

Capitolo 2

Successioni e serie di funzioni

In questo capitolo studiamo le successioni e le serie di funzioni. Studiamo quindi particolari metodi per approssimare una data funzione $f(x)$ mediante serie i cui termini sono funzioni elementari: monomi o funzioni trigonometriche.

2.1 Introduzione

Ricordiamo, dal Par. 1.5.1, che una *successione di funzioni* è una trasformazione che ad ogni numero naturale n associa una funzione $f_n(x)$ definita su un dominio I , lo stesso per ogni n . Stando così le cose, il problema della convergenza della successione di funzioni si studia per ogni fissato $x \in I$; ossia si studia una successione numerica per ogni valore del parametro x . Se la successione $(f_n(x))$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in I_0 \subseteq I$, si dice che la successione $(f_n(x))$ *converge puntualmente* ad $f(x)$ su I_0 . In realtà questo è un modo piuttosto semplicistico di procedere. Le applicazioni richiedono infatti di studiare la convergenza rispetto ad opportuni concetti di “distanza” tra funzioni. Ciò è quanto facciamo in questo capitolo. **Notazione.** Da ora in poi di regola useremo una notazione meno “elementare”: per indicare una funzione invece di scrivere $f(x)$ scriveremo semplicemente f . Invece, col simbolo $f(x)$ intenderemo il valore che la funzione f assume nel punto x . In certi casi questo può condurre ad ambiguità ed allora useremo notazioni del tipo $x \rightarrow f(x)$ per indicare la funzione che ad x associa $f(x)$. Va detto che la notazione f non si può usare per specifiche funzioni: la funzione $x \rightarrow \sin x$ si indicherà semplicemente con $\sin x$. Dunque, successioni e serie di funzioni di regola si indicheranno con la notazione

$$(f_n), \quad \sum f_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

ecc. Invece scriveremo esplicitamente x quando dovremo considerare successioni o serie di funzioni particolari, per esempio

$$\sum 5^n(x-1)^n, \quad \sum \frac{1}{nx^2+1} \quad \sum \frac{1}{n^2} \sin nx. \quad \blacksquare$$

2.2 Distanze tra funzioni

Noi considereremo funzioni definite su un fissato insieme I che sarà sempre un intervallo. Specificheremo volta per volta se tale intervallo deve essere limitato e/o chiuso. Inoltre, non considereremo tutte le possibili funzioni definite su I , ma le funzioni di una delle tre classi seguenti:

- col simbolo $C(I)$ si intende l'insieme delle funzioni **continue** su I . Implicitamente usando questo simbolo si intende che I sia limitato e chiuso, $I = [a, b]$.
- col simbolo $\mathcal{L}^1(I)$ si intende l'insieme delle funzioni il cui valore assoluto è integrabile su I :

$$\int_I |f(x)| dx < +\infty.$$

L'insieme I è ora un intervallo qualsiasi.

- col simbolo $\mathcal{L}^2(I)$, si intende l'insieme delle funzioni tali che

$$\int_I |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

L'insieme I è ora un intervallo qualsiasi. Si noti la presenza del segno $|\cdot|$ e del quadrato. Ovviamente, se la funzione prende valori reali, $|f(x)|^2 = f^2(x)$. Però molto spesso la funzione $f(x)$ prende valori complessi e in tal caso il segno di modulo è necessario.

Osservazione 44 L'integrale che usiamo è l'integrale di Riemann. Si ricordi che una funzione integrabile secondo Riemann è necessariamente limitata. Usando questa proprietà, si potrebbe mostrare che, se l'intervallo I è limitato, i due insiemi $\mathcal{L}(I)$ ed $\mathcal{L}^2(I)$ hanno i medesimi elementi. I due insiemi invece sono diversi se I è illimitato o se si usano concetti diversi di integrale, che permettono di integrare anche funzioni illimitate. A noi interessa sapere che:

$$I \text{ limitato} \Rightarrow \mathcal{L}^2(I) \subseteq \mathcal{L}^1(I). \quad \blacksquare$$

2.2. DISTANZE TRA FUNZIONI

I tre insiemi sopra definiti sono **spazi lineari**, nel senso visto nei corsi di geometria, rispetto alle operazioni

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

In questi spazi lineari si introduce una *distanza* come segue:

- in $C(I)$ si pone

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

(si noti che il massimo esiste, dal teorema di Weierstrass, perché l'intervallo I è **limitato e chiuso**.) La distanza sopra definita si indica anche col simbolo¹

$$d_\infty(f, g).$$

- Le distanze in $\mathcal{L}^1(I)$ e in $\mathcal{L}^2(I)$ si indicano anche, rispettivamente, con i simboli

$$d_1(f, g), \quad d_2(f, g)$$

e sono definite da

$$d_1(f, g) = \int_I |f(x) - g(x)| dx, \quad d_2(f, g) = \left[\int_I |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Si noti che in questi simboli l'intervallo I è sottinteso e che spesso si scrive, rispettivamente,

$$\|f - g\|_\infty, \quad \|f - g\|_1, \quad \|f - g\|_2.$$

usando il simbolo di “norma della differenza”, al posto di quello di distanza

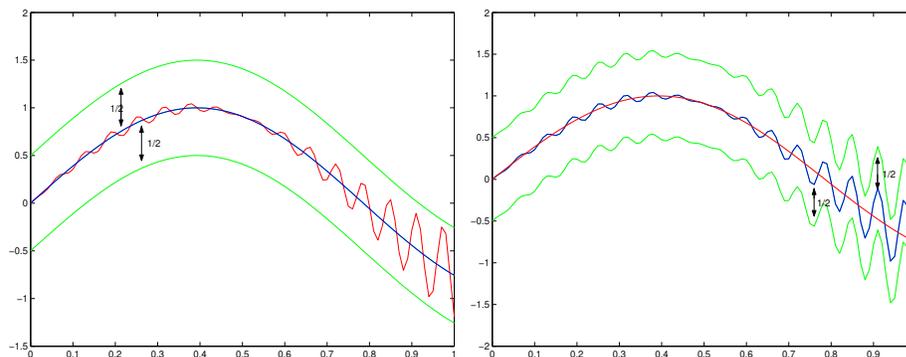
Osservazione 45 Non ci serve essere precisi su questo. Però va detto che solamente la norma $\|\cdot\|_\infty$ è effettivamente una norma e che solo $d_\infty(f, g)$ è effettivamente una distanza. Infatti, se $I = [0, 1]$, se $f(x) = 0$ per ogni x e se $g(x) = 0$ per $x \neq 1/2$ mentre $g(1/2) = 1$, allora $d_1(f, g) = 0$, $d_2(f, g) = 0$ nonostante che f e g siano tra loro diverse. ■

Accade che

$$d_\infty(f, g) < \epsilon$$

quando il grafico di $g(x)$ sta in un “tubo” di ampiezza ϵ intorno a quello di $f(x)$, come in figura 2.1. Si noti che il “tubo” può essere disegnato intorno ad una qualsiasi delle due funzioni. Ciò fatto si richiederà che il grafico dell'altra

Figura 2.1: Distanza $d_\infty(f, g)$



stia in tale “tubo”. Invece, $d_1(f, g) < \epsilon$ quando accade che è minore di ϵ l’area del trapezoide di $|f(x) - g(x)|$, ossia l’area della superficie compresa tra i grafici delle due funzioni. La figura 2.2, a sinistra, riporta il grafico di $|f(x) - g(x)|$ ed a destra quello di $|f(x) - g(x)|^2$ (per le medesime due funzioni $f(x)$ e $g(x)$) con tratteggiata la regione la cui area deve essere “piccola” se si vuole che queste “distino di poco” rispettivamente in $\mathcal{L}^1(a, b)$ ed in $\mathcal{L}^2(a, b)$. La figura suggerisce che la distanza, nel senso \mathcal{L}^1 , o \mathcal{L}^2 , tra due funzioni possa essere “piccola” anche se i due grafici diventano “molto distanti” per certi valori di x . Scriviamo ora esplicitamente la definizione di convergenza rispetto alla distanza d_∞ . Questo tipo di convergenza si chiama convergenza uniforme.

La successione di funzioni $(f_n(x))$ converge uniformemente ad $f(x)$ su I se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ vale

$$\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{per ogni } x \in I,$$

ossia, per $n > N_\epsilon$ vale

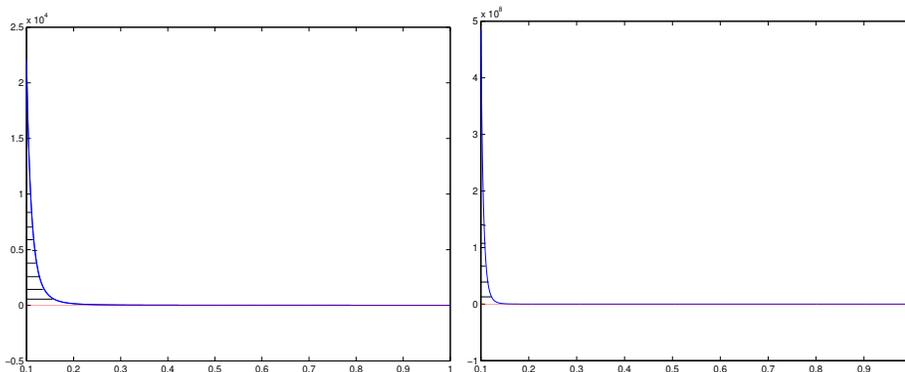
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Per contrasto, diamo la definizione di convergenza puntuale: la successione $(f_n(x))$ converge puntualmente ad $f(x)$ su I quando per ogni $x \in I$ e per

¹non spieghiamo la ragione dell’indice “ ∞ ”. Per spiegarlo, dovremmo introdurre una famiglia di altre distanze, che non useremo.

2.2. DISTANZE TRA FUNZIONI

Figura 2.2: Le distanze $d_1(f, g)$ e $d_2(f, g)$



ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $N_\epsilon(x)$ tale che se $n > N_\epsilon(x)$ si ha, per questo particolare numero x , $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Cambiando il punto x cambia anche il numero $N_\epsilon(x)$. Si ha **convergenza uniforme** quando si può trovare un numero N_ϵ che va bene per ogni $x \in I$. Diamo ora la definizione di convergenza in $\mathcal{L}^1(I)$ ed in $\mathcal{L}^2(I)$.

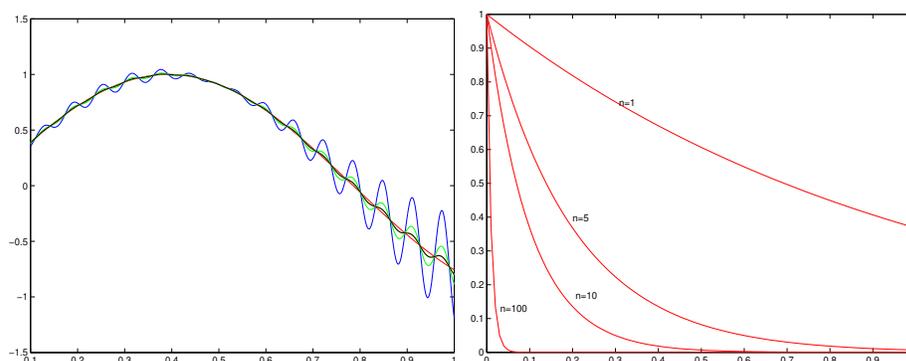
<p>La successione $(f_n(x))$ converge ad $f(x)$ in $\mathcal{L}^1(I)$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha</p> $\int_I f_n(x) - f(x) dx < \epsilon.$	<p>La successione $(f_n(x))$ converge ad $f(x)$ in $\mathcal{L}^2(I)$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha</p> $\int_I f_n(x) - f(x) ^2 dx < \epsilon^2.$
---	---

La convergenza in $\mathcal{L}^1(I)$ si chiama anche convergenza in media e la convergenza in $\mathcal{L}^2(I)$ si chiama anche *convergenza in* media quadratica mentre, come si è già detto, la convergenza in $C(I)$ si chiama *convergenza uniforme*.

Osservazione 46 Supponiamo che la successione di funzioni (f_n) sia definita su un dominio I , $I = I_1 \cup I_2$. Se la successione converge uniformemente su I , essa converge uniformemente sia su I_1 che su I_2 e, viceversa, se la successione converge uniformemente su I_1 e anche su I_2 , essa converge uniformemente anche su I . Asserto analogo vale anche per la convergenze in media e per la convergenze in media quadratica. ■

Vediamo ora due figure che illustrano il significato della convergenza uniforme e della convergenza in media. La fig. 2.3 a sinistra suggerisce la convergenza uniforme. La figura a destra vuol suggerire la convergenza in media, e vuol sottolineare che la convergenza in media non implica la convergenza puntuale. I grafici rappresentati a destra sono quelli delle funzioni e^{-nt} con $n = 1, 5, 10, 100$. Si provi dettagliatamente, facendo uso della definizione, che la successione (e^{-nt}) , $t \in [0, 1]$, converge a zero in media ed in media quadratica, ma non uniformemente. Infine, enunciemo il lemma seguente, immediata conseguenza

Figura 2.3: Convergenza uniforme e convergenza in media



del teorema di confronto per i limiti. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 47 *Sia (f_n) una successione di funzioni su un intervallo I . Su tale intervallo sia anche definita una funzione g . Sia (γ_n) una successione numerica tale che*

$$\lim \gamma_n = 0.$$

- se vale

$$d_\infty(f_n, g) < \gamma_n$$

allora la successione (f_n) converge uniformemente a g .

- se vale

$$d_1(f_n, g) < \gamma_n$$

allora la successione (f_n) converge a g in $\mathcal{L}^1(I)$.

- se vale

$$d_2(f_n, g) < \gamma_n$$

allora la successione (f_n) converge a g in $\mathcal{L}^2(I)$.

2.2.1 Il prodotto interno su $\mathcal{L}^2(a, b)$

Su $\mathcal{L}^2(a, b)$ si può definire un *prodotto interno* o *prodotto integrale* come segue: siano f e g due funzioni a quadrato integrabile. Si può provare che il loro prodotto è integrabile. Definiamo allora il prodotto interno delle due funzioni f e g ponendo²

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \bar{g}(s)f(s) ds.$$

Si noti che se le funzioni prendono valori reali allora il segno di coniugio non ha alcun effetto; se però esse prendono valori complessi il coniugio è importante perché è grazie ad esso che si ottiene

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2.$$

Quest'uguaglianza giustifica il termine “prodotto interno” (o “prodotto scalare”): nel caso dei “vettori ordinari” di \mathbb{R}^3 si ha infatti

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

Diciamo che due funzioni f e g sono *ortogonali* in $\mathcal{L}^2(a, b)$ quando

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Naturalmente, per dire che f è ortogonale a g , scriveremo

$$f \perp g.$$

Una proprietà importante del prodotto interno in $\mathcal{L}^2(a, b)$ è che per esso vale il *teorema di Pitagora*:

Teorema 48 *Se $f \perp g$ allora $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.*

Dim. Infatti si ha

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2. \quad \blacksquare$$

In particolare,

$$f \perp g \implies \|f\| \leq \|f + g\|, \quad \|g\| \leq \|f + g\|.$$

Osservazione 49 Va notato esplicitamente che non esiste nessun concetto analogo a quello di prodotto interno per le distanze in $C(a, b)$ o di $\mathcal{L}^1(a, b)$. \blacksquare

²si può mostrare che le proprietà essenziali di questo prodotto mimano quelle del prodotto scalare di vettori di \mathbb{R}^n o di \mathbb{C}^n .

2.2.2 Proprietà della convergenza uniforme

La sola convergenza puntuale è troppo debole per avere proprietà importanti di qualche tipo. Infatti:

- esistono successioni di funzioni integrabili che convergono puntualmente a funzioni non integrabili.

Per vedere un esempio, ricordiamo che i numeri razionali sono numerabili, ossia sono immagine di una successione iniettiva. Sia (q_k) questa successione e definiamo la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q_1, q_2, \dots, q_n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ciascuna delle funzioni $f_n(x)$ è integrabile, con integrale uguale a zero, perché $f_n(x)$ è zero salvo che in un numero finito di punti. La successione $(f_n(x))$ converge alla funzione di Dirichlet, che vale 1 sui razionali e vale 0 sugli irrazionali. Questa funzione non è integrabile.

- esistono successioni di funzioni continue che convergono puntualmente a funzioni discontinue.

Un esempio è il seguente: sia $I = [0, 1]$ e sia $f_n(x) = x^n$. Ciascuna funzione è continua, ma la successione di funzioni $(f_n(x))$ converge puntualmente su I alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Questa funzione è discontinua. E' per questa ragione che vanno introdotti concetti più restrittivi di convergenza. In questo paragrafo presentiamo le relazioni tra il concetto di convergenza uniforme e le proprietà di limite, derivabilità ed integrazione³. Il teorema centrale è il seguente:

Teorema 50 *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni, definite su un intervallo I , ciascuna delle quali è continua in un punto x_0 . Se la successione converge ad una funzione $f(x)$ uniformemente su I allora anche la funzione $f(x)$ è continua in x_0 .*

Omettiamo la dimostrazione. Ricordando che le funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso sono integrabili si ha:

³invece, non illustreremo le relazioni tra tali proprietà e le convergenze in media, che richiederebbero l'introduzione di concetti di integrale più generali di quello di Riemann.

2.2. DISTANZE TRA FUNZIONI

Corollario 51 Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso I . La successione converge uniformemente su I ad una funzione $f(x)$. Allora, la funzione $f(x)$ è continua e quindi anche integrabile su I .

Sotto le ipotesi del corollario precedente, può dirsi di più: l'integrale di $f(x)$ è il limite degli integrali delle $f_n(x)$. Ossia:

Teorema 52 Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso I . La successione converge uniformemente su I ad una funzione $f(x)$. Allora,

$$\int_I f(x) dx = \int_I \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_I f_n(x) dx \right]. \quad (2.1)$$

Dim. Ricordando la definizione di limite, dobbiamo provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha

$$\left| \int_I f(x) dx - \int_I f_n(x) dx \right| < \epsilon.$$

Dalla linearità e dalla proprietà di monotonia degli integrali,

$$\left| \int_I f(x) dx - \int_I f_n(x) dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx$$

e quindi basta provare che

$$\int_I |f_n(x) - f(x)| dx < \epsilon$$

per n sufficientemente grande. Ricordiamo che la successione $(f_n(x))$ converge ad $f(x)$ uniformemente su I : scelto un qualunque $\sigma > 0$ esiste \tilde{N}_σ tale che, per ogni $n > \tilde{N}_\sigma$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \sigma \quad \forall x \in I$$

e quindi anche

$$\int_I |f_n(x) - f(x)| dx < \sigma L$$

con L la lunghezza di I . L'asserto segue scegliendo $\sigma = \epsilon/L$ e $N_\epsilon = \tilde{N}_{\epsilon/L}$. ■

Osservazione 53 Ricordiamo, dall'Osservazione 46, che se $I = I_1 \cup I_2$ e se la successione (f_n) converge uniformemente su I , essa converge uniformemente sia su I_1 che su I_2 . D'altra parte, l'integrale su $I = I_1 \cup I_2$ è la somma dei

due integrali su I_1 e su I_2 . Quindi il teorema si applica facilmente anche a successioni uniformemente convergenti di funzioni continue a tratti e questo è sufficiente per molte applicazioni. Si potrebbe però provare che la semplice integrabilità di ciascuna delle funzioni $f_n(x)$ e la convergenza uniforme della successione ad $f(x)$ implica che la $f(x)$ è integrabile e che vale l'uguaglianza (2.1). ■

Sia $F_n(x)$ primitiva di $f_n(x)$. La convergenza della successione (f_n) **non** implica la convergenza della successione (F_n) . Questo si vede facilmente scegliendo $f_n(x) = 0$ per ogni x , ed $F_n(x) = n$ per ogni x . Le cose cambiano se si assegna il comportamento che le $F_n(x)$ devono avere in un medesimo punto x_0 :

Teorema 54 *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ e sia*

$$F_n(x) = c_n + \int_a^x f_n(s) ds.$$

Supponiamo che

$$\lim_n c_n = c_0,$$

e che la successione (f_n) converga uniformemente ad f_0 . In tal caso la successione (F_n) converge uniformemente alla funzione

$$F_0(x) = c_0 + \int_a^x f_0(s) ds.$$

Dim. Ricordiamo che la funzione $f_0(x)$ è continua, come limite uniforme di una successione di funzioni continue. Dunque l'espressione proposta per $F_0(x)$ ha senso. La differenza $|F_n(x) - F_0(x)|$ si stima così:

$$|F_n(x) - F_0(x)| \leq |c_n - c_0| + \int_a^x |f_n(s) - f_0(s)| ds \leq |c_n - c_0| + \int_a^b |f_n(s) - f_0(s)| ds.$$

La successione numerica $(|c_n - c_0|)$ tende a zero per ipotesi, mentre la successione numerica

$$\left\{ \int_a^b |f_n(s) - f_0(s)| ds \right\}$$

tende a zero per il Teorema 52. L'asserto segue quindi dal Lemma 47. ■ Vediamo ora le relazioni tra derivazione e convergenza uniforme. E' facile trovare esempi che mostrano che il limite uniforme di una successione di funzioni derivabili può non essere derivabile.

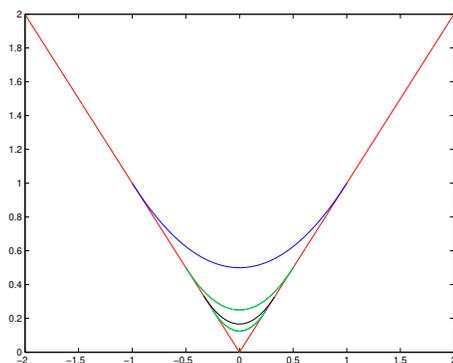
2.2. DISTANZE TRA FUNZIONI

Esempio 55 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| > 1/n \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ciascuna di queste funzioni è derivabile ma la successione di funzioni converge uniformemente alla funzione non derivabile $f(x) = |x|$. Il grafico di alcune di queste funzioni è in figura 2.4. ■

Figura 2.4: La convergenza uniforme non implica la convergenza della successione delle derivate



Vale però:

Teorema 56 Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili su un intervallo (a, b) . Supponiamo che:

- esista un punto x_0 tale che la successione numerica $(f_n(x_0))$ converga;
- la successione $(f'_n(x))$ converga uniformemente su I ad una funzione $h(x)$.

In tal caso la successione (f_n) converge uniformemente su I ad una funzione $f(x)$ che è derivabile, ed inoltre $f'(x) = h(x)$; ossia

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

Dim. Per ipotesi,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) \, ds.$$

L'asserto segue quindi dal Teorema 54. ■

2.3 Serie di funzioni

Le serie di funzioni si definiscono in modo del tutto analogo alle serie numeriche: se (f_n) é una successione di funzioni, la serie corrispondente si indica col simbolo

$$\sum_n f_n \quad \text{oppure} \quad \sum_n f_n(x).$$

Se é necessario indicare i valori presi dall'indice scriveremo per esempio

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n.$$

Il significato del simbolo di serie é il seguente: supponendo che l'indice prenda tutti i valori maggiori od uguali a 0, si costruisce la nuova successione

$$s_0(x) = f_0(x), \quad s_1(x) = f_0(x) + f_1(x), \quad s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x).$$

Se la successione di funzioni $(s_n(x))$ converge uniformemente, si dice che *la serie converge uniformemente*; se la successione di funzioni $(s_n(x))$ converge in \mathcal{L}^1 oppure in \mathcal{L}^2 , si dice che la serie converge in tal senso. Enunciamo il teorema seguente, senza dimostrarlo:

Teorema 57 *Sia convergente la serie di numeri positivi*

$$\sum \gamma_n.$$

Valga inoltre

$$d_p(f_n, 0) \leq \gamma_n$$

ove $p = +\infty$ oppure $p = 1$ oppure $p = 2$. Sotto queste ipotesi, esiste una funzione $g(x)$ (rispettivamente in $C(I)$, $\mathcal{L}^1(I)$ oppure $\mathcal{L}^2(I)$) tale che la serie

$$\sum f_n$$

converge nel senso corrispondente a $g(x)$.

Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni. Si dice che questa serie converge normalmente (in $C(I)$ oppure in $\mathcal{L}^p(I)$) quando converge la serie

$$\sum \|f_n\|_p$$

2.3. SERIE DI FUNZIONI

(con p uguale a 1, 2). L'asserto del teorema precedente si esprime anche dicendo che una serie che converge normalmente è anche una serie convergente. Il viceversa non vale. Nel caso di $p = +\infty$, ossia per la convergenza uniforme, il test per la convergenza dato nel Teorema 57 si chiama anche *test di Weierstrass*. A parte questo teorema, di dimostrazione difficile, i teoremi visti per la convergenza delle successioni di funzioni si adattano facilmente allo studio della convergenza delle serie. Enunciamo in particolare:

Teorema 58 *Una serie di funzioni continue $\sum f_n$ converga uniformemente su I ad una funzione $f(x)$. Allora la funzione $f(x)$ è continua e, se I è limitato e chiuso, vale*

$$\int_I \left[\sum_n f_n(x) \right] dx = \sum_n \left[\int_I f_n(x) dx \right].$$

Sia $\sum_n f_n(x)$ una successione di funzioni derivabili, convergente puntualmente su I ad una funzione $f(x)$. Supponiamo che la serie $\sum_n f'_n(x)$ converga uniformemente su I ad una funzione $g(x)$. Allora la funzione $f(x)$ è derivabile, con derivata $f'(x) = g(x)$ ed inoltre la serie $\sum_n f_n(x)$ converge ad $f(x)$ uniformemente su I .

Esempio 59 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n, \quad x \in [0, 1].$$

Questa serie converge puntualmente su $[0, 1]$, ossia converge per ogni $x \in [0, 1]$. Infatti, se $x = 0$ ogni termine della serie è nullo e quindi la somma della serie è 0; se $x \in (0, 1]$ allora è lecito scrivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^n \right) = x \frac{1}{1-(1-x)} = 1.$$

Dunque, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque la somma della serie non è continua e quindi la serie, pur convergendo puntualmente su $[0, 1]$, non converge uniformemente. ■

2.4 Serie di potenze

Si chiamano serie di potenze le serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n [x - x_0]^n, \quad (2.2)$$

ottenute a partire dalla successione di monomi $a_n [x - x_0]^n$. Si noti che il primo valore dell'indice è ora $n = 0$ ma niente vieta che sia $a_0 = 0$ ossia che la serie “parta” per esempio con indice 1. Se esiste N tale che $a_n = 0$ per $n > N$, allora la serie di potenze si riduce ad un polinomio: **le serie di potenze generalizzano i polinomi**. Il numero x_0 si chiama il *centro* della serie e la serie di potenze converge sempre per $x = x_0$ (e ivi converge ad a_0). Potrebbe non convergere in nessun altro punto.

Esempio 60 Si consideri la serie seguente, di centro $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n.$$

Si fissi il valore di $x \neq 0$ e sia n_0 tale che $|n_0 x| > 1$. Allora, per $n > n_0$, si ha

$$|nx|^n > |n_0 x|^n \rightarrow +\infty.$$

Dunque, se $x \neq 0$, il termine generale della serie non tende a zero, e quindi la serie non converge. ■

Vale però:

Teorema 61 (Teorema di Abel) *Una serie di potenze converga in un punto $\xi \neq x_0$ e sia*

$$r = |\xi - x_0| > 0.$$

Allora, la serie di potenze converge uniformemente in $\{x \mid |x - x_0| < r'\}$ per ogni $r' < r$.

Dim. Si guardi la figura 2.5 per seguire questa dimostrazione. Sia $|x - x_0| < r' < r$ e sia $d \in (r', r)$ così che

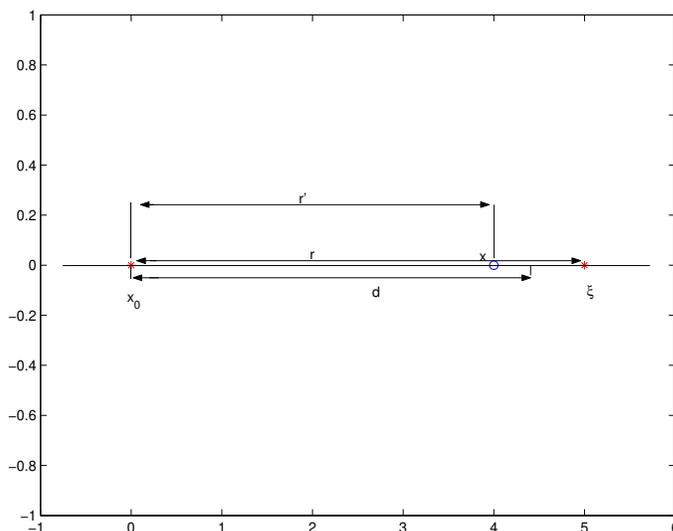
$$r' < r, \quad r = |x - \xi| > d$$

e quindi

$$|a_n (x - x_0)^n| < |a_n (\xi - x_0)^n| \cdot \left(\frac{r'}{|\xi - x_0|} \right)^n \leq |a_n (\xi - x_0)^n| \cdot \left(\frac{r'}{d} \right)^n.$$

2.4. SERIE DI POTENZE

Figura 2.5: Gli intervalli che si usano nella dimostrazione del teorema di Abel



La convergenza in ξ implica che la successione $(|a_n(\xi - x_0)^n|)$ è limitata (anzi tende a zero):

$$|a_n(\xi - x_0)^n| < M.$$

Inoltre,

$$\frac{r'}{d} < q < 1.$$

Dunque, per $|x - x_0| < r'$ si ha

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq \gamma_n, \quad \gamma_n \leq Mq^n$$

con $0 \leq q < 1$ e quindi con $\sum \gamma_n < +\infty$. La convergenza uniforme segue dal criterio di Weierstrass, Teorema 57. ■ Questo risultato in particolare implica che se una serie di potenze converge allora l'insieme su cui essa converge è un intervallo centrato in x_0 (e non si esclude che sia ridotto al solo x_0 , oppure che sia tutta la retta). Questo si chiama l'intervallo di convergenza della serie di potenze e si chiama raggio di convergenza la sua semiampiezza. Il raggio di convergenza può essere nullo, si veda l'esempio 60. Può essere un numero finito non nullo oppure può essere $+\infty$: è un numero finito non nullo nel caso particolare della serie geometrica, è $+\infty$ nel caso in cui la serie di potenze si riduca ad un polinomio, ma non solo in tal caso:

Osservazione 62 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Fissato x , si trova una serie numerica, convergente per ogni valore del parametro x , come si vede facilmente usando il criterio del rapporto. ■

Inoltre, la dimostrazione del Teorema 61 mostra che:

Teorema 63 (Teorema di Abel) *Sia $0 \leq R \leq +\infty$ il raggio di convergenza di una serie di potenze e sia x tale che $|x - x_0| < R$. La serie di potenze converge assolutamente e quindi incondizionatamente nel punto x .*

Ciò mostra che l'ordine dei termini di una serie di potenze non influisce sulla somma della serie nei punti interni all'intervallo di convergenza. Invece, niente può dirsi in generale del comportamento della serie negli estremi dell'intervallo di convergenza, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 64 Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \tag{2.3}$$

Fissato x si trova una serie numerica e si vede facilmente, dal criterio del rapporto, che la serie converge per ogni x con $|x| < 1$, diverge se $|x| > 1$. Dunque il raggio di convergenza è 1. Se $x = -1$ oppure $x = +1$ si trovano rispettivamente le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

La prima divergente e la seconda convergente. Si è detto che la somma di una serie di potenze non dipende dall'ordine degli elementi nei punti interni dell'intervallo di convergenza. Quest'esempio mostra che, invece, può dipendere dall'ordine degli elementi se x è uno degli estremi dell'intervallo di convergenza. Mostriamo ora una serie di potenze che converge in ambedue gli estremi dell'intervallo di convergenza. La serie è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^{2n}. \tag{2.4}$$

Di nuovo, fissato x , si usi il criterio del rapporto per studiare la convergenza della serie numerica che si ottiene. Si vede che si ha convergenza per $-1 \leq$

2.4. SERIE DI POTENZE

$x \leq 1$, estremi inclusi, mentre la serie diverge per $|x| > 1$. Infine, mostriamo una serie di potenze che diverge in ambedue gli estremi dell'intervallo di convergenza. Questa è la serie

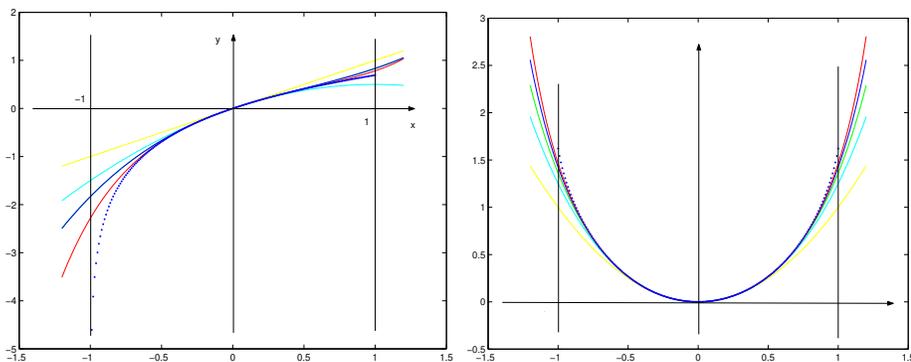
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}. \quad (2.5)$$

Questa è una serie geometrica di ragione $-x^2$ e quindi converge se e solo se $-1 < x < 1$, estremi esclusi. Si noti che la somma di questa serie è la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. La ragione per cui la serie corrispondente non debba convergere negli estremi sembra misteriosa, e verrà chiarita al paragrafo 2.4.2. E' interessante vedere i grafici di alcune delle somme parziali delle tre serie introdotte sopra. L'intervallo di convergenza delle serie è $(-1, 1)$. I grafici delle somme parziali sono disegnati su un intervallo un po' più grande e, punteggiato, si riporta anche il grafico della somma della serie, ovviamente solo sull'intervallo $(-1, 1)$. La prima e la seconda serie sono alla figura 2.6. L'ultima serie è alla figura 2.7. Il grafico punteggiato (tratto spesso) in questo

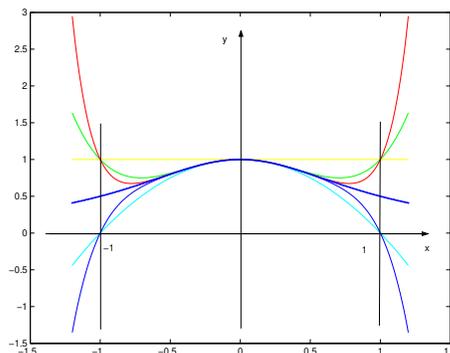
Figura 2.6: Somme parziali della serie (2.3) (a sinistra e della serie (2.4) (a destra)



caso rappresenta la funzione $1/(1+x^2)$, che è la somma della serie sul solo intervallo $(-1, 1)$. E' stato disegnato in un intervallo più grande per sottolineare che la questa funzione è regolare anche nei punti $+1$ e -1 . ■

Inoltre, la convergenza essendo uniforme, dal Teorema 50:

Figura 2.7: Somma parziali della serie (2.5)



Corollario 65 *La somma di una serie di potenze è continua nei punti interni all'intervallo di convergenza.*

Si potrebbe inoltre provare che:

Teorema 66 *Sia R il raggio di convergenza della serie $\sum a_n(x - x_0)^n$. Le due serie di potenze*

$$\sum \frac{d}{dx} [a_n(x - x_0)^n] = \sum n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\sum \left[\int_{x_0}^x a_n(s - x_0)^n ds \right] = \sum \frac{1}{n+1} a_n(x - x_0)^{n+1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza e questo è uguale ad R .

Le due serie in (2.6) si dicono ottenute *derivando* termine a termine o *integrando* termine a termine la serie data. Esse convergono uniformemente in $[a, b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ e quindi, usando i teoremi 52 e 56, si trova l'uguaglianza

$$\frac{d}{dx} \left[\sum a_n(x - x_0)^n \right] = \sum n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\int_0^x \left[\sum a_n(x - x_0)^n \right] = \sum \frac{1}{n+1} a_n(x - x_0)^{n+1}.$$

In particolare quindi anche la serie derivata può a sua volta venir derivata termine a termine e ciò tante volte quante si vuole. Dunque:

Corollario 67 *La somma di una serie di potenze di raggio di convergenza non nullo è una funzione di classe C^∞ nell'intervallo di convergenza.*

2.4. SERIE DI POTENZE

Chiediamoci ora come sia possibile calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze. Esiste una formula per il raggio di convergenza, che non possiamo presentare. Possiamo però presentare due test particolari, che si ottengono per confronto con la serie geometrica. Il primo si può applicare quando si ha $a_n \neq 0$ per ogni n (e basta che questa condizione sia soddisfatta per n maggiore di un opportuno N_0).

Teorema 68 *Supponiamo che $a_n \neq 0$ per ogni n e che esista, finito o meno,*

$$L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Allora il raggio di convergenza della serie è

$$\begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0. \end{cases}$$

Dim. Limitiamoci a considerare il caso $0 < L < +\infty$. Applichiamo il criterio del rapporto per la convergenza della serie di numeri

$$\sum a_n [x - x_0]^n,$$

con x fissato. Il criterio del rapporto asserisce che condizione sufficiente di convergenza è che per n sufficientemente grande valga

$$\frac{|a_{n+1}[x - x_0]^{n+1}|}{|a_n[x - x_0]^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0| < q < 1. \quad (2.6)$$

La serie diverge se vale la disuguaglianza opposta, con $q > 1$. Proviamo che si ha convergenza se

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} \quad \text{ossia se} \quad L|x - x_0| < 1 \quad (\text{disuguaglianze strette}).$$

In tal caso, $\tilde{q} \in [0, 1)$ tale che

$$L|x - x_0| = \tilde{q} < 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0| = L|x - x_0| = \tilde{q} < 1. \quad (2.7)$$

Sia $q \in (\tilde{q}, 1)$. Il teorema di permanenza del segno mostra l'esistenza di un numero N tale che per ogni $n > N$ vale

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0| < q.$$

Essendo $q \in (0, 1)$, la serie converge (si ricordi (2.6)). In modo analogo si trattano gli altri casi. ■ Ripetiamo che il teorema precedente non può usarsi se infiniti coefficienti a_n sono nulli. Usando il criterio della radice invece del criterio del rapporto si prova invece:

Teorema 69 *Se esiste, finito o meno, il limite*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

allora il raggio di convergenza è

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ 1/L & \text{se } 0 < L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0. \end{cases}$$

Si noti che il Teorema 69 può usarsi anche se infiniti coefficienti a_n sono nulli. Mostriamo ora che esistono serie di potenze il cui raggio di convergenza non può determinarsi né col criterio del rapporto né con quello della radice⁴

Esempio 70 Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} x^n.$$

E'

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi,

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{non esiste.}$$

E':

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}(n+1)}}{2^{(-1)^n n}} = \begin{cases} 2^{-2n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2^{2n-1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{non esiste.}$$

In casi di questo tipo, conviene considerare x come una parametro e studiare la convergenza della serie numerica ottenuta, per ogni valore di x . Usando il criterio della radice per ogni x fissato, si vede che

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} < q < 1$$

⁴nella forma enunciata sopra. Il criterio della radice può modificarsi in modo da avere un nuovo criterio, che identifica in raggio di convergenza in ogni caso.

2.4. SERIE DI POTENZE

se $2x < q$ e quindi se $x < q/2$, per qualche $q < 1$. Dunque il raggio di convergenza è almeno $1/2$. D'altra parte, se $|x| > 1/2$ allora per $n = 2k$, pari, si trova

$$a_{2k}x^{2k} = (2x)^{2k} \rightarrow +\infty.$$

Quindi, il termine generale non tende a zero e la serie non converge. Quindi, il raggio di convergenza è uguale ad $1/2$. ■

2.4.1 Operazioni sulle serie di potenze

Le operazioni sulle serie di potenze si eseguono con le regole delle operazioni sulle serie numeriche, per ogni fissato valore del parametro x . Ci interessa però notare esplicitamente:

Somma di serie Siano $\sum a_n(x-x_0)^n$, $\sum b_n(x-x_0)^n$ due serie di potenze col medesimo centro x_0 e con raggio di convergenza rispettivamente R_a ed R_b . Sia

$$R = \min\{R_a, R_b\}.$$

Allora, ambedue le serie convergono per $|x-x_0| < R$ e quindi la loro somma può scriversi nuovamente come serie di potenze di centro x_0 , convergente per $|x-x_0| < R$:

$$\left[\sum a_n(x-x_0)^n \right] + \left[\sum b_n(x-x_0)^n \right] = \sum [a_n + b_n](x-x_0)^n.$$

Il raggio di convergenza della serie somma può essere maggiore di R . Per esempio, se $b_n = -a_n$, allora la serie somma ha raggio di convergenza $+\infty$ anche se $R < +\infty$. Ciò però può aversi solamente se $R_1 = R_2$. Infatti, se per esempio $R_1 < R_2$ allora $R = R_1$. Infatti, scrivendo

$$\sum a_n x_n = \left[\sum (a_n + b_n)x^n \right] + \left[\sum (-b_n)x^n \right]$$

si vede che il raggio di convergenza della prima serie è almeno uguale a

$$\min\{R, R_2\}$$

e questo sarebbe maggiore di R_1 se fosse $R > R_1$. L'operazione di somma può usarsi anche "al contrario" per calcolare il raggio di convergenza in certi casi nei quali falliscono sia il criterio del rapporto che quello della radice:

Esempio 71 Torniamo a considerare la serie vista all'esempio 70. La serie di quest'esempio si può vedere come somma delle due serie

$$\left[\sum a_n x^n \right] + \left[\sum b_n x^n \right], \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{n pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{n pari} \\ 2^{-n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora, rinominando $2k$ l'indice n della prima serie, si trova

$$\sum 2^{2k} [x^2]^k.$$

Sostituendo $t = x^2$ si trova la serie di potenza

$$\sum 2^{2k} t^k,$$

a cui si può applicare sia il criterio del rapporto che quello della radice. Il raggio di convergenza è 4 per la serie della variabile t , e quindi 2 per la serie della variabile x . Analogamente, la seconda serie converge per $|x| < 1/2$. Dunque, il raggio di convergenza della serie somma è esattamente $1/2$. ■

Unicità della serie di potenze Mostriamo che la serie di potenze che converge ad una funzione $f(x)$, se esiste, è unica:

Teorema 72 *Siano*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n$$

due serie di potenze con raggio di convergenza rispettivamente $R_1 > 0$ ed $R_2 > 0$. Sia $0 < R < \min\{R_1, R_2\}$. Se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n$$

per ogni x con $|x - x_0| < R$ allora $a_n = b_n$ per ogni n e quindi $R_1 = R_2$.

Dim. Basta provare che se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) (x - x_0)^n = 0$$

per $|x - x_0| < R$ allora $a_n - b_n = 0$. Posto $x = x_0$ si trova infatti $a_0 - b_0 = 0$ e quindi l'uguaglianza precedente si scrive

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) (x - x_0)^n = (x - x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) (x - x_0)^{n-1}.$$

2.4. SERIE DI POTENZE

Dunque si ha anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-1} = 0.$$

Calcolando per $x = x_0$ si vede $a_1 - b_1 = 0$ e dunque

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-1} = 0.$$

Il procedimento può quindi ripetersi trovando $a_2 - b_2 = 0$, e così via. ■

Prodotto alla Cauchy di serie di Potenze Consideriamo le due serie di potenze col medesimo centro x_0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x - x_0)^k.$$

Calcoliamo tutti i possibili prodotti di un termine della prima con un termine della seconda e raccogliamo i coefficienti dei termini con la medesima potenza $(x - x_0)^r$. Si trova $(x - x_0)^r$ quando si fa il prodotto di $b_k(x - x_0)^k$ con tutti i termini della forma

$$a_{r-k}(x - x_0)^{r-k}.$$

Ossia, il coefficiente di $(x - x_0)^r$ viene ad essere

$$\sum_{k=0}^r b_k a_{r-k}.$$

Ciò suggerisce la definizione di *prodotto alla Cauchy*, definito da

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x - x_0)^k \right] = \sum_{r=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^r b_k a_{r-k} \right] (x - x_0)^r.$$

E' appena il caso di notare che il "nome" degli indici non ha effetto sulla somma della serie. Si sono usati "nomi" diversi (n , k ed r) solo per chiarezza. Il teorema che si può provare è il seguente:

Teorema 73 *Due serie di potenze abbiano raggio di convergenza rispettivamente r_1 ed r_2 con $r_1 \leq r_2$. La serie prodotto alla Cauchy ha raggio di convergenza almeno uguale ad r_1 .*

Osservazione 74 Consideriamo l'esempio seguente:

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} \right]$$

Il prodotto alla Cauchy contiene potenze x^r solo se r può scriversi nella forma

$$r = 2n + 5k$$

per certi valori di n e k . Il coefficiente di questa potenza è la somma di tanti numeri 1 quanti sono i modi di scrivere r in tale forma. Ma ora,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} = \frac{1}{1-x^5}$$

e il loro prodotto è

$$\frac{1}{1-x^2-x^5+x^7}.$$

Vedremo, al paragrafo 2.4.3, un modo diverso per rappresentare questa funzione come somma di una serie di potenze, che calcola i coefficienti della (unica!) espansione in serie di potenze facendo derivate. precisamente vedremo che il coefficiente c_r di x^r è

$$c_r = \frac{1}{r!} D_{x_0=0}^r \left[\frac{1}{1-x^2-x^5+x^7} \right].$$

In questo modo, dato r , si calcola facilmente in quanti modi questo si può rappresentare come somma di tante “monete” di valore 2 e tante “monete” di valore 5. ■

2.4.2 Serie di potenze nel campo complesso

Le operazioni algebriche e le operazioni di limite possono anche calcolarsi tra numeri complessi. Quindi, le serie di potenze possono trattarsi anche nel campo complesso. Il Teorema 61 e il Teorema 63 si riformulano come segue:

Teorema 75 (Teorema di Abel) *Una serie di potenze*

$$\sum a_n(z - z_0)^n,$$

nel campo complesso, converge sempre nel punto z_0 . Se converge anche in altri punti, allora essa converge in un disco aperto di centro z_0 e raggio $R > 0$ (si scrive $R = +\infty$ se la serie converge per ogni z). La convergenza è uniforme in ogni disco di centro z_0 e raggio $R_0 < R$; è assoluta in ciascun punto z interno al disco di convergenza.

2.4. SERIE DI POTENZE

Per convergenza assoluta nel caso di serie di potenze a valori complessi, si intende la convergenza della serie⁵

$$\sum |a_n| \cdot |z - z_0|^n.$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista per le serie di potenze reali. Però, ora può mostrarsi di più: sia $f(z)$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza R . Esiste almeno un punto z_1 tale che $|z_1 - z_0| = R$, nel quale la funzione $f(z)$ non è regolare. Ciò chiarisce la stranezza notata all'Esempio 64. Per $|x| < 1$ vale

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

e la funzione $1/(1+x^2)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Non si vede quindi quale fenomeno possa bloccare la convergenza della serie. Se però la serie si legge nel campo complesso, allora

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

e la funzione $1/(1+z^2)$ non è definita nei punti $\pm i$, che distano 1 dal centro della serie.

2.4.3 Serie di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione di classe C^∞ in un intorno di x_0 . Ad essa può associarsi la *serie di Taylor*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) [x - x_0]^n.$$

Questa si chiama la *serie di Taylor* della funzione f . Questa serie può non convergere e, se converge, può non convergere alla funzione f , come mostra l'esempio seguente:

Esempio 76 Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è di classe C^∞ su \mathbb{R} e le sue derivate in $x_0 = 0$ sono tutte nulle. Dunque la serie di Taylor di centro 0 associata ad $f(x)$ ha tutti i coefficienti nulli: converge su \mathbb{R} alla funzione identicamente zero e non ad f . ■

Ci possiamo chiedere quindi sotto quali condizioni la serie di Taylor di f effettivamente converga ad f . Scrivendo la formula di Taylor di $f(x)$ arrestata all'ordine k e col resto in forma di Lagrange, si vede che

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) [x - x_0]^n + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(s_k) [x - x_0]^{k+1}$$

⁵ora $|\cdot|$ indica il modulo dei numeri complessi.

dove s_k dipende da k ed è compreso tra x_0 ed x . La serie di Taylor converge ad f quando il resto converge a zero. Una condizione perché ciò accada è:

Teorema 77 *Esistano M, L tali che*

$$|f^{(k)}(x)| < ML^k \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

La serie di Taylor di $f(x)$ converge su $[x_0 - r, x_0 + r]$ e converge alla funzione $f(x)$.

Dim. Ricordiamo che per ogni x si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Si osservi ora che

$$\frac{1}{(k+1)!} |f^{(k+1)}(s_k)[x - x_0]^{k+1}| < M \frac{(Lr)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Il membro destro tende a zero e quindi, per il criterio del confronto, tende a zero uniformemente anche l'errore

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)[x - x_0]^n \right| = \frac{1}{(k+1)!} |f^{(k+1)}(s_k)[x - x_0]^{k+1}| \quad \blacksquare$$

La condizione del Teorema 77 è soddisfatta nel caso delle funzioni di cui correntemente si usano gli sviluppi di Taylor, almeno su un opportuno intervallo. La tabella seguente riporta alcune funzioni e il raggio di convergenza della relativa serie di McLaurin (ossia, della serie di Taylor di centro 0).

Funzione	Raggio di conv.	Serie
e^x	$+\infty$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$+\infty$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$+\infty$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sinh x$	$+\infty$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$+\infty$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\log(1+x)$	1	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$(1+x)^\alpha$	1	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

2.4. SERIE DI POTENZE

Infine, studiamo la relazione tra parità di una funzione e sua serie di Taylor. Vale:

Teorema 78 *Sia*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La funzione è pari se e solo se sono nulli i coefficienti a_n di indice dispari; la funzione è dispari se e solo se sono nulli i coefficienti a_n di indice pari.

Dim. Sia $f(x)$ sviluppabile in serie di Taylor. Se è dispari, essa si annulla in 0. Dunque $a_0 = 0$. La sua derivata prima è pari ma la derivata seconda è dispari e quindi $f''(0) = 0$ ossia vale anche $a_2 = 0$. Iterando questo procedimento si vede che ogni a_{2k} è nullo. Se $f(x)$ è pari, sono dispari tutte le sue derivate di ordine dispari e quindi sono nulli gli a_{2k+1} . Il viceversa è ovvio. ■

2.4.4 Serie di potenze ed equazioni differenziali lineari

Consideriamo il problema di Cauchy

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0.$$

Il coefficiente a è costante. Per definizione, la soluzione x è continua e quindi, dall'uguaglianza, è addirittura continuamente derivabile; e quindi

$$x'' = ax' = a^2x.$$

Così proseguendo,

$$x^{(n)} = a^n x$$

e quindi, per $t = 0$,

$$x^{(n)}(0) = a^n x_0.$$

Dunque, la soluzione $x(t)$ è di classe C^∞ e verifica le condizioni del Teorema 77 su tutti gli intervalli chiusi contenenti x_0 . Dunque, la soluzione si esprime in forma di serie di potenze

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n t^n$$

D'altra parte si verifica immediatamente che questa è la serie dell'esponenziale e quindi si ritrova il risultato noto

$$x(t) = e^{at} x_0.$$

Consideriamo ora il *sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{2.8}$$

ove \mathbf{x} è un vettore di \mathbb{R}^n ed A è una matrice $n \times n$ che è costante, ossia non dipende né da t né da x . Vogliamo rappresentare la soluzione di questo sistema che verifica l'ulteriore condizione

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

E' facile vedere che tutto ciò che abbiamo detto sulle serie di potenze e sulle serie di Taylor si estende senza cambiamenti a funzioni a valori vettori o matrici e quindi è ancora vero che

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n (t - t_0)^n \right) \mathbf{x}_0.$$

Questa serie si indica col simbolo

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n (t - t_0)^n. \tag{2.9}$$

Ciò definisce l'*esponenziale di una matrice*, e la (2.9) rappresenta in forma compatta le soluzioni dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti (2.8):

Osservazione 79 Va notato un fatto importante: l'esponenziale di matrice può essere un polinomio. Per esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora $A^2 = 0$ e quindi

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} :$$

e^{At} è un polinomio di primo grado. Si prova invece che se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

allora

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.4. SERIE DI POTENZE

Proprietà importanti della matrice esponenziale e^{At} sono espresse dal teorema seguente, che non proviamo:

Teorema 80 *Vale:*

- $Ae^{At} = e^{At}A$.
- $\det e^A = \exp\{\sum_{i=1}^n a_{ii}\}$. Dunque, $\det e^A$ è sempre diverso da zero: la matrice e^A è invertibile per ogni A .
- $[e^A]^{-1} = e^{-A}$.
- Se $AB = BA$ allora $e^A e^B = e^{A+B}$. In particolare, vale sempre $e^{At} e^{At'} = e^{A(t+t')}$.
- La funzione $t \rightarrow e^{At}$ è derivabile e

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

L'introduzione dell'esponenziale e^{At} della matrice A permette anche di rappresentare la soluzione del problema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Procediamo esattamente come già si è visto (nel corso di Analisi Matematica 1) per l'equazione scalare: moltiplicando i due membri per e^{-At} si trova

$$e^{-At} \mathbf{x}'(t) - Ae^{-At} \mathbf{x}(t) = e^{-At} \mathbf{f}(t). \quad (2.10)$$

La regola della derivata del prodotto si estende al prodotto di una matrice per un vettore⁶ e quindi la (2.10) è

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} \mathbf{x}(t)) = e^{-At} \mathbf{f}(t).$$

Integrando i due membri da t_0 a t si trova

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) - e^{-At_0} \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{f}(s) ds. \quad (2.11)$$

Moltiplichiamo i due membri di (2.11) per e^{At} e usiamo le proprietà nel teorema 80. Si trova

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds.$$

⁶con l'avvertenza di non commutare i fattori!

2.5 Serie di Fourier: introduzione

Oltre alle serie di potenze, nelle applicazioni si incontrano molti altri tipo di “serie di funzioni”, la cui teoria comunque è sostanzialmente più complessa e viene qui esaminata per sommi capi nel caso di gran lunga più importante delle serie di Fourier. Si chiamano *serie di Fourier* le serie del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n \frac{\pi}{L} x + b_n \sin n \frac{\pi}{L} x \right]. \quad (2.12)$$

I coefficienti a_n e b_n sono reali. Se $L = \pi$ si trova

$$a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Si noti che, usando $\sin 0x = 0$, si potrebbe assorbire il coefficiente a_0 nella serie scritta con $n \geq 0$ invece che con $n \geq 1$. Vedremo che c'è una buona ragione per separare a_0 dagli a_n con $n > 0$. Ovviamente una serie di Fourier non sempre converge. La convergenza sarà implicata da opportune proprietà dei coefficienti a_n e b_n . Per esempio, certamente si ha convergenza (uniforme) quando $a_n = b_n = q^n$, con $|q| < 1$. Il problema della convergenza puntuale o uniforme delle serie di Fourier comunque è assai delicato e lo illustreremo più avanti. Per ora notiamo che se la serie converge per un $x_0 \in [-L, L]$ allora essa converge in ogni punto x_0 di forma $x_0 + 2kL$ con k intero; e se converge per ogni $x \in [-L, L]$ essa converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e converge ad una funzione periodica di periodo $T = 2L$. Per questa ragione, prima di studiare le serie di Fourier, vogliamo richiamare alcune proprietà delle funzioni periodiche.

2.5.1 Premesse: le funzioni periodiche

Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x . Si dice che $f(x)$ è periodica di periodo T quando:

- E' $T \neq 0$.
- la funzione $f(x)$ è definita in $x + T$ se e solo se è definita in x . E' conseguenza di questo che la funzione è definita in $x + nT$ (ove n è intero qualsiasi) se e solo se è definita in x .
- per ogni x nel dominio della funzione, si ha $f(x) = f(x + T)$ e quindi anche $f(x) = f(x + nT)$ per ogni numero intero n .

2.5. SERIE DI FOURIER: INTRODUZIONE

Teorema 81 Sia $f(x)$ periodica di periodo T e sia S numero reale. La funzione $f(Sx)$ ha periodo T/S . In particolare, se $S = T/(2\pi)$, la funzione ha periodo 2π .

La verifica è immediata:

$$f(S(x + T/S)) = f(T + Sx) = f(Sx).$$

Una funzione periodica non ha un solo periodo: se T è un periodo anche $2T$, $-T$, $-2T$ ecc. sono periodi. L'insieme dei periodi positivi ha però un estremo inferiore che può essere nullo⁷. Molto spesso, quando si parla di “periodo” di una funzione periodica si intende che esista un minimo periodo positivo, e per periodo si intende tale numero⁸. Se T è il (minimo) periodo di $f(x)$, allora $1/T$ si chiama la *frequenza* di $f(x)$ mentre $2\pi/T$ si chiama la *frequenza angolare* di $f(x)$. Per esempio, le funzioni $\sin \omega x$ e $\cos \omega x$ sono funzioni periodiche di periodo $2\pi/\omega$ ovunque definite mentre $\tan \omega x$ è una funzione di periodo π/ω , che però non è ovunque definita.

Osservazione 82 Vediamo come i concetti precedenti si applicano alla serie di Fourier (2.12). Le funzioni $\cos n(\pi/L)x$ e $\sin n(\pi/L)x$ hanno (minimo) periodo $2L/n$ e quindi tutti i termini della serie di Fourier hanno periodo (non necessariamente minimo) $T = 2L$. Per questa ragione potremo limitarci a studiare la serie di Fourier sull'intervallo $[-L, L]$ o su un qualsiasi altro intervallo di lunghezza $2L$, per esempio $[0, 2L]$. La frequenza di $\cos n(\pi/L)x$ e $\sin n(\pi/L)x$ è $n/2L$ mentre la loro frequenza angolare è

$$2\pi \frac{1}{T} = n \frac{\pi}{L} :$$

il coefficiente di x nei due termini in posizione n della serie di Fourier è la frequenza angolare $n\pi/L$. ■

Vale:

Teorema 83 Sia $f(t)$ continua su \mathbb{R} e periodica di periodo T . Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_0^T f(s) ds = \int_x^{x+T} f(s) ds, \quad \int_0^T f(x+s) ds = \int_0^T f(s) ds.$$

⁷L'estremo inferiore dei periodi può essere nullo. Accade ciò se la funzione è costante, ma non solo in tal caso. Per esempio, l'estremo inferiore dei periodi positivi è nullo per la funzione di Dirichlet.

⁸molto spesso, ma non sempre: si faccia attenzione al contesto!

Dim. Convieni provare la prima uguaglianza in due passi:

Passo 1. Proviamo che per ogni k intero si ha:

$$\int_0^T f(s) \, ds = \int_{kT}^{(k+1)T} f(s) \, ds;$$

ossia proviamo l'uguaglianza richiesta nel caso particolare $x = kT$. Per questo sostituiamo $s = kT + r$ nell'integrale a destra. Si trova

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(s) \, ds = \int_0^T f(kT + r) \, dr = \int_0^T f(r) \, dr.$$

L'ultima uguaglianza vale perché la funzione è periodica di periodo T e quindi $f(kT + r) = f(r)$.

Passo 2. Consideriamo ora il caso generale

$$kT < x < (k+1)T < x + T.$$

Proviamo che vale

$$\int_x^{x+T} f(s) \, ds = \int_{kT}^{(k+1)T} f(s) \, ds.$$

Ciò fatto, l'uguaglianza richiesta seguirà dal **passo 1**. Per capire questa parte del calcolo, si guardi la figura 2.8. Come suggerito dalla figura, scriviamo

$$\int_x^{x+T} f(s) \, ds = \int_x^{(k+1)T} f(s) \, ds + \int_{(k+1)T}^{x+T} f(s) \, ds. \quad (2.13)$$

La sostituzione $s = T + r$ mostra che

$$\int_{(k+1)T}^{x+T} f(s) \, ds = \int_{kT}^x f(T + r) \, dr = \int_{kT}^x f(r) \, dr.$$

L'ultima uguaglianza vale perché $f(x)$ è periodica di periodo T e quindi $f(r) = f(T + r)$. Tornando alla (2.13) si vede che

$$\int_x^{x+T} f(s) \, ds = \int_x^{(k+1)T} f(s) \, ds + \int_{kT}^x f(r) \, dr = \int_{kT}^{(k+1)T} f(r) \, dr,$$

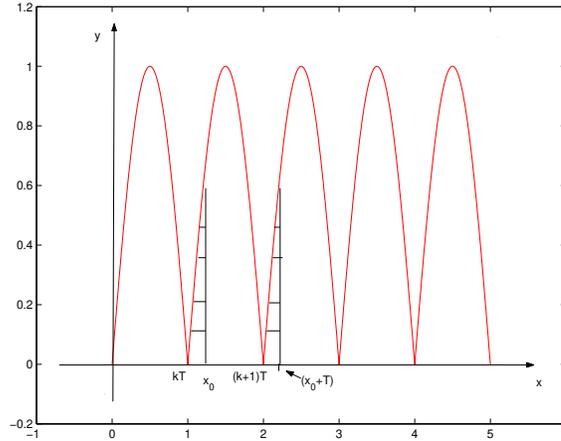
come volevamo provare.

La seconda uguaglianza è conseguenza della prima perché

$$\int_0^T f(x + s) \, ds = \int_x^{x+T} f(r) \, dr = \int_0^T f(r) \, dr.$$

Si noti che nel teorema precedente T non è necessariamente il minimo periodo. ■

Figura 2.8: Illustrazione del Teorema 83



2.5.2 Premesse: le formule d'Eulero

Ricordiamo le formule d'Eulero, incontrate nello studio delle equazioni differenziali lineari:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

e quindi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x .$$

Osservazione 84 Le formule d'Eulero mostrano che la funzione $x \rightarrow e^{ix}$ è periodica di periodo 2π . E' anche vero che l'estensione della funzione esponenziale al piano complesso

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

è periodica di periodo $2\pi i$, ossia è periodica quando il suo argomento si muove parallelamente all'asse immaginario. ■

Sommando e sottraendo membro a membro, si trovano le uguaglianze

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} .$$

Anch'esse vanno sotto il nome di formule d'Eulero. Sostituendo queste espressioni in

$$a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

si trova (si ricordi che $-i = 1/i$)

$$a_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

ove ora i c_n sono i numeri complessi

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{se } n > 0 \\ c_n = \frac{a_n + ib_n}{2} & \text{se } n < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

e quindi tali che

$$c_{-n} = \bar{c}_n.$$

Si osservi che anche in questa scrittura il termine con $n = 0$ ha un ruolo particolare: $c_0 = \bar{c}_0$ è reale. Sostituendo in

$$a_0 + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos n \frac{\pi}{L} x + b_n \sin n \frac{\pi}{L} x \right] \quad (2.15)$$

si trova

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{in(\pi/L)x} \quad (2.16)$$

con i coefficienti c_n ancora dati da (2.14) e quindi con

$$c_{-n} = \bar{c}_n, \quad \text{e} \quad c_0 = \bar{c}_0. \quad (2.17)$$

E' facile vedere che si fa anche il passaggio inverso: se valgono le (2.17) allora nella (2.16) i termini puramente immaginari si elidono e la somma (2.16) si riduce a (2.15), con coefficienti reali. Un'espressione della forma (2.16) si chiama un *polinomio trigonometrico*. Se valgono le (2.17), il polinomio trigonometrico (2.16) si può scrivere nella forma "reale" (2.15). L'espressione (2.15) è una somma parziale della serie di Fourier (2.12). Per questa ragione, la serie di Fourier (2.12) si può anche scrivere in "forma complessa",

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}. \quad (2.18)$$

Il fatto importante da ricordare è che se vogliamo che questa serie corrisponda alla (2.12) le somme parziali vanno prese in modo simmetrico: le somme parziali sono

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{in(\pi/L)x} \quad (2.19)$$

2.5. SERIE DI FOURIER: INTRODUZIONE

e non

$$\sum_{n=-K}^N c_n e^{in(\pi/L)x} \quad (2.20)$$

con K ed N tra loro indipendenti. E infatti può accadere che per $K \rightarrow -\infty$ ed $N \rightarrow +\infty$, indipendentemente, la (2.20) non ammetta limite nemmeno se (2.19) ammette limite per $N \rightarrow +\infty$. Avremo bisogno di calcolare derivate e integrali di funzioni

$$f(x) + ig(x)$$

della variabile reale x , a valori numeri complessi. Per definizione,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + ig(x)] = f'(x) + ig'(x), \quad \int_a^b [f(x) + ig(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + i \int_a^b g(x) dx$$

e quindi

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[f(x) + ig(x)] dx = [f(b) + ig(b)] - [f(a) + ig(a)].$$

Essendo

$$\frac{d}{dx} e^{inx} = ine^{inx},$$

si trova:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \text{ per ogni } n, m. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases} \end{cases} \quad (2.21)$$

Per verificare la prima delle uguaglianze precedenti (con $n \neq m$) calcoliamo, usando le formule d'Eulero

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{inx} + e^{-inx}] [e^{imx} + e^{-imx}] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{i(n+m)x} + e^{i(n-m)x} + e^{-i(n+m)x} + e^{-i(n-m)x}] dx. \end{aligned}$$

L'asserto ora segue perchè, essendo per esempio

$$\frac{d}{dx} e^{i(n+m)x} = i(n+m)e^{i(n+m)x},$$

si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+m)x} dx = \frac{1}{i(n+m)} [e^{i(n+m)\pi} - e^{-i(n+m)\pi}] = \frac{2}{n+m} \sin((n+m)\pi) = 0.$$

Le altre uguaglianze si provano in modo analogo.

Osservazione 85 a queste conclusioni si può arrivare in modo più elementare se si ricordano le formule di Werner. il primo integrale si può calcolare ricordando che

$$[\cos nx][\cos mx] = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]. \quad \blacksquare$$

Più in generale, su un intervallo $[-L, L]$ vale

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-L}^L e^{in(\pi/L)x} dx = \begin{cases} 2L & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-L}^L \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 2L & \text{se } n = m = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m \\ L & \text{se } n = m \end{cases} \\ \int_{-L}^L \sin nx \cos mx dx = 0 \text{ per ogni } n, m. \\ \int_{-L}^L \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ L & \text{se } n = m \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Le uguaglianze precedenti mostrano che le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \cos n \frac{\pi}{L} x, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \sin n \frac{\pi}{L} x,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} e^{in(\pi/L)x},$$

sono due a due ortogonali in $\mathcal{L}^2(-L, L)$ e tutte di norma uguale ad 1. Si dice brevemente che sono *sistemi ortonormali* in $\mathcal{L}^2(-L, L)$. Quest'osservazione suggerisce che l'ambiente in cui è più facile studiare la serie di Fourier sia lo spazio $\mathcal{L}^2(-L, L)$ e non lo spazio $C(-L, L)$.

2.6 La serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(-L, L)$

Non è stato possibile introdurre in modo rigoroso lo spazio $\mathcal{L}^2(-L, L)$ e ciò indica che lo studio della serie di Fourier è molto più complesso di quello

2.6. LA SERIE DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2(-L, L)$

delle serie di potenze, e può essere solo accennato. Consideriamo il polinomio trigonometrico

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{in(\pi/L)x}, \quad c_n = \bar{c}_{-n} \quad (2.23)$$

equivalentemente, se $c_n = a_n + ib_n = \bar{c}_{-n}$,

$$a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n(\pi/L)x + b_n \sin n(\pi/L)x]. \quad (2.24)$$

Indichiamo questo polinomio trigonometrico col simbolo $P(x)$. Ovviamente, $P(x)$ è una funzione continua e periodica su \mathbb{R} . Se i valori di $P(x)$ su $[-L, L]$ si conoscono, da questi si ricavano facilmente i coefficienti c_n ed i coefficienti a_n e b_n . Infatti, moltiplicando i due membri dell'uguaglianza

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in(\pi/L)x}$$

per $e^{-ir(\pi/L)x}$ e integrando su $[-L, L]$ si trova 0 se $r \neq N$. Altrimenti si trova

$$c_r = \frac{1}{2L} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) e^{-ir(\pi/L)x} dx.$$

Analogamente,

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L P(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L P(x) \cos k(\pi/L)x dx \quad (\text{se } k > 0) \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L P(x) \sin k(\pi/L)x dx. \end{cases}$$

(ossia, la formula per a_0 non si ottiene da quella di a_k ponendo $k = 0$. Per questa ragione conviene scrivere a_0 separato dalla sommatoria). Vale inoltre:

Teorema 86 *E'*:

$$\begin{cases} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |P(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 \\ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |P(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{cases} \quad (2.25)$$

L'identità precedente va sotto il nome di Identità di Parseval. Si noti il significato di a_0 e di c_0 : questi numeri sono le medie integrali di $P(x)$. Analogamente, il membro sinistro dell'identità di Parseval è la media integrale di $|P(x)|^2$. Sia ora $f(x) \in \mathcal{L}[-L, L]$. Chiamiamo coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$ i numeri

$$c_r = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ir(\pi/L)x} dx \quad (2.26)$$

(se vogliamo scrivere la serie di Fourier con gli esponenziali complessi),

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos k(\pi/L)x dx \quad (\text{se } k > 0) \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin k(\pi/L)x dx \end{cases} \quad (2.27)$$

(se vogliamo scrivere la serie di Fourier nel campo reale). Si chiama serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$ la serie (2.12) con i coefficienti dati da (2.27) o, equivalentemente, la serie (2.18) con i coefficienti dati da (2.26). Per fissare le idee e scrivere formule più semplici, usiamo ora la serie di Fourier scritta mediante gli esponenziali complessi. Considerazioni del tutto analoghe valgono anche per la serie di Fourier scritta nel campo reale. Consideriamo la serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

e la sua somma parziale N -ma

$$S_N(x) = \sum_{-N}^{+N} c_n e^{inx}.$$

Si noti che $S_N(x)$ è il polinomio trigonometrico (2.23) e che, se $c_n = a_n + ib_n = \bar{c}_{-n}$, allora $S_N(x)$ può scriversi nella forma (2.24). Si può provare:

Teorema 87 *Sia $f \in \mathcal{L}^2(-L, L)$. Vale:*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L |f(x) - S_N(x)|^2 dx = 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - S_N\|_{\mathcal{L}^2(-L, L)} = 0.$$

Inoltre, la serie converge incondizionatamente, ossia la serie converge, e sempre alla medesima funzione $f(x)$, anche riordinandone i termini.

2.6. LA SERIE DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2(-L, L)$

Dunque, la successione delle somme parziali ($S_N(x)$) converge ad $f(x)$ nella distanza di $\mathcal{L}^2(-L, L)$. Sottolineiamo nuovamente che il teorema riguarda $S_N(x)$ e non per esempio una somma $\sum_{n=-K}^{n=N} c_n e^{in(\pi/L)x}$. Anche se i c_n sono i coefficienti di Fourier di f , niente può dirsi del comportamento di questa serie per $N \rightarrow +\infty$, $K \rightarrow +\infty$ in modo indipendente. Diamo un'interpretazione geometrica di $S_N(x)$. Consideriamo il sottospazio lineare \mathcal{V}_N ,

$$\mathcal{V}_N = \left\{ \sum_{n=-N}^{+N} \gamma_n e^{in(\pi/L)x}, \quad \gamma_n = \bar{\gamma}_{-n}, \quad \gamma_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Che è uno spazio vettoriale di dimensione $2N + 1$. Si ha:

Teorema 88 *La somma parziale $S_N(x)$ di $f(x)$ è l'elemento di \mathcal{V}_N che ha minor distanza da $f(x)$ nel senso della distanza di $\mathcal{L}^2(-L, L)$.*

Dim. Facciamo la dimostrazione nel caso $N = 1$. La dimostrazione nel caso generale è analoga. Gli elementi dello spazio \mathcal{V}_1 sono le funzioni

$$\gamma_0 + \gamma_1 e^{ix} + \bar{\gamma}_1 e^{-ix} \quad \gamma_i \in \mathbb{C},$$

equivalentemente

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\pi/L)x + \beta_1 \sin(\pi/L)x, \quad \alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

Tra queste funzioni dobbiamo trovare quella che ha minima distanza da $f(x)$. Si tratta quindi di studiare un problema di minimo al variare dei parametri complessi γ_0 e γ_1 o, equivalentemente, al variare dei parametri reali $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$. Dato che i problemi di minimo che si sono studiati sono quelli di funzioni di variabile reale, conviene studiare il minimo della funzione

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \int_{-L}^L [f(x) - \alpha_0 - \alpha_1 \cos(\pi/L)x - \beta_1 \sin(\pi/L)x]^2 dx.$$

Il minimo esiste, come conseguenza del Teorema di Weierstrass, perché la funzione

$$(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \longrightarrow \Phi(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$$

è continua e tende a $+\infty$ per $\|(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)\| \rightarrow +\infty$. Per trovarlo, annulliamo le derivate prime⁹. Si trovano le condizioni

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L [f(x) - \alpha_0 - \alpha_1 \cos(\pi/L)x - \beta_1 \sin(\pi/L)x] dx &= 0 \\ \int_{-L}^L [f(x) - \alpha_0 - \alpha_1 \cos(\pi/L)x - \beta_1 \sin(\pi/L)x] \cos(\pi/L)x dx &= 0 \\ \int_{-L}^L [f(x) - \alpha_0 - \alpha_1 \cos(\pi/L)x - \beta_1 \sin(\pi/L)x] \sin(\pi/L)x dx &= 0. \end{aligned}$$

Usando le uguaglianze (2.21), si trova che le tre derivate parziali si annullano solamente quando

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (1/2L) \int_{-L}^L f(x) dx \\ \alpha_1 &= (1/L) \int_{-L}^L f(x) \cos x dx \\ \beta_1 &= (1/L) \int_{-L}^L f(x) \sin x dx; \end{aligned}$$

ossia, il punto di \mathcal{V}_1 che meno dista da $f(x)$ è $S_1(x)$. ■ Dunque l'interpretazione della serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(-L, L)$ è la seguente: per ogni N si considera il sottospazio \mathcal{V}_N di dimensione finita $2N + 1$ di $\mathcal{L}^2(-L, L)$. Si scrive la serie di Fourier di $f(x)$ e si tronca all'indice N . Si trova un elemento di \mathcal{V}_N che è proprio l'elemento che meglio approssima la funzione $f(x)$ nel senso di $\mathcal{L}^2(-L, L)$. Usando una terminologia della geometria elementare, diremo che $S_N(x)$ è la proiezione ortogonale di $f(x)$ su \mathcal{V}_N . Il Teorema 87 si può riassumere dicendo che la successione delle proiezioni di f sui \mathcal{V}_N converge ad f in $\mathcal{L}^2(-L, L)$. Diciamo infine che l'identità di Parseval vale per ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(-L, L)$:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

ossia

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2 + b_n^2].$$

Di conseguenza:

⁹si può provare che è lecito derivare sotto il segno di integrale. Ciò è provato al paragrafo 141. Alternativamente, si può sviluppare il quadrato portare i coefficienti α_0 , α_1 e β_1 fuori dagli integrali. Quindi si calcolano le derivate.

2.6. LA SERIE DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2(-L, L)$

Teorema 89 *La successione dei coefficienti di Fourier tende a zero.*

L'identità di Parseval ha un'interpretazione importante per le applicazioni, che illustriamo con riferimento alla forma complessa, che scriviamo come:

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 2L \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \right].$$

Interpretiamo la variabile x come “posizione” ed $f(x)$ come “velocità”. Il primo integrale si interpreta come “energia” per esempio cinetica: la “somma” delle energie associate ad ogni particella del corpo. La “componente” di frequenza $n/2L$, ossia

$$c_n e^{in(\pi/L)x}$$

ha quindi “energia” $2L|c_n|^2$. Quindi,

l'energia totale ottenuta sommando le energie in tutte le posizioni è uguale alla somma delle energie delle componenti di tutte le frequenze.

Naturalmente, niente vieta che nella rappresentazione di un segnale $f(x)$ la componente di frequenza $n_0/2L$ abbia “energia” nulla, ossia che $c_{n_0} = 0$. Le considerazioni precedenti mostrano che l'energia di $f(x)$ si ripartisce tra i segnali e^{inx} per cui $c_n \neq 0$. La successione $(n/2L, c_n)$ si chiama lo spettro del segnale. Infine, notiamo che l'identità di Parseval mostra che se i coefficienti di Fourier sono tutti nulli allora la funzione è nulla, ed ovviamente vale anche il viceversa. Ossia:

Teorema 90 *Due funzioni f, g in $\mathcal{L}^2(-L, L)$ con i medesimi coefficienti di Fourier verificano*

$$\int_{-L}^L |f(x) - g(x)|^2 dx = 0. \quad (2.28)$$

Se accade che le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue, allora la condizione (2.28) implica che esse coincidono. In generale, se vale (2.28), le due funzioni possono “considerarsi equivalenti” nel senso che danno il medesimo contributo alle espressioni integrali nelle quali figurano.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier

Il calcolo dei coefficienti di Fourier richiede il calcolo di integrali piuttosto noiosi. In certi casi si possono usare dei trucchi che semplificano il calcolo. Per esempio:

- Il prodotto di una funzione pari e di una dispari è dispari; e una funzione dispari ha integrale nullo su $[-L, L]$. Dunque, se $f(x)$ è dispari, i coefficienti a_n sono tutti nulli. Analogamente, se $f(x)$ è pari i coefficienti b_n sono tutti nulli.
- Si voglia calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x$. Questa è una funzione dispari e quindi vanno calcolati i soli coefficienti b_n ,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin n \frac{\pi}{L} x \, dx .$$

Questi integrali si calcolano facilmente per parti ma ciò richiede un calcolo indipendente per ogni valore di n . Un modo più veloce è il seguente: si consideri la funzione

$$s \longrightarrow x \sin sx \quad \text{ossia} \quad s \longrightarrow -\frac{d}{ds} \cos sx .$$

Il numero Lb_n è il valore per $s = n\pi/L$ della funzione¹⁰

$$\begin{aligned} -\int_{-L}^L \frac{d}{ds} \cos sx \, dx &= -\frac{d}{ds} \int_{-L}^L \cos sx \, dx = \\ &= -\frac{d}{ds} \left\{ \frac{2}{s} \sin sL \right\} = \frac{2}{s^2} \sin sL - \frac{2L}{s} \cos sL \end{aligned}$$

(formula valida per $s \neq 0$). Calcolando per $s = n\pi/L$ e dividendo per L , si trova

$$b_n = 2(-1)^{n+1} \frac{L}{n\pi} .$$

Dunque,

$$x = 2 \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n \frac{\pi}{L} x . \tag{2.29}$$

Procedendo in modo analogo si verifichi che

$$x^2 = \frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n \frac{\pi}{L} x \right] .$$

- Generalmente non è lecito derivare termine a termine una serie di Fourier. Invece, se $f(x) \in \mathcal{L}^2(-L, L)$, la serie di Fourier di $f(x)$ può integrarsi

¹⁰Lo scambio del segno di derivata con quello di integrale è giustificato al paragrafo 141.

2.6. LA SERIE DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2(-L, L)$

termine a termine: se

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos n(\pi/L)x + b_n \sin n(\pi/L)x]$$

allora

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds = a_0x + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin n(\pi/L)x - \frac{b_n}{n} \cos n(\pi/L)x \right].$$

Si noti che quella ottenuta non è una serie di Fourier, a causa del primo addendo a_0x . Se vogliamo la serie di Fourier di $F(x)$ dobbiamo esprimere anche la funzione x mediante la sua serie di Fourier, usando (2.29). In questo modo si trova

$$F(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2(-1)^{n+1}a_0 + a_n}{n} \sin n(\pi/L)x - \frac{b_n}{n} \cos n(\pi/L)x \right].$$

2.6.1 Estensioni pari e dispari, e serie di Fourier

Il fatto seguente si è già notato: la funzione $f(x)$ sia pari,

$$f(x) = f(-x).$$

In questo caso, ciascuna delle funzioni

$$f(x) \sin nx$$

è dispari e quindi ha integrale nullo: i coefficienti b_n sono tutti nulli. Ovviamente, vale anche il viceversa se i coefficienti b_n sono tutti nulli, la somma della serie è una funzione pari. Analogamente, se $f(x)$ è dispari,

$$f(x) = -f(-x),$$

sono nulli i coefficienti a_n e viceversa. Dunque:

Teorema 91 *Sia*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n \frac{\pi}{L} x + b_n \sin n \frac{\pi}{L} x \right].$$

La funzione $f(x)$, periodica di periodo $T = 2L$, è pari se e solo se $b_n = 0$ per ogni n ; è dispari se e solo se $a_n = 0$ per ogni n .

Supponiamo ora che sia data una funzione $f(x)$ definita solamente su $[0, L]$. Ad essa possono associarsi infinite serie di Fourier, una per ciascuna “arbitraria” estensione di $f(x)$ a $[-L, 0]$. Tra queste estensioni due sono privilegiate: l’estensione pari e l’estensione dispari. L’estensione pari conduce ad una serie di soli coseni mentre l’estensione dispari conduce ad una serie di soli seni. Dunque:

Teorema 92 *Sia $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, L)$. Essa è somma di un’unica serie di Fourier di soli seni, e di un’unica serie di Fourier di soli coseni. La prima definisce l’unica estensione dispari di $f(x)$ ad \mathbb{R} , periodica di periodo $2L$; la seconda definisce l’unica estensione pari di $f(x)$ ad \mathbb{R} , periodica di periodo $2L$.*

Le formule per la serie di Fourier di $f(x)$ di soli seni e di soli coseni si ottengono scrivendo nelle (2.27) le opportune estensioni di $f(x)$. Per esempio, usando l’estensione pari, per $k \neq 0$ si trova

$$a_k = (1/L) \int_{-L}^L f(x) \cos k(\pi/L)x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos k(\pi/L)x \, dx.$$

Dato che queste formule (e la corrispondente identità di Parseval) sono di uso molto comune, vanno ricordate. E’ bene quindi scriverle in modo esplicito:

Sviluppo di Fourier in soli coseni

Sia $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, L)$. Si ha:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos n(\pi/L)x$$

con

$$\begin{cases} \alpha_0 &= (1/L) \int_0^L f(x) \, dx \\ \alpha_n &= (2/L) \int_0^L f(x) \cos n(\pi/L)x \, dx \quad (\text{se } n > 0) \end{cases} \quad (2.30)$$

La corrispondente identità di Parseval è

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 \, dx = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^2.$$

Sviluppo di Fourier in soli seni

Sia $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, L)$. Si ha:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin n(\pi/L)x$$

con

$$\beta_n = (2/L) \int_0^L f(x) \sin n(\pi/L)x \, dx. \quad (2.31)$$

La corrispondente identità di Parseval è:

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^2.$$

Osservazione 93 Sia $f(x) = \cos(\pi/L)x$, definita su $[0, L]$. Vogliamo calcolarne lo sviluppo di Fourier in soli coseni ed in soli seni. Lo sviluppo di Fourier in soli coseni è

$$f(x) = \cos(\pi/L)x.$$

Invece, per lo sviluppo di Fourier di soli seni dobbiamo calcolare i coefficienti b_n usando la formula (2.30). Ricordiamo la formula di Werner seguente:

$$(\sin a)(\cos b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

Si trova:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi/L)x \sin n(\pi/L)x \, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ \sin \frac{\pi}{L}(n+1)x + \sin \frac{\pi}{L}(n-1)x \right\} \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi(n+1)} \{ \cos \pi(n+1) - 1 \} - \frac{1}{\pi(n-1)} \{ \cos \pi(n-1) - 1 \} \\ &= \frac{4}{\pi} \begin{cases} \frac{n}{n^2-1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

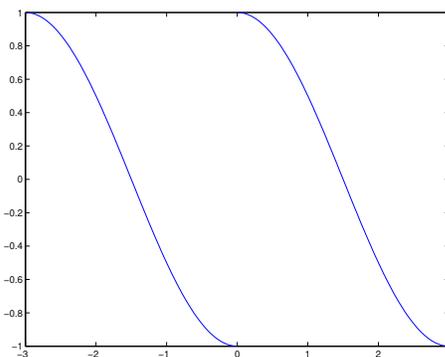
Dunque,

$$\cos \frac{\pi}{L}x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin 2k \frac{\pi}{L}x, \quad 0 < x < L.$$

E' questa la serie di Fourier dell'estensione per periodicità della funzione $f(x)$ seguente, il cui grafico (con $L = 3$) è riportato in figura 2.9.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{L}x & \text{se } 0 < x < L \\ -\cos \frac{\pi}{L}x & \text{se } -L < x < 0 \quad \blacksquare \end{cases} \quad (2.32)$$

Figura 2.9: Estensione per periodicit  della funzione (2.32)



2.7 La convergenza puntuale della serie di Fourier

E' un fatto che la convergenza nel senso della norma di $\mathcal{L}^2(-L, L)$ non implica la convergenza puntuale, nemmeno in un solo punto. Anzi, si prova che esistono funzioni continue e periodiche su $[-L, L]$ la cui serie di Fourier non converge. Esistono per  anche casi in cui la serie di Fourier converge puntualmente. Come abbiamo detto questo accade se, per esempio, $a_n = b_n = q^n$ con $|q| < 1$. Ci si pu  chiedere se sia possibile dare condizioni sulla funzione $f(x)$ che implicino la convergenza puntuale della serie di Fourier. Condizioni per questo sono note. In particolare si ha:

Teorema 94 *Sia $(a, b) \subseteq [-L, L]$ ed esistano M e $\alpha \in [0, 1]$ tali che per ogni coppia x, y di punti di (a, b) valga*

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|^\alpha. \quad (2.33)$$

Sia $[a', b'] \subseteq (a, b)$. La serie di Fourier di $f(x)$ converge ad $f(x)$ uniformemente in $[a', b']$.

Una funzione $f(x)$ ovunque derivabile con derivata limitata,

$$|f'(x)| < M,$$

in particolare verifica

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

e quindi soddisfa alle condizioni del teorema. D'altra parte le ipotesi del teorema 94 implicano la continuit  della funzione $f(x)$ e questa   una condizione

2.7. LA CONVERGENZA PUNTUALE DELLA SERIE DI FOURIER

eccessivamente restrittiva per molte applicazioni nelle quali interviene la serie di Fourier. Per cercare di indebolire quest'ipotesi, studiamo cosa accade vicino ad un punto di salto di $f(x)$. Vale: Vale:

Teorema 95 *La funzione $f(x) \in \mathcal{L}^2(-L, L)$ abbia un salto nel punto x_0 . Supponiamo inoltre che esistano $a < x_0$ e $b > x_0$ tali che $f(x)$ ammetta derivata prima continua sia su (a, x_0) che su (x_0, b) e che esistano finiti i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

In questo caso la serie di Fourier di $f(x)$ converge in ogni punto di (a, b) e inoltre:

- *Se $[a', b'] \subseteq (a, x_0)$ oppure se $[a', b'] \subseteq (x_0, b)$ allora la serie converge uniformemente ad $f(x)$ su $[a', b']$.*
- *in x_0 la serie di Fourier converge alla media dei valori dei limiti direzionali in x_0 :*

$$\frac{1}{2} [f(x_0^-) + f(x_0^+)].$$

Esempio 96 Sia

$$\chi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Si noti che questa funzione differisce dalla funzione $\text{sgn}(x)$ per il valore che assume in 0; ma il valore assunto in un solo punto non altera gli integrali che definiscono i coefficienti di Fourier. Dunque le funzioni definite su $[-\pi, \pi]$ ed uguali a $\chi(x)$ ed a $\text{sgn}(x)$ hanno la medesima serie di Fourier, che è la serie

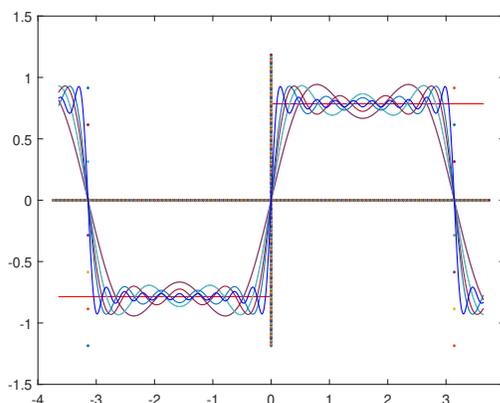
$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Per $x = 0$ questa serie converge e converge al valore 0, media dei limiti direzionali di $\chi(x)$ per $x \rightarrow \pm 0$. Per il teorema 95 la somma della serie è quindi $\text{sgn}(x)$. La convergenza non può essere uniforme perché le somme parziali sono continue mentre la somma della serie non è continua. Se si disegnano alcune somme parziali, come in figura 2.10, si vede che le somme parziali saltano sopra e sotto il valore ± 1 di una quantità che non si attenua al crescere di N . Calcoli piuttosto laboriosi mostrano che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(1/N) = d$$

e si può mostrare che d è strettamente maggiore di 1: $d > 1,089$. E quindi al crescere di N l'errore tra $S_N(x)$ e $\text{sgn}(x)$ non si attenua (ma si concentra sempre di più intorno al salto $x = 0$). ■

Figura 2.10: Il fenomeno di Gibbs



Il fenomeno appena illustrato non dipende dalla particolare funzione $\text{sgn}(x)$ usata nell'esempio. Si può provare che, nelle ipotesi del Teorema 95, esso si verifica in vicinanza di ogni salto. Tale fenomeno va sotto il nome di *Fenomeno di Gibbs*. Infine, riportiamo alcune serie di Fourier di funzioni $f(x)$ periodiche di periodo 2π e, nelle figure seguenti, i grafici della restrizione della funzione a $(-\pi, \pi)$, con sovrapposti i grafici di alcune somme parziali. Nella colonna di sinistra della tabella, si riporta l'espressione della funzione su $(-\pi, \pi)$. La funzione è poi estesa ad \mathbb{R} per periodicità.

2.7. LA CONVERGENZA PUNTUALE DELLA SERIE DI FOURIER

$\text{sign } x$	$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$
$ x $	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$
x	$2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$
$\begin{cases} x + 2\pi & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$	$\pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$
$ \sin x $	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right).$
$\text{sgn}(x) \cos x$	$\frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 6x}{5 \cdot 7} \right)$

Figura 2.11: Le serie di Fourier delle restrizioni a $(-\pi, \pi)$ di $f(x) = \text{sign } x$ (sinistra sopra), di $f(x) = |x|$ (destra sopra), di $f(x) = x$ (sinistra sotto) e di $f(x) = |\sin x|$ (destra sotto)

