gli elementi a rovescio, oppure prima quelli di indice pari e poi quelli di indice dispari. Quando in $\mathbb{R}^n$ si è stabilita una base ordinata si possono fare cose che non sono possibili con basi non ordinate. Per esempio, sia $\mathcal{A}$ è una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e siano rispettivamente $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $\{\tilde{\mathbf{e}}_j\}$ due basi ordinate la prima di $\mathbb{R}^n$ e la seconda di $\mathbb{R}^m$. La trasformazione $\mathcal{A}$ si può rappresentare con una matrice come segue. Si considera l'elemento $\mathcal{A}\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^m$. Questo si rappresenta come

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sum_{j=1}^{m} a_1^j \tilde{\mathbf{e}}_j \,.$$

Si costruisce una matrice mettendo il numero a_1^j nella posizione j della prima colonna. La seconda colonna si costruisce in modo analogo a partire da $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$ e così via fino a costruire l' n-ma colonna. Si costruisce così una matrice A che rappresenta la trasformazione lineare $\mathcal{A}$. Se la base prescelta è quella canonica e se non si stabilisce diversamente in modo esplicito, si intende che la base canonica è una base ordinata e che gli elementi della base si susseguono nell'ordine dei loro indici:

$$\mathbf{e}_1 \,, \mathbf{e}_2 \,, \ldots \,, \mathbf{e}_n \,.$$

Si dice che *una base ordinata subordina un'* $\boxed{\textit{orientazione}}$ *di* $\mathbb{R}^n$. Visto che una base di $\mathbb{R}^n$ contiene n elementi, ci sono $n!$ modi di elencarli e quindi si potrebbe pensare che in $\mathbb{R}^n$ ci siano (almeno) $n!$ orientazioni diverse. Invece non è così. Consideriamo per questo una base ordinata B_1 ed una seconda base ordinata B_2, (che potrebbe essere ottenuta dagli stessi elementi di B_1, ordinati in modo diverso). Si sa dal corso di Geometria che i cambiamenti di base si rappresentano mediante una matrice invertibile. Sia P la matrice che trasforma ordinatamente gli elementi di B_1 in quelli di B_2. Essendo P invertibile, il suo determinante non è zero e quindi delle due l'una:

$$\det P > 0 \quad \text{oppure} \quad \det P < 0 \,.$$

Se $\det P > 0$ si dice che le due basi B_1 e B_2 subordinano la medesima orientazione di $\mathbb{R}^n$, altrimenti subordinano orientazioni opposte. Dunque, in $\mathbb{R}^n$ si trovano due orientazioni, che si dicono opposte l'una dell'altra.

3.2.1 Il piano e lo spazio

I punti del piano si mettono in corrispondenza biunivoca con quelli di $\mathbb{R}^2$ procedendo come segue: si fissano due rette incidenti (e tra loro diverse) r

ed s del piano ed un'unità di misura per le lunghezze[5]. Il punto comune alle due rette si chiama $\boxed{\textit{origine}}$. Su ciascuna delle due rette si fissa un verso (che si chiama "positivo"). Il segmento PO della retta r ha lunghezza positiva quando un punto che parte da O incontra P muovendosi nel verso positivo; negativo altrimenti. In tal caso si dice che P appartiene al semiasse positivo. La stessa convenzione si usa sulla retta s. Si fissa quindi un ordine tra le due rette. La prima si chiama asse delle $\boxed{\textit{ascisse}}$ o $\boxed{\textit{asse } x}$ e la seconda asse delle $\boxed{\textit{ordinate}}$ o $\boxed{\textit{asse } y}$. Le due rette si chiamano $\boxed{\textit{assi coordinati}}$. Le rette del piano parallele agli assi coordinati si chiamano $\boxed{\textit{rette coordinate}}$. Facendo ciò, si dice che si è definita un' $\boxed{\textit{orientazione}}$ del piano. Si fa quindi corrispondere l'orientazione del piano con quella di $\mathbb{R}^2$ associando il vettore $\mathbf{e}_1$ al punto dell'asse delle ascisse a distanza $+1$ dall'origine e il vettore $\mathbf{e}_2$ col punto dell'asse delle ordinate a distanza $+1$ dall'origine. Sia P un punto del piano. Si fanno passare per P due rette r_1, parallela all'asse delle ordinate, ed r_2 parallela a quella delle ascisse. Sia P_1 il punto in cui r_1 incontra l'asse delle ascisse e P_2 l'intersezione di di r_2 con quello delle ordinate. Siano x ed y le lunghezze, con segno, rispettivamente di OP_1 e di OP_2. Al punto P si fa corrispondere il vettore

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\,.$$

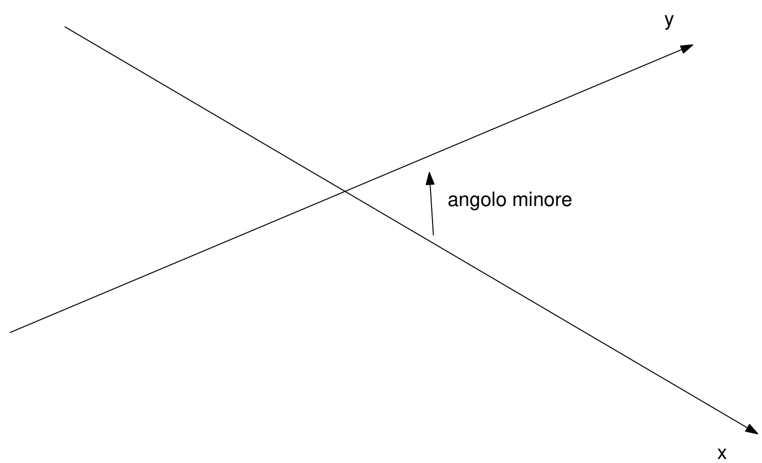
Viceversa, ad ogni vettore $\mathbf{x}$ si fa corrispondere un punto del piano. Si noti che perchè ciò abbia senso, va stabilito prima quale asse scegliere come asse delle ascisse, e quale dei due elementi della base considerare per primo. Ossia, la corrispondenza biunivoca che abbiamo costruito è tra il piano, a cui abbiamo imposto un'orientazione, ed $\mathbb{R}^2$, a cui abbiamo imposto un'orientazione. In pratica, si segue questa convenzione:

- La base canonica di $\mathbb{R}^2$ si ordina scegliendo prima $\mathbf{e}_1$;
- sia fissato l'asse delle ascisse e il verso su di esso. Il semiasse "positivo" delle ascisse si può sovrapporre ad uno dei semiassi delle ordinate con due rotazioni una oraria ed una antioraria. Dei due angoli, uno è minore dell'altro. L'orientazione positiva sull'asse delle ordinate si sceglie in modo che la sovrapposizione avvenga girando l'asse delle ascisse in verso antiorario e dell'angolo minore.

La figura 3.2 illustra la situazione. Il più delle volte gli assi coordinati si prendono ortogonali tra loro e l'asse delle ascisse si rappresenta orizzontale, col verso positivo verso destra. In tal caso il verso positivo dell'asse delle ordinate

[5]che assumeremo la medesima sullle due rette, ma si potrebbero anche fissare unità di misura diverse, una sulla prima e una sulla seconda retta.

Figura 3.2: Senso positivo di rotazione e verso sugli assi coordinati



punta verso l'alto. La rappresentazione dello spazio è analoga. Senza entrare nei dettagli, consideriamo subito il caso di un sistema cartesiano ortogonale. Si scelgono tre rette tra loro ortogonali che si chiamano rispettivamente $\boxed{\textit{delle ascisse}}$ o $\boxed{\textit{asse } x}$, delle $\boxed{\textit{ordinate}}$ o $\boxed{\textit{asse } y}$, delle $\boxed{\textit{quote}}$ o $\boxed{\textit{asse } z}$. Gli assi x ed y identificano un piano, il piano (x, y), a cui l'asse z è ortogonale. L'orientazione sul piano (x, y) si fissa come si è detto sopra. Rimane quindi da scegliere il verso positivo dell'asse z. Questo si sceglie in modo che un osservatore in piedi sul piano (x, y), appoggiato all'asse z e con la testa nel verso positivo veda che il semiasse x positivo si riporta sul semiasse y positivo ruotandolo dell'angolo minore e in verso antiorario. Consideriamo ora il punto $(1, 0, 0)$. Ruotando l'asse delle ascisse di un'angolo giro, esso descrive una circonferenza e, se l'orientazione del piano (x, y) è positiva, raggiunge il punto $(0, 1, 0)$ dopo una rotazione di un angolo retto in verso antiorario. Un insetto che parta da $(1, 0, 0)$ e si muova lungo la circonferenza verso il punto $(0, 1, 0)$, raggiungendolo dopo la rotazione di $\pi/2$, vede il disco alla sua sinistra. E' questa la prima comparsa della regola $\boxed{\textit{d'Ampère}}$ per la determinazione dell'orientazione dello spazio. Ogni punto P si rappresenta mediante le sue tre coordinate x, y e z. Queste si ottengono facendo passare per P tre piani, paralleli ai piani individuati dalle coppie di assi coordinati (che si chiamano $\boxed{\textit{piani coordinati}}$). L'ascissa x di P è la distanza dall'origine dell'intersezione tra l'asse delle ascisse e il piano per P paralello agli assi y e z, presa con segno. L'ordinata e la quota si definiscono in modo analogo. Si chiamano

$\boxed{\textit{rette coordinate}}$ le rette dello spazio parallele agli assi cartesiani. Sia ora P un punto (del piano o dello spazio), $P(x, y, x)$. Facciamogli corrispondere il vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ che si interpreta come "spostamento" percorso da un punto che partendo dall'origine raggiunge la posizione occupata da P. In questo modo, lo spazio si mette in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^3$, che si pensa orientato mediante la sua base canonica. Quando si lavora con un sistema di assi cartesiani ortogonali, si usano i simboli sequenti: lavorando sul piano,

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Invece lavorando nello spazio

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Norme e distanze

La teoria dei limiti per le funzioni di una variabile dipende in modo essenziale dalle proprietà seguenti del valore assoluto:

- Per ogni x reale, $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- Il valore assoluto di un prodotto è il prodotto dei valori assoluti: $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- la disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ricordiamo che da queste proprietà segue anche:

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x - y| \, .$$

Esaminando il corso di Analisi Matematica 1, si vede facilmente che queste sono le uniche proprietà che servono per la teoria dei limiti, eccezion fatta per quei teoremi che richiedono una relazione di ordine, come i teoremi del confronto o delle funzioni monotone. L'osservazione precedente suggerisce di definire $\boxed{\textit{norma}}$ su $\mathbb{R}^n$ una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ ed a valori reali, con le proprietà che ora descriviamo. Una norma si indica col simbolo $\|\cdot\|$. Con questo simbolo, le proprietà sono:

- la norma prende valori non negativi: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}$;

- la norma si annulla solo in $\mathbf{0}$: $\|\mathbf{x}\| = 0$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- vale $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$ per ogni $\mathbf{x}$ e per ogni numero reale t. Si noti che scegliendo $t = 0$ si trova $\|\mathbf{0}\| = 0$.
- vale la disuguaglianza triangolare: per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si ha:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \,.$$

Non è difficile provare:

Lemma 99 *Per ogni* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *vale*

$$\Big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \Big| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \,.$$

<u>Dim</u>. Esattamente come nel caso dei numeri, si nota che la disuguaglianza da provare equivale alle due disuguaglianze

$$-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

La seconda disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare, scrivendo

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| \,.$$

L'altra segue in modo analogo, scrivendo

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x}\| \le \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\| \,. \quad \blacksquare$$

Dunque, definita una norma, è possibile trattare la teoria dei limiti su $\mathbb{R}^n$ esattamente come per $n = 1$, provando tutti i medesimi teoremi, con le stesse dimostrazioni, a parte quelli che fanno intervenire la monotonia. Mostriamo che norme su $\mathbb{R}^n$ esistono:

Esempio 100 Le seguenti sono norme su $\mathbb{R}^2$:

$$\left\| \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}' \right\|_1 = |x| + |y| \,, \qquad \left\| \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}' \right\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} \,. \quad \blacksquare$$

Si mostri per esercizio che le due funzioni definite sopra effettivamente soddisfano alle proprietà richieste per la definizione di norma. $\blacksquare$

Quindi, su $\mathbb{R}^2$ possono definirsi almeno due norme diverse. In realtà si possono definire infinite norme diverse. Infatti:

Teorema 101 *Sia* $p \geq 1$ *e sia* $\mathbb{R}^n$ *rappresentato rispetto alla base canonica. Ciascuna delle seguenti è una norma su* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} .$$

Diciamo subito che la norma di gran lunga più importante è la norma che corrisponde al numero $p = 2$, che si chiama $\boxed{\textit{norma euclidea}}$:[6]

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} .$$

Introdotta una norma si può introdurre la $\boxed{\textit{distanza}}$ tra i vettori,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

e quindi definire:

Definitione 1 *Sia* $\mathbf{x_0}$ *un punto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $r > 0$*. Si chiama* $\boxed{\textit{intorno}}$ *di* $\mathbf{x_0}$ *di raggio* r*, o* $\boxed{\textit{palla}}$ *aperta di centro* $\mathbf{x_0}$ *e raggio* r *l'insieme*

$$B(\mathbf{x_0}, r) = \{\mathbf{v} \mid \|\mathbf{x_0} - \mathbf{v}\| < r\} .$$

Dato un insieme A *di* $\mathbb{R}^n$ *ed un vettore* $\mathbf{x_0}$*, si dice che:*

- *Un insieme è* $\boxed{\textit{limitato}}$ *quando esiste una palla che lo contiene.*
- $\mathbf{x_0}$ *è* $\boxed{\textit{interno}}$ *ad* A *se esiste* $\boxed{r > 0}$ *tale che* $B(\mathbf{x_0}, r) \subseteq A$*;*
- *Si dice che* $\mathbf{x_0}$ *è punto di* $\boxed{\textit{accumulazione}}$ *per* A *se* per ogni $r > 0$ esiste $\mathbf{a} \in A$*,* $\mathbf{a} \neq \mathbf{x_0}$*, con* $\mathbf{a} \in B(\mathbf{x_0}, r)$*.*
- *Il punto* x_0 *è punto della* $\boxed{\textit{frontiera}}$ *di* A *se non è interno né ad* A *né al suo complementare.*
- *Un insieme si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni, oppure se è vuoto; chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione oppure se è vuoto. Si mostra facilmente che un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso.*

[6]si osservi che i valori assoluti nell'espressione seguente non hanno alcun ruolo. Sono stati introdotti per due ragioni: prima di tutto per uniformità col caso $p \neq 2$ e poi perché, come diremo in seguito, niente cambia se i vettori si considerano a componenti complesse, invece che reali; salvo che in tal caso anche la definizione di $\|\mathbf{x}\|_2$ richiede i moduli perch'e la norma deve comunque essere un numero reale.

- *Si chiama* $\boxed{\textit{successione}}$ *a valori in* $\mathbb{R}^n$ *una funzione che ad ogni numero naturale associa un vettore di* $\mathbb{R}^n$.
- *Una successione è* $\boxed{\textit{limitata}}$ *quando limitata è la sua immagine.*
- *Sia* $\{\mathbf{v}_n\}$ *una successione. Si dice che*

$$\lim_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0$$

quando, per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* N_ϵ *tale che se* $n > N_\epsilon$ *si ha* $\mathbf{v}_n \in B(\mathbf{v}_0, \epsilon)$.

Dato che le norme su $\mathbb{R}^n$ sono infinite, potrebbe sembrare che ci siano infinite teorie dei limiti tra loro diverse. Invece, fortunatamente, le proprietà di avere o non avere limite, il valore dell'evenuale limite e le proprietà dei limiti non dipendono dalla definizione di norma che si decide di usare in $\mathbb{R}^n$. Prima di provare questo fatto, illustriamone la ragione intuitiva consideriamo le tre norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$. La figura 3.3 mostra le palle di centro 0 e raggio 1 relative alle tre norme. La palla relativa alla norma euclidea è un disco, in figura rappresentata come un ellisse perché l'unità di misura sui due assi non è la medesima. Le altre due palle sono quadrati (rettangoli in figura, per la ragione detta sopra). Quello con i lati paralleli agli assi coordinati è la palla nella norma $\|\cdot\|_\infty$. Si vede da questa figura che se una successione $\mathbf{v}_n$ tende a zero rispetto ad una di queste norme, entra e rimane definitivamente dentro ciascuna delle tre palle; e quindi tende a zero anche rispetto alle altre norme. Il risultato generale è conseguenza delle disuguaglianze seguenti. La prima è ovvia mentre omettiamo la dimostrazione della seconda.

Lemma 102 *Sia* $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le +\infty$ *una norma di* $\mathbb{R}^n$. *Valgono le due disuguaglianze seguenti:*

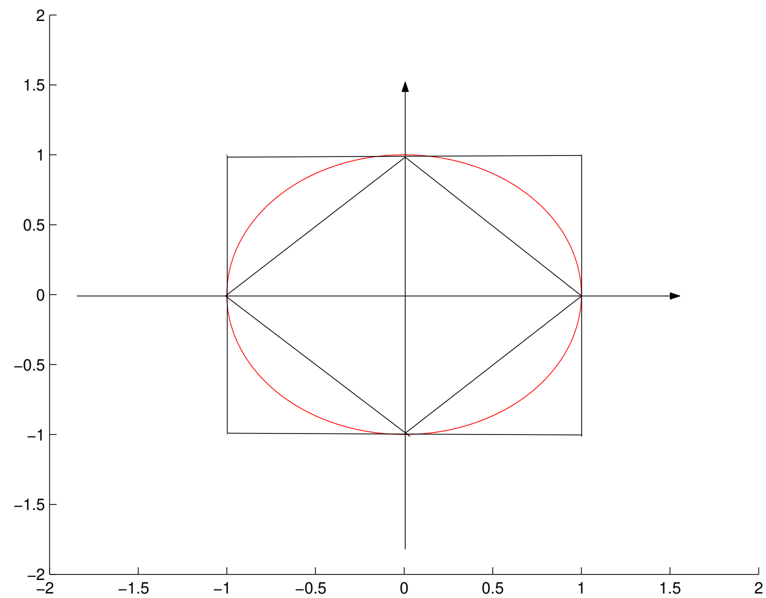
- *Per ogni* i *vale* $|x_i| \le \|\mathbf{x}\|$;
- *Esiste un numero* M *(che dipende da* n *e da* p*) tale che* $\|\mathbf{x}\|_p \le M \sum_{i-1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$.

In definitiva, per $1 \le p \le +\infty$ *si ha*

$$\|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_p \le Mn\|\mathbf{x}\|_1 \,. \tag{3.3}$$

Accettando questo lemma possiamo provare:

Figura 3.3: Sfera di centro l'origine in norme diverse



Teorema 103 *In* $\mathbb{R}^n$*, una successione* $(\mathbf{v}_n)$ *converge a* $\mathbf{v}_0$ *in norma* p *se e solo se converge al medesimo limite* $\mathbf{v}_0$ *in qualsiasi altra norma* q*. Si ha* $\|\mathbf{v}_n\|_p \to +\infty$ *se e solo se* $\|\mathbf{v}_n\|_q \to +\infty$*.*

Dim. Proviamo il primo asserto. Sostituendo $\mathbf{v}_n$ con $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ si può studiare il caso della convergenza a zero. Proviamo che $\|\mathbf{v}_n\|_p \to 0$ se e solo se $\|\mathbf{v}_n\|_1 \to 0$. Questo è immediato dal teorema del confronto per i limiti (di successioni a valori reali) applicato alla disuguaglianza (3.3). Il secondo asserto si prova in modo ovvio. ∎ Inoltre, sia (v_n^i) la successione di numeri reali ottenuta considerando la componente i-ma dei vettori $\mathbf{v}_n$. Le disuguaglianze (3.3) mostrano:

Teorema 104 *La successione* $(\mathbf{v}_n)$ *converge se e solo se ciascuna delle successioni di numeri reali* (v_n^i) *è convergente e il vettore* $\lim \mathbf{v}_n$ *ha per i-ma componente il numero* $\lim v_n^i$*.*

Osservazione 105 Si noti che un asserto analogo non vale per *successioni divergenti* ossia tali che

$$\lim \|\mathbf{v}_n\| = +\infty\,.$$

Per questo basta che una delle successioni (v_n^i) diverga! ∎

3.3.1 Completezza di $\mathbb{R}^n$

Si chiama *successione fondamentale* o *successione di Cauchy* una successione $(\mathbf{v}_n)$ con questa proprietà:

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che se $n > N_\epsilon$, $m > N_\epsilon$ allora

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\| < \epsilon\,.$$

In simboli,

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \mid n > N_\epsilon\,,\ m > N_\epsilon \Longrightarrow \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\| < \epsilon\,.$$

Una dimostrazione analoga a quella del Teorema 103 mostra che la proprietà di essere fondamentale non dipende dalla norma usata e per questo nella definizione precedente abbiamo usato il generico simbolo di norma. Inoltre le disuguaglianze (3.3) mostrano che:

Teorema 106 *La successione $(\mathbf{v}_n)$ è fondamentale se e solo se ciascuna delle sue componenti è una successione fondamentale di numeri reali.*

Si sa dal corso di Analisi Matematica 1 che una successione di numeri converge se e solo se è fondamentale. E quindi quest'asserto vale anche in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 107 *Una successione $(\mathbf{v}_n)$ di $\mathbb{R}^n$ converge se e solo se è fondamentale.*

Per dire che in $\mathbb{R}^n$ le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni fondamentali si dice che $\mathbb{R}^n$ è *completo*. Una successione $(\mathbf{v}_n)$ si dice *limitata* la sua immagine è limitata, ossia quando esiste M tale che

$$\text{per ogni } n \text{ vale } \|\mathbf{v}_n\| < M\,.$$

Le disuguaglianze (3.3) mostrano che una successione è limitata se e solo se sono limitate le successioni delle sue componenti; e quindi anche in $\mathbb{R}^n$ vale il *Teorema di* *Bolzano-Weierstrass* *:*

Teorema 108 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata ammette s.successioni convergenti.*

3.4 La norma euclidea

La norma di gran lunga più utile è la norma $\|\cdot\|_2$, perché essa ha una proprietà ben particolare, che ora illustriamo. Dai corsi di Geometria si sa che è possibile definire il $\boxed{\textit{prodotto scalare}}$, detto anche $\boxed{\textit{prodotto interno}}$, in $\mathbb{R}^n$ e che quando si conoscono le componenti di due vettori rispetto alla base canonica

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i \,.$$

il prodotto scalare si calcola come[7]

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \,.$$

Si vede quindi che:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \,. \tag{3.4}$$

Osservazione 109 Si osservi che il prodotto scalare di vettori associa a due vettori un numero (e non un vettore)! ∎

Diciamo infine che un vettore che ha norma euclidea uguale ad 1 si chiama $\boxed{\textit{versore}}$. I particolari versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ di $\mathbb{R}^3$ (o di $\mathbb{R}^2$ se non si considera $\mathbf{k}$) si chiamano i *versori degli assi coordinati.* Chiamiamo ora $\boxed{\textit{ortogonali}}$ due vettori che hanno prodotto scalare nullo e mostriamo che vale:

Teorema 110 (Teorema di $\boxed{\textbf{Pitagora}}$) *Se* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *sono due vettori di* $\mathbb{R}^n$*, si ha*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 \,.$$

<u>Dim</u>. *Si ricordi dai corsi di geometria che il prodotto scalare gode della proprietà distributiva:*

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} \,.$$

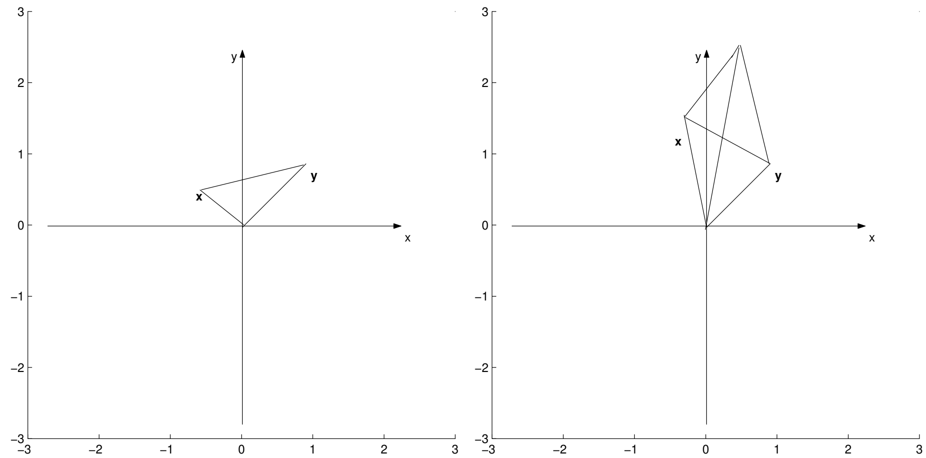
Dunque,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$$
$$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|_2^2 + |\mathbf{y}\|_2^2$$

perché ambedue gli addendi in parentesi sono nulli. ∎

Quando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali, il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, si veda la figura 3.4. Dunque Il Teorema di Pitagora si interpetra dicendo che in $\mathbb{R}^2$ *il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ha per area la somma delle aree dei quadrati costruiti*

Figura 3.4: Teorema di Pitagora e identità del parallelogramma



sui cateti. Mostriamo ora una particolarissima proprietà della norma euclidea, che si chiama *identità del* $\boxed{\textit{parallelogramma}}$.

Teorema 111 *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^n$*. Vale*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\left[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right] \ .$$

Dim. Usando la proprietà distributiva del prodotto scalare, calcoliamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) \\ +(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) &= 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 2\left[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right] \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La norma euclidea è l'unica norma che gode di questa proprietà. Per esercizio, si mostri che la proprietà del parallelogramma non vale per i vettori $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}'$ di $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_\infty$. La figura 3.4 a destra mostra il significato dell'identità del parallelogramma in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ sono le diagonali del parallelogramma identificato dai due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e quindi l'identità del parallelogramma è un'estensione del teorema di Pitagora: *in un parallelogramma, la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle due diagonali è uguale alla*

[7]talvolta invece che con vettori a componenti reali dovremo lavorare con vettori a componenti numeri complessi. In tal caso il prodotto scalare è $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i$ dove la barra indica il coniugato. Si noti che in questo modo $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ è sempre reale e positivo e la (3.4) vale anche per vettori a componenti numeri complessi.

somma delle aree dei quadrati costruiti sui quattro lati. Il prodotto scalare si definisce tra vettori liberi; la definizione si estende quindi al caso dei vettori applicati nel medesimo punto come si è detto al paragrafo 3.1.2.

> Da ora in poi, se non si specifica esplicitamente il contrario, la norma in $\mathbb{R}^n$ sarà la norma $|\cdot|_2$, che indicheremo $|\cdot|$, sottintendendo l'indice. Useremo norme diverse per fare delle dimostrazioni se questo sarà conveniente. Infatti, il fatto che la relazione di convergenza non dipenda dalla particolare norma usata per verificarla può usarsi per semplificare alcune dimostrazioni.

3.4.1 $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ con la norma euclidea

Vogliamo ora esaminare più in dettaglio il caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ con norma euclidea. Diamo però la definizione seguente che vale anche in $\mathbb{R}^n$, dotato della norma euclidea e quindi del prodotto interno: due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si dicono *ortogonali* quando hanno prodotto scalare nullo:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \text{quando } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Si fissi ora il vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Sono ad esso ortogonali i vettori $\mathbf{w}_1 = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$ e $\mathbf{w}_2 = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$. Le matrici che trasformano la base canonica rispettivamente nella base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}_1\}$ e $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}_2\}$ sono rispettivamente

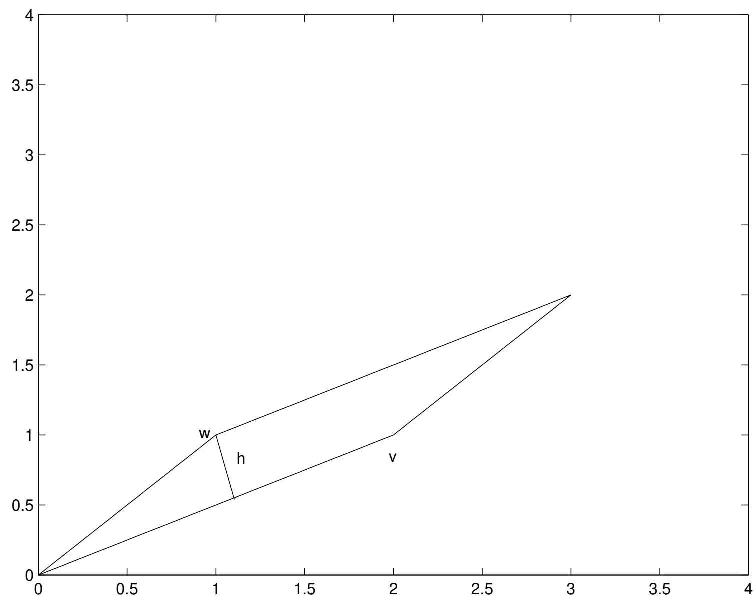
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

La prima ha determinante negativo mentre la seconda ha determinante positivo. Dunque, la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}_2\}$ è orientata positivamente, ossia, come anche si dice, ha orientazione concorde con quella dello spazio. Per questa ragione, se non si specifica esplicitamente il contrario, come vettore ortogonale a $\mathbf{v}$ sceglieremo $-b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$. Vediamo ora di chiarire il significato geometrico dei determinanti di matrici 2×2 e 3×3. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori, di componenti rispettivamente (a, b) e (c, d) rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Questi vettori identificano i due punti del piano $P \equiv (a, b)$ e $Q \equiv (c, d)$. Vogliamo calcolare l'area del parallelogramma in figura 3.5. Si sa che l'area è il prodotto della lunghezza di un lato per l'altezza ad esso relativa. Scegliendo come lato quello identificato dal vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, vogliamo calcolare

$$|\mathbf{v}|\,|\mathbf{h}|$$

ove $\mathbf{h}$ è il vettore, applicato in Q, indicato in figura 3.5. Dividendo per $|\mathbf{v}|$ non

Figura 3.5: Calcolo dell'area di un parallelogramma



è restrittivo supporre $|\mathbf{v}| = 1$, ossia $a^2 + b^2 = 1$. In questo caso l'area è $|\mathbf{h}|$. L'altezza è il vettore

$$\mathbf{h} = \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \,.$$

Ricordando che $a^2 + b^2 = 1$, si calcola:

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}|^2 &= [\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}] \cdot [\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}] \\ &= [c - (ca + bd)a]^2 + [d - (ca + bd)b]^2 \\ &= c^2 - 2ac(ca + bd) + d^2 - 2bd(ca + bd) + (a^2 + b^2)(ca + bd)^2 \\ &= c^2(1 - a^2) + d^2(1 - b^2) - 2cabd = (cb)^2 + (da)^2 - 2cabd \\ &= (cb - ad)^2 \end{aligned}$$

e quindi l'area è

$$|cb - ad| = \left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right| \,.$$

Si trova quindi un'interpretazione geometrica per il valore assoluto del determinante di una matrice 2×2: il numero $\left|\det \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}\right|$ è l'area del parallelogramma identificato dai due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (applicati nell'origine). Il determinante stesso si interpretra anche come "area con segno" del parallelogramma identificato dai vettori che sono le colonne della matrice. Si può quindi concludere che valgono le affermazioni seguenti, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^2$ (in quest'ordine) e per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} :$$

- Condizione necessaria e sufficiente perché i due vettori siano colineari è che il determinante di A sia nullo;
- se il determinante è non nullo, i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (in quest'ordine) sono una base ordinata di $\mathbb{R}^2$; il parallelogramma che essi identificano ha "area con segno" che è positiva se e solo se essi, presi nell'ordine dato, sono una base orientata positivamente;
- la matrice A subordina una trasformazione lineare in $\mathbb{R}^2$. Siano $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ due vettori (applicati nell'origine) e $\tilde{\mathbf{r}} = A\mathbf{r}$, $\tilde{\mathbf{r}}' = A\mathbf{r}'$ le loro immagini mediante la matrice A. Sia R il parallelogramma identificato dai vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ e sia $\tilde{R}$ il parallelogramma identificato dalle loro immagini. L'area del parallelogramma $\tilde{R}$ è il prodotto di $|\det A|$ per l'area del parallelogramma R:
$$(\text{area di } \tilde{R}) = |\det A| \cdot (\text{area di } R). \tag{3.5}$$

Risultati del tutto analoghi valgono anche in $\mathbb{R}^3$. Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, in quest'ordine, si costruisce la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} .$$

Il valore assoluto del suo determinante è il volume del parallelepipedo identificato dai tre vettori (applicati nell'origine). La matrice A identifica una trasformazione lineare. Tale trasformazione applicata ai punti di un parallelepipedo lo trasforma in un altro, il cui volume differisce da quello del primo per il fattore $|\det A|$. Il numero $\det A$ si interpreta come "volume con segno".

3.5 Il prodotto vettoriale

A differenza delle operazioni tra vettori introdotte fino ad ora, che valgono in $\mathbb{R}^n$ per ogni n, l'operazione di prodotto vettoriale è specifica di $\mathbb{R}^3$. Essa si definisce ponendo:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = 0\,, & \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = 0\,, & \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = 0\,, \\ \mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\,, & \mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}\,, & \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = @@newl@@j\,, \\ \mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = -\mathbf{j}\wedge\mathbf{i}\,, & \mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = -\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}\,, & \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = -\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}\,. \end{array}$$

Completiamo ora la definizione di prodotto vettoriale ponendo

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \wedge (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (bz - cy)\mathbf{i} + (cx - az)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}$$

formalmente ottenuta distribuendo le somme sui prodotti e facendo uso delle regole per i prodotti vettoriali degli elementi della base. Di conseguenza, si verificano le regole seguenti:

1. $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
2. $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$;
3. vale:
$$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} .$$
Quindi, il valore assoluto $|(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ è il volume del parallelepipedo identificato dai tre vettori (pensati applicati nell'origine);
4. In particolare,
$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{v} & \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \end{bmatrix} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) .$$
Questo numero è zero se i vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ sono colineari. Altrimenti è positivo. Dunque, i tre vettori $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ (presi in quest'ordine e con $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ non colineari) subordinano in $\mathbb{R}^3$ l'orientazione positiva.

Si noti che:

- Il prodotto vettoriale si definisce per vettori liberi; la definizione si estende quindi al caso dei vettori applicati nel medesimo punto come si è detto al paragrafo 3.1.2.
- Il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore. Per contrasto, il prodotto scalare di due vettori è un numero.
- Il prodotto vettoriale è nullo se e solo se i due vettori sono colineari. Per contrasto, il prodotto scalare è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.

Infine, si noti che le regole per il calcolo del prodotto vettoriale sono definite in modo da "mimare" quelle per il calcolo dei determinanti.

Osservazione 112 Il prodotto vettoriale può definirsi in particolare per vettori complanari, per esempio per vettori del piano $z = 0$. In tal caso il prodotto vettoriale è un vettore "verticale", ossia parallelo all'asse z. ∎

Osservazione sulla notazione La notazione col punto, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, per indicare il prodotto scalare è oggi universalmente usata[8]. Invece, la notazione per il prodotto vettoriale non è cosìuniforme. La notazione $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ si trova principalmente in testi europei, mentre in testi americani (ed anche inglesi) il prodotto vettoriale è indicato $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

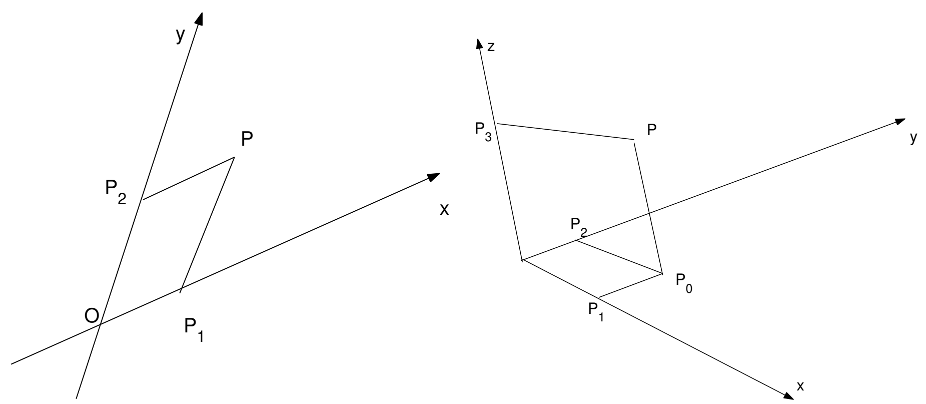
3.6 Coordinate curvilinee nel piano e nello spazio

Il modo più comune per rappresentare i punti del piano, o dello spazio, usa le coordinate cartesiane ortogonali. Però, punti del piano e dello spazio possono rappresentarsi, oltre che in coordinate cartesiane ortogonali mediante *coordinate cartesiane* $\boxed{\textit{oblique}}$ o anche con altri "sistemi di coordinate" che generalmente costruiscono corrispondenze biunivoche tra i punti (del piano o dello spazio) (o talvolta di opportuni loro s.insiemi) ed opportuni s.insiemi di $\mathbb{R}^2$ oppure di $\mathbb{R}^3$. Per ragioni che vedremo, si parla in tal caso di $\boxed{\textit{coordinate curvilinee}}$. Noi esamineremo prima le coordinate cartesiane oblique (nel piano. La semplice estensione allo spazio è lasciata al lettore). Poi studieremo alcuni casi particolari di coordinate curvilinee: vedremo l'uso delle *coordinate polari* e delle $\boxed{\textit{coordinate ellittiche}}$ per rappresentare i punti del piano cartesiano e l'uso delle $\boxed{\textit{coordinate cilindriche}}$, $\boxed{\textit{sferiche}}$ ed $\boxed{\textit{ellittiche}}$ per rappresentare i punti dello spazio, che supporremo dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Coordinate cartesiane oblique nel piano (e nello spazio). Fissata l'origine O, tracciamo per essa due rette non coincidenti (tre rette non complanari nello spazio). Queste rette si chiamano *assi cartesiani* $\boxed{\textit{obliqui}}$. Si decida quale è la prima retta, asse delle ascisse, la seconda, asse delle ordinate, un verso positivo su di esse e un'unità di misura (che potrebbe anche essere diversa. Noi assumeremo che sia la medesima). Da un punto P facciamo uscire due rette, parallele agli assi delle ordinate e delle ascisse. La retta parallela all'asse delle ordinate interseca l'asse delle ascisse in un punto P_1 la cui distanza distanza (con segno) da O si chiama l' $\boxed{\textit{ascissa}}$ di P. In modo analogo si definisce l'$\boxed{\textit{ordinata}}$ di P. La coppia ordinata dell'ascissa e dell'ordinata rappresenta univocamente il punto P. Si veda la figura 3.6. Un problema importante è di passare da un sistema di coordinate ad un altro. Limitiamoci a studiare il caso di due sistemi di coordinate, uno un sistema di coordinate cartesiane ortogonali del piano ed uno un sistema di coordinate oblique. Provvisoriamente

[8] in libri molto vecchi e assai raramente in testi recenti si trova usata la croce per il prodotto scalare, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Figura 3.6: Coordinate oblique



indichiamo con lettere greche le coordinate oblique: ξ è l'asse delle ascisse (oblique) ed η quello delle ordinate. Indichiamo con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi cartesiani ortogonali e siano

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta\,, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi$$

i versori degli assi obliqui, si veda la figura 3.7. Si conoscano le coordinate cartesiane ortogonali (x, y) del punto P. Le coordinate oblique di P sono le distanze dall'origine dei vettori dei punti P_1 e P_2, che avranno forma

$$\xi\mathbf{v}_1\,, \qquad \eta\mathbf{v}_2$$

per certe scelte dei parametri ξ e η. Poiché $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono versori, le coordinate oblique di P sono proprio i numeri ξ e η, che ora vogliamo calcolare. Ciò si fa notando che

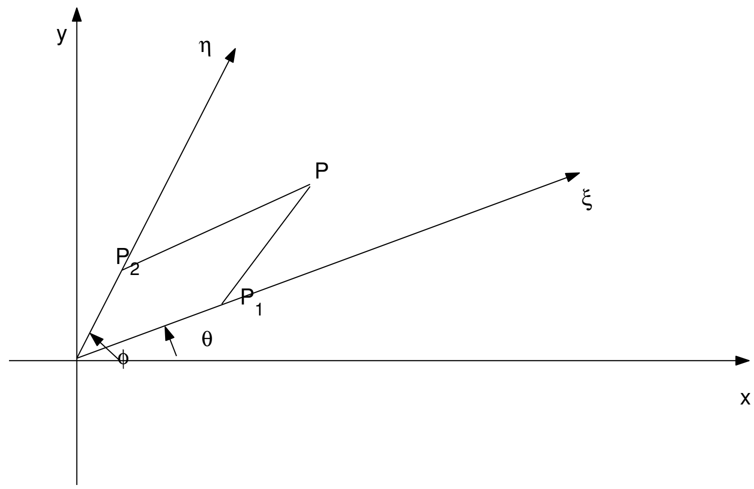
$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \xi\mathbf{v}_1 + \eta\mathbf{v}_2 = \xi(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta) + \eta(\mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi)\,.$$

Uguagliando le componenti si ottiene immediatamente

$$\begin{cases} \xi = \frac{y\cos\phi - x\sin\phi}{\sin(\theta-\phi)}\,, \\ \eta = \frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{\sin(\theta-\phi)}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \xi\cos\theta + \eta\cos\phi \\ y = \xi\sin\theta + \eta\sin\phi\,. \end{cases}$$

Si noti che il denominatore è non nullo perchè gli assi obliqui non coincidono. Si osservi un caso particolare: supponiamo che $\phi - \theta = \pi/2$. In questo caso gli "assi obliqui" sono tra loro perpendicolari e si vuol rappresentare il

Figura 3.7: Trasformazione a coordinate oblique

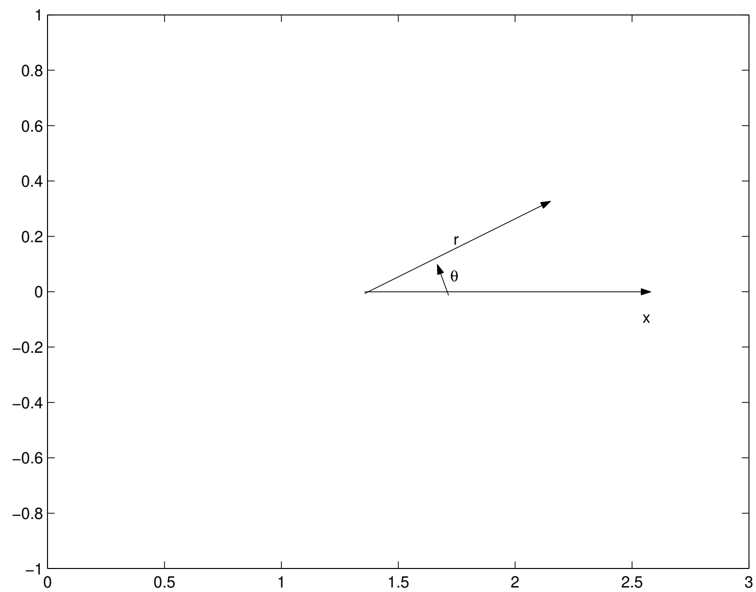


medesimo punto P rispetto a due sistemi di assi cartesiani ortogonali ruotati l'uno rispetto all'altro. Precisamente, il secondo sistema è ottenuto ruotando il primo dell'angolo θ (in senso positivo o negativo). Essendo in questo caso particolare $\phi = \theta + \pi/2$, le coordinate (ξ, η) sono date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta\,, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta\,. \end{array} \right.$$

Coordinate polari nel piano. Sia P il punto da rappresentare. Si rappresenta P mediante la sua distanza da O e mediante l'angolo θ tra la retta r che esce dall'origine O e punta verso P e il semiasse positivo delle ascisse. L'angolo si sceglie col segno in questo modo: si orienta la retta r da O verso P; si riporta il semiasse $x > 0$ sulla semiretta r, ruotando dell'angolo minore. L'angolo θ cosìottenuto si intende positivo se la rotazione è antioraria (si confronti con la regola d'Ampère). In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano (x, y), escluso O, e le coppie di numeri (ρ, θ) con $\rho > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Dunque, ogni punto P del piano (x, y), escluso O, viene identificato dalla coppia dei numeri ρ e θ, che si chiamano le $\boxed{\textit{coordinate polari}}$ di P. L'origine invece è identificata da $(0, \theta)$ per ogni θ. Si veda la figura 3.8. Il numero ρ si chiama il definmodulo e θ si chiama l' $\boxed{\textit{argomento}}$}*o* $\boxed{\textit{anomalia}}$ }o $\boxed{\textit{anomalia}}$ di P. La relazione tra le coordinate

Figura 3.8: coordinate polari



cartesiane e le coordinate polari è data da:

$$x = \rho \cos \theta \,, \qquad y = \rho \sin \theta \,.$$

nel contesto delle coordinate polari, il semiasse positivo delle ascisse si chiama anche $\boxed{\textit{asse polare}}$ e il suo estremo, ossia l'origine, si chiama anche $\boxed{\textit{polo}}$.

Osservazione 113 *Va notato che la corrispondenza* $(\rho, \theta) \mapsto (x, y)$ *è suriettiva ma non iniettiva; dunque non invertibile. Si trova una corrispondenza biunivoca di* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *se* $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$.

Coordinate polari ellittiche piano. Siano assegnati due numeri positivi a e b. Le $\boxed{\textit{coordinate polari ellittiche}}$ nel piano si ottengono rappresentando i punti (x, y) mediante i numeri (ρ, θ) tali che

$$x = \rho a \cos \theta \,, \qquad y = \rho b \sin \theta \,.$$

Le curve coordinate delle coordinate polari od ellittiche. Torniamo alle relazioni

$$x = \rho a \cos \theta \,, \qquad y = \rho b \sin \theta \,.$$

Queste relazioni identificano un punto (x, y) del piano per ogni scelta di (ρ, θ). Si chiamano $\boxed{\textit{curve coordinate}}$ quelle ottenute da queste espressioni per θ fissato al variare di r (rette per l'origine) e per r fissato al variare di θ (ellissi; nel caso particolare delle coordinate polari si hanno circonferenze).

Coordinate cilindriche nello spazio. Sia $P \equiv (x, y, z)$ un punto dello spazio, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Il punto $Q \equiv (x, y, 0)$ si chiama la *proiezione ortogonale* di P sul piano $z = 0$. Il punto Q si può rappresentare mediante le sue coordinate polari (ρ, θ) e quindi P viene ad essere rappresentato mediante (ρ, θ, z). Quando si fa uso di questa rappresentazione si dice che si rappresenta lo spazio in $\boxed{\textit{coordinate cilindriche}}$, si veda la figura 3.9. Se invece delle coordinate polari, sul piano si usano le coordinate ellittiche, le corrispondenti coordinate nello spazio si chiamano $\boxed{\textit{cilindriche ellittiche}}$.

Le superfici coordinate delle coordinate cilindriche. Le curve coordinate sono quelle curve che si ottengono tenendo fissi i valori di due parametri e facendo variare il terzo. Sono quindi rette per l'origine, circonferenze (o ellissi) e rette verticali. Però nello spazio si possono anche definire le $\boxed{\textit{superfici coordinate}}$, ottenute tenendo fisso un parametro e facendo variare gli altri due. Quindi, nel caso delle coordinate cilindriche ellittiche, le superfici coordinate sono cilindri ellittici di asse parallelo all'asse z (ottenuti tenendo fisso il valore di ρ); piani per l'asse z (ottenuti tenendo fisso il valore di θ); piani perpendicolari all'asse z (ottenuti tenendo fisso il valore di z).

Coordinate sferiche ed ellittiche nello spazio. Le coordinate sferiche nello spazio sono l'analogo delle coordinate polari nel piano. Per rappresentare un punto $P(x, y, z)$, si costruisce la retta congiungente O con P. Si rappresenta P mediante (r, θ, ϕ) dove r è la distanza di P da O e ancora si chiama l'$\boxed{\textit{argomento}}$ di P; θ è l'argomento della proiezione Q di P sul piano $z = 0$, ϕ è l'angolo tra il versore ν che sulla retta da O a P punta verso P ed il versore $\mathbf{k}$. L'ampiezza di quest'angolo si intende compresa tra 0 e π. Dunque, si veda la figura 3.10, P si rappresenta anche con la terna (r, θ, ϕ) con

$$r \geq 0\,, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi\,, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi\,.$$

Questi numeri si chiamano le $\boxed{\textit{coordinate sferiche}}$ di P. La relazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate sferiche è la seguente:

$$x = r\cos\theta\sin\phi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\,, \qquad z = r\cos\phi\,.$$

Figura 3.9: coordinate cilindriche

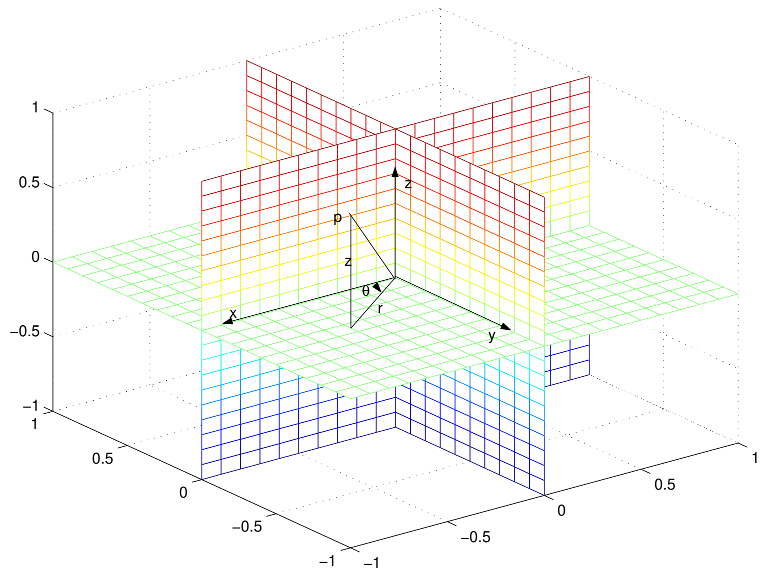
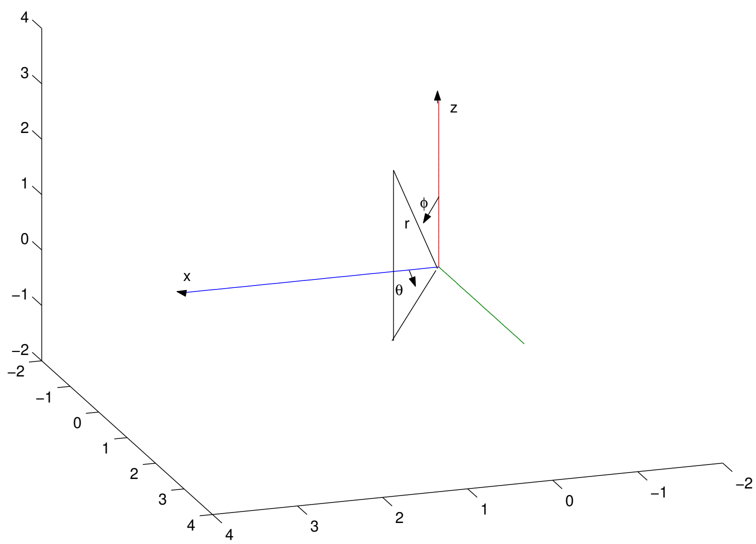


Figura 3.10: coordinate sferiche



Il numero r si chiama ancora $\boxed{\textit{modulo}}$, il numero θ si chiama $\boxed{\textit{longitudine}}$ mentre il numero ϕ si chiama $\boxed{\textit{colatitudine}}$. Siano dati ora tre numeri positivi a, b e c. Le coordinate ellittiche di un punto nello spazio sono le coordinate (ρ, θ, ϕ) che si ottengono imponendo

$$x = ra\cos\theta\sin\phi\,, \qquad y = rb\sin\theta\sin\phi\,, \qquad z = rc\cos\phi\,.$$

Le superfici coordinate delle coordinate sferiche ed ellittiche. Nel caso delle coordinate sferiche, le superfici coordinate sono sfere di centro l'origine (ottenute tenendo fisso il valore di r); piani per l'asse z (ottenuti fissando il valore di θ; (semi)coni circolari di asse sull'asse z (ottenuti tenendo fisso il valore di ϕ). Per esercizio, se ne identifichino le curve coordinate e si identifichino anche le curve e le superfici coordinate delle coordinate ellittiche.

3.7 Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$

Studiamo ora le proprietà di limite e continuità delle funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore e siano x_i le sue componenti. E' utile tener presente le disuguaglianze seguenti (si vedano le (3.3)):

- Per ogni i vale $|x_i| \leq |\mathbf{x}|$;
- Esiste un numero $M = M_{n,p}$ tale che $|\mathbf{x}|_p \leq M\sum_{i=1}^n |x_i|$.

Le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono state studiate nel corso di Analisi Matematica 1. E' facile adattare gli argomenti visti nel corso di Analisi Matematica 1 al caso di funzioni a valori vettoriali. Per l'uso che a noi servirà, consideriamo funzioni definite su un intervallo I, aperto o meno, limitato o meno, a valori in $\mathbb{R}^n$. Dunque, si specifica la funzione assegnando ad ogni valore $t \in I$ un vettore $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, ossia assegnando le sue n componenti. Si costruisce cosìuna funzione

$$t \to \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n(t)\mathbf{e}_n\,.$$

Nel caso di $\mathbb{R}^2$ o di $\mathbb{R}^3$ scriveremo anche

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,.$$

Notiamo che le componenti di $\mathbf{x}(t)$ sono funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e quindi le nozioni apprese nel corso di Analisi 1 possono essere applicate a ciascuna componente. Ora definiamo:

- **Limiti e continuità**

Si fissi un punto t_0. Il punto t_0 può essere un punto di I o anche un estremo di I che non gli appartiene.

Si dice che $\boxed{\lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{l}}$ quando assegnata una qualsiasi palla $B(\mathbf{l}, \epsilon)$ centrata in $\mathbf{l}$ esiste un intorno $I_\epsilon(t_0)$ tale che se $t \in I_\epsilon \cap I$, $\boxed{t \neq t_0}$, allora $\mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{l}, \epsilon)$. In simboli,

$$\forall\epsilon \quad \exists\delta \,|t \in I \mathrm{e} 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{l}| < \epsilon\,.$$

Se $t \in I$ e inoltre

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$$

si dice che la funzione è $\boxed{\textit{continua}}$ in t_0.

Si lascia per esercizio di definire i limiti per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$, sulla falsariga della definizione del limite di successioni, vista al paragrafo 3.3. Si noti però che non è possibile definire limiti uguali a $\pm\infty$. Se $\mathbf{x}(t)$ non rimane limitata allora possiamo definire solamente $\lim |\mathbf{x}(t)| = +\infty$ e si ricade in un caso già trattato nel corso di Analisi Matematica 1 perch'e la funzione $t \to |\mathbf{x}(t)|$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in s'e. Siano $x_i(t)$ le componenti di $\mathbf{x}(t)$ ed l_i quelle di $\mathbf{l}$. Il teorema seguente è analogo al Teorema **??**.

Teorema 114 *Vale* $\lim \mathbf{x}(t) = \mathbf{l}$ *se e solo se per ogni* i *vale* $\lim x_i(t) = l_i$. *Una funzione* $t \to \mathbf{x}(t)$ *da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *è continua se e solo se ciascuna sua componente è una funzione continua da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$.

Noto ciò, è immediato dedurre il risultato seguente:

Teorema 115 *Siano* $t \to \mathbf{x}(t)$ *e* $t \to \mathbf{y}(t)$ *due funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *definite sul medesimo intervallo* I *ed ambedue continue e sia* $t \to k(t)$ *una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *definita su* I *e continua. Le funzioni*

$$t \to k(t)\mathbf{x}(t)\,, \qquad t \to \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)\,, \qquad t \to \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)$$

(il punto indica il prodotto scalare calcolato per ogni valore di t*) sono continue. Se* $n = 3$, *anche la funzione* $t \to \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t)$ *è continua.*

Si lascia per esercizio di enunciare i teoremi corrispondenti per i limiti.

- **i simboli di Landau** Si dice che $\mathbf{x}(t)$ è un $\boxed{\textit{infinitesimo}}$ per $t \to t_0$ quando

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{x}(t) = 0\,.$$

Siano $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ due funzioni definite sul medesimo intervallo I e se ne vogliano studiare le relazioni per $t \to t_0$. Diciamo che:

i) $\mathbf{x} = \mathbf{O}(\mathbf{y})$ quando esistono un numero M ed un intorno J di t_0 tali che:

$$t \in I \cap J \Rightarrow |\mathbf{x}(t)| \leq M|\mathbf{y}(t)|\,.$$

ii) $\mathbf{x} = \mathbf{o}(\mathbf{y})$ quando $|y(t)| \neq 0$ per $t \neq t_0$ in un intorno di t_0 e inoltre

$$\lim_{t \to t_0} \frac{|\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{y}(t)|} = 0\,.$$

In queste definizioni le due funzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ potrebbero avere valori in spazi di dimensione diversa. In particolare, $\mathbf{y}(t)$ potrebbe essere una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Se $y(t)$ prende valori in $\mathbb{R}$ ed è costantemente uguale ad 1, la condizione $\mathbf{x} = \mathbf{o}(1)$ vul dire che $\mathbf{x}(t)$ è un infinitesimo (sottinteso, per $t \to t_0$).

- **La derivabilità**

Sia t_0 punto interno di I. Si dice che un vettore $\mathbf{l}$ è la $\boxed{\textit{derivata}}$ di $\mathbf{x}(t)$ quando

$$\mathbf{l} = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0}\,.$$

La derivata si indica con uno dei soliti simboli,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t_0)}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \mathbf{x}'(t_0)\,, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t_0)\,, \qquad D\mathbf{x}(t_0)\,, \qquad D_{t_0}\mathbf{x} \quad \text{ecc.}$$

Se t indica il tempo e se $\mathbf{x}(t)$ indica la posizione di un punto all'istante t, allora il quoziente

$$\frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0}$$

indica la velocità media del punto, nell'intervallo di tempo (t_0, t); e quindi la derivata si interpreta come $\boxed{\textit{velocità}}$ del punto all'istante t. Usando le disuguaglianzein (3.3), si vede che

Teorema 116 *La funzione $\mathbf{x}(t)$ è derivabile in t_0 se e solo se ciascuna sua componente è derivabile in $\mathbf{t}_0$ e inoltre*

$$\mathbf{x}'(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ x_2'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{bmatrix} .$$

Dunque, una funzione derivabile in un punto t_0 è ivi continua.

In modo del tutto analogo si definiscono le derivate direzionali. Le usuali regole di calcolo delle derivate si possono applicare alle singole componenti del vettore $\mathbf{x}(t)$ e quindi, per esempio, vale ancora la proprietà di $\boxed{\textit{linearità}}$ *della derivata:*

$$D_{t_0}\{\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)\} = \mathbf{x}'(t_0) + \mathbf{y}'(t_0) .$$

Teorema 117 *Siano $\mathbf{x}(t)$ ed $\mathbf{y}(t)$ derivabili in t_0. I prodotti scalare e vettoriale*[9] *sono derivabili in t_0 e valgono le uguaglianze*

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)] = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t) ,$$
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t)] = \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}'(t) .$$

Dim. Proviamo l'asserto per il prodotto vettoriale. Bisogna calcolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) \wedge \mathbf{y}(t+h) - \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t)}{h} .$$

Aggiungendo e sottraendo al numeratore $\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t+h)$ si vede che la derivata è uguale a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \wedge \mathbf{y}(t+h) + \lim_{h\to 0} \mathbf{x}(t) \wedge \frac{\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}(t)}{h} = \mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}'(t)$$

perchè

$$\lim_{h\to 0} y(t+h) = y(t)$$

perché la funzione $\mathbf{y}(t)$, essendo derivabile, è anche continua La dimostrazione per il prodotto scalare è simile. ∎

[9] ricordiamo, definito solo in $\mathbb{R}^3$.

Osservazione 118 Nella regola per la derivata del prodotto vettoriale i fattori non possono scambiarsi; invece la derivata del prodotto scalare non dipende dall'ordine dei fattori. ▮

In particolare:

Teorema 119 *Sia* $\mathbf{x}(t)$ *una funzione derivabile a valori in* $\mathbb{R}^n$ *e tale che* $|\mathbf{x}(t)| \equiv 1$. *Allora,* $\mathbf{x}'(t) \perp \mathbf{x}(t)$.

Dim. Infatti, derivando i due membri dell'uguaglianza

$$1 = |\mathbf{x}(t)|^2 = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$$

si trova

$$2\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}(t) \equiv 0$$

ossia

$$\mathbf{x}'(t) \perp \mathbf{x}(t) . \quad ▮$$

Ovviamente, se $\mathbf{x}(t)$ è derivabile in t_0, vale la *prima formula degli* $\boxed{\textit{incrementi finiti}}$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{o}(t - t_0) .$$

Osservazione 120 Va esplicitamente notato che la seconda formula degli incrementi finiti, ossia il Teorema di Lagrange, NON vale. Per rendersi conto di ciò, consideriamo la funzione $\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Il Teorema di Lagrange può applicarsi alle due componenti separatamente, ottenendo

$$x(t') - x(t'') = x'(c_1)(t' - t'') , \qquad y(t') - y(t'') = y'(c_2)(t' - t'')$$

e generalmente $c_1 \neq c_2$. ▮

Se le singole componenti di $\mathbf{x}(t)$ sono ciascuna derivabile 2 volte, potremo introdurre le derivate seconde e, in generale, le derivate k-me in t_0. Se ciascuna componente ammette k derivate in t_0 si può anche scrivere la *formula di* $\boxed{\textit{Taylor}}$ con resto in forma di Peano,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathbf{x}^{(j)}(t_0)}{j!}(t - t_0)^j + \mathbf{o}(t - t_0)^k .$$

- **Integrale**

Se $t \to \mathbf{x}(t)$ è definita su $[a, b]$ e ciascuna sua componente è integrabile, si definisce $\int_a^b \mathbf{x}(t)\, \mathrm{d}t$ come quel vettore che ha per componenti i numeri $\int_a^b x_i(t)\, \mathrm{d}t$.