L. Pandolfi

Lezioni di Analisi Matematica 2

Il testo presenta tre blocchi principali di argomenti:

A Successioni e serie numeriche e di funzioni: Cap. 1, e 2.

B Questa parte consta di due, da studiarsi in sequenza. **B1** Funzioni di più variabili e integrazione (multipla, di curva e di superficie): Cap. 3–8. **B2** Campi conservativi,Cap. 9.

C Sistemi di equazioni differenziali: Cap. 10.

Lo studio dei blocchi **A** e **B** può scambiarsi di ordine senza problemi. Invece, è consigliabile studiare **C** per ultimo. Infatti, lo studio del Cap. 10 richiede il concetto di continuità e differenziabilità di funzioni di più variabili, studiato ai paragrafi 4.1–4.2. Ovunque nello studio del Cap. 10 è necessario conoscere il concetto di curva (ma non le proprietà differenziali delle curve, né gli integrali di curva). L'esponenziale di matrici richiede la definizione di serie, Cap. 1, e 2 e il paragrafo 10.4 richiede il Cap. 9.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Serie numeriche

Le serie numeriche vogliono generalizzare la somma di un numero finito di termini al caso in cui si sommano infiniti termini. Per questo si introduce il limite di una opportuna successione di “somme parziali”. Prima di tutto quindi ricapitoleremo i concetti fondamentali relativi alle successioni numeriche.

1.1 Successioni numeriche: ricapitolazione

Una $\boxed{\textit{successione numerica}}$ è una funzione definita su $\mathbb{N}$ ed a valori in $\mathbb{R}$ (oppure in $\mathbb{C}$. Noi qui ci limitiamo a considerare successioni a valori reali). Una successione si indica col simbolo (x_n) e si sottintende che $n \in \mathbb{N}$. Talvolta, n è un qualsiasi numero intero maggiore od uguale ad un certo n_0 che può anche essere negativo. Se è necessario specificare il primo dei valori dell'indice n scriveremo $(x_n)_{n \geq n_0}$. La successione si chiama:

- “limitata” quando esiste M tale che $|x_n| < M$ per ogni n;
- “convergente”, quando esiste finito il limite $\lim_{n\to+\infty} x_n$, che spesso si indica semplicemente come $\lim x_n$;
- “divergente” quando $\lim x_n = +\infty$ oppure quando $\lim x_n = -\infty$;
- “regolare” quando è convergente oppure divergente;
- “oscillante” quando non è regolare; ossia quando $\lim x_n$ non esiste, né finito né $+\infty$ né $-\infty$.

Ricordiamo che una successione si dice $\boxed{\textit{fondamentale}}$ o $\boxed{\textit{di Cauchy}}$ quando per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ e per ogni $m > 0$ si ha:

$$|x_n - x_{n+m}| < \epsilon\,.$$

In simboli:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \ \ | \ \forall n > N_\epsilon\,, \forall m > 0 \implies |x_n - x_{n+m}| < \epsilon\,.$$

Vale:

Teorema 1 *Ogni successione convergente è fondamentale; ogni successione fondamentale è limitata e quindi ogni successione convergente è limitata.*

Naturalmente, esistono successioni limitate e non convergenti. Per esempio la successione di termine generale $x_n = (-1)^n$. Invece:

Teorema 2 *Ogni successione fondamentale è convergente.*

Dim. Accenniamo ai passi cruciali della dimostrazione, che si trova nei testi di Analisi Matematica 1. Sia (x_n) la successione. Prima di tutto si prova che la successione (x_n) ammette s.successioni convergenti. Questo si vede così: dato che una successione fondamentale è limitata, l'immagine di (x_n), ossia l'insieme $\{x_n\}$ è limitato. Se è finito, almeno uno dei suoi elementi è immagine di infiniti n e quindi la successione (x_n) ha una s.successione (x_{n_k}) costante e quindi convergente, di ciamo ad x_0. Se l'insieme $\{x_n\}$ è infinito, esso ammette almeno un punto di accumulazione x_0, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Si costruisce quindi una s.successione (x_{n_k}) convergente ad x_0. L'ultimo passo della dimostrazione consiste nel mostrare che è la successione (x_n) stessa che converge ad x_0, usando la definizione di successione fondamentale. ∎ Una successione (x_n) è $\boxed{\textit{crescente}}$ quando $n > m$ implica $x_n \geq x_m$; $\boxed{\textit{decrescente}}$ quando $n > m$ implica $x_n \leq x_m$. Un altro risultato importante da ricordare è il teorema delle funzioni monotone, la cui formulazione particolarizzata al caso delle successioni è la seguente:

Teorema 3 *Sia* (x_n) *una succesione monotona. Esiste* $\lim x_n$; *ossia,* ogni successione monotona è regolare.

Infine, ricordiamo che se una successione (x_n) è regolare, anche la successione che si ottiene da essa trascurandone un numero finito di termini, ossia $(x_n)_{n>m}$ è regolare, ed ha il medesimo limite[1].

[1]in realtà vale di più: ogni sottosuccessione (x_{n_k}) ha il medesimo limite della (x_n).

1.2 Le serie numeriche

Sia (x_n) una successione di numeri. Per fissare le idee sia $n \geq 1$, ma in modo analogo si può trattare il caso in cui il primo indice sia per esempio 0 o comunque sia diverso da 1. Si chiama $\boxed{\textit{serie}}$ dei numeri x_n una nuova successione (s_n) costruita come segue:

$$s_1 = x_1\,, \qquad s_2 = x_1 + x_2\,, \qquad s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n\,, \tag{1.1}$$

ossia, detto in modo più conciso:

$$s_1 = x_1\,, \qquad s_k = s_{k-1} + x_k\,.$$

I numeri s_n si chiamano le $\boxed{\textit{somme parziali}}$ della serie[2]. La nuova successione (s_n) si indica anche col simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{o, più semplicemente,} \qquad \sum x_n\,.$$

I numeri x_n si chiamano i *termini* della serie e si dice che x_n è il $\textit{termine}$ $\boxed{\textit{generale}}$ della serie. Nella definizione precedente niente si richiede al comportamento della successione (x_n) o della successione (s_n). Se però la successione (s_n) converge allora si dice che *la serie* $\boxed{\textit{converge}}$; se la successione (s_n) diverge (a $+\infty$ oppure a $-\infty$) allora si dice che *la serie* $\boxed{\textit{diverge}}$ (rispettivamente a $+\infty$ oppure a $-\infty$). Se la successione (s_n) è priva di limite, si dice che la serie è $\boxed{\textit{oscillante}}$ o $\boxed{\textit{indeterminata}}$. Una serie si dice $\boxed{\textit{regolare}}$ quando converge oppure diverge. Il $\boxed{\textit{carattere della serie}}$ o $\boxed{\textit{comportamento della serie}}$ è la proprietà di essere convergente, divergente o oscilante. Ricapitolando, se la successione (s_n) converge ad l oppure diverge, dovremmo indicare questo col simbolo

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n = \alpha\,,$$

[2] La successione $\{s_n\}$ delle somme parziali si costruisce dalla (1.1), conoscendo la successione $\{x_n\}$. E' importante notare che, viceversa, nota la successione $\{s_n\}$, si può ricostruire la successione $\{x_n\}$. Infatti è

$$x_1 = s_1\,,\ \text{e, per } k > 1,\ x_k = s_k - s_{k-1}\,. \quad \blacksquare$$

α rispettivamente uguale a l oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Più brevemente si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \alpha \qquad \text{o anche} \quad \sum x_n = \alpha\,.$$

Si dice brevemente che α è la $\boxed{\textit{somma}}$ della serie. Ovviamente, scambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie, non si cambia nè il comportamento della serie nè la sua somma, nel caso che la serie sia convergente (diremo più avanti cosa accade scambiando tra loro infiniti termini della serie). E' anche vero che, sopprimento o aggiungendo un numero finito di termini, oppure cambiando il valore di un numero finito di termini, la serie rimane convergente, divergente o oscillante; ossia:

Teorema 4 *Il carattere di una serie non muta alterandone un numero finito di termini.*

Va detto esplicitamente che se la serie è convergente, la somma della serie cambia alterandone un numero finito di termini. Se invece è divergente, la sua somma non cambia.

Inoltre:

Teorema 5 *Se* $\sum x_n$ *converge allora* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Dim. Si indichi con $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. L'ipotesi è che la successione (s_k) converge e quindi anche la successione s_{k-1} converge, ed al medesimo limite. Dunque,

$$0 = \lim_{k\to+\infty} s_k - \lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = \lim_{k\to+\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to+\infty} x_k\,. \quad \blacksquare$$

Di conseguenza:

Esempio 6 La serie di "termine generale" $(-1)^n n$, ossia la serie

$$\sum (-1)^n n$$

non converge. ∎

Invece:

Esempio 7 La successione

$$(q^n)_{n\geq 0}$$

(con $q \in \mathbb{R}$ fissato) si chiama $\boxed{\textit{progressione geometrica}}$ (di $\boxed{\textit{ragione}}$ q). La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

si chiama $\boxed{\textit{serie geometrica}}$. E' noto che, se $q \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

e quindi

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} 1/(1-q) & \text{se} \quad |q|<1 \\ +\infty & \text{se} \quad q \geq 1 \\ \text{oscillante} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che la serie geometrica per definizione inizia con l'indice $n = 0$. Se per qualche ragione si deve iniziare con un primo indice diverso, di ciò va tenuto conto nel calcolo della somma. Per esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2-1 = 1\,. \quad \blacksquare$$

1.2.1 Serie telescopiche

Sia $(b_k)_{k\geq 0}$ una successione e sia

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

(ovviamente definita per $n \geq 1$). Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,. \tag{1.2}$$

Una serie ottenuta con questo procedimento si chiama $\boxed{\textit{serie telescopica}}$. E' facile calcolare le somme parziali di una serie telescopica:

$$s_1 = a_1 = b_1 - b_0\,, \quad s_2 = a_1 + a_2 = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) = b_2 - b_0$$

e, in generale,

$$s_k = b_k - b_0\,.$$

Dunque:

Teorema 8 *La serie telescopica costruita sopra converge se e solo se*

$$\lim b_k = l \in \mathbb{R}$$

e in tal caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = l - b_0\,;$$

diverge se $\lim b_k = +\infty$ *oppure se* $\lim b_k = -\infty$*. La serie è oscillante se e solo se la successione* (b_k) *è priva di limite.*

Esempi

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 9 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\,.$$

Questa serie **diverge.** Infatti,

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n\,.$$

Sia ha quindi una serie telescopica e

$$\sum_{n=1}^{k} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(k+1) \qquad \text{da cui} \quad \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

Esempio 10 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}\,.$$

Si vede che questa è una serie telescopica notando che

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right]$$

e inoltre $b_n = 1/n \to 0$. Dunque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1\,.$$

Se per qualche ragione si devono sommare i termini con $n \geq n_0$, allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n_0}\,.$$

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}\,.$$

Decomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{-1}{4}\left[\frac{1}{n+3/2} - \frac{1}{n+1/2}\right] = \frac{1}{4}[b_{n+1} - b_n]\,, \qquad b_n = \frac{-1}{n+1/2}\,.$$

Si tratta quindi di una serie telescopica, la cui somma è 1/6. ∎

Infine:

Esempio 11 Anche la serie seguente è una serie telescopica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left[\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/(n-1)}}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)}\right]\,.$$

Infatti,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/(n-1)}}} = \frac{(n+1)^{1/n}}{n^{1/(n-1)}}$$

e quindi la serie è uguale a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}\log(n+1) - \frac{1}{n-1}\log n\right] = \sum_{n=2}^{+\infty}[b_{n+1} - b_n]\,, \qquad b_n = \frac{1}{n}\log(n+1)\,.$$

Dunque, la serie converge e la sua somma è $-(1/2)\log 3$. ∎

Nonostante gli esempi importanti della serie geometrica e delle serie telescopiche, calcolare esplicitamente le somme parziali di una serie è pressoché impossibile. L'unica cosa che si può fare è dare condizioni per la convergenza o divergenza di serie, e quindi, se già si sa che la serie converge, approssimarne numericamente la somma.

1.3 Criteri di convergenza

Come si è detto, è ben difficile calcolare esplicitamente le somme parziali di una serie. Per questo è necessario conoscere dei criteri che assicurino la convergenza o meno di una serie, senza calcolarne le somme parziali. Dato che la somma di una serie è il limite della successione delle somme parziali, dovremo basarci su criteri per l'esistenza del limite, che non facciano intervenire la preliminare conoscenza del limite stesso. Essenzialmente, questi criteri si riducono a due soli: il teorema di Cauchy per le successioni e il teorema delle funzioni monotone. Esaminiamone le conseguenze per il caso delle serie.

1.3.1 Il teorema di Cauchy per le serie

Vediamo come si trascrive il Teorema di Cauchy nel caso in cui (s_n) è la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_k x_k \,. \tag{1.3}$$

Sia, per fissare le idee, $m > n$. Allora,

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| .$$

Possiamo quindi enunciare il *Teorema di* $\boxed{\textit{Cauchy}}$ come segue:

Teorema 12 *La serie (1.3) converge se e solo se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* N_ϵ *tale che per ogni coppia di indici* n, m *con*

$$m > n > N_\epsilon$$

vale

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \epsilon \,.$$

D'altra parte, notiamo che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|$$

e quindi:

Corollario 13 *Se la serie*

$$\sum_k |x_k|$$

converge, anche la serie

$$\sum_k x_k$$

converge.

Dim. Infatti, se $\sum_k |x_k|$ converge, per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per $m > n > N_\epsilon$ si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \epsilon\,.$$

E quindi anche la serie $\sum_k x_k$ converge, grazie al Teorema 12. ∎ Più avanti vedremo una diversa dimostrazione di questo corollario. Si dice che la serie $\sum_k x_k$ *converge* $\boxed{\textit{assolutamente}}$ quando è convergente la serie $\sum_k |x_k|$. Il corollario precedente quindi può enunciarsi in questo modo:

Teorema 14 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Questo risultato è molto importante perché la serie $\sum_k |x_k|$ è una serie a termini positivi. Criteri di convergenza facilmente usabili esistono appunto per il caso delle serie a termini positivi, come ora andiamo a vedere.

1.3.2 Monotonia e serie a termini di segno costante

Usando il teorema delle funzioni monotone, è facile vedere che

Teorema 15 *Sia (x_n) una successione a termini positivi. La serie degli x_n converge se e solo se esiste M tale che $s_n < M$ per ogni n.*

Dim. Ricordiamo il significato di $\sum_n x_n$: prima si costruisce la successione

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$$

e poi si studia il limite $\lim_{k\to+\infty} s_k$. La successione (s_k) è crescente perché, essendo $x_k \geq 0$ per ogni k,

$$s_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} x_n = \left[\sum_{n=1}^{k} x_n\right] + x_{k+1} \geq \sum_{n=1}^{k} x_n = s_k\,.$$

Dunque la successione (s_k) ammette limite, finito o meno, per il *teorema delle funzioni monotone.* Il limite è finito se e solo se la successione (s_k) è superiormente limitata, ossia se e solo se esiste M tale che $s_k < M$ per ogni k. ∎ Il teorema facilmente si estende al caso di successioni a termini negativi oppure definitivamente positive o negative. Inoltre:

Teorema 16 (Teorema del confronto) *siano* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *due serie a termini positivi, con* $x_n \leq y_n$ *per ogni* n. *Allora, se* $\sum y_n$ *converge, anche* $\sum x_n$ *converge; se* $\sum x_n$ *diverge lo stesso fa* $\sum y_n$.

Questo semplice risultato ha come conseguenza due importanti criteri di convergenza per le serie a termini positivi:

Teorema 17 (Criterio della radice) *Sia* $x_n \geq 0$ *per ogni* n*:*

- *Se esiste* $q \in [0, 1)$ *ed esiste* N *tale che*

$$\sqrt[n]{x_n} < q \qquad \forall n > N\,,$$

  allora la serie converge.

- *Se esiste* $q > 1$ *e se esiste una s.successione* (x_{n_k}) *tale che*

$$\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > q$$

  allora la serie diverge.

<u>Dim</u>. Da $\sqrt[n]{x}_n < q < 1$ segue infatti $x_n < q^n$ e, se $0 \leq q < 1$, la convergenza della serie $\sum x_n$ segue dall'esempio 7 e dal Teorema del confronto. Se per un $q > 1$ vale

$$\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > q \qquad \text{ossia} \qquad x_{n_k} > q^{n_k}$$

allora[3]

$$\lim x_{n_k} = +\infty\,.$$

Di conseguenza il termine generale della serie non tende a zero, e quindi la serie non converge. ∎ Si ha inoltre:

Teorema 18 (Criterio del rapporto) *Se vale definitivamente*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q < 1 \tag{1.4}$$

allora $\sum x_n$ converge; *se* $\frac{x_{n+1}}{x_n} > q > 1$ *allora* $\sum x_n$ diverge.

[3]per provarlo si usi il teorema di confronto per i limiti.

Dim. Proviamo l'asserto nel caso in cui la (1.4) valga per ogni n. Se $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q < 1$ allora $x_2 < qx_1$, $x_3 < qx_2 < q^2 x_1$ e, in generale, $x_n < q^{n-1}x_1$. Si sa che se $0 \le q < 1$ allora $\sum x_1 q^n = x_1 \sum q^n$ converge, si veda l'esempio 7. L'asserto segue quindi dal Teorema del confronto. In modo analogo si vede il secondo asserto. ∎ Ricordando i teoremi sui limiti, si può enunciare il corollario seguente:

Corollario 19 *Sia $\sum x_n$ una serie a termini positivi. Vale:*

- *se $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q < 1$ allora la serie converge;*
- *se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = q < 1$ allora la serie converge;*
- *se $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q > 1$ allora la serie diverge;*
- *se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = q > 1$ allora la serie diverge.*

Concludiamo con un esempio:

Esempio 20 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,. \tag{1.5}$$

Mostriamo che questa serie è divergente. Si noti che per ogni $x \ge -1$ vale

$$x \ge \log(1+x)\,.$$

Infatti, la funzione $\log(1+x)$ è concava e quindi ha grafico che sta sotto a ciascuna delle sue tangenti; e $y = x$ è la tangente nell'origine. In particolare vale

$$\frac{1}{n} \ge \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Abbiamo visto che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

diverge, si veda l'esempio 9. Dunque, per confronto, anche la serie (1.5) diverge[4]. ∎ La serie (1.5) si chiama *serie* $\boxed{\textit{armonica}}$. Si osservi che il carattere della serie armonica non può determinarsi usando il criterio del rapporto oppure quello della radice. Infatti, nel caso della serie armonica,

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1\,, \qquad \lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

[4] L'esempio 24 presenta una diversa dimostrazione di questo fatto.

All'esempio 24 vedremo una serie di termine generale x_n che è convergente e tale che anche per essa vale

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1\,, \qquad \lim \sqrt[n]{x_n} = 1\,.$$

Combinando questi due esempi si ha:

$$\boxed{\text{niente può dedursi dai criteri della radice e del rapporto, se il numero } q \text{ che compare in tali criteri è uguale ad 1.}}$$

Le serie a termini positivi hanno una notevole proprietà, che non è condivisa dalle generiche serie a termini di segno variabile: se si altera l'ordine di infiniti termini di una serie si trova una nuova serie, che generalmente ha un comportamento diverso da quello della serie di partenza. Invece:

Teorema 21 *Due serie a termini positivi, con gli stessi elementi in ordine diverso, hanno la medesima somma.*

La formula di Stirling

Per ragioni che vedremo, molto spesso il termine generale di una serie contiene dei fattoriali. I fattoriali hanno un "buon comportameno" rispetto al rapporto, nel senso che permettono facilmente di fare semplificazioni. Invece, il criterio della radice sembra difficile da usare in presenza dei fattoriali. In realtà non è così grazie alla $\boxed{\textit{formula di Stirling}}$

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad \text{ossia} \qquad \lim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1\,. \tag{1.6}$$

La dimostrazione si trova nei testi di Analisi Matematica 1.

1.3.3 Il test di MacLaurin

Consideriamo le somme parziali di una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

Esse sono

$$\begin{aligned} s_1 = a_1 &= a_1\cdot 1\\ s_2 = a_1 + a_2 &= a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1\\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 &= a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 1\\ \vdots \end{aligned}$$

Queste espressioni si possono interpretare come somma di aree di rettangoli interpretando 1 come misura della base ed a_n come misura dell'altezza.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \int_1^k a(x)\,\mathrm{d}x$$

ove $a(x)$ è la funzione costante a tratti

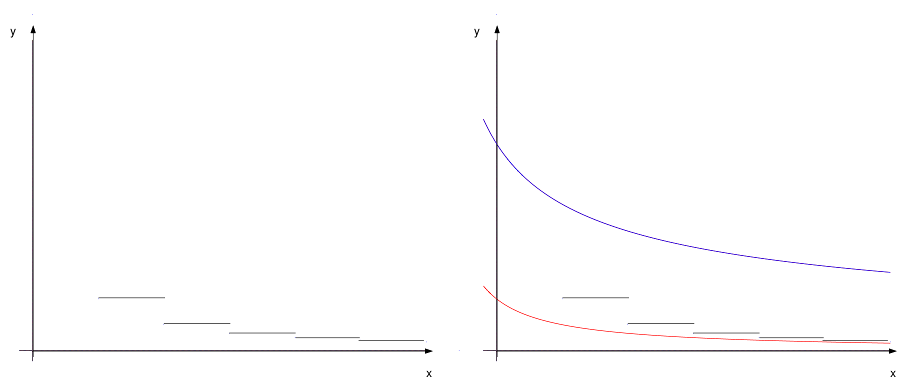
$$a(x) = a_n \quad \text{se} \quad 1 \leq n \leq x < (n+1)\,.$$

Dunque, la somma della serie è l'integrale improprio di $a(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \int_1^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pensiamo ora ai rettangoli messi come in figura 1.1, a sinistra, e supponiamo

Figura 1.1: Il test di MacLaurin



di poter trovare due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, che prendono valori maggiori o uguali a zero e tali che inoltre valga

$$x \in [n, n+1) \implies g(x) \leq a_n \leq f(x)\,.$$

Si veda la figura 1.1, a destra. In tal caso si ha

$$\int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x \leq s_k \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La serie è a termini positivi e quindi regolare; le funzioni sono non negative e quindi ammettono integrale improprio finito o meno. Dunque, dal teorema di confronto per i limiti, si ha

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ricapitolando,

- Se $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ allora la serie diverge;
- Se $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ allora la serie converge. In questo caso si trovano anche stime, da sotto e da sopra, per la somma della serie.

Il caso tipico in cui quest'argomento si applica facilmente è il caso in cui esiste una funzione $g(x)$ definita su $[0,+\infty)$, decrescente e inoltre

$$a_n = g(n)\,.$$

In questo caso,

$$x \in [n, n+1) \implies g(x) \le a_n = g(n) \le g(x-1)\,. \tag{1.7}$$

Definiamo, per $x \ge 0$,

$$f(x) = g(x-1)$$

e notiamo che la (1.7) si scrive

$$g(x) \le a_n = g(n) \le f(x) \qquad x \in [n, n+1)\,.$$

Inoltre,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} g(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Ossia, nel caso descritto, i due integrali impropri hanno il medesimo comportamento e questo comportamento è ereditato dalla serie. Possiamo quindi enunciare:

Teorema 22 ($\boxed{\textit{Test di MacLaurin}}$) *Sia $g(x)$ una funzione* non negativa e decrescente *definita su $[0,+\infty)$. Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)\,.$$

Le sue somme parziali verificano

$$\int_1^k g(x)\,dx \le s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \le \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^k g(s)\,ds\,. \tag{1.8}$$

In particolare, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$$

converge se e solo se

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty\,.$$

L'interesse di questo teorema sta nel fatto che talvolta l'integrale di $g(x)$ può esplicitamente calcolarsi mediante il calcolo delle primitive; e comunque esistono test efficienti per lo studio della convergenza o divergenza degli integrali impropri.

Esempio 23 Si sa già che la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$$

converge, come si vede dal criterio di MacLaurin. Infatti, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$$

ha integrale improprio convergente:

$$\lim_{T\to+\infty} \int_2^T \frac{1}{x\log^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log T}\right] = \frac{1}{\log 2}\,.$$

Procedendo in modo analogo[5] si provi invece che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

[5] si usi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log[\log x] = \frac{1}{x\log x}\,.$$

Esempio 24 Si calcola immediatamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\gamma}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \gamma > 1 \\ = +\infty & \text{se } \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Dunque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\gamma}$$

converge per $\gamma > 1$, diverge altrimenti. ∎

Possiamo combinare l'esempio 24 col criterio di confronto, ottenendo:

Corollario 25 *Consideriamo la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Vale:*

- *se esitono* $M > 0$ *e* $\gamma > 1$ *tali che*

$$0 \leq a_n \leq M\frac{1}{n^\gamma}\,,$$

  allora la serie converge.

- *se esistono* $m > 0$ *e* $\gamma \leq 1$ *tali che*

$$a_n \geq m\frac{1}{n^\gamma}$$

  allora la serie diverge.

In particolare, possiamo enunciare:

Se $a_n \geq 0$ e se esiste $\gamma > 1$ tale che

$$a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\,, \tag{1.9}$$

allora la serie $\sum a_n$ converge.

Per ora, stiamo lavorando con serie a termini positivi, ma non abbiamo scritto esplicitamente questa condizione perché vedremo, al Corollario 27, che il test precedente vale per ogni serie.

1.3.4 Serie a termini di segno qualsiasi

Sulle serie a termini di segno qualsiasi, limitiamoci ad osservare due proprietà. Si è già detto che se la serie $\sum |x_n|$ converge, si dice che la serie $\sum x_n$ *converge* $\boxed{\textit{assolutamente}}$. Ricordiamo, dal teorema 15:

Teorema 26 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Ricordiamo ora che $f = \mathrm{o}(g)$ quando f/g è un infinitesimo, e ciò accade se e solo se $|f|/|g|$ è un infinitesimo. Quindi:

Corollario 27 *Se esite $\gamma > 1$ tale che $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, allora la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, ed è quindi convergente.*

Infine, si dice che una serie è *a segni* $\boxed{\textit{alterni}}$ se ha forma

$$\sum (-1)^n x_n \qquad \text{con } x_n > 0; \tag{1.10}$$

ossia se gli addendi si susseguono cambiando segno ad ogni passo. Esiste, per le serie a segni alterni, una notevole condizione sufficiente di convergenza, e anche una stima per la somma della serie:

Teorema 28 ($\boxed{\textit{Criterio di Leibniz}}$) *Se valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
- *la succesione* $\{x_n\}$ è decrescente, *ossia* $x_n \geq x_{n+1} \geq 0$ *per ogni* n

allora la serie a segni alterni (1.10) converge; inoltre, detta s la somma della serie, per ogni n vale:

- *la differenza*

  $$s - \sum_{n=1}^{k} (-1)^n x_n$$

  ha segno opposto ad x_k; ossia, l'approssimazione è per eccesso se l'ultimo termine sommato è positivo; per difetto se è negativo.

- *Vale la stima*

  $$\left| s - \sum_{n=1}^{k} x_n \right| \leq |x_{k+1}|\,.$$

La dimostrazione della convergenza è nell'Appendice 1.8.2.

Esempio 29 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,.$$

Questa serie si chiama $\boxed{\textit{serie di Mengoli}}$. Il criterio di Leibniz mostra che questa serie converge. La somma della serie è nota:

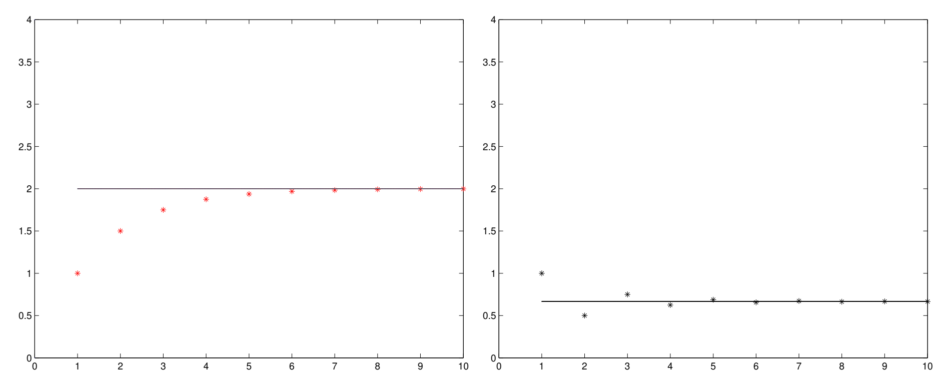
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2\,.$$

Il Teorema 28 dà anche una stima dell'errore che si commette sommando N termini: l'errore è minore di $1/(n+1)$. ∎

1.4 Alcuni esempi numerici

Le figure 1.2, 1.3 e 1.4 mostrano alcuni esempi numerici di somme parziali di serie convergenti. Le serie sono specificate nelle intestazioni delle figure.

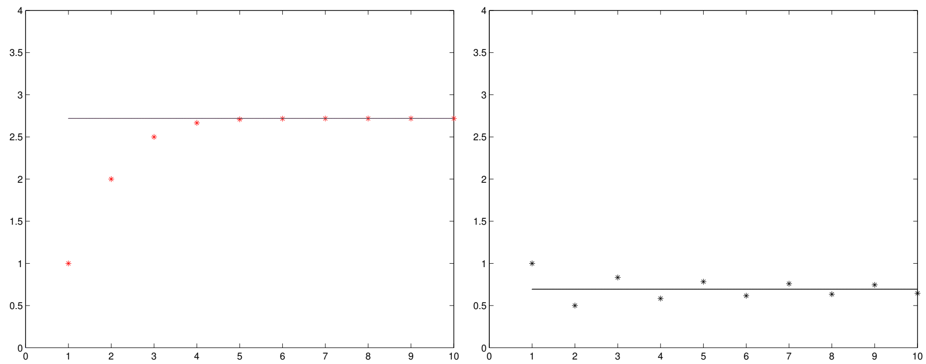
Figura 1.2: $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)^n = 2$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1/2)^n = 2/3$ a destra



1.5 Convergenza condizionata ed incondizionata

Il concetto di serie generalizza quello di somma finita. In una somma finita il risultato non dipende dall'ordine degli addendi (proprietà commutativa dell'addizione).

Figura 1.3: $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n! = e$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/n = \log 2$ a destra



Nel caso delle serie, l'asserto analogo vale se si scambiano tra di loro un numero finito di termini. E' FALSO se si scambia il posto di infiniti termini. Mostriamo un esempio:

Esempio 30 Consideriamo la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n$. Si sa che questa serie converge. Mostriamo che è possibile scambiare il posto di infiniti termini, in modo da ottenere una serie divergente a $+\infty$. Ricordiamo per questo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge e quindi anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$$

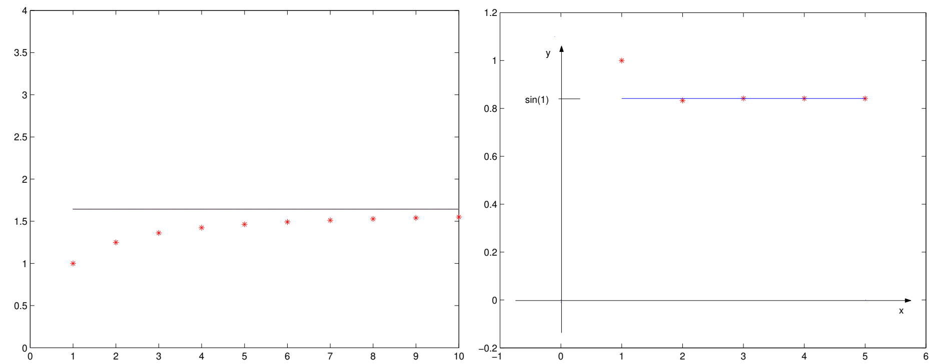
diverge. Conviene vedere una dimostrazione di questo fatto, diversa da quella già vista: consideriamo

$$\sum_{n=k}^{5k} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=k}^{5k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}[4k\frac{1}{5k}] = \frac{2}{5}$$

(si è usato il fatto che si sommano $4k$ termini, ciascuno dei quali è maggiore di $1/5k$). Ciò contrasta col criterio di convergenza di Cauchy, e mostra che la serie diverge. Dato che il carattere di una serie non dipende dai primi elementi, anche ciascuna delle serie

$$\sum_{n=R}^{+\infty} \frac{1}{2n} \tag{1.11}$$

Figura 1.4: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ a sinistra e $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/[(2n+1)!\,] = \sin(1)$ a destra



è divergente. Ora consideriamo la serie di Mengoli, per semplicità cambiata di segno. Essa converge a $-\log 2$. Vogliamo riordinarne gli elementi in modo da trovare una serie divergente a $+\infty$. Per questo sommiamo prima i termini di indice pari, fino ad un certo indice $\tilde{k}_1$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\tilde{k}_1} \frac{1}{2n} > 5\,.$$

Questa è la somma parziale $s_{\tilde{k}_1}$ della serie riordinata. Sottraiamo quindi il primo termine di indice dispari, ossia 1 ottenendo una somma parziale s_{k_1} tale che

$$s_{k_1} > 4\,.$$

Consideriamo ora la serie (1.11) con $R = \tilde{k}_1 + 1$. Come si è detto, questa serie diverge. Dunque, possiamo sommare ulteriori termini di indice pari alla somma parziale s_{k_1} già ottenuta, fino a trovare una somma parziale maggiore di 9; sottraiamo quindi il primo dei termini di ordine dispari non ancora usati (che è $1/3$, minore di 1). Si trova una nuova somma parziale, diciamo s_{k_2}, maggiore di 8:

$$s_{k_2} > 8 = 2^3\,.$$

Continuiamo a sommare termini di indice pari (e quindi positivi) fino ad avere una somma parziale maggiore di $2^4 + 1$ e quindi sottraiamo il primo termine di indice dispari non usato (che è certamente minore di 1, infatti è $1/5$). Si trova una somma parziale s_{k_3} tale che

$$s_{k_3} > 2^4\,.$$

Procedendo in questo modo si trova un riordinamento che conduce ad una serie divergente a $+\infty$. ∎

Si potrebbe mostrare che per ogni scelta di l è possibile riordinare la serie di Mengoli in modo tale da trovare una serie convergente ad l, inclusi $l = +\infty$ ed $l = -\infty$, o anche in modo da trovare una serie oscillante. Diciamo che una serie *converge incondizionatamente* quando una serie converge ad l e inoltre quando qualunque serie ottenuta riordinandone gli elementi converge al medesimo numero l. La convergenza incondizionata si caratterizza come segue:

Teorema 31 (***Teorema di Dirichlet***) *Una serie converge incondizionatamente se e solo se converge assolutamente. Se ciò non accade è possibile riordinare gli elementi della serie in modo da cambiare il carattere della serie, e anche in modo da ottenere una serie convergente ad un qualsiasi numero assegnato, o divergente a $+\infty$ oppure a $-\infty$.*

In particolare:

Corollario 32 *Ogni serie a termini di segno costante converge incondizionatamente.*

1.5.1 Serie dipendenti da un parametro e serie di funzioni

Torniamo a considerare la serie geometrica,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \,.$$

Questa serie dipende dal parametro q e, come si è visto, converge se $|q| < 1$, diverge se $q \geq 1$ ed oscilla se $q \leq -1$. Facendo variare il parametro q, ciascuno degli addendi viene ad essere una funzione di q,

$$f_n(q) = q^n \,.$$

Dunque, la serie geometrica può intendersi come serie di funzioni. In generale, data la successione $(\, f_n(x)\,)$ i cui elementi sono funzioni (tutte con lo stesso dominio) si chiama *serie di funzioni* la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \,.$$

La somma della serie si calcola punto per punto; ossia, per ogni fissato valore di x si calcola la somma della serie di numeri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Il dominio comune alle funzioni $f(q) = q^n$ è $\mathbb{R}$, ma abbiamo notato che la serie geometrica converge (ad $1/(1-q)$) soltanto per $|q| < 1$. Dunque, in generale, il dominio su cui è definita la somma di una serie di funzioni è più piccolo del dominio comune delle funzioni. Le serie di funzioni si studieranno al Capitolo 2. Va tenuta presente la loro definizione per capire alcune sottigliezze del paragrafo 1.6.

1.6 Operazioni algebriche e serie

Il concetto di "serie" estende quello di "somma finita". Le somme finite godono di utili proprietà, come per esempio la proprietà distributiva del prodotto sulla somma, la proprietà associativa e "dissociativa". Ci possiamo chiedere se le analoghe proprietà valgono per le serie. Per questo dobbiamo tener conto di due problemi:

- la "somma di somme finite" non dipende dall'ordine degli addendi:

  $$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \,.$$

  Si sa già che la somma della serie varia cambiando l'ordine dei suoi termini. Quindi dovremo aspettarci che una proprietà analoga non valga necessariamente per le serie.

- la somma di serie è definita tramite il concetto di limite; le relazioni tra limiti ed operazioni sono dissimmetriche. Di ciò dobbiamo tener conto per enunciare i risultati relativi alle serie.

Queste osservazioni suggeriscono di elencare prima le relazioni tra limiti ed operazioni sia nella versione "giusta" che nella versione "sbagliata":

GIUSTA	**SBAGLIATA**
$\boxed{\mathbf{1}}$ La somma dei limiti è uguale al limite della somma	$\boxed{\mathbf{1}}$ Il limite della somma è uguale alla somma dei limiti
$\boxed{\mathbf{2}}$ il prodotto dei limiti è uguale al limite del prodotto	$\boxed{\mathbf{2}}$ il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti
$\boxed{\mathbf{3a}}$ Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $a_n \to 0$ anche $\gamma_n a_n \to 0$.	$\boxed{\mathbf{3a}}$ Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $\{\gamma_n a_n\}$ converge, anche $\{a_n\}$ converge.
$\boxed{\mathbf{3b}}$ Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $a_n \to 0$ anche $\gamma_n a_n \to 0$.	$\boxed{\mathbf{3b}}$ Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $\{a_n\}$ converge, anche $\{\gamma_n a_n\}$ converge.

Ricordiamo brevemente perché le affermazioni a destra sono sbagliate: per esempio nel caso $\boxed{\mathbf{1}}$, il limite della somma di due funzioni può esistere, senza che le due funzioni individualmente abbiano limite, come è il caso del limite, per $x \to +\infty$, quando le due funzioni sono

$$f(x) = x^3 + \sin x\,, \qquad g(x) = \frac{x+1}{1-x}\sin x\,.$$

In questo caso,

$$f(x) + g(x) = \frac{2\sin x}{1-x}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) + g(x)] = 0\,.$$

Questo limite non è uguale a

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] + \left[\lim_{x\to+\infty} g(x)\right]$$

per la semplice ragione che i due limiti non esistono. Il caso $\boxed{\mathbf{2}}$, del prodotto è analogo. Vale la pena però di vedere un caso banale che però può inndurre in errore nel caso delle serie: NON è vero che la formula seguente vale per OGNI numero reale γ:

$$\lim\,[\gamma f(x)] = \gamma\,[\lim f(x)]\ .$$

Questa formula vale solo se $\gamma \neq 0$ oppure se $\lim f(x)$ esiste finito, come mostrano gli esempi delle funzioni

$$f(x) = x^3\,, \qquad g(x) = \sin x\,.$$

In ambedue i casi, se $\gamma = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} [\gamma f(x)] = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} [\gamma g(x)] = 0$$

mentre le espressioni

$$\gamma \lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \gamma \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

non hanno senso. Vediamo ora il caso $\boxed{\mathbf{3a}}$**.** Chiaramente, da $\gamma_n a_n \to 0$ non si può dedurre la convergenza a zero di $\{a_n\}$: si consideri il caso $\gamma_n \to 0$ ed $a_n \equiv 1$. Il caso $\boxed{\mathbf{3b}}$**:** si consideri l'esempio della successione $\{a_n\}$ con $a_n = (n-1)/(n+1)$, convergente ad 1, mentre $\gamma_n = (-1)^n$. La successione $\{\gamma_n a_n\}$ è oscillante. Richiamato ció, definiamo:

Somma di serie

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right] + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)\,.$$

Prodotto di una serie per un numero

$$\alpha \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n)\,.$$

In queste definizioni, l'ordine degli addendi è quello indicato. Supponiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = l\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = m\,.$$

Allora:

1) somma di serie. Vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = l + m$$

purché uno almeno dei due limiti sia un numero oppure sia l che m siano ambedue $+\infty$ oppure $-\infty$.

2) prodotto di un numero per una serie. La definizione ha senso (e l'uguaglianza vale) solo se $\alpha \neq 0$ oppure se la serie converge.

La definizione di prodotto di serie è più complessa e si vedrà nel paragrafo 1.7. Si potrebbe anche provare:

Teorema 33 *Sia* $\sum a_n = l \in \mathbb{R}$ *e sia* $a_n > 0$ *per ogni* n*. Sia* $\{\gamma_n\}$ *una successione* limitata. *Allora, la serie* $\sum \gamma_n a_n$ *converge.*

Gli esempi seguenti mostrano i problemi che si possono incontrare usando le operazioni sulle serie senza le dovute cautele:

Esempio 34 Consideriamo la serie seguente:

$$\sum c_n\,, \qquad c_n = 0\,.$$

Ovviamente la somma della serie è 0. Scrivendo

$$c_n = a_n + b_n\,, \qquad a_n = (-1)^n\,, \quad b_n = -(-1)^n$$

si potrebbe essere tentati di usare una specie di "regola dello scomponendo" e scrivere

$$\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n\,.$$

Ovviamente questo non ha senso, perché le due serie a destra non convergono; e quindi non definiscono numeri che si possano sommare. Un esempio analogo, un po' più riposto, è quello delle serie

$$\sum a_n\,, \quad \sum b_n\,, \qquad a_n = \frac{1}{n+1}\,, \quad b_n = \frac{n\,(\sqrt{n} - n)}{n^3+8}\,.$$

Le due serie non convergono mentre la serie

$$\sum [a_n + b_n]$$

converge. ∎

La regula del prodotto sembra "più innocua" nel senso che sembra più difficile sbagliare. In realtà anche questa regola è fonte di errori, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 35 Sia x un parametro reale. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{1/2}(1+nx^2)}\,. \tag{1.12}$$

Si lascia per esercizio di provare che la serie converge per ogni x. Si noti che essa certamente converge per $x = 0$ perché in tal caso tutti i termini della serie sono nulli. Però, sembra del tutto naturale mettere in evidenza x portandolo fuori dal segno di serie, scrivendo

$$x\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}(1+nx^2)}\right]$$

e magari studiando la convergenza della serie "piú semplice"

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}(1+nx^2)}\,.$$

Si dimentica in questo modo che il parametro x può essere nullo. Se $x\neq 0$ questa serie converge e il procedimento seguito, di mettere in evidenza x, è corretto. Se però $x=0$, l'ultima serie scritta non converge, mentre la (1.12) ovviamente converge. L'errore è consistito nel "mettere in evidenza" il fattore 0 dai termini della serie, errore favorito dal fatto che il fattore è stato indicato col generico simbolo x. ∎

Ci sono anche altri errori nei quali si può cadere trattando le operazioni sulle serie senza la dovuta attenzione:

Esempio 36 Un modo veloce di "calcolare" la somma della serie geometrica

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}q^n$$

è il seguente:

$$S=1+q\left[\sum_{n=0}^{+\infty}q^n\right]=1+qS$$

Dunque,

$$(1-q)S=1 \qquad \text{ossia} \qquad S=\frac{1}{1-q}\,.$$

Questo risultato, apparentemente giusto, è in realtà sbagliato. Infatti da nessuna parte si è usata la condizione $|q|<1$ e quindi sembrerebbe da questo calcolo che la serie geometrica converga per ogni valore di q, cosa notoriamente falsa. Si lascia per esercizio di trovare l'errore in questo ragionamento. ∎

Infine, vediamo una diversa dimostrazione del Teorema 26 basata sulle proprietà illustrate in questo paragrafo: La serie $\sum|x_n|$ è una serie a termini positivi. Se essa converge, dal teorema 15 convergono anche le due serie $\sum y_n$ e $\sum z_n$, con

$$y_n=\begin{cases} x_n & \text{se} \quad x_n>0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\,,\qquad z_n=\begin{cases} -x_n & \text{se} \quad x_n<0\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Quindi, per il teorema 16, converge anche $\sum(y_n-z_n)$ che è $\sum x_n$.

1.7 Prodotto alla Cauchy

Il prodotto di serie può definirsi in vari modi. Quello più utile è il $\boxed{\textit{prodotto alla Cauchy}}$. L'espressione del prodotto alla Cauchy può sembrare macchinosa, ma se ne capisce la ragione se si considera l'esempio di un prodotto di polinomi. Consideriamo il caso del prodotto di due polinomi di grado 4. Il prodotto

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)$$

è la somma di tutti i possibili addendi $a_jb_kx^{k+j}$ con $0 \leq j \leq 4$, $0 \leq k \leq 4$. Raccogliendo i coefficienti degli addendi del medesimo grado il prodotto si scrive come

$$\begin{aligned} &a_0b_0 \\ &+(a_1b_0 + b_0a_1)x \\ &+(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 \\ &+(a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)x^3 \\ &+(a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4)x^4 \,. \end{aligned}$$

Posto $x = 1$, il prodotto

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

si trova scritto come segue:

$$\begin{aligned} &a_0b_0 \\ &+(a_1b_0 + b_0a_1) \\ &+(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) \\ &+(a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) \\ &+(a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4) \,. \end{aligned}$$

Ciò suggerisce le due definizioni seguenti:

- Si chiama $\boxed{\textit{convoluzione}}$ delle due successioni (a_n) e (b_n) la successione (c_n) con

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r}b_r = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_0b_n \,.$$

- Si chiama $\boxed{\textit{prodotto alla Cauchy}}$ delle due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{1.13}$$

la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,, \qquad c_n = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r} b_r\,.$$

Osservazione 37 Se l'indice di una, o ambedue, le serie non parte da zero, la formula del prodotto alla Cauchy si intende scritta aggiungendo un numero finito di termini tutti nulli, in modo da far partire gli indici da 0. ∎

La convergenza di ambedue le serie (1.13) non implica la convergenza del loro prodotto alla Cauchy. Vale invece:

Teorema 38 *Le due serie (1.13) convergano, ed abbiano somma rispettivamente α e β. Allora:*

- *se le due serie convergono ambedue assolutamente, anche il loro prodotto alla Cauchy converge assolutamente ad $\alpha\beta$.*
- *se una delle due serie converge e l'altra converge assolutamente, il prodotto alla Cauchy converge ad $\alpha\beta$, in generale non assolutamente.*

Concludiamo con un esempio che mostra due serie convergenti (non assolutamente), il cui prodotto alla Cauchy non converge.

Esempio 39 Consideriamo la serie (convergente per il criterio di Leibniz)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
e calcoliamone il prodotto alla Cauchy con se stessa. Notiamo che l'indice di questa serie parte da 1 invece che da zero e quindi la formula del prodotto alla Cauchy va lievemente modificata come detto nell'sservazione 37:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{\sqrt{n-r}}\frac{(-1)^r}{\sqrt{r}}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{nr-r^2}}\right]\,.$$
Si vede facilmente che la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{nx-x^2}}$$
è crescente per $1 < x < n/2$ e decrescente per $n/2 < x < n-1$ e quindi ha minimo per $x = 1$ e per $x = n-1$. Il minimo vale $1/\sqrt{n-1}$. Dunque
$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{nr-r^2}} \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}} \;:$$
il termine generale del prodotto alla Cauchy non converge a zero e quindi la serie ottenuta come prodotto alla Cauchy non converge. ∎

1.8 Appendici

1.8.1 Appendice: ancora sul test di MacLaurin

Il test di MacLaurin può ulteriormente precisarsi notando che la (1.8), ossia

$$\int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x \le s_k = \sum_{n=1}^k a_n \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + + \int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

si può anche scrivere come

$$0 \le \left[\sum_{n=1}^k a_n\right] - \int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

e che, al crescere di k, la successione

$$k \longrightarrow \left\{\left[\sum_{n=1}^k a_n\right] - \int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

decresce. e quindi ammette limite compreso tra 0 ed $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Infatti, si ha:

$$\left\{\left[\sum_{n=1}^k a_n\right] - \int_1^k g(x)\,\mathrm{d}x\right\} - \left\{\left[\sum_{n=1}^{k+1} a_n\right] - \int_1^{k+1} g(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$
$$= -a_{k+1} + \int_k^{k+1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} [g(x) - g(k+1)]\,\mathrm{d}x \ge 0\,.$$

Ossia, al crescere di k, i valori delle somme parziali e dell'integrale "si avvicinano" anche se l'integrale improprio (e quindi anche la serie) diverge. Quest'osservazione può usarsi per ottenere "stime asintotiche" delle somme parziali della serie per grandi valori di k. Mostriamo questo considerando l'esempio della serie armonica. Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{se} \quad 0 \le x > 1\,. \end{cases}$$

La serie armonica è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$$

e quindi diverge, dal criterio di MacLaurin. E' questo un modo di vedere che la serie armonica diverge, diverso da quello visto all'esempio 1.5. Però, il criterio di MacLaurin dà un'informazione in più:

$$0 \le \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \int_1^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ossia

$$0 \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \log k \leq 1\,.$$

E inoltre,

$$\gamma = \lim_{k} \left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \log k \right]$$

esiste, $\gamma \in (0,1)$. Il numero γ così definito si chiama $\boxed{\textit{costante d'Eulero}}$.

1.8.2 La dimostrazione del Teorema di Leibniz

La dimostrazione di questo teorema, e di teoremi più generali di Abel e di Dirichlet che ora vedremo, è interessante perché permette di introdurre il concetto di sommazione per parti, da confrontare con quello di integrazione per parti. Nonostante che il carattere di una serie non dipenda dai primi addendi, in quest'appendice è bene specificare con cura i valori degli indici. Quindi scriveremo per esempio $\{b_n\}_{n\geq 1}$ per intendere che il valore del primo indice della successione è 1. Inoltre, se $\{b_n\}_{n\geq 1}$ indica una successione, con $\{B_n\}_{n\geq 1}$ intendiamo la successione delle sue somme parziali:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\,.$$

Sia $\{b_n\}_{n\geq 1}$ una successione. Con $\{\Delta b_n\}_{n\geq 1}$ intendiamo la successione $\{(b_{n+1} - b_n)\}_{n\geq 1}$. Sia $1 \leq r < k$. La formula di $\boxed{\textit{sommazione per parti}}$ è:

$$\sum_{n=r}^{k} (\Delta b_n) c_n = [b_{k+1}c_k - b_r c_r] - \sum_{n=r}^{k} b_{n+1} \Delta c_n\,.$$

Questa formula si dimostra facilmente scrivendo la somma per esteso:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=r}^{k} (\Delta b_n) c_n = \\
&(b_{r+1} - b_r)c_r + (b_{r+2} - b_{r+1})c_{r+1} + (b_{r+3} - b_{r+2})c_{r+2} + \cdots + (b_k - b_{k-1})c_{k-1} + (b_{k+1} - b_k)c_k \\
&= -b_r c_r + [-b_{r+1}(c_{r+1} - c_r) - b_{r+2}(c_{r+2} - c_{r+1}) - \cdots - b_k(c_k - c_{k-1})] + b_{k+1}c_k \\
&= b_{k+1}c_k - b_r c_r - \sum_{n=r}^{k-1} b_{n+1}\Delta c_n = -b_{k+1}[c_{k+1} - c_k] + b_{k+1}c_{k+1} - b_r c_r - \sum_{n=r}^{k-1} b_{n+1}\Delta c_n \\
&= b_{k+1}c_{k+1} - b_r c_r - \sum_{n=r}^{k} b_{n+1}\Delta c_n\,.
\end{aligned}$$

Ci serve inoltre un risultato preliminare:

Lemma 40 *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *una serie tale che la successione* $\{B_n\}$ *delle somme parziali sia* limitata *e sia* $\{c_n\}$ *una successione* positiva decrescente. *Allora, la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(\Delta c_n)$$

converge assolutamente.

Dim. Si noti che la successione $\{c_n\}_{n\geq 1}$ è convergente, $\lim c_n = l$, per il teorema della funzione monotona, e quindi limitata. Anzi,

$$0 \leq c_n \leq c_1 \,.$$

Inoltre, $c_{n+1} - c_n < 0$. L'asserto del lemma segue perché ora proviamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} |B_n \Delta c_n| < +\infty$. Infatti,

$$\sum_{n=1}^{k} |B_n \Delta c_n| = \sum_{n=1}^{k} |B_n| \, (c_n - c_{n+1}) \leq M \sum_{n=1}^{k} (c_n - c_{n+1}) = M \, (c_1 - c_{k+1}) \leq M c_1 \,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 41 Si noti che il Lemma 40 non richiede la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. ▮

Consideriamo ora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ e notiamo che

$$b_n = B_n - B_{n-1} = \Delta B_{n-1} \,.$$

Introducendo i numeri d_n definiti da

$$d_{n-1} = c_n \qquad \text{ossia} \qquad d_n = c_{n+1}$$

e usando la regola di sommazione per parti con primo indice 2, le sue somme parziali si rappresentano come segue:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} b_n c_n = b_1 c_1 + \sum_{n=2}^{k} (\Delta B_{n-1}) c_n = b_1 c_1 + \sum_{n=2}^{k} (\Delta B_{n-1}) d_{n-1} \\ = B_1 c_1 + \sum_{n=2}^{k} (\Delta B_{n-1}) \, d_{n-1} = B_1 c_1 + [B_{k+1} d_{k+1} - B_2 d_2] - \sum_{n=2}^{k} B_{n+1} \Delta d_n \\ = B_1 c_1 + [B_{k+1} c_{k+2} - B_2 c_3] - \sum_{n=2}^{k} B_{n+1} \Delta c_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Dunque, per garantire la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$, basta dare condizioni che garantiscano l'esistenza dei due limiti

$$\lim_{k\to+\infty} B_k c_{k+1}\,, \tag{1.14}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n=2}^{k} B_{n+1}\Delta c_{n+1}\right]. \tag{1.15}$$

Un criterio per questo è dato dal $\boxed{\textit{Teorema di Dirichlet}}$, che immediatamente implica il criterio di Leibniz:

Teorema 42 ($\boxed{\textit{Teorema di Dirichlet}}$) *Sia* $\{c_n\}_{n\geq 1}$ *una successione* a valori positivi, decrescente e convergente a zero. *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *una serie tale che* $\{B_n\}_{n\geq 1}$ rimane limitata. *Allora, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ *converge.*

Dim. Infatti, il limite (1.14) è nullo perché $\{B_n\}$ è limitata e $c_n \to 0$. Il limite (1.15) esiste per il Lemma 40. ∎ **Dimostrazione del criterio di convergenza di Leib**
La dimostrazione del criterio di Leibniz per la serie a segni alterni

$$\sum_n (-1)^n a_n\,, \qquad a_n \geq 0$$

con $\{a_n\}$ decrescente e convergente a zero, segue immediatamente: basta definire $b_n = (-1)^n$ e $c_n = a_n \to 0$ e notare che

$$B_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ +1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

e quindi $\{B_n\}_{n\geq 1}$ rimane limitata. Una diversa condizione per l'esistenza dei due limiti (1.14) e (1.15) è data dal teorema seguente:

Teorema 43 ($\boxed{\textit{Teorema di Abel}}$) *Sia* $\{c_n\}_{n\geq 1}$ *una successione* a valori positivi e decrescente. *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *una serie convergente. Allora, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ *converge.*

Dim. Per ipotesi, esistono ambedue i limiti $\lim c_k$ e $\lim B_k$. Dunque, esiste il limite (1.14). La successione $\{B_k\}$, essendo convergente è anche limitata e quindi il limite (1.15) esiste per il Lemma 40. ∎