

Capitolo 10

I sistemi di equazioni differenziali

10.1 Introduzione

Ricordiamo dal corso di Analisi matematica 1 che si chiama *equazione differenziale del primo ordine* un'equazione che ha per incognita una funzione $\mathbf{x}(t)$, generalmente a valori vettori, a cui si richiede di verificare

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (10.1)$$

Si parla di problema di Cauchy quando si richiede di risolvere l'equazione differenziale (10.1) insieme all'ulteriore condizione

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (10.2)$$

Convenzionalmente, la variabile t si chiama *tempo*, t_0 si chiama *istante iniziale* e la condizione (10.2) si chiama *condizione iniziale* o *condizione di Cauchy*. Alcune precisazioni vanno richiamate esplicitamente:

- con le lettere in grassetto si intendono vettori e \mathbf{x} indica un vettore di dimensione n , $n \geq 1$. Quando $n > 1$ la (10.1) si chiama anche un *sistema* di equazioni differenziali.
- Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Il *dominio* dell'equazione differenziale è una regione (quindi un **aperto connesso**) di \mathbb{R}^{n+1} su cui $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ è definita. Attenzione che il dominio dell'equazione differenziale è sempre un aperto, anche se $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ è definita su un chiuso più grande, si veda l'esempio 266.

- la funzione incognita \mathbf{x} è calcolata nel **medesimo** istante t ovunque essa compare.
- Per *soluzione* dell'equazione (10.1) si intende una funzione $\mathbf{x}(t)$ tale che:
 1. $\mathbf{x}(t)$ è definita su un intervallo (a, b) e ivi derivabile.
 2. per ogni t , la coppia $(t, \mathbf{x}(t))$ appartiene al dominio dell'equazione differenziale.¹
 3. per ogni $t \in (a, b)$ l'uguaglianza (10.1) è verificata.

Si dice che la soluzione $\mathbf{x}(t)$ verifica il problema di Cauchy (10.1), (10.2) quando $t_0 \in (a, b)$ e $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

- Infine, ricordiamo che, come notazione, generalmente invece di (10.1) si scrive

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

senza indicare la dipendenza di \mathbf{x} da t .

Vedremo che, sotto opportune condizioni sulla funzione $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, il problema di Cauchy (10.1)-(10.2) ammette soluzione unica, definita su un opportuno intervallo aperto contenente t_0 . Scriveremo $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ per indicare la soluzione del problema di Cauchy. Quando t_0 è sottinteso, scriveremo $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Si noti che le soluzioni di equazioni differenziali, essendo funzioni continue definite su intervalli, sono **curve parametriche**. Per chiarire la definizione di soluzione, consideriamo gli esempi seguenti:

Esempio 265 Sia

$$x' = 1 + x^2.$$

Si sa che $x(t) = \tan t$ verifica l'uguaglianza in ogni punto t in cui la funzione $\tan t$ è definita. Però $x(t) = \tan t$ **non** è soluzione dell'equazione differenziale perché **non** è definita su un intervallo. Invece, la restrizione di $\tan t$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ è soluzione, così come è soluzione la restrizione di $\tan t$ all'intervallo $(\pi/2, 3\pi/2)$. Consideriamo ora la funzione $\tan(t + \pi/4)$. Questa funzione è soluzione dell'equazione differenziale, sull'intervallo $(-3\pi/4, \pi/4)$. Dunque, soluzioni diverse della medesima equazione differenziale possono avere domini **DIVERSI**; e in generale una soluzione è definita soltanto su un "piccolo" intervallo. ■

Inoltre:

¹si ricordi che per definizione il dominio di un'equazione differenziale è un insieme aperto.

Esempio 266 Sia

$$x' = \sqrt{1 - x^2}, \quad x(0) = 0.$$

Il dominio della funzione $f(t, x) = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ è l'insieme chiuso $\mathbb{R} \times [-1, 1]$. Questo però non può essere il dominio dell'equazione differenziale perché, per definizione, il dominio dell'equazione differenziale deve essere un aperto. Scegliamo allora come dominio dell'equazione differenziale l'insieme aperto $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. Procedendo per separazione di variabili, si trova che la soluzione è

$$x(t) = \sin t$$

definita su $(-\pi/2, \pi/2)$. Infatti, per $t \rightarrow \pm\pi/2$ la soluzione tende rispettivamente a -1 e $+1$. In questi punti, $\sqrt{1 - x^2}$ è definita, ma i punti $(-\pi/2, -1)$ e $(\pi/2, 1)$ non appartengono al dominio dell'equazione differenziale. Dunque, per $t \rightarrow \pm\pi/2$, il grafico $(t, x(t))$ della soluzione “esce” dal dominio dell'equazione differenziale. ■

Chiediamoci ora perché è così importante insistere sul fatto che una soluzione deve rimanere all'interno dell'insieme su cui il secondo membro dell'equazione è definito. La ragione è questa: nei due esempi precedenti la soluzione si trova esplicitamente procedendo per separazione di variabili, ma in pratica la soluzione di un'equazione differenziale deve calcolarsi numericamente. Consideriamo per esempio la soluzione $x(t) = \sin t$ dell'equazione nell'esempio 266. Se si vuol ridefinire il concetto di soluzione in modo da accettare che la soluzione sia definita anche in $-\pi/2$ e $\pi/2$ allora la soluzione viene ad essere definita su \mathbb{R} . Però, nessun metodo numerico riuscirà a trovare tale soluzione perché quando $t = \pi/2$ errori comunque piccoli fanno uscire dal dominio e bloccano l'algoritmo numerico usato per trovare la soluzione, qualunque esso sia. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica 1, si chiama equazione differenziale del secondo ordine un'equazione nell'incognita $x(t)$ del tipo

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

usualmente scritta senza indicare la dipendenza da t ,

$$x'' = f(t, x, x').$$

Si noti che non abbiamo usato lettere in grassetto perché in generale studieremo le equazioni di ordine superiore per incognite scalari (anche se niente vieta di studiare *sistemi* di equazioni di ordine superiore, si veda l'Esempio 269). Il problema di Cauchy si ottiene ora associando all'equazione differenziale le ulteriori condizioni

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$$

ossia ricercando soluzioni dell'equazione differenziale che hanno assegnata posizione e velocità in un medesimo istante. E' noto dal corso di Analisi Matematica 1 che un'equazione di ordine n è

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (10.3)$$

Il problema di Cauchy corrispondente si ottiene fissando un punto t_0 e richiedendo che in questo punto la soluzione cercata verifichi le condizioni

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

E' importante notare che ogni equazione differenziale di ordine n può scriversi come sistema di n equazioni differenziali. La (10.3) può scriversi in forma di sistema come segue: si scriva $x_1(t)$ invece di $x(t)$ e quindi si definiscono $x_2(t), \dots, x_n(t)$ dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t)). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Osservazione 267 Si noti l'uso intercambiabile dell'apostrofo e del punto per indicare la derivata rispetto al tempo t .

Mostriamo ora due esempi. Abbiamo detto che ogni equazione differenziale di ordine n può scriversi come sistema. Invece, il viceversa non vale: esistono sistemi di n equazioni differenziali che **non** corrispondono ad equazioni differenziali di ordine n .

Esempio 268 Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$x' = x, \quad y' = y. \quad (10.5)$$

Le sue soluzioni sono $x(t) = e^t x_0, y(t) = e^t y_0$. In particolare, la (10.5) è risolta da

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = 2e^t. \quad (10.6)$$

Si vede subito che nessuna equazione scalare del secondo ordine

$$x'' = f(x, x') \quad (10.7)$$

scritta in forma di sistema del primo ordine, ossia scritta come

$$x' = y, \quad y' = f(x, y)$$

può avere le medesime soluzioni di (10.5). Infatti la prima uguaglianza $x' = y$ non vale se $x(t)$ ed $y(t)$ sono le funzioni in (10.6). ■

Esempio 269 Si considerino due punti materiali di massa M_1 ed M_2 vincolati a scorrere (senza attrito) su un segmento orizzontale. Il punto M_1 è attaccato ad una molla (di costante elastica k_1) a sua volta fissata nell'origine ed il punto M_2 è collegato al punto M_1 attraverso una seconda molla di costante elastica k_2 . Indichiamo con x ed y rispettivamente l'ascissa del primo e del secondo punto. Allora, le equazioni di Newton per questo sistema sono

$$\begin{aligned}M_1 x'' &= -k_1 x + k_2(y - x) \\M_2 y'' &= -k_2(y - x).\end{aligned}$$

Si ha quindi un **sistema** di due equazioni del secondo ordine. Questo può rappresentarsi come sistema di quattro equazioni del primo ordine,

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{1}{M_1} x_2 \\x_2' &= -k_1 x_1 + k_2(y_1 - x_1) \\y_1' &= \frac{1}{M_2} y_2 \\y_2' &= -k_2(y_1 - x_1).\end{aligned}$$

La fisica insegna che la posizione e velocità “iniziali”, ossia assegnate ad un certo istante di tempo, e le forze cui il sistema è soggetto, determinano l'evoluzione futura del sistema. Dunque, se vogliamo un primo controllo che il modello matematico che abbiamo costruito effettivamente corrisponda alle proprietà fisiche del sistema, dovremo verificare che l'evoluzione nel tempo delle funzioni $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ sia univocamente determinata dalla conoscenza delle costanti M_1 , M_2 , k_1 , k_2 e dei quattro numeri $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $y(t_0)$, $y'(t_0)$. A questo quesito risponde il Teorema di Cauchy, Teorema 270. ■

I sistemi di equazioni differenziali considerati negli esempi precedenti sono tutti *sistemi lineari*, ossia hanno forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

con A matrice (generalmente dipendente dal tempo, $A = A(t)$) ed $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ dipendente dal solo tempo t e non da \mathbf{x} (anzi, negli esempi, $\mathbf{f} = 0$). Quando $\mathbf{f} = 0$ il sistema si dice *lineare omogeneo*, altrimenti si chiama *affine*. La funzione $\mathbf{f}(t)$ si chiama *termine noto*. Sono invece esempi di sistemi non lineari i seguenti

$$x' = -x(a + by), \quad y' = -y(cx + d)$$

che si incontra in problemi di dinamica di popolazioni (equazione di *Lotka-Volterra*) oppure

$$x'' + ax' + cx + \epsilon x^3 = \cos \omega t, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - cx - \epsilon x^3 + \cos \omega t \end{cases}$$

(equazione *di Duffin*) che si incontra nello studio delle oscillazioni elastiche. Un altro esempio importante di equazione differenziale non lineare è l'*equazione di van der Pol*

$$x'' = -x + \mu(x^2 - 1)x'$$

che si incontra nello studio di certi circuiti elettrici. Consideriamo ora un caso particolare: supponiamo che l'equazione differenziale (10.1) abbia forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

con \mathbf{f} che non dipende da t . In questo caso si dice che il sistema è autonomo o *tempo invariante*. Esso descrive fenomeni la cui legge fisica è costante nel tempo e le sue soluzioni hanno una proprietà importante: sia $\mathbf{x}(t)$ una soluzione e sia $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + \tau)$ con τ numero fissato ma qualsiasi. Allora,

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}'(t + \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \tau)) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)),$$

ossia $\mathbf{y}(t)$ è ancora soluzione. Si osservi che ciò non avviene se \mathbf{f} dipende anche da t perché in questo caso si trova

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t + \tau, \mathbf{y}(t))$$

che è una diversa equazione differenziale. La funzione $t \rightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + \tau)$ è una curva ottenuta riparametrizzando (in modo molto semplice) la curva $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$. Per questa ragione, quando si studiano sistemi autonomi, conviene studiare sia il grafico $(t, \mathbf{x}(t))$ della soluzione sia la “curva soluzione” $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$. Nel contesto dei sistemi autonomi questa si chiama orbita. Graficamente se ne rappresenta il sostegno, ossia l'immagine della funzione e, quando serve, si indica anche il verso di percorrenza al crescere del tempo t . Un punto \mathbf{x}_0 per cui $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ è detto *punto di* equilibrio o stazionario (talvolta si dice anche soluzione stazionaria.) In tal caso, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ è *soluzione costante* di (10.1). Se l'equazione differenziale è autonoma, l'orbita di tale soluzione si riduce al punto \mathbf{x}_0 stesso. Un punto critico si dice isolato se in un suo intorno non vi sono altri punti critici.

Concludiamo dicendo che le equazioni differenziali che stiamo studiando si dicono “ordinarie” in opposizione alle “equazioni differenziali a derivate parziali” che si incontrano quando l'incognita dipende da più variabili e quindi le derivate che compaiono nell'equazione sono derivate parziali. Come esempio di equazione a derivate parziali si consideri

$$\frac{\partial}{\partial t}x + \frac{\partial}{\partial s}x = 0$$

e si provi che tutte le funzioni

$$x(t, s) = \phi(t - s)$$

con ϕ di classe C^1 risolvono quest'equazione.

10.2 Esistenza e unicità di soluzione

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (10.8)$$

Come si è notato all'esempio 269, vanno conosciute condizioni che assicurino la risolubilità di questo problema, e condizioni che implichino l'unicità della soluzione. Ricordiamo che per definizione la soluzione deve essere definita in un intervallo che contiene t_0 al suo interno. E' sufficiente però mostrare che la soluzione esiste in $[t_0, t_0 + a)$ perché lo stesso argomento si potrà poi applicare all'intervallo $(t_0 - a, t_0]$. Inoltre, proveremo l'esistenza di soluzioni in un opportuno intervallo, non necessariamente il più grande possibile. Se $\mathbf{x}(t)$ risolve (10.8) allora $\mathbf{x}(t)$ è una curva parametrica che nel punto $\mathbf{x}(t_0)$ ha per tangente la retta di parametrizzazione

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0))(t - t_0). \quad (10.9)$$

Ciò suggerisce di costruire come approssimazione della soluzione una spezzata costituita da segmenti delle rette di forma (10.9). Bisogna però usare un po' di cautela, perché si sa già che in generale una soluzione di (10.8) può solo definirsi in un "piccolo" intervallo, si ricordi l'Esempio 265. Il teorema che si può provare è il seguente:

Teorema 270 (di Cauchy) *Sia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e supponiamo che la funzione $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ e le sue derivate parziali rispetto alle componenti di \mathbf{x} siano continue in una regione D contenente il "rettangolo" R*

$$R = \{(t, \mathbf{x}) \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b\}.$$

Il problema di Cauchy (10.8) ammette soluzione unica su un intervallo $(t_0 - T, t_0 + T)$ ove T dipende sia da t_0 che da \mathbf{x}_0 .²

²Un possibile valore per T può costruirsi come segue: Sia

$$M = \max_{(t, \mathbf{x}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|, \quad \tilde{M} = \max_i \left\{ \max_{(t, \mathbf{x}) \in R} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \right\| \right\}.$$

La dimostrazione del teorema è piuttosto tecnica, ma è opportuno accennare all'idea che guida la dimostrazione, perché questa suggerisce un modo importante di pensare alle equazioni differenziali. Costruiamo una successione di funzioni $\mathbf{x}^{(N)}(t)$, continue su $[t_0, t_0 + T]$, che, si può provare, converge a una funzione $\mathbf{x}(t)$ che risolve (10.8). Per questo, dividiamo l'intervallo $[t_0, t_0 + T]$ in N parti uguali mediante i punti

$$t_0, \quad t_0 + \delta, \quad t_0 + 2\delta, \quad \dots, \quad t_0 + (N - 1)\delta, \quad \text{ove } \delta = T/N.$$

Inizialmente siamo nel punto (t_0, \mathbf{x}_0) . Definiamo la funzione $\mathbf{x}^{(N)}(t)$ sul primo intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ indicandone il grafico: il grafico è il segmento di retta

$$y = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0))(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

In questo modo si identifica in particolare $\mathbf{x}^{(N)}(t_0 + \delta)$. A partire dal punto $(t_0 + \delta, \mathbf{x}^{(N)}(t_0 + \delta))$ si ripeta il procedimento: si definisca $\mathbf{x}^{(N)}(t)$ per $t \in [t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$:

$$\mathbf{x}^{(N)}(t) = \mathbf{x}^{(N)}(t_0 + \delta) + \mathbf{f}(t_0 + \delta, \mathbf{x}^{(N)}(t_0 + \delta))(t - (t_0 + \delta)), \quad t \in [t_0 + \delta, t_0 + 2\delta].$$

Si ripeta quindi questo procedimento fino a coprire tutto l'intervallo $[t_0, t_0 + T]$. In generale avremo, per $k = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\mathbf{x}^{(N)}(t) = \mathbf{x}^{(N)}(t_0 + k\delta) + \mathbf{f}(t_0 + k\delta, \mathbf{x}^{(N)}(t_0 + k\delta))(t - (t_0 + k\delta)), \quad t \in [t_0 + k\delta, t_0 + (k+1)\delta].$$

La figura 10.1 illustra questo procedimento. In questo modo, per ogni N , si costruisce una spezzata che si chiama *spezzata [di Eulero]*. Si può provare che la successione di funzioni $\{x^{(N)}(t)\}$ converge uniformemente ad una funzione $x(t)$ sull'intervallo $(t_0 - T, t_0 + T)$, purché T sia opportunamente scelto. Ora, vorremmo sostituire questa funzione nei due membri di (10.8) trovando che i due membri differiscono per un errore che tende a zero per $N \rightarrow +\infty$. Però, questo non può farsi perché le funzioni $x^{(N)}(t)$ non sono derivabili; e anche se si potesse fare a poco servirebbe perché la sola convergenza uniforme niente permette di concludere sulla derivata della funzione limite $x(t)$. Viene però in aiuto un'altra idea: integrando i due membri dell'equazione differenziale in (10.8) si vede che $\mathbf{x}(t)$ risolve (10.8) se e solo se essa risolve l'equazione integrale

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds. \tag{10.10}$$

Si può scegliere

$$T < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{\bar{M}} \right\}.$$

Notare che questo valore di T non identifica il più grande intervallo su cui la soluzione esiste.

Figura 10.1: Spezzata di Eulero



È possibile sostituire la $x^{(N)}(t)$ nei due membri dell'equazione integrale, e stimare lo scarto tra i due membri, provando che esso tende a zero per $N \rightarrow +\infty$; e usando la sola convergenza uniforme è ora possibile completare la dimostrazione del teorema. Omettiamo i dettagli della dimostrazione, contentandoci di avere illustrato queste idee fondamentali. ■ La dimostrazione del Teorema di Cauchy suggerisce un modo importante di pensare ad un'equazione differenziale, che illustriamo nel caso del sistema

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) :$$

si può pensare al campo vettoriale $f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ come ad un "campo di velocità" che trasporta un pallino inizialmente nella posizione (x_0, y_0) . La traiettoria descritta dal pallino è la soluzione del problema di Cauchy con quel dato iniziale. Da questo punto di vista,

$$\text{il vettore } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \text{ applicato in } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

rappresenta la velocità che il pallino ha se transita dalla posizione \mathbf{x} all'istante t .

Le isocline

Consideriamo il caso di un sistema autonomo di due equazioni differenziali

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y).$$

La dimostrazione del Teorema di Cauchy suggerisce di considerare il luogo dei punti che vengono incontrati dalle soluzioni dell'equazione differenziale con pendenza assegnata. Escludendo

i punti nei quali sia f che g si annullano, le orbite sono curve regolari di parametrizzazione $(x(t), y(t))$. Per fissare le idee, sia $x'(t_0) \neq 0$. La pendenza della tangente nell'istante t_0 è

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{g(x(t_0), y(t_0))}{f(x(t_0), y(t_0))}.$$

Se invece $x'(t_0) = 0$ allora la tangente è verticale. Dunque, le orbite hanno tangente verticale nei punti dell'insieme identificato da $f(x, y) = 0$; hanno tangente con pendenza m nei punti dell'insieme identificato da

$$\frac{g(x, y)}{f(x, y)} = m.$$

Quest'insieme si chiama l'*isoclina* di pendenza m . L'*isoclina* di pendenza m ha questa proprietà: le soluzioni escono dai suoi punti con tangenti tutte parallele, con la medesima pendenza m . Se si riescono a disegnare “molte” isocline e quindi a disegnare su di esse segmenti di pendenza m , si può pensare di tracciare una soluzione del problema di Cauchy in questo modo: si parte dal dato (x_0, y_0) , che appartiene ad una certa isoclina, corrispondente alla pendenza m_0 . Si traccia per (x_0, y_0) un segmento parallelo a $y = m_0 x$ fino ad incontrare la “successiva” isoclina (successiva, tra quelle tracciate) diciamo corrispondente alla pendenza m_1 . Dal punto di intersezione si fa uscire un segmento parallelo a $y = m_1 x$ fino ad incontrare l'isoclina successiva, ecc. Si costruisce una spezzata che approssima la soluzione del problema di Cauchy.

10.2.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Si è visto, al paragrafo 2.4.4 che l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{10.11}$$

(con A matrice $n \times n$) ha per soluzioni le funzioni

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s) ds.$$

Il membro destro di questa formula si chiama soluzione generale o anche integrale generale della (10.11). La soluzione generale della (10.11) si ottiene sommando ad una soluzione particolare,

$$\int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s) ds$$

tutte le funzioni

$$e^{At}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

10.2. ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONE

Al variare di \mathbf{x}_0 queste sono tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata, ossia dell'equazione che si ottiene dalla (10.11) ponendo $\mathbf{f}(t) = 0$. Dunque, il calcolo dell'integrale generale si riduce al calcolo dell'esponenziale di matrici

$$e^{At}.$$

Il calcolo di quest'esponenziale è tutt'altro che semplice in generale e ci limitiamo a studiare il caso dei "sistemi piani", ossia il caso in cui $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo prima di tutto l'equazione lineare omogenea, ossia assumiamo $\mathbf{f}(t) = 0$. Dobbiamo ricordare alcune proprietà delle matrici, che richiamiamo esclusivamente nel caso di matrici 2×2 . Proprietà analoghe valgono in generale, ma la casistica diventa sempre più complessa all'aumentare delle dimensioni della matrice. Ogni matrice ammette almeno un autovalore ossia almeno un numero λ tale che

$$\det[A - \lambda I] = 0.$$

Questo discende dal teorema fondamentale dell'algebra, perché $\det[A - \lambda I]$ è un polinomio non costante, e quindi ammette almeno uno zero che però può essere un numero complesso, anche se gli elementi della matrice sono reali. Il polinomio $\det[A - \lambda I]$ si chiama polinomio caratteristico della matrice A . In corrispondenza di ciascun autovalore, si trovano soluzioni \mathbf{v} non nulle dell'equazione lineare

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Questi vettori non nulli si chiamano gli autovettori relativi all'autovalore λ . Naturalmente, se \mathbf{v} è un autovettore relativo a λ , anche i suoi multipli lo sono. Dobbiamo osservare che:

- se λ è un numero complesso, anche i suoi autovettori sono autovettori a elementi complessi; ossia, implicitamente anche se gli elementi della matrice A sono reali, ci riconduciamo a lavorare con vettori ad elementi complessi;
- autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

Consideriamo la funzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{v},$$

Allora,

$$\frac{d}{dt}e^{At}\mathbf{v} = Ae^{At}\mathbf{v}$$

è una soluzione della (10.11) (anche se \mathbf{v} non è autovettore di A). Se

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

si ha

$$e^{At}\mathbf{v} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \right] \mathbf{v} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n \mathbf{v}}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \mathbf{v}}{n!}$$

ossia

$$e^{At}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

Dunque, noto un autovalore λ e un suo autovettore \mathbf{v} , è facile scrivere alcune soluzioni dell'equazione lineare omogenea: sono le funzioni

$$\alpha e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

con α coefficiente qualsiasi (in generale, coefficiente complesso). Esista ora un secondo autovalore μ e sia \mathbf{w} un suo autovettore. Allora, anche le funzioni

$$\beta e^{\mu t}\mathbf{w}$$

risolvono l'equazione differenziale lineare omogenea

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}; \tag{10.12}$$

e quindi anche le funzioni

$$\alpha e^{\lambda t}\mathbf{v} + \beta e^{\mu t}\mathbf{w} \tag{10.13}$$

la risolvono. Quanto detto fin'ora vale per sistemi di qualunque dimensione. Supponiamo ora che il sistema sia di dimensione 2. Dato che i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sono linearmente indipendenti, ogni vettore a due dimensioni \mathbf{x} si può rappresentare in modo unico come

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w};$$

Ossia, al variare dei coefficienti α e β , le funzioni (10.13) permettono di esprimere tutte le soluzioni di (10.12). Dunque, la (10.13) è la soluzione generale di (10.12). Si noti che il fatto importante è l'esistenza di due autovettori \mathbf{v} e \mathbf{w} linearmente indipendenti: le considerazioni precedenti possono ripetersi anche se i due autovettori \mathbf{v} e \mathbf{w} corrispondono ad un medesimo autovalore, ossia se $\lambda = \mu$. Sfortunatamente, non è vero che ogni matrice 2×2 debba avere due autovettori linearmente indipendente, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 271 Gli autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono tutti i multipli di

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

Questa matrice non ha due autovettori linearmente indipendenti. ■

10.2. ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONE

In tal caso, si procede come segue: si identifica (l'unico) autovettore λ ed un suo autovettore \mathbf{v} . Ricordiamo che per definizione $\mathbf{v} \neq 0$. Quindi si considera l'equazione

$$(A - \lambda I) \mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

E' un fatto che, se A , matrice 2×2 , non ha due autovettori linearmente indipendenti, quest'equazione ammette soluzione \mathbf{w} , e inoltre \mathbf{w} è linearmente indipendente da \mathbf{v} . Identificati \mathbf{v} e \mathbf{w} , si costruiscono due polinomi, a valori vettori, uno di grado 0 ed uno di grado 1:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{v}t + \mathbf{w}.$$

Nel caso che stiamo ora considerando, si verifica facilmente per sostituzione che la soluzione generale di (10.12) è

$$e^{\lambda t} [\alpha \mathbf{p}_0 + \beta \mathbf{p}_1(t)]. \quad (10.14)$$

Abbiamo quindi scritto la soluzione generale di (10.12) in ciascuno dei casi che possono presentarsi: in tutti i casi la soluzione generale è combinazione lineare di due soluzioni fondamentali. Delle soluzioni

$$e^{\lambda t} \mathbf{p}_0, \quad e^{\lambda t} \mathbf{p}_1(t)$$

delle soluzioni

$$e^{\tau t} \mathbf{v}, \quad e^{\mu t} \mathbf{w}$$

(con $\lambda = \mu$ oppure $\lambda \neq \mu$) quando la matrice A ammette due autovettori linearmente indipendenti. Queste coppie di soluzioni di (10.12) si chiamano un *sistema fondamentale* di soluzioni. Rimane da chiarire un punto: se la matrice A è reale ma ammette due autovalori complessi e coniugati, le soluzioni scritte sopra prendono valori complessi. Vorremmo trovare un diverso sistema fondamentale di soluzioni, che però prendano valori reali.

Il caso degli autovettori complessi e coniugati Le considerazioni precedenti valgono per ogni matrice A sia che i suoi autovalori siano reali sia che siano complessi. Se però la matrice 2×2 ha elementi reali ed un autovalore λ complesso, allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore; e quindi siamo automaticamente nel caso in cui la matrice ha due diversi autovalori e quindi due autovettori linearmente indipendenti: la soluzione generale di (10.12) è data da (10.13). Siano

$$\lambda_{\pm} = \xi \pm i\omega$$

gli autovalori e sia $\mathbf{v}_+ = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ un autovettore di λ_+ . In quest'espressione, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono vettori reali, che però non sono essi stessi autovettori di A . E' un fatto che

$$\bar{\mathbf{v}}_+ = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$$

è un autovettore di λ_- . Usando la (10.13) si vede quindi che un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\begin{aligned} & e^{\xi t} [e^{-i\omega t} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)] \\ &= e^{\xi t} [(\mathbf{v}_1 \cos \omega t - \mathbf{v}_2 \sin \omega t) + i(\mathbf{v}_2 \cos \omega t + \mathbf{v}_1 \sin \omega t)] \\ & e^{\xi t} [e^{-i\omega t} (\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2)] \\ &= e^{\xi t} [(\mathbf{v}_1 \cos \omega t - \mathbf{v}_2 \sin \omega t) - i(\mathbf{v}_2 \cos \omega t + \mathbf{v}_1 \sin \omega t)] . \end{aligned} \tag{10.15}$$

Queste soluzioni prendono valori complessi. Sommandole e sottraendole (e dividendo rispettivamente per 2 e per $2i$) si trovano due soluzioni a valori reali:

$$e^{\xi t} [\mathbf{v}_1 \cos \omega t - \mathbf{v}_2 \sin \omega t] , \quad e^{\xi t} [\mathbf{v}_1 \cos \omega t + \mathbf{v}_2 \sin \omega t] .$$

Questo anche è un sistema fondamentale di soluzioni, a valori reali. Infatti, combinandole linearmente si ritrovano le (10.15) e quindi ogni altra soluzione di (10.12).

10.2.2 Il caso dell'equazione completa e delle equazioni di ordine superiore

Limitandoci ancora al caso di sistemi di due equazioni, mostriamo un metodo per risolvere l'equazione completa. Abbiamo bisogno di un risultato di algebra lineare, che è questo: scriviamo esplicitamente il sistema in forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + f_1 \\ y' = cx + dy + f_2 \end{cases} \tag{10.16}$$

e consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Mostriamo:

Teorema 272 *Esiste una matrice P (generalmente ad elementi complessi) tale che $\det P \neq 0$ e inoltre tale che*

$$PAP^{-1} = P \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix} .$$

10.2. ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONE

Dim. Bisogna ricordare che ogni matrice ammette almeno un autovalore ed un corrispondente autovettore, che in generale sono complessi. Dunque si trovano \mathbf{v} e α tali che

$$A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}.$$

Sia \mathbf{w} un qualsiasi vettore indipendente da \mathbf{v} e consideriamo la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}.$$

Questa matrice trasforma gli elementi della base canonica ordinatamente in \mathbf{v} e \mathbf{w} . La sua inversa quindi trasforma ordinatamente \mathbf{v} e \mathbf{w} nella base canonica. E':

$$AP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{v} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = A\mathbf{w} = \beta\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}$$

e quindi

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Sia ora

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{f}(t) = P \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Applicando la trasformazione P al sistema, questo si riduce a

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta + g_1(t), \quad \eta' = \delta\eta + g_2(t).$$

La seconda equazione è un'equazione nella sola incognita $\eta(t)$, che si sa risolvere; nota $\eta(t)$, questa funzione si sostituisce nella prima equazione, ottenendo un'equazione nella sola incognita ξ , che ancora si sa risolvere. Calcolate le funzioni $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, la soluzione $\mathbf{x}(t)$ si ottiene come

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

Quando il termine noto ha forma "particolare", dal corso di Analisi Matematica 1, si sa che conviene ricercare una soluzione di forma "particolare". Consideriamo quest'esempio:

$$x' = \alpha x + \beta y + e^{\gamma t}, \quad y' = \delta y + e^{\sigma t}.$$

La risoluzione di questo sistema può farsi semplicemente con le tecniche viste nel corso di Analisi Matematica 1 e quindi non entriamo nei dettagli del calcolo. Notiamo però che se $\delta \neq \sigma$ allora le soluzioni della seconda equazione hanno forma

$$ae^{\delta t} + be^{\sigma t}.$$

Se però $\delta = \sigma$ allora le soluzioni sono

$$ae^{\delta t} + bte^{\delta t}.$$

Inserite queste nella prima equazione, la soluzione della prima equazione ha forma rispettivamente

$$ce^{\alpha t} + ae^{\delta t} + be^{\sigma t} \quad \text{oppure} \quad ce^{\alpha t} + ae^{\delta t} + bte^{\delta t}$$

se α è diverso dagli esponenti che si sono incontrati risolvendo la seconda equazione; altrimenti compariranno fattori t^n con $n > 1$. Si esaminino i vari casi e si ritrovi che i possibili valori di n sono 0, 1 e 2. E ora consideriamo il caso di un sistema omogeneo di tre equazioni differenziali lineari. Anche in questo caso esistono trasformazioni di coordinate che “triangolarizzano” il sistema, ossia lo riducono a forma

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \chi z \\ y' = \delta y + \sigma z \\ z' = \gamma z \end{cases}$$

Anche questo sistema si risolve a partire dall’ultima equazione e, risoltala, si vede che $z(t) = ae^{\gamma t}$. Sostituita queste funzione nelle prime due equazioni, ci si riconduce al caso di due equazioni lineari con termine affine visto sopra. E quindi nell’espressione delle prime due componenti compariranno termini della forma $t^n e^{\gamma t}$ con $n = 0$, $n = 1$ oppure $n = 2$.

10.2.3 Il comportamento in futuro delle soluzioni

Spesso interessa conoscere il comportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali per $t \rightarrow +\infty$. Quando si fa questo studio, si dice che si studia il “comportamento in futuro” delle soluzioni. Facciamo questo studio nel caso dei sistemi lineari omogenei di due equazioni differenziali. In tal caso, le soluzioni sono funzioni $\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(t)$ vettore a due componenti $x(t)$ ed $y(t)$. Dunque le soluzioni rappresentano curve parametriche piane. Per questo, i sistemi due due equazioni differenziali si chiamano anche sistemi piani ed il piano (x, y) si chiama piano delle fasi. Vogliamo descrivere le soluzioni di un sistema lineare omogeneo piano sul piano delle fasi e vedere come il comportamento dipenda dagli autovalori della matrice A e, se c’è un solo autovalore, anche dal fatto che esistano due autovettori linearmente indipendenti, o uno solo. La soluzione stazionaria $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ esiste sempre. Noi considereremo solamente il caso in cui

$$\ker A = \mathbf{0}$$

ossia in cui il sistema differenziale ammette un’unica soluzione stazionaria, e questa è $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. Interessa conoscere il comportamento delle altre soluzioni

rispetto alla soluzione stazionaria. Questo comportamento viene descritto introducendo opportune definizioni³. Nel caso lineare però non abbiamo bisogno dei dettagli di queste definizioni. Diciamo per ora che interessa sapere se tutte le soluzioni rimangono limitate e se tutte le soluzioni tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$. Naturalmente tutte le soluzioni rimangono limitate se le due soluzioni che costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni sono ambedue limitate; tutte le soluzioni tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$ se ciò accade per ambedue gli elementi di un sistema fondamentale di soluzioni. Ricapitoliamo i casi che si possono presentare: casi: 1) la matrice A ha due autovettori indipendenti \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , corrispondenti rispettivamente agli autovalori reali λ_1 e λ_2 (non necessariamente distinti). Allora un sistema fondamentale di soluzioni è dato da

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2;$$

2) la matrice A ha due autovettori complessi coniugati $\mathbf{v} \pm i\mathbf{w}$ e corrispondenti rispettivamente agli autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$. Un sistema fondamentale di soluzioni è dato da

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{v} - \sin(\beta t) \mathbf{w}), \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{w} + \sin(\beta t) \mathbf{v});$$

3) la matrice A ha un solo autovalore λ ma non vi sono due autovettori indipendenti. Allora, detto \mathbf{v}_1 un autovettore, si risolve il sistema⁴ $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ e un sistema fondamentale di soluzioni è dato da

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t} (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Esaminando separatamente questi tre casi, si vede che valgono i risultati elencati nella tabella 10.1.

I casi che possono presentarsi sono ben rappresentati negli esempi seguenti.

Esempio 273

- il caso di due autovalori reali distinti e di segno concorde. In questo caso le soluzioni del sistema diagonalizzato hanno forma

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0, \quad y(t) = e^{\mu t} y_0.$$

³di “stabilità”, che vedremo piu’ avanti nel caso non lineare.

⁴si tratta di un sistema la cui matrice dei coefficienti è degenere, ma si dimostra che è compatibile

Tabella 10.1: Comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi lineari piani

Due autovettori linearm. indipendenti	Soluzioni limitate in futuro se e solo se ambedue gli autovalori hanno parte reale non positiva
Due autovettori linearm. indipendenti	Le soluzioni tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se ambedue gli autovalori hanno parte reale negativa
Autovettori tutti linearmente dipendenti (e quindi un solo autovalore δ)	le soluzioni sono limitate in futuro se e solo se δ è negativo (tutte le soluzioni tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$).

Le orbite sono le curve

$$y^\lambda = cx^\mu$$

percorse verso l'origine se gli autovalori sono negativi, allontanandosi dall'origine altrimenti. Se $\lambda = \mu$ le orbite sono rette. Questo caso è illustrato dalla figura 10.2 a sinistra. Questa configurazione di orbite si chiama *nodo*.

- I due autovalori sono reali, di segno opposto. In questo caso le soluzioni sono della forma

$$x(t) = e^{\lambda t}x_0, \quad y(t) = e^{-\mu t}y_0$$

con, per esempio, $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. Nel caso $\lambda = \mu$ le orbite sono le iperboli

$$xy = \text{cost.}$$

e per questa ragione il punto di equilibrio $(0, 0)$ si dice di tipo *iperbolico*, o di *sella*. La figura (10.2) a destra illustra questo caso.

- I due autovalori sono puramente immaginari, e coniugati. In questo caso le soluzioni hanno forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad y(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Le orbite sono le circonferenze

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Il caso è illustrato nella figura 10.3 a sinistra, e il punto di equilibrio si chiama ora *centro*.

Figura 10.2: Nodo e punto di sella

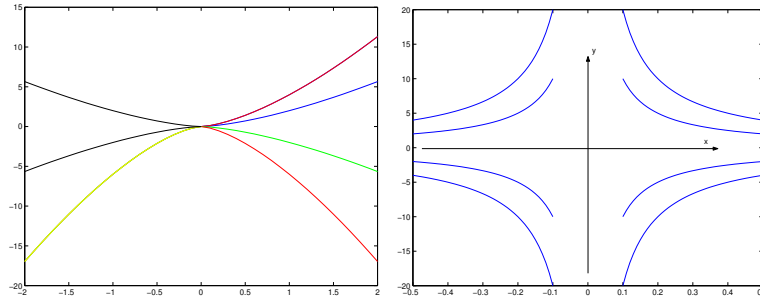
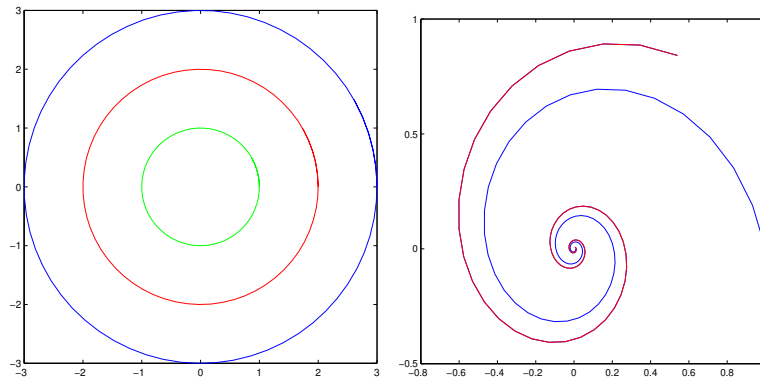


Figura 10.3: Centro e fuoco



- I due valori sono numeri complessi e coniugati, ma non puramente immaginari. In questo caso le soluzioni hanno forma

$$x(t) = Ae^{at} \cos(\omega t + \phi), \quad y(t) = Ae^{at} \sin(\omega t + \phi).$$

In coordinate polari sono descritte da

$$r(t) = Ae^{at}, \quad \theta(t) = \omega t + \phi$$

e sono quindi spirali che si avvolgono verso l'origine se $a < 0$, altrimenti si allontanano dall'origine. Il punto d'equilibrio $(0, 0)$ è ora detto *fuoco*. Questo caso è illustrato nella figura 10.3, a destra. Il numero a è la parte reale comune ai due autovalori.

10.3 La stabilità

Consideriamo ora il sistema non lineare autonomo⁵

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (10.17)$$

Per semplicità supponiamo che tutte le soluzioni di (10.17) siano definite su $[0, +\infty)$.⁶ Ricordiamo che i punti di equilibrio sono quei punti \mathbf{x}_0 tali che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. I punti di equilibrio corrispondono a soluzioni costanti e spesso queste sono le “più importanti” tra le soluzioni dell’equazione differenziale. Per questa ragione, interessa sapere come si comportano soluzioni il cui dato iniziale poco differisce da un punto di equilibrio; in particolare interessa sapere se per $t \rightarrow +\infty$ tali soluzioni tendono o meno al punto di equilibrio stesso. Introduciamo le definizioni seguenti.

Definizione 9 Diciamo che tutte le soluzioni di (10.17) sono *limitate in futuro* quando per ogni \mathbf{x}_0 esiste $M_{\mathbf{x}_0}$ tale che

$$\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| < M_{\mathbf{x}_0} \quad \forall t > 0.$$

In modo analogo si definisce la *limitatezza in passato*. Si dice che le soluzioni di (10.17) sono *limitate* quando sono limitate sia in futuro che in passato. ■

Esempio 274 Consideriamo l’equazione scalare

$$x' = ax,$$

le cui soluzioni sono $x(t) = ce^{at}$. Tutte le soluzioni sono limitate in futuro ma non in passato se $a < 0$; sono limitate in passato ma non in futuro se $a > 0$; sono limitate se $a = 0$. ■

Presentiamo ora le definizioni di stabilità, con riferimento ad un punto di equilibrio \mathbf{y}_0 .

Definizione 10 Diciamo che il punto di equilibrio \mathbf{y}_0 è

- *stabile* quando per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma > 0$ tale che se $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \sigma$ allora $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon$ per ogni $t > 0$ (si noti: $\sigma \leq \epsilon$).

⁵le definizioni di questo paragrafo possono adattarsi anche al caso dei sistemi non autonomi. Tal caso è più delicato e non lo consideriamo.

⁶non è restrittivo assumere che l’istante iniziale t_0 sia 0 perché il sistema è tempo invariante.

10.3. LA STABILITÀ

- **attrattivo** se esiste $\sigma > 0$ tale che se $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \sigma$ allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| = \mathbf{y}_0$. L'insieme dei vettori \mathbf{x}_0 tali che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| = \mathbf{y}_0$ si chiama il **bacino d'attrazione** di \mathbf{y}_0 .
- **asintoticamente stabile** se è sia stabile che attrattivo.

Osservazione 275 E' bene notare che l'attrattività non implica la stabilità. ■

Si potrebbe pensare che se \mathbf{y}_0 è un punto di equilibrio stabile allora si possa sempre scegliere $\delta = \epsilon$. L'esempio seguente mostra che questa congettura è falsa:

Esempio 276 Si consideri il sistema

$$x' = 2y, \quad y' = -x.$$

L'unico punto di equilibrio è $\mathbf{y}_0 = (0, 0)$. Derivando la prima equazione si vede che

$$x'' = -2x$$

e questa è l'equazione del moto armonico. Dunque, le soluzioni del sistema sono

$$x(t) = A \cos \sqrt{2}t + \phi, \quad y(t) = -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t + \phi).$$

Dunque le soluzioni descrivono l'ellisse

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

Sono tutte limitate e inoltre se si assegna ϵ si può trovare un δ tale che

$$\|(x_0, y_0)\| < \delta \implies \|(x(t), y(t))\| < \epsilon.$$

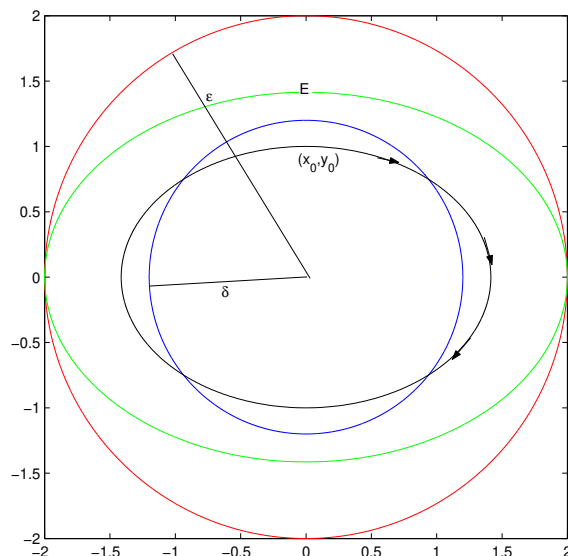
Però, δ va scelto strettamente minore di ϵ , si veda la figura 10.4. ■

Quest'esempio verrà nuovamente esaminato in seguito. Osserviamo che se il punto di equilibrio \mathbf{y}_0 è stabile allora le soluzioni (con dato iniziale sufficientemente vicino a \mathbf{y}_0) sono limitate in futuro e addirittura in modo uniforme: se $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$ allora $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| < \epsilon + \|\mathbf{y}_0\| = M_{\mathbf{x}_0}$. In questo caso $M_{\mathbf{x}_0} = \epsilon + \|\mathbf{y}_0\|$ è indipendente da \mathbf{x}_0 (se $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$). Il viceversa non vale:

Esempio 277 Consideriamo il sistema descritto in coordinate polari da

$$r' = r(1 - r), \quad \theta' = 1.$$

Figura 10.4: Nella definizione di stabilità in generale si deve scegliere $\delta < \epsilon$



$r(t) = 1$ è una soluzione costante e, procedendo per separazione di variabili,

$$\log \frac{r(t)}{|1 - r(t)|} = t + c$$

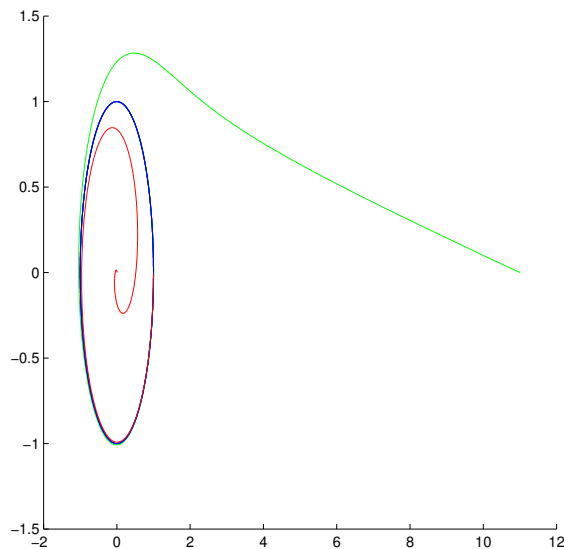
(si ricordi che $r \geq 0$). Dunque, le soluzioni sono

$$\theta(t) = t + h, \quad r(t) = \begin{cases} \frac{ke^t}{1+ke^t} & \text{con } k > 0 \text{ se } 0 \leq r(0) < 1 \\ 1 & \text{se } r(0) = 1 \\ \frac{ke^t}{ke^t - 1} & \text{con } k > 1 \text{ se } r(0) > 1. \end{cases}$$

Le soluzioni descrivono delle spirali che si avvolgono intorno alla circonferenza di raggio 1. Tutte le soluzioni sono limitate ma scegliendo un intorno dell'origine di raggio minore di 1, non si riesce a rimanere in quest'intorno scegliendo di partire "vicini" all'origine. Si veda la figura 10.5. ■

Concludiamo notando che i risultati della tabella 10.1, che si riferisce ai sistemi lineari piani autonomi, possono riformularsi con la terminologia della stabilità. Si ottiene così la tabella 10.2, nella quale $\mathbf{y}_0 = \mathfrak{S}$ si pone ora il problema di sapere quando un punto di equilibrio di un sistema piano è stabile oppure asintoticamente stabile. Questo è generalmente un problema piuttosto difficile. I due test più semplici che possono usarsi sono il Teorema di Lagrange, per

Figura 10.5: Il caso dell'esempio 277: la limitatezza delle soluzioni non implica la stabilità



la stabilità, e il teorema sulla stabilità “in prima approssimazione”, per la stabilità asintotica. Per chiarire il significato del Teorema di Lagrange, conviene introdurre la nozione di integrale primo, che ha un’importanza fondamentale in tutte le applicazioni della matematica.

10.4 Sistemi piani ed integrali primi

Il concetto di integrale primo non è limitato ai sistemi piani, ma è in questo caso particolare che noi lo studieremo. Consideriamo quindi il sistema piano

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (10.18)$$

Si chiama integrale primo una funzione $V(x, y)$ di classe C^1 tale che:

- gli zeri di $\nabla V(x, y)$ sono isolati;
- ogni orbita di (10.18) è contenuta in una curva di livello di $V(x, y)$.

Integrali primi possono non esistere, ma se esistono non sono mai unici: se $V(x, y)$ è un integrale primo, anche $cV(x, y)$ e $V(x, y) + c$ (con c costante) lo

Tabella 10.2: La stabilità dei sistemi lineari piani

Due autovettori linearm. indipendenti	Soluzione nulla stabile se e solo se ambedue gli autovalori hanno parte reale non positiva
Due autovettori linearm. indipendenti	Soluzione nulla asintoticamente stabile se e solo se ambedue gli autovalori hanno parte reale negativa
Autovettori tutti linearmente dipendenti (e quindi un solo autovalore δ)	soluzione nulla asintoticamente stabile se e solo se l'unico autovalore è negativo

sono. E' un fatto che molto spesso quando un integrale primo si può trovare allora questo dà informazioni importanti sul comportamento delle soluzioni dell'equazione differenziale. Per esempio:

- se si riesce a trovare un integrale primo allora le orbite del sistema (10.18) si possono (almeno localmente) calcolare risolvendo l'equazione (non differenziale) $V(x, y) = c$. Grazie al Teorema della funzione implicita, ciò è lecito nell'intorno dei punti nei quali il gradiente di $V(x, y)$ non si annulla.
- Se le curve di livello di un integrale primo sono tutte limitate, allora le soluzioni dell'equazione rimangono limitate al trascorrere del tempo.

Gli integrali primi hanno una relazione importante con le proprietà dei campi vettoriali. Provando il Teorema di Cauchy, abbiamo visto che al sistema (10.18) conviene associare il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}.$$

Associamogli anche il campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x, y) = -g(x, y)\mathbf{i} + f(x, y)\mathbf{j}$$

ortogonale a $\mathbf{F}(x, y)$ in ogni punto. Supponiamo che $\mathbf{G}(x, y)$ ammetta potenziale $V(x, y)$. Allora, lungo le soluzioni di (10.18) si ha:

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = V_x x' + V_y y' = -gf + fg = 0.$$

Ossia, V è un integrale primo di (10.18). Condizione **necessaria** per l'esistenza del potenziale $V(x, y)$ del campo $\mathbf{G}(x, y)$ è che

$$-g_y = f_x$$

Dunque:

Teorema 278 *Supponiamo che il dominio del sistema piano sia una regione di Jordan. Se*

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = 0$$

allora il sistema piano ammette integrali primi.

Ovviamente, esistono sistemi che non ammettono integrali primi. Esistono però anche sistemi che ammettono integrali primi e che non soddisfano alle condizioni del Teorema 278, che dà una condizione **solo sufficiente** per l'esistenza di integrali primi:

Esempio 279 Si consideri il sistema piano

$$t' = 1, \quad x' = x.$$

Chiaramente, la condizione del Teorema 278 non è soddisfatta, ma integrali primi esistono:

$$V(t, x) = xe^{-t}$$

è infatti un integrale primo. ■

Ciò nonostante, il caso descritto nel Teorema 278 è particolarmente importante per le applicazioni. Indicando con $H(x, y)$ un integrale primo, si ha $\nabla H = \begin{bmatrix} -g & f \end{bmatrix}$, ossia

$$f = H_y, \quad g = -H_x$$

e quindi il sistema piano (10.18) si rappresenta come

$$x' = H_y, \quad y' = -H_x.$$

Sistemi di questa forma si chiamano sistemi hamiltoniani e l'integrale primo $H(x, y)$ si chiama l' hamiltoniana del sistema. Un caso molto importante nel quale è facile trovare un integrale primo si ha quando si studia

$$x'' = -\phi(x) \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\phi(x) \end{cases} \quad (10.19)$$

Si noti che ϕ dipende dalla sola posizione x e non dalla velocità y . Assumiamo $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$. In questo caso

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - \phi(x)\mathbf{j}$$

ha divergenza nulla e quindi il sistema è hamiltoniano. Calcolando il potenziale di

$$\mathbf{G}(x, y) = \phi(x)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

si trova l'integrale primo

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \Phi(x), \quad \Phi(x) = \int_0^x \phi(s) ds.$$

Nelle applicazioni fisiche, il sistema si incontra generalmente scritto nella forma

$$mx'' = -\phi(x)$$

ove m è la massa. In tal caso

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - \frac{1}{m}\phi(x)\mathbf{j}, \quad \mathbf{G}(x, y) = \frac{1}{m}\phi(x)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

ed un integrale primo è

$$V(x, y) = \frac{1}{m}\Phi(x) + \frac{1}{2}y^2.$$

Si è detto che i multipli di un integrale primo sono ancora integrali primi. Il particolare multiplo

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \Phi(x)$$

si chiama energia totale del sistema, mentre si chiamano rispettivamente energia cinetica ed energia potenziale le due funzioni $my^2/2$ e $\Phi(x)$. I sistemi della forma (10.19) si dicono conservativi, poiché l'energia totale (che è un integrale primo) rimane costante lungo ogni orbita (in generale ha valore diverso su orbite diverse):

Teorema 280 *L'energia totale "si conserva" (ossia rimane costante) sulle traiettorie di un sistema conservativo.*

Esempio 281 Consideriamo l'equazione

$$mx'' = -\frac{l}{g} \sin x$$

che rappresenta le oscillazioni di un pendolo di lunghezza costante.⁷ La sua energia totale è

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{l}{g} \int_0^x \sin s ds = \frac{1}{2}my^2 - \frac{l}{g} [\cos x - 1].$$

I potenziali sono sempre definiti a meno di una costante additiva, ed usa scegliere come energia totale la funzione

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 - \frac{l}{g} \cos x. \quad \blacksquare$$

⁷si noti che se le oscillazioni sono "piccole" si può approssimare $\sin x \sim x$ ed ottenere l'equazione del moto armonico, $x'' = -\omega^2 x$ con $\omega^2 = l/mg$.

10.4.1 Integrali primi e stabilità

Se si possono studiare le curve di livello di un integrale primo è possibile ottenere informazioni sulla stabilità di un punto di equilibrio. Mostriamo questo su un esempio.

Esempio 282 Si consideri il sistema

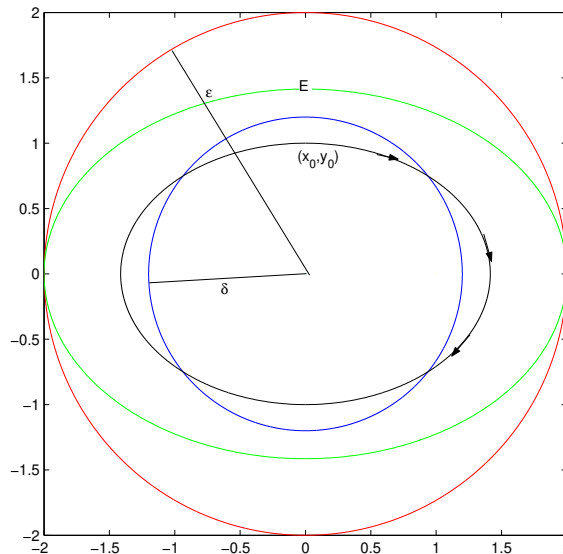
$$x' = 2y, \quad y' = -x.$$

È immediato notare che $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ è un integrale primo di questo sistema. Le curve di livello sono le ellissi

$$x^2 + 2y^2 = c.$$

Usiamo questo per mostrare che l'origine è un punto di equilibrio stabile. Si fissi per questo $\epsilon > 0$ e sia c così piccolo che l'ellisse $x^2 + 2y^2 = c$ sia contenuta nel disco di centro l'origine e raggio ϵ . Indichiamo con E quest'ellisse. Sia $\delta > 0$ così piccolo che la circonferenza di centro l'origine e raggio δ sia contenuta nell'ellisse E , si veda la figura 10.6. Sia (x_0, y_0) un dato iniziale di norma

Figura 10.6: Integrali primi e stabilità



minore di δ . L'orbita che lo contiene è contenuta in un'ellisse che appartiene alla regione interna all'ellisse E e quindi in particolare nell'intorno dell'origine di raggio ϵ . Ciò mostra la stabilità. ■

In generale lo studio geometrico delle curve di livello non è facile. Vogliamo dare un risultato di stabilità che usi l'idea dell'esempio precedente, ma che non richieda la determinazione esplicita delle curve di livello. Questo risultato si applica a sistemi della forma

$$mx' = y, \quad y' = -\phi(x) \quad \text{ossia} \quad mx'' = -\phi(x) \quad \text{con} \quad \phi(0) = 0. \quad (10.20)$$

L'origine, ossia il punto di coordinate $(0, 0)$, è punto d'equilibrio di questo sistema. Si sa che a questo sistema si può associare sia l'energia potenziale

$$\Phi(x), \quad \Phi(x) = - \int_0^x \phi(s) ds$$

sia l'“energia” totale

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \Phi(x).$$

Diciamo che $\Phi(x)$ ha *minimo stretto* in 0 quando

$$\Phi(0) < \Phi(x) \quad \forall x \neq 0.$$

Analoga definizione per l'energia totale $E(x, y)$. Vale:

Teorema 283 (di Lagrange) *Supponiamo che 0 sia uno zero isolato di $\phi(x)$. Se 0 è punto di minimo stretto per $\Phi(x)$ allora il punto d'equilibrio $(0, 0)$ del sistema (10.20) è stabile.*

Dim. Il fatto che $\Phi(x)$ abbia un minimo stretto in zero implica che l'energia totale $E(x, y)$ ha minimo stretto in $(0, 0)$:

$$0 = E(0, 0) < E(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Inoltre, l'energia totale è una funzione continua. Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo il numero

$$E_0 = \min\{E(x, y), \quad \|(x, y)\| = \epsilon\}.$$

Essendo $(0, 0)$ un minimo stretto, segue che $E_0 > 0$. Scegliamo ora $\sigma > 0$ tale che se $\|(x, y)\| < \sigma$ allora si abbia

$$E(x, y) < E_0/2.$$

Sia (x_0, y_0) un dato iniziale con $\|(x_0, y_0)\| < \sigma$. Sia $(x(t), y(t))$ la soluzione corrispondente a tale dato iniziale. Lungo questa soluzione l'energia si conserva e quindi

$$E(x(t), y(t)) = E(x_0, y_0) < E_0/2.$$

Dunque, $\|(x(t), y(t))\|$ non può mai prendere il valore ϵ : se ciò avvenisse per un valore \bar{t} di t avremmo infatti $E(x(\bar{t}), y(\bar{t})) > E_0/2$. Quindi, essendo $t \rightarrow \|(x(t), y(t))\|$ una funzione continua, si ha sempre

$$\|(x(t), y(t))\| < \epsilon.$$

Ossia, se il dato iniziale ha norma minore di σ , in ogni istante successivo la soluzione ha norma minore di ϵ . L'arbitrarietà di ϵ prova che il punto di equilibrio $(0, 0)$ è stabile. ■
Dalla definizione di $\Phi(x)$ si vede immediatamente:

Corollario 284 *Le condizioni del Teorema 283 sono soddisfatte se la funzione $\phi(x)$ verifica*

$$x\phi(x) > 0.$$

Esempio 285 Consideriamo l'equazione

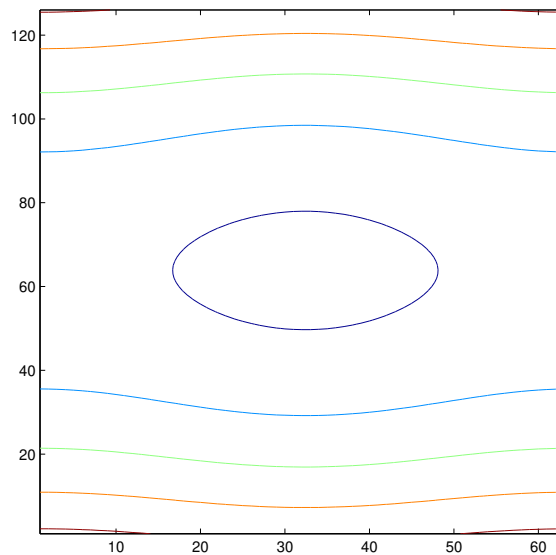
$$x'' = -\sin x$$

che descrive il moto di un pendolo. Le condizioni del Corollario 284 sono soddisfatte e quindi il punto di equilibrio $(0, 0)$ è stabile. L'energia totale è

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \cos x.$$

Alcune delle sue curve di livello intorno al punto d'equilibrio $(0, 0)$ sono riportate nella figura 10.7. Dato che l'energia si conserva, una soluzione che ha dato iniziale all'interno della curva di livello chiusa non esce dalla regione delimitata da questa curva, in accordo con l'asserto del Teorema di Lagrange. Se però il dato iniziale è "lontano" da $(0, 0)$ allora la traiettoria del sistema ad esso corrispondente si allontana dal punto di equilibrio. ■

Figura 10.7: Il caso considerato nell'esempio 285



10.4.2 Stabilità asintotica e perturbazioni

È importante osservare che il teorema di Lagrange dipende da una proprietà di minimo che **non** si conserva sotto l'azione di piccole perturbazioni. E in effetti piccole perturbazioni possono distruggere la proprietà di stabilità, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 286 Consideriamo il sistema scalare

$$x' = \epsilon x.$$

Se $\epsilon = 0$ allora il punto d'equilibrio 0 è stabile, mentre è instabile per ogni $\epsilon > 0$. Questo esempio non verifica le ipotesi del teorema di Lagrange. Per trovare invece un esempio che verifica le ipotesi del teorema di Lagrange, consideriamo

$$x'' = \epsilon x' - x.$$

Se $\epsilon = 0$ questa è l'equazione del moto armonico e verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange. Dunque, $(0, 0)$ è punto d'equilibrio stabile come d'altra parte si verifica anche direttamente notando che la matrice corrispondente ha i due autovalori $\pm i$, distinti e puramente immaginari. Il punto d'equilibrio $(0, 0)$ diviene instabile per ogni $\epsilon > 0$. ■

Esempio 287 Consideriamo ora il sistema

$$x' = -y - x^5, \quad y' = x - y^3.$$

Questo sistema non ammette integrali primi. Però, se $(x(t), y(t))$ è una soluzione,

$$\frac{d}{dt} \left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\|^2 = -2x^6(t) - 2y^4(t) < 0.$$

Ciò mostra che la norma decresce e che quindi il punto di equilibrio $(0, 0)$ è stabile. Si può provare che è addirittura **asintoticamente stabile**. Però, la “piccola” perturbazione che consiste nel trascurare i termini x^5 ed y^3 , che è una perturbazione infinitesima di ordine superiore al primo (rispetto ad (x, y)), ne distrugge la stabilità asintotica. ■

Invece, la stabilità asintotica **dei sistemi lineari** si conserva sotto l'azione di “piccole” perturbazioni. Questa è una proprietà importantissima per le applicazioni, ed anche molto comoda in pratica perché dà un test facile da usare. Enunciamo il risultato senza provarlo:

Teorema 288 *Sia*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (10.21)$$

e supponiamo che $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Supponiamo inoltre:

- la matrice A abbia tutti gli autovalori con parte reale negativa, cosicché il punto di equilibrio $\mathbf{0}$ di

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

è asintoticamente stabile;

- Valga

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}.$$

Sotto queste condizioni il punto d'equilibrio $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile per il sistema (10.21).

Il teorema precedente può anche essere precisato: si può provare che se la matrice A ha un autovalore con parte reale **positiva** allora l'origine **non** è stabile per il sistema (10.21). Questo teorema in pratica si usa come segue: si ha un sistema della forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (10.22)$$

Dato che $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, lo sviluppo di McLaurin di \mathbf{g} arrestato al primo ordine dà

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad A = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{0})$$

e si sa che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è infinitesimo di ordine maggiore di 1 rispetto a $\|\mathbf{x}\|$, ossia

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}.$$

Se gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa, allora il punto d'equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema (10.22) è asintoticamente stabile.

Si usa dire che il sistema lineare

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

si ottiene linearizzando in $\mathbf{0}$ il sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Quando si usa questo teorema per studiare la stabilità asintotica di un punto di equilibrio, si dice che si studia la *stabilità in prima approssimazione*.

Indice analitico

- 1-forma differenziale, 265
- 3-forma differenziale, 290

- 2-forma differenziale, 285
- condizione di Cauchy, 317
- Fresnel, 245
- hamiltoniana, 341
- infinitesimo, 120

- accumulazione, 96
- affine, 86
- ampiezza, 160
- anomalia, 108
- arco, 199, 204
- arco chiuso, 201
- area di un dominio di integrazione, 231
- area di una superficie, 279
- argomento, 108, 110
- ascissa, 106
- ascisse, 92
- asintoticamente stabile, 337
- asse x , 92, 93
- asse y , 92, 93
- asse z , 93
- asse polare, 109
- assi cartesiani obliqui, 106
- assi coordinati, 92
- attrattivo, 337
- autonomo, 322
- autovalore, 327
- autovettori, 327

- bacino d'attrazione, 337

- base, 86
- base canonica, 86
- base ordinata, 91
- binormale, 222
- Bolzano-Weierstrass, 99
- bordo, 217, 297
- bordo di una calotta, 294

- calotta, 216
- calotta chiusa, 216
- calotta composta, 297
- cambiamenti di variabile, 178
- campi solenoidali, 290
- campi vettoriali, 144
- campo conservativo, 303
- carattere della serie, 3
- chiusa, 89, 312, 314
- cilindriche ellittiche, 110
- cilindro, 150
- circuito, 257
- coefficienti di Fourier, 70
- coefficienti di una forma differenziale, 266
- colatitudine, 112
- colineari, 87
- combinazione lineare, 85
- completo, 99
- componenti, 84
- comportamento della serie, 3
- condizione iniziale, 317
- connesso, 89
- cono, 152
- conservativo, 342

- continua, 113
- continuità, 113, 118
- converge normalmente, 44
- converge puntualmente, 33
- convergenza assoluta, 9, 17, 57
- convergenza in media, 37
- convergenza incondizionata, 21
- convergenza uniforme, 36
- convesso, 89
- convoluzione, 27
- coordinate cilindriche, 106, 110
- coordinate curvilinee, 106
- coordinate ellittiche, 106
- coordinate polari, 106, 108
- coordinate polari ellittiche, 109
- coordinate sferiche, 110
- costante d'Eulero, 30
- Criterio di Leibniz, 17
- criterio di Leibniz, 32
- critici, 125
- curva, 185, 202
- curva cartesiana, 169, 200
- curva definita implicitamente, 180
- curva di livello, 149, 180
- curva parametrica, 199
- curva piana, 199
- curva regolare, 200
- curva semplice, 201
- curvatura, 209, 211
- curve coordinate, 110

- d'Ampère, 93
- definita parametricamente, 169
- dei valori intermedi, 247
- delle ascisse, 93
- densità, 253, 282
- derivata, 114
- derivata n -ma, 133
- derivata di un campo vettoriale secondo un vettore, 145
- derivata direzionale, 129
- derivata direzionale di un campo vettoriale, 146
- derivata secondo un vettore, 129
- derivata termine a termine, 50
- derivate miste, 133
- derivate parziali, 123
- di Brower, 249
- di superficie, 284
- differenziale, 125, 140, 266
- differenziale esterno, 274
- distanza, 96
- distanza (tra funzioni), 35
- divergenza, 147
- dominio, 89, 317
- dominio di integrazione, 235

- energia cinetica, 342
- energia potenziale, 303, 342
- energia totale, 342
- equazione lineare omogenea associata, 327
- Equazioni di Frenet, 224
- equazioni di Frenet, 211
- equilibrio, 322
- esatta, 314
- esponenziale di matrici, 60
- estremali, 125
- estremi, 88
- estremi (di una curva), 263
- estremi assoluti, 137
- estremi globali, 137

- fase, 158, 160
- flusso, 267
- flusso attraverso \mathcal{D} , 266
- flusso attraverso un dominio di integrazione, 267
- flusso attraverso una superficie, 283
- flusso di un campo vettoriale attraverso una curva, 268

- forma differenziale esatta, 313
 formula degli incrementi finiti, 141
 formula della derivazione a catena, 128
 formula di Gauss, 290
 formula di Green, 272
 Formula di Guldino, 243
 formula di Guldino, 280
 formula di Riemann, 301
 formula di Stirling, 12
 formula di Taylor, 116
 formula do Ostrogradski, 301
 formule d'Eulero, 65
 frequenza, 159
 frequenza angolare, 161
 frontiera, 96
 funzione definita implicitamente, 175
 funzione di Dirichlet,, 40
 funzione differenziabile, 125
 funzione implicita, 176, 177
 funzione omogenea, 163
 funzioni di classe $C^1(\Omega)$, 125
 funzioni omogenee, 151

 Identità di Parseval, 70
 incidenti, 87
 incrementi finiti, 116
 infinitesimo, 114, 118
 insieme connesso, 89
 insieme di livello, 149, 170
 insieme stellato, 89
 integrale di 1-forma differenziale, 265
 integrale di curva di prima specie, 255
 integrale di curva di seconda specie,
 257
 integrale di flusso, 301
 integrale di linea, 301
 integrale di superficie di prima specie,
 282
 integrale di superficie di seconda specie,
 283

 integrale doppio, 230, 231
 integrale generale, 326
 integrale improprio, 246
 integrale improprio su \mathbb{R}^2 , 246
 integrale iterato, 132
 integrale primo, 339
 integrale semplice, 231
 integrale superficiale, 301
 integrale triplo, 235
 integrali curvilineo, 301
 integrazione termine a termine, 50
 interferenza, 163
 interno, 96
 intervallo di convergenza (di una serie
 di potenze), 47
 intorno, 96
 irrotazionale, 307
 istante iniziale, 317

 jacobiano, 141

 l'identità di Parseval, 72
 lagrangiana, 196
 laplaciano, 147
 legge del moto, 201
 legge oraria, 208
 limitata, 97, 99
 limitate in futuro, 336
 limitatezza in passato., 336
 limitato, 96
 limite, 118
 limiti, 113
 linearità, 115
 linearità della derivata, 115
 linearmente indipendenti, 85
 longitudine, 112
 lunghezza d'onda, 160
 lunghezza del multiindice, 134
 lunghezza di un arco, 206
 matrice Hessiana, 139

- matrice jacobiana, 141
media quadratica, 37
modulo, 112
moltiplicatore di Lagrange, 187, 195
moltiplicatori di Lagrange, 187, 195
moto armonico, 159
multiindice, 134
- nastro di Möbius, 298
norma, 94
norma euclidea, 96
normale esterna, 214
numero d'onde, 160
numero d'onde angolare, 160
- oblique, 106
onda, 156
onda piana, 159
onda progressiva, 157
onda regressiva, 157
onda sferica, 159
onda stazionaria, 162
onde armoniche, 157, 159
orbita, 322
ordinata, 106
ordinate, 92, 93
ordine, 201
orientazione, 91, 92, 222, 294
orientazione di una superficie, 294
orientazione di una curva semplice chiusa, 213
orientazione positiva, 213
origine, 84, 92
ortogonali, 100, 102
ortogonalità ad una curva, 181
- palla, 96
parallele, 87
parallelogramma, 101
parametrizzazione canonica, 208
parametro d'arco, 207
- parametro di una superficie, 215
periodo, 63, 159
piani coordinati, 93
piano delle fasi, 332
piano osculatore, 222
piano per l'origine, 87
piano tangente, 220
polinomio caratteristico, 327
polinomio trigonometrico, 66
polo, 109
potenziale, 303
prima formula degli incrementi finiti, 116
primitiva, 313, 314
prodotto alla Cauchy, 27
prodotto alla Cauchy (di serie di potenze), 55
prodotto interno, 100
prodotto scalare, 100
progressione geometrica, 5
proiezione ortogonale, 72, 110
punti critici, 180
punti stazionari, 125
punto critico isolato, 322
punto di massimo, 122, 137
punto di minimo, 122, 137
punto di sella, 138
- quote, 93
- raggio di convergenza, 47
ragione, 5
regione di Jordan, 213
regione esterna ad una curva, 212
regione interna ad una curva, 212
regola d'Ampère, 213, 294
regola di Ampère, 213
resto della formula di Taylor, 135
retta per \mathbf{x}_0 , 86
rette coordinate, 92, 94

- rette per l'origine, 86
- riferimento mobile, 211, 222, 224
- rotore, 147

- s.spazi affini, 86
- s.spazio lineare, 85
- scalari, 85
- scambio di ordine di integrazione, 235
- segmento, 88
- semplicemente connessa, 308
- serie, 3
- serie a segni alterni, 17
- serie armonica, 11
- serie convergenti, 3
- serie di funzioni, 21
- serie di Fourier, 62, 70
- serie di funzioni, 44
- serie di Mengoli, 18
- serie divergenti, 3
- serie geometrica, 5
- serie indeterminata, 3
- serie oscillanti, 3
- serie regolare, 3
- serie telescopica, 5
- sfasamento, 160
- sfasate, 160
- sferiche, 106
- sghembe, 87
- sistema di equazioni differenziali lineari, 60
- sistema fondamentale, 329
- sistema hamiltoniano, 341
- sistemi ortonormali, 68
- sistemi piani, 332
- soluzione generale, 326
- soluzione stazionaria, 322
- somma di una serie, 4
- sommazione per parti, 30
- somme parziali, 3
- sostegno, 203, 216
- sostegno di una superficie, 215
- sottospazio, 85
- spazio lineare, 85
- spazio vettoriale, 85
- spettro, 73
- spezzata, 88
- spezzata di Eulero, 324
- stabile, 336
- stazionario, 322
- stellato, 89
- successione, 97
- successione crescente, 2
- successione decrescente, 2
- successione di Cauchy, 99
- successione di funzioni, 33
- successione fondamentale, 1, 99
- successione numerica, 1
- successioni divergenti, 98
- suono di Tartini, 162
- superfici cartesiane, 169
- superfici coordinate, 110
- superficie, 150
- superficie cartesiana, 216
- superficie chiusa, 215, 293
- superficie definita implicitamente, 185
- superficie definita parametricamente, 215
- superficie regolare, 215
- superficie semplice, 215
- tangente ad una curva, 208, 211
- tangente alla curva, 181
- Taylor, 116
- tempo invariante, 322
- teorema della derivazione a catena, 144
- Teorema della divergenza, 289
- Teorema della divergenza nel piano, 273
- Teorema della funzione implicita, 173, 174, 176

INDICE ANALITICO

Teorema della funzione inversa, 179
teorema della funzione inversa, 178
teorema della media, 232
Teorema di Jordan, 212
Teorema di Abel, 32, 46, 48, 56
Teorema di Cauchy (per le serie), 8
Teorema di Dirichlet, 21, 32
Teorema di Gauss, 301
Teorema di Jordan, 212
Teorema di Pitagora, 100
Teorema di Schwarz, 133
teorema di Stokes, 295
termine generale (di una serie), 3
terzo suono, 162
Test di MacLaurin, 14
test di Weierstrass, 45
torsione, 223

uniforme continuità, 122

varietà, 300
varietà orientabile, 300
velocità, 114, 201
velocità angolare, 159
velocità di fase, 158
velocità di propagazione, 157
versore, 100
versore normale, 209, 211
vettore applicato, 90
vettore normale, 125, 220
vettore nullo, 84
vettori liberi, 90
vincolato, 185