

L. Pandolfi

Lezioni di Analisi Matematica 2

Il testo presenta tre blocchi principali di argomenti:

A Successioni e serie numeriche e di funzioni: Cap. 1, e 2.

B Questa parte consta di due, da studiarsi in sequenza. **B1** Funzioni di più variabili e integrazione (multipla, di curva e di superficie): Cap. 3–8. **B2** Campi conservativi, Cap. 9.

C Sistemi di equazioni differenziali: Cap. 10.

Lo studio dei blocchi **A** e **B** può scambiarsi di ordine senza problemi. Invece, è consigliabile studiare **C** per ultimo. Infatti, lo studio del Cap. 10 richiede il concetto di continuità e differenziabilità di funzioni di più variabili, studiato ai paragrafi 4.1–4.2. Ovunque nello studio del Cap. 10 è necessario conoscere il concetto di curva (ma non le proprietà differenziali delle curve, né gli integrali di curva). L'esponenziale di matrici richiede la definizione di serie, Cap. 1, e 2 e il paragrafo 10.4 richiede il Cap. 9.

Indice

Elenco delle figure	ix
1 Serie numeriche	1
1.1 Successioni numeriche: ricapitolazione	1
1.2 Le serie numeriche	3
1.2.1 Serie telescopiche	5
1.3 Criteri di convergenza	8
1.3.1 Il teorema di Cauchy per le serie	8
1.3.2 Monotonia e serie a termini di segno costante	9
1.3.3 Il test di MacLaurin	12
1.3.4 Serie a termini di segno qualsiasi	17
1.4 Alcuni esempi numerici	18
1.5 Convergenza condizionata ed incondizionata	18
1.5.1 Serie dipendenti da un parametro e serie di funzioni	21
1.6 Operazioni algebriche e serie	22
1.7 Prodotto alla Cauchy	27
1.8 Appendici	29
1.8.1 Appendice: ancora sul test di MacLaurin	29
1.8.2 La dimostrazione del Teorema di Leibniz	30
2 Successioni e serie di funzioni	33
2.1 Introduzione	33
2.2 Distanze tra funzioni	34
2.2.1 Il prodotto interno su $\mathcal{L}^2(a, b)$	39
2.2.2 Proprietà della convergenza uniforme	40
2.3 Serie di funzioni	44
2.4 Serie di potenze	46
2.4.1 Operazioni sulle serie di potenze	53
2.4.2 Serie di potenze nel campo complesso	56
2.4.3 Serie di Taylor	57

2.4.4	Serie di potenze ed equazioni differenziali lineari	59
2.5	Serie di Fourier: introduzione	62
2.5.1	Premesse: le funzioni periodiche	62
2.5.2	Premesse: le formule d'Eulero	65
2.6	La serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(-L, L)$	68
2.6.1	Estensioni pari e dispari, e serie di Fourier	75
2.7	La convergenza puntuale della serie di Fourier	78
3	Lo spazio lineare normato \mathbb{R}^n	83
3.1	Lo spazio lineare \mathbb{R}^n	83
3.1.1	Connessione e convessità	88
3.1.2	Vettori liberi e vettori applicati	90
3.2	Basi e basi ordinate	90
3.2.1	Il piano e lo spazio	91
3.3	Norme e distanze	94
3.3.1	Completezza di \mathbb{R}^n	99
3.4	La norma euclidea	99
3.4.1	\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 con la norma euclidea	102
3.5	Il prodotto vettoriale	104
3.6	Coordinate curvilinee nel piano e nello spazio	106
3.7	Funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R}^n	112
4	Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m	117
4.1	Limiti e continuità	117
4.1.1	Funzioni continue su insiemi	122
4.2	Le proprietà di differenziabilità	123
4.2.1	Il differenziale delle funzioni a valori reali	123
4.2.2	Regole di derivazione	126
4.2.3	La direzione del gradiente e la direzione di massima velocità crescita	129
4.2.4	Le funzioni definite tramite integrali	130
4.3	Le derivate di ordine superiore	133
4.3.1	La formula di Taylor per le funzioni a valori reali	134
4.4	Gli estremi	136
4.5	Il differenziale delle funzioni a valori in \mathbb{R}^m	140
4.5.1	Regole di calcolo della matrice jacobiana	144
4.6	Campi vettoriali	144
4.6.1	Operatori differenziali e campi vettoriali	146
4.7	Appendici	148
4.7.1	Appendice: Rappresentazione di funzioni di due variabile	148

4.7.2	Appendice: Propagazione ondosa	156
4.7.3	Appendice: Funzioni omogenee	163
4.7.4	Appendice: La dimostrazione del teorema 132	164
4.7.5	Appendice: la dimostrazione del teorema di Schwarz	166
5	Funzioni implicite ed estremi vincolati	169
5.1	Insiemi di livello	170
5.2	Il teorema della funzione implicita	172
5.2.1	Curve piane definite implicitamente	173
5.2.2	Superfici definite implicitamente	175
5.2.3	Curve intersezione di due superfici	176
5.3	Il teorema della funzione inversa ed i cambiamenti di variabili	178
5.4	Ulteriori esempi	180
5.4.1	Superfici assegnate in modo implicito e curve intersezione di due superfici	184
5.5	Estremi vincolati	185
5.5.1	Estremi vincolati ad una curva piana	186
5.5.2	Estremi vincolati ad una superficie	193
5.5.3	Estremi vincolati ad una curva dello spazio	194
5.5.4	Osservazione importante	196
5.6	Appendice: la dimostrazione del teorema 165	196
6	Curve e superfici	199
6.1	Curve parametriche	199
6.1.1	I cambiamenti di parametro e la definizione di curva	202
6.1.2	Lunghezza di un arco	205
6.1.3	Proprietà differenziali delle curve piane e dello spazio	208
6.2	Curve piane	212
6.3	Le superfici	215
6.3.1	Superfici definite parametricamente	215
6.3.2	Il piano tangente e la normale a una superficie	219
6.4	Appendici	222
6.4.1	Appendice: le formule di Frenet per curve nello spazio	222
6.4.2	Appendice: Curve in \mathbb{R}^n	224
7	Integrazione delle funzioni di più variabili	225
7.1	Integrazione delle funzioni di due variabili	226
7.1.1	La definizione di integrale	229
7.1.2	Le proprietà dell'integrale	231
7.1.3	Domini di integrazione definiti mediante curve di Jordan	232

7.1.4	Riduzione di integrali doppi ad integrali iterati	233
7.2	Integrazione delle funzioni di tre variabili	235
7.3	Formula di riduzione per gli integrali tripli	236
7.3.1	Integrazione e Cambiamento di variabili	237
7.4	Alcuni jacobiani che è importante ricordare	241
7.4.1	Volumi delimitati da superfici di rotazione	242
7.5	Appendici	243
7.5.1	Appendice: Integrali impropri	243
7.5.2	Appendice: Teorema dei valori intermedi e Teorema di Brower	247
8	Integrali di curva e di superficie	251
8.1	Funzioni definite su curve: la densità	252
8.2	Gli integrali di curva	253
8.2.1	Integrali di curva di prima specie	254
8.2.2	Integrali di curva di seconda specie	256
8.2.3	Integrali di curva di prima e di seconda specie	264
8.2.4	Integrali di curva di seconda specie e forme differenziali	265
8.2.5	Il flusso	266
8.3	Analisi vettoriale nel piano	268
8.3.1	Una considerazione preliminare	268
8.3.2	Formula di Green	269
8.3.3	Formula di Green e forme differenziali	274
8.3.4	Le forme differenziali e le aree piane	275
8.3.5	Le estensioni	276
8.4	Integrali di superficie	278
8.4.1	Area di una calotta	278
8.4.2	Densità superficiale	281
8.4.3	Integrali di superfici di prima specie	282
8.4.4	Integrale di superficie di seconda specie	283
8.4.5	Integrale di superficie di seconda specie e forme differenziali	285
8.5	Analisi vettoriale nello spazio	286
8.5.1	Formula della divergenza e formula di Gauss	286
8.5.2	La formula di Stokes: il caso delle superfici parametriche	293
8.5.3	Estensioni	296
8.6	Appendici	301
8.6.1	Appendice: fatti da ricordare	301
8.6.2	Appendice: osservazioni sulla terminologia	301
8.7	Appendice: Una dimostrazione del Teorema di Stokes	302

9	Campi conservativi	303
9.1	Potenziale	303
9.1.1	Il calcolo del potenziale	310
9.2	Il linguaggio delle 1-forme differenziali	312
9.3	Primitive di 2-forme differenziali	313
9.4	Alcune formule importanti	315
10	I sistemi di equazioni differenziali	317
10.1	Introduzione	317
10.2	Esistenza e unicità di soluzione	323
10.2.1	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	326
10.2.2	Il caso dell'equazione completa e delle equazioni di ordine superiore	330
10.2.3	Il comportamento in futuro delle soluzioni	332
10.3	La stabilità	336
10.4	Sistemi piani ed integrali primi	339
10.4.1	Integrali primi e stabilità	343
10.4.2	Stabilità asintotica e perturbazioni	346

Elenco delle figure

1.1	Il test di MacLaurin	13
1.2	$\sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n = 2$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1/2)^n = 2/3$ a destra . . .	18
1.3	$\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n! = e$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/n = \log 2$ a destra . . .	19
1.4	$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ a sinistra e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/[(2n+1)!] = \sin(1)$ a destra	20
2.1	Distanza $d_\infty(f, g)$	36
2.2	Le distanze $d_1(f, g)$ e $d_2(f, g)$	37
2.3	Convergenza uniforme e convergenza in media	38
2.4	La convergenza uniforme non implica la convergenza della successione delle derivate	43
2.5	Gli intervalli che si usano nella dimostrazione del teorema di Abel	47
2.6	Somme parziali della serie (2.3) (a sinistra e della serie (2.4) (a destra)	49
2.7	Somma parziali della serie (2.5)	50
2.8	Illustrazione del Teorema 83	65
2.9	Estensione per periodicit� della funzione (2.32)	78
2.10	Il fenomeno di Gibbs	80
2.11	Le serie di Fourier delle restrizioni a $(-\pi, \pi)$ di $f(x) = \text{sign } x$ (sinistra sopra), di $f(x) = x $ (destra sopra), di $f(x) = x$ (sinistra sotto) e di $f(x) = \sin x $ (destra sotto)	82
3.1	Insieme connesso, a sinistra, e convesso a destra.	89
3.2	Senso positivo di rotazione e verso sugli assi coordinati	93
3.3	Sfera di centro l'origine in norme diverse	98
3.4	Teorema di Pitagora e identit� del parallelogramma	101
3.5	Calcolo dell'area di un parallelogramma	103
3.6	Coordinate oblique	107
3.7	Trasformazione a coordinate oblique	108
3.8	coordinate polari	109

3.9	coordinate cilindriche	111
3.10	coordinate sferiche	111
4.1	La funzione dell'esempio 126	121
4.2	Piano tangente e vettore normale	126
4.3	Un punto di minimo e un punto di sella	137
4.4	Un parallelogramma, la sua immagine e il parallelogramma che la approssima	143
4.5	un campo vettoriale	145
4.6	Paraboloide di rotazione	150
4.7	Paraboloide di rotazione e sue curve di livello	151
4.8	La funzione (4.10)	152
4.9	Una funzione omogenea	152
4.10	Funzione omogenea di grado 1/2	153
4.11	Superficie di rotazione	155
4.12	Una funzione periodica	156
4.13	La funzione (4.11)	157
4.14	La funzione (4.12)	158
4.15	Lunghezza d'onda	161
5.1	Esistenza o non esistenza della funzione implicita	171
5.2	La dimostrazione del teorema della funzione implicita	175
5.3	Il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$	182
5.4	Esiste la funzione implicita anche se le condizioni del teorema non sono soddisfatte	183
5.5	Il grafico della funzione (5.8)	183
5.6	Gradiente nullo ma curva di livello regolare	184
5.7	Intersezione di due cilindri	186
5.8	Estremi vincolati e curve di livello	188
5.9	Grafici tangenti e estremi vincolati	189
5.10	190
6.1	Le curve (6.1) e (6.3)	201
6.2	La definizione di lunghezza: una curva e i suoi vettori approssimanti	205
6.3	Versore tangente e versore normale	211
6.4	Le regioni interna ed esterna e la normale esterna	212
6.5	Regola d'Ampère per una curva piana	213
6.6	Insieme su cui si proietta una calotta	217
6.7	Una calotta ed il suo "bordo"	218
6.8	Ancora una calotta col suo "bordo"	219

ELENCO DELLE FIGURE

6.9	Il piano tangente e la normale ad una superficie	221
6.10	Riferimento mobile su una curva nello spazio	223
7.1	Domini di integrazione	228
7.2	Suddivisione in rettangoli di un dominio di integrazione	229
7.3	Riduzione di un integrale doppio	234
7.4	Riduzione per fili e per strati di un integrale triplo	237
7.5	Volume di una superficie di rotazione	244
8.1	“Operazioni” sugli archi	259
8.2	Gli archi (8.8) e (8.9) a sinistra. A destra una regione delimitata da due archi	260
8.3	Archi che “si elidono”	260
8.4	Integrali di curva di seconda specie ed archi che “si elidono”	262
8.5	Il flusso	267
8.6	Versi di percorrenza	270
8.7	Formula di Green	271
8.8	Area di una regione di Jordan	275
8.9	Estensione della formula di Green	277
8.10	Area di una calotta	279
8.11	Calotta di rotazione (caso particolare: paraboloidi di rotazione)	281
8.12	Flusso attraverso una superficie	283
8.13	Una sfera e la parte “sotto l’equatore”	287
8.14	Le due regioni	291
8.15	Una sezione della regione	292
8.16	Ancora la regione	293
8.17	Le due orientazioni del bordo	295
8.18	Estensione al caso del cilindro	297
8.19	Estensione ad una superficie non regolare	298
8.20	La costruzione del nastro di Möbius	299
8.21	Il cilindro e il nastro di Möbius	300
9.1	Un campo vettoriale conservativo ed uno non conservativo	312
10.1	Spezzata di Eulero	325
10.2	Nodo e punto di sella	335
10.3	Centro e fuoco	335
10.4	Nella definizione di stabilità in generale si deve scegliere $\delta < \epsilon$	338
10.5	Il caso dell’esempio 277: la limitatezza delle soluzioni non implica la stabilità	339
10.6	Integrali primi e stabilità	343

ELENCO DELLE FIGURE

10.7 Il caso considerato nell'esempio 285	345
---	-----

Capitolo 1

Serie numeriche

Le serie numeriche vogliono generalizzare la somma di un numero finito di termini al caso in cui si sommano infiniti termini. Per questo si introduce il limite di una opportuna successione di “somme parziali”. Prima di tutto quindi ricapitoleremo i concetti fondamentali relativi alle successioni numeriche.

1.1 Successioni numeriche: ricapitolazione

Una successione numerica è una funzione definita su \mathbb{N} ed a valori in \mathbb{R} (oppure in \mathbb{C} . Noi qui ci limitiamo a considerare successioni a valori reali). Una successione si indica col simbolo (x_n) e si sottintende che $n \in \mathbb{N}$. Talvolta, n è un qualsiasi numero intero maggiore od uguale ad un certo n_0 che può anche essere negativo. Se è necessario specificare il primo dei valori dell'indice n scriveremo $(x_n)_{n \geq n_0}$. La successione si chiama:

- “limitata” quando esiste M tale che $|x_n| < M$ per ogni n ;
- “convergente”, quando esiste finito il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, che spesso si indica semplicemente come $\lim x_n$;
- “divergente” quando $\lim x_n = +\infty$ oppure quando $\lim x_n = -\infty$;
- “regolare” quando è convergente oppure divergente;
- “oscillante” quando non è regolare; ossia quando $\lim x_n$ non esiste, né finito né $+\infty$ né $-\infty$.

Ricordiamo che una successione si dice fondamentale o di Cauchy quando

per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ e per ogni $m > 0$ si ha:

$$|x_n - x_{n+m}| < \epsilon.$$

In simboli:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \mid \forall n > N_\epsilon, \forall m > 0 \implies |x_n - x_{n+m}| < \epsilon.$$

Vale:

Teorema 1 *Ogni successione convergente è fondamentale; ogni successione fondamentale è limitata e quindi ogni successione convergente è limitata.*

Naturalmente, esistono successioni limitate e non convergenti. Per esempio la successione di termine generale $x_n = (-1)^n$. Invece:

Teorema 2 *Ogni successione fondamentale è convergente.*

Dim. Accenniamo ai passi cruciali della dimostrazione, che si trova nei testi di Analisi Matematica 1. Sia (x_n) la successione. Prima di tutto si prova che la successione (x_n) ammette s.successioni convergenti. Questo si vede così: dato che una successione fondamentale è limitata, l'immagine di (x_n) , ossia l'insieme $\{x_n\}$ è limitato. Se è finito, almeno uno dei suoi elementi è immagine di infiniti n e quindi la successione (x_n) ha una s.successione (x_{n_k}) costante e quindi convergente, di ciamo ad x_0 . Se l'insieme $\{x_n\}$ è infinito, esso ammette almeno un punto di accumulazione x_0 , per il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Si costruisce quindi una s.successione (x_{n_k}) convergente ad x_0 . L'ultimo passo della dimostrazione consiste nel mostrare che è la successione (x_n) stessa che converge ad x_0 , usando la definizione di successione fondamentale. ■ Una successione (x_n) è crescente quando $n > m$ implica $x_n \geq x_m$; decrecente quando $n > m$ implica $x_n \leq x_m$. Un altro risultato importante da ricordare è il teorema delle funzioni monotone, la cui formulazione particolarizzata al caso delle successioni è la seguente:

Teorema 3 *Sia (x_n) una successione monotona. Esiste $\lim x_n$; ossia, ogni successione monotona è regolare.*

Infine, ricordiamo che se una successione (x_n) è regolare, anche la successione che si ottiene da essa trascurandone un numero finito di termini, ossia $(x_n)_{n>m}$ è regolare, ed ha il medesimo limite¹.

¹in realtà vale di più: ogni sottosuccessione (x_{n_k}) ha il medesimo limite della (x_n) .

1.2 Le serie numeriche

Sia (x_n) una successione di numeri. Per fissare le idee sia $n \geq 1$, ma in modo analogo si può trattare il caso in cui il primo indice sia per esempio 0 o comunque sia diverso da 1. Si chiama serie dei numeri x_n una nuova successione (s_n) costruita come segue:

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \quad s_k = \sum_{n=1}^k x_n, \quad (1.1)$$

ossia, detto in modo più conciso:

$$s_1 = x_1, \quad s_k = s_{k-1} + x_k.$$

I numeri s_n si chiamano le somme parziali della serie². La nuova successione (s_n) si indica anche col simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{o, più semplicemente,} \quad \sum x_n.$$

I numeri x_n si chiamano i *termini* della serie e si dice che x_n è il *termine generale* della serie. Nella definizione precedente niente si richiede al comportamento della successione (x_n) o della successione (s_n) . Se però la successione (s_n) converge allora si dice che *la serie* converge; se la successione (s_n) diverge (a $+\infty$ oppure a $-\infty$) allora si dice che *la serie* diverge (rispettivamente a $+\infty$ oppure a $-\infty$). Se la successione (s_n) è priva di limite, si dice che la serie è oscillante o indeterminata. Una serie si dice regolare quando converge oppure diverge. Il carattere della serie o comportamento della serie è la proprietà di essere convergente, divergente o oscillante. Ricapitolando, se la successione (s_n) converge ad l oppure diverge, dovremmo indicare questo col simbolo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k x_n = \alpha,$$

²La successione $\{s_n\}$ delle somme parziali si costruisce dalla (1.1), conoscendo la successione $\{x_n\}$. E' importante notare che, viceversa, nota la successione $\{s_n\}$, si può ricostruire la successione $\{x_n\}$. Infatti è

$$x_1 = s_1, \text{ e, per } k > 1, x_k = s_k - s_{k-1}. \quad \blacksquare$$

α rispettivamente uguale a l oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Più brevemente si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \alpha \quad \text{o anche} \quad \sum x_n = \alpha .$$

Si dice brevemente che α è la somma della serie. Ovviamente, scambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie, non si cambia nè il comportamento della serie nè la sua somma, nel caso che la serie sia convergente (diremo più avanti cosa accade scambiando tra loro infiniti termini della serie). E' anche vero che, sopprimendo o aggiungendo un numero finito di termini, oppure cambiando il valore di un numero finito di termini, la serie rimane convergente, divergente o oscillante; ossia:

Teorema 4 *Il carattere di una serie non muta alterandone un numero finito di termini.*

Va detto esplicitamente che se la serie è convergente, la somma della serie cambia alterandone un numero finito di termini. Se invece è divergente, la sua somma non cambia.

Inoltre:

Teorema 5 *Se $\sum x_n$ converge allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.*

Dim. Si indichi con $s_k = \sum_{n=1}^k x_n$. L'ipotesi è che la successione (s_k) converge e quindi anche la successione s_{k-1} converge, ed al medesimo limite. Dunque,

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k - \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k-1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k . \quad \blacksquare$$

Di conseguenza:

Esempio 6 La serie di “termine generale” $(-1)^n n$, ossia la serie

$$\sum (-1)^n n$$

non converge. \blacksquare

Invece:

Esempio 7 La successione

$$(q^n)_{n \geq 0}$$

(con $q \in \mathbb{R}$ fissato) si chiama progressione geometrica (di ragione q). La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

si chiama serie geometrica. E' noto che, se $q \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

e quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} 1/(1 - q) & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{oscillante} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che la serie geometrica per definizione inizia con l'indice $n = 0$. Se per qualche ragione si deve iniziare con un primo indice diverso, di ciò va tenuto conto nel calcolo della somma. Per esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 1 = 1. \quad \blacksquare$$

1.2.1 Serie telescopiche

Sia $(b_k)_{k \geq 0}$ una successione e sia

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

(ovviamente definita per $n \geq 1$). Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \tag{1.2}$$

Una serie ottenuta con questo procedimento si chiama serie telescopica. E' facile calcolare le somme parziali di una serie telescopica:

$$s_1 = a_1 = b_1 - b_0, \quad s_2 = a_1 + a_2 = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) = b_2 - b_0$$

e, in generale,

$$s_k = b_k - b_0.$$

Dunque:

Teorema 8 *La serie telescopica costruita sopra converge se e solo se*

$$\lim b_k = l \in \mathbb{R}$$

e in tal caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = l - b_0;$$

diverge se $\lim b_k = +\infty$ oppure se $\lim b_k = -\infty$. La serie è oscillante se e solo se la successione (b_k) è priva di limite.

Esempi

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 9 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Questa serie **diverge**. Infatti,

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n.$$

Sia ha quindi una serie telescopica e

$$\sum_{n=1}^k \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log(k+1) \quad \text{da cui} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esempio 10 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Si vede che questa è una serie telescopica notando che

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = - \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right]$$

e inoltre $b_n = 1/n \rightarrow 0$. Dunque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1.$$

1.2. LE SERIE NUMERICHE

Se per qualche ragione si devono sommare i termini con $n \geq n_0$, allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n_0}.$$

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Decomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{-1}{4} \left[\frac{1}{n + 3/2} - \frac{1}{n + 1/2} \right] = \frac{1}{4} [b_{n+1} - b_n], \quad b_n = \frac{-1}{n + 1/2}.$$

Si tratta quindi di una serie telescopica, la cui somma è $1/6$. ■

Infine:

Esempio 11 Anche la serie seguente è una serie telescopica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log \left[\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/(n-1)}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} \right].$$

Infatti,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/(n-1)}}} = \frac{(n+1)^{1/n}}{n^{1/(n-1)}}$$

e quindi la serie è uguale a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \log(n+1) - \frac{1}{n-1} \log n \right] = \sum_{n=2}^{+\infty} [b_{n+1} - b_n], \quad b_n = \frac{1}{n} \log(n+1).$$

Dunque, la serie converge e la sua somma è $-(1/2) \log 3$. ■

Nonostante gli esempi importanti della serie geometrica e delle serie telescopiche, calcolare esplicitamente le somme parziali di una serie è pressoché impossibile. L'unica cosa che si può fare è dare condizioni per la convergenza o divergenza di serie, e quindi, se già si sa che la serie converge, approssimarne numericamente la somma.

1.3 Criteri di convergenza

Come si è detto, è ben difficile calcolare esplicitamente le somme parziali di una serie. Per questo è necessario conoscere dei criteri che assicurino la convergenza o meno di una serie, senza calcolarne le somme parziali. Dato che la somma di una serie è il limite della successione delle somme parziali, dovremo basarci su criteri per l'esistenza del limite, che non facciano intervenire la preliminare conoscenza del limite stesso. Essenzialmente, questi criteri si riducono a due soli: il teorema di Cauchy per le successioni e il teorema delle funzioni monotone. Esaminiamone le conseguenze per il caso delle serie.

1.3.1 Il teorema di Cauchy per le serie

Vediamo come si trascrive il Teorema di Cauchy nel caso in cui (s_n) è la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_k x_k. \tag{1.3}$$

Sia, per fissare le idee, $m > n$. Allora,

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right|.$$

Possiamo quindi enunciare il *Teorema di* Cauchy come segue:

Teorema 12 *La serie (1.3) converge se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni coppia di indici n, m con*

$$m > n > N_\epsilon$$

vale

$$\left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right| < \epsilon.$$

D'altra parte, notiamo che

$$\left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |x_k|$$

e quindi:

1.3. CRITERI DI CONVERGENZA

Corollario 13 *Se la serie*

$$\sum_k |x_k|$$

converge, anche la serie

$$\sum_k x_k$$

converge.

Dim. Infatti, se $\sum_k |x_k|$ converge, per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per $m > n > N_\epsilon$ si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |x_k| < \epsilon.$$

E quindi anche la serie $\sum_k x_k$ converge, grazie al Teorema 12. ■ Più avanti vedremo una diversa dimostrazione di questo corollario. Si dice che la serie $\sum_k x_k$ converge assolutamente quando è convergente la serie $\sum_k |x_k|$. Il corollario precedente quindi può enunciarsi in questo modo:

Teorema 14 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Questo risultato è molto importante perché la serie $\sum_k |x_k|$ è una serie a termini positivi. Criteri di convergenza facilmente usabili esistono appunto per il caso delle serie a termini positivi, come ora andiamo a vedere.

1.3.2 Monotonia e serie a termini di segno costante

Usando il teorema delle funzioni monotone, è facile vedere che

Teorema 15 *Sia (x_n) una successione a termini positivi. La serie degli x_n converge se e solo se esiste M tale che $s_n < M$ per ogni n .*

Dim. Ricordiamo il significato di $\sum_n x_n$: prima si costruisce la successione

$$s_k = \sum_{n=1}^k x_n$$

e poi si studia il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$. La successione (s_k) è crescente perché, essendo $x_k \geq 0$ per ogni k ,

$$s_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} x_n = \left[\sum_{n=1}^k x_n \right] + x_{k+1} \geq \sum_{n=1}^k x_n = s_k.$$

Dunque la successione (s_k) ammette limite, finito o meno, per il *teorema delle funzioni monotone*. Il limite è finito se e solo se la successione (s_k) è superiormente limitata, ossia se e solo se esiste M tale che $s_k < M$ per ogni k . ■ Il teorema facilmente si estende al caso di successioni a termini negativi oppure definitivamente positive o negative. Inoltre:

Teorema 16 (Teorema del confronto) *siano $\sum x_n$ e $\sum y_n$ due serie a termini positivi, con $x_n \leq y_n$ per ogni n . Allora, se $\sum y_n$ converge, anche $\sum x_n$ converge; se $\sum x_n$ diverge lo stesso fa $\sum y_n$.*

Questo semplice risultato ha come conseguenza due importanti criteri di convergenza per le serie a termini positivi:

Teorema 17 (Criterio della radice) *Sia $x_n \geq 0$ per ogni n :*

- *Se esiste $q \in [0, 1)$ ed esiste N tale che*

$$\sqrt[n]{x_n} < q \quad \forall n > N,$$

allora la serie converge.

- *Se esiste $q > 1$ e se esiste una s.successione (x_{n_k}) tale che*

$$\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > q$$

allora la serie diverge.

Dim. Da $\sqrt[n]{x_n} < q < 1$ segue infatti $x_n < q^n$ e, se $0 \leq q < 1$, la convergenza della serie $\sum x_n$ segue dall'esempio 7 e dal Teorema del confronto. Se per un $q > 1$ vale

$$\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > q \quad \text{ossia} \quad x_{n_k} > q^{n_k}$$

allora³

$$\lim x_{n_k} = +\infty.$$

Di conseguenza il termine generale della serie non tende a zero, e quindi la serie non converge. ■ Si ha inoltre:

Teorema 18 (Criterio del rapporto) *Se vale definitivamente*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q < 1 \tag{1.4}$$

allora $\sum x_n$ converge; se $\frac{x_{n+1}}{x_n} > q > 1$ allora $\sum x_n$ diverge.

³per provarlo si usi il teorema di confronto per i limiti.

1.3. CRITERI DI CONVERGENZA

Dim. Proviamo l'asserto nel caso in cui la (1.4) valga per ogni n . Se $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q < 1$ allora $x_2 < qx_1$, $x_3 < qx_2 < q^2x_1$ e, in generale, $x_n < q^{n-1}x_1$. Si sa che se $0 \leq q < 1$ allora $\sum x_1q^n = x_1 \sum q^n$ converge, si veda l'esempio 7. L'asserto segue quindi dal Teorema del confronto. In modo analogo si vede il secondo asserto. ■ Ricordando i teoremi sui limiti, si può enunciare il corollario seguente:

Corollario 19 Sia $\sum x_n$ una serie a termini positivi. Vale:

- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q < 1$ allora la serie converge;
- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = q < 1$ allora la serie converge;
- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q > 1$ allora la serie diverge;
- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = q > 1$ allora la serie diverge.

Concludiamo con un esempio:

Esempio 20 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}. \quad (1.5)$$

Mostriamo che questa serie è divergente. Si noti che per ogni $x \geq -1$ vale

$$x \geq \log(1+x).$$

Infatti, la funzione $\log(1+x)$ è concava e quindi ha grafico che sta sotto a ciascuna delle sue tangenti; e $y = x$ è la tangente nell'origine. In particolare vale

$$\frac{1}{n} \geq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Abbiamo visto che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

diverge, si veda l'esempio 9. Dunque, per confronto, anche la serie (1.5) diverge⁴. ■ La serie (1.5) si chiama *serie armonica*. Si osservi che il carattere della serie armonica non può determinarsi usando il criterio del rapporto oppure quello della radice. Infatti, nel caso della serie armonica,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

⁴L'esempio 24 presenta una diversa dimostrazione di questo fatto.

All'esempio 24 vedremo una serie di termine generale x_n che è convergente e tale che anche per essa vale

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1, \quad \lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Combinando questi due esempi si ha:

niente può dedursi dai criteri della radice e del rapporto, se il numero q che compare in tali criteri è uguale ad 1.

Le serie a termini positivi hanno una notevole proprietà, che non è condivisa dalle generiche serie a termini di segno variabile: se si altera l'ordine di infiniti termini di una serie si trova una nuova serie, che generalmente ha un comportamento diverso da quello della serie di partenza. Invece:

Teorema 21 *Due serie a termini positivi, con gli stessi elementi in ordine diverso, hanno la medesima somma.*

La formula di Stirling

Per ragioni che vedremo, molto spesso il termine generale di una serie contiene dei fattoriali. I fattoriali hanno un "buon comportamento" rispetto al rapporto, nel senso che permettono facilmente di fare semplificazioni. Invece, il criterio della radice sembra difficile da usare in presenza dei fattoriali. In realtà non è così grazie alla formula di Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{ossia} \quad \lim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1. \quad (1.6)$$

La dimostrazione si trova nei testi di Analisi Matematica 1.

1.3.3 Il test di MacLaurin

Consideriamo le somme parziali di una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esse sono

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 &= a_1 \cdot 1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \\ &\vdots & \end{aligned}$$

1.3. CRITERI DI CONVERGENZA

Queste espressioni si possono interpretare come somma di aree di rettangoli interpretando 1 come misura della base ed a_n come misura dell'altezza.

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n = \int_1^k a(x) dx$$

ove $a(x)$ è la funzione costante a tratti

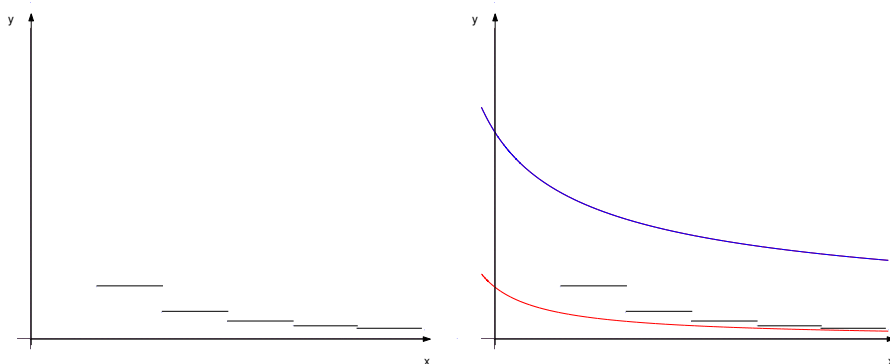
$$a(x) = a_n \quad \text{se} \quad 1 \leq n \leq x < (n+1).$$

Dunque, la somma della serie è l'integrale improprio di $a(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \int_1^{+\infty} a(x) dx.$$

Pensiamo ora ai rettangoli messi come in figura 1.1, a sinistra, e supponiamo

Figura 1.1: Il test di MacLaurin



di poter trovare due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, che prendono valori maggiori o uguali a zero e tali che inoltre valga

$$x \in [n, n+1) \implies g(x) \leq a_n \leq f(x).$$

Si veda la figura 1.1, a destra. In tal caso si ha

$$\int_1^k g(x) dx \leq s_k \leq \int_1^k f(x) dx.$$

La serie è a termini positivi e quindi regolare; le funzioni sono non negative e quindi ammettono integrale improprio finito o meno. Dunque, dal teorema di confronto per i limiti, si ha

$$\int_0^{+\infty} g(x) \, dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x) \, dx .$$

Ricapitolando,

- Se $\int_1^{+\infty} g(x) \, dx = +\infty$ allora la serie diverge;
- Se $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx < +\infty$ allora la serie converge. In questo caso si trovano anche stime, da sotto e da sopra, per la somma della serie.

Il caso tipico in cui quest'argomento si applica facilmente è il caso in cui esiste una funzione $g(x)$ definita su $[0, +\infty)$, **decescente** e inoltre

$$a_n = g(n) .$$

In questo caso,

$$x \in [n, n+1) \implies g(x) \leq a_n = g(n) \leq g(x-1) . \quad (1.7)$$

Definiamo, per $x \geq 0$,

$$f(x) = g(x-1)$$

e notiamo che la (1.7) si scrive

$$g(x) \leq a_n = g(n) \leq f(x) \quad x \in [n, n+1) .$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) \, dx &= \int_1^{+\infty} g(x-1) \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx + \int_1^{+\infty} g(x) \, dx , \\ \int_1^{+\infty} g(x) \, dx < +\infty &\iff \int_1^{+\infty} f(x) \, dx < +\infty . \end{aligned}$$

Ossia, nel caso descritto, i due integrali impropri hanno il medesimo comportamento e questo comportamento è ereditato dalla serie. Possiamo quindi enunciare:

Teorema 22 (Test di MacLaurin) *Sia $g(x)$ una funzione non negativa e decrescente definita su $[0, +\infty)$. Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n) .$$

1.3. CRITERI DI CONVERGENZA

Le sue somme parziali verificano

$$\int_1^k g(x) dx \leq s_k = \sum_{n=1}^k a_n \leq \int_0^1 g(x) dx + \int_1^k g(s) ds. \quad (1.8)$$

In particolare, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$$

converge se e solo se

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

L'interesse di questo teorema sta nel fatto che talvolta l'integrale di $g(x)$ può esplicitamente calcolarsi mediante il calcolo delle primitive; e comunque esistono test efficienti per lo studio della convergenza o divergenza degli integrali impropri.

Esempio 23 Si sa già che la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

converge, come si vede dal criterio di MacLaurin. Infatti, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$$

ha integrale improprio convergente:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_2^T \frac{1}{x \log^2 x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log T} \right] = \frac{1}{\log 2}.$$

Procedendo in modo analogo⁵ si provi invece che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty. \quad \blacksquare$$

⁵si usi

$$\frac{d}{dx} \log [\log x] = \frac{1}{x \log x}.$$

Esempio 24 Si calcola immediatamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\gamma} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \gamma > 1 \\ = +\infty & \text{se } \gamma \leq 1. \end{cases}$$

Dunque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\gamma}$$

converge per $\gamma > 1$, diverge altrimenti. ■

Possiamo combinare l'esempio 24 col criterio di confronto, ottenendo:

Corollario 25 Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Vale:

- se esistono $M > 0$ e $\gamma > 1$ tali che

$$0 \leq a_n \leq M \frac{1}{n^\gamma},$$

allora la serie converge.

- se esistono $m > 0$ e $\gamma \leq 1$ tali che

$$a_n \geq m \frac{1}{n^\gamma}$$

allora la serie diverge.

In particolare, possiamo enunciare:

Se $a_n \geq 0$ e se esiste $\gamma > 1$ tale che

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right), \tag{1.9}$$

allora la serie $\sum a_n$ converge.

Per ora, stiamo lavorando con serie a termini positivi, ma non abbiamo scritto esplicitamente questa condizione perché vedremo, al Corollario 27, che il test precedente vale per ogni serie.

1.3.4 Serie a termini di segno qualsiasi

Sulle serie a termini di segno qualsiasi, limitiamoci ad osservare due proprietà. Si è già detto che se la serie $\sum |x_n|$ converge, si dice che la serie $\sum x_n$ converge assolutamente. Ricordiamo, dal teorema 15:

Teorema 26 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Ricordiamo ora che $f = o(g)$ quando f/g è un infinitesimo, e ciò accade se e solo se $|f|/|g|$ è un infinitesimo. Quindi:

Corollario 27 *Se esiste $\gamma > 1$ tale che $a_n = o(\frac{1}{n})$, allora la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, ed è quindi convergente.*

Infine, si dice che una serie è a segni alterni se ha forma

$$\sum (-1)^n x_n \quad \text{con } x_n > 0; \quad (1.10)$$

ossia se gli addendi si susseguono cambiando segno ad ogni passo. Esiste, per le serie a segni alterni, una notevole condizione sufficiente di convergenza, e anche una stima per la somma della serie:

Teorema 28 (Criterio di Leibniz) *Se valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$
- la successione $\{x_n\}$ è decrescente, ossia $x_n \geq x_{n+1} \geq 0$ per ogni n

allora la serie a segni alterni (1.10) converge; inoltre, detta s la somma della serie, per ogni n vale:

- la differenza

$$s - \sum_{n=1}^k (-1)^n x_n$$

ha segno opposto ad x_k ; ossia, l'approssimazione è per eccesso se l'ultimo termine sommato è positivo; per difetto se è negativo.

- Vale la stima

$$\left| s - \sum_{n=1}^k x_n \right| \leq |x_{k+1}|.$$

La dimostrazione della convergenza è nell'Appendice 1.8.2.

Esempio 29 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Questa serie si chiama *serie di Mengoli*. Il criterio di Leibniz mostra che questa serie converge. La somma della serie è nota:

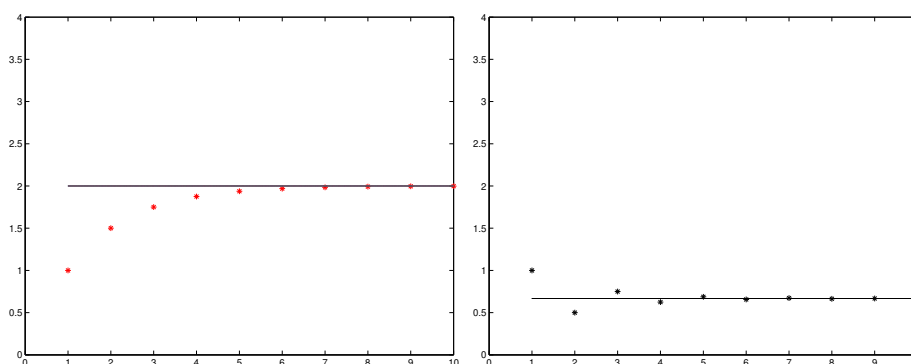
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2.$$

Il Teorema 28 dà anche una stima dell'errore che si commette sommando N termini: l'errore è minore di $1/(n+1)$. ■

1.4 Alcuni esempi numerici

Le figure 1.2, 1.3 e 1.4 mostrano alcuni esempi numerici di somme parziali di serie convergenti. Le serie sono specificate nelle intestazioni delle figure.

Figura 1.2: $\sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n = 2$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1/2)^n = 2/3$ a destra

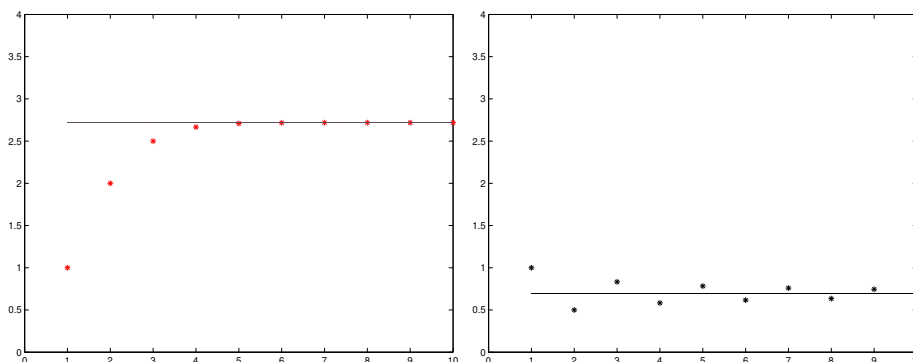


1.5 Convergenza condizionata ed incondizionata

Il concetto di serie generalizza quello di somma finita. In una somma finita il risultato non dipende dall'ordine degli addendi (proprietà commutativa dell'addizione).

1.5. CONVERGENZA CONDIZIONATA ED INCONDIZIONATA

Figura 1.3: $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n! = e$ a sinistra, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/n = \log 2$ a destra



Nel caso delle serie, l'asserto analogo vale se si scambiano tra di loro un numero finito di termini. E' FALSO se si scambia il posto di infiniti termini. Mostriamo un esempio:

Esempio 30 Consideriamo la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/n$. Si sa che questa serie converge. Mostriamo che è possibile scambiare il posto di infiniti termini, in modo da ottenere una serie divergente a $+\infty$. Ricordiamo per questo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge e quindi anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$$

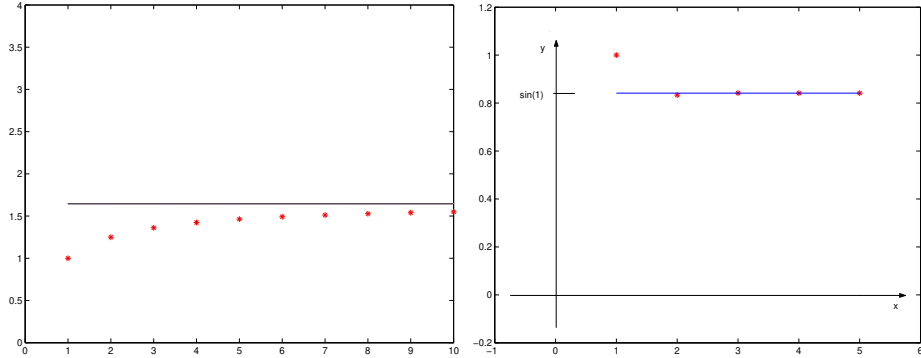
diverge. Conviene vedere una dimostrazione di questo fatto, diversa da quella già vista: consideriamo

$$\sum_{n=k}^{5k} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{5k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} [4k \frac{1}{5k}] = \frac{2}{5}$$

(si è usato il fatto che si sommano $4k$ termini, ciascuno dei quali è maggiore di $1/5k$). Ciò contrasta col criterio di convergenza di Cauchy, e mostra che la serie diverge. Dato che il carattere di una serie non dipende dai primi elementi, anche ciascuna delle serie

$$\sum_{n=R}^{+\infty} \frac{1}{2n} \tag{1.11}$$

Figura 1.4: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ a sinistra e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n / [(2n+1)!] = \sin(1)$ a destra



è divergente. Ora consideriamo la serie di Mengoli, per semplicità cambiata di segno. Essa converge a $-\log 2$. Vogliamo riordinarne gli elementi in modo da trovare una serie divergente a $+\infty$. Per questo sommiamo prima i termini di indice pari, fino ad un certo indice \tilde{k}_1 tale che

$$\sum_{n=1}^{\tilde{k}_1} \frac{1}{2n} > 5.$$

Questa è la somma parziale $s_{\tilde{k}_1}$ della serie riordinata. Sottraiamo quindi il primo termine di indice dispari, ossia 1 ottenendo una somma parziale s_{k_1} tale che

$$s_{k_1} > 4.$$

Consideriamo ora la serie (1.11) con $R = \tilde{k}_1 + 1$. Come si è detto, questa serie diverge. Dunque, possiamo sommare ulteriori termini di indice pari alla somma parziale s_{k_1} già ottenuta, fino a trovare una somma parziale maggiore di 9; sottraiamo quindi il primo dei termini di ordine dispari non ancora usati (che è $1/3$, minore di 1). Si trova una nuova somma parziale, diciamo s_{k_2} , maggiore di 8:

$$s_{k_2} > 8 = 2^3.$$

Continuiamo a sommare termini di indice pari (e quindi positivi) fino ad avere una somma parziale maggiore di $2^4 + 1$ e quindi sottraiamo il primo termine di indice dispari non usato (che è certamente minore di 1, infatti è $1/5$). Si trova una somma parziale s_{k_3} tale che

$$s_{k_3} > 2^4.$$

1.5. CONVERGENZA CONDIZIONATA ED INCONDIZIONATA

Procedendo in questo modo si trova un riordinamento che conduce ad una serie divergente a $+\infty$. ■

Si potrebbe mostrare che per ogni scelta di l è possibile riordinare la serie di Mengoli in modo tale da trovare una serie convergente ad l , inclusi $l = +\infty$ ed $l = -\infty$, o anche in modo da trovare una serie oscillante. Diciamo che una serie converge incondizionatamente quando una serie converge ad l e inoltre quando qualunque serie ottenuta riordinandone gli elementi converge al medesimo numero l . La convergenza incondizionata si caratterizza come segue:

Teorema 31 (**Teorema di Dirichlet**) *Una serie converge incondizionatamente se e solo se converge assolutamente. Se ciò non accade è possibile riordinare gli elementi della serie in modo da cambiare il carattere della serie, e anche in modo da ottenere una serie convergente ad un qualsiasi numero assegnato, o divergente a $+\infty$ oppure a $-\infty$.*

In particolare:

Corollario 32 *Ogni serie a termini di segno costante converge incondizionatamente.*

1.5.1 Serie dipendenti da un parametro e serie di funzioni

Torniamo a considerare la serie geometrica,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Questa serie dipende dal parametro q e, come si è visto, converge se $|q| < 1$, diverge se $q \geq 1$ ed oscilla se $q \leq -1$. Facendo variare il parametro q , ciascuno degli addendi viene ad essere una funzione di q ,

$$f_n(q) = q^n.$$

Dunque, la serie geometrica può intendersi come **serie di funzioni**. In generale, data la successione $(f_n(x))$ i cui elementi sono funzioni (tutte con lo stesso dominio) si chiama *serie di* funzioni la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La somma della serie si calcola **punto per punto**; ossia, per ogni fissato valore di x si calcola la somma della serie di numeri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Il dominio comune alle

funzioni $f(q) = q^n$ è \mathbb{R} , ma abbiamo notato che la serie geometrica converge (ad $1/(1 - q)$) soltanto per $|q| < 1$. Dunque, in generale, il dominio su cui è definita la somma di una serie di funzioni è **più piccolo** del dominio comune delle funzioni. Le serie di funzioni si studieranno al Capitolo 2. Va tenuta presente la loro definizione per capire alcune sottigliezze del paragrafo 1.6.

1.6 Operazioni algebriche e serie

Il concetto di “serie” estende quello di “somma finita”. Le somme finite godono di utili proprietà, come per esempio la proprietà distributiva del prodotto sulla somma, la proprietà associativa e “dissociativa”. Ci possiamo chiedere se le analoghe proprietà valgono per le serie. Per questo dobbiamo tener conto di due problemi:

- la “somma di somme finite” non dipende dall’ordine degli addendi:

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + b_1 + a_2 + b_2.$$

Si sa già che la somma della serie varia cambiando l’ordine dei suoi termini. Quindi dovremo aspettarci che una proprietà analoga non valga necessariamente per le serie.

- la somma di serie è definita tramite il concetto di limite; **le relazioni tra limiti ed operazioni sono dissimmetriche**. Di ciò dobbiamo tener conto per enunciare i risultati relativi alle serie.

Queste osservazioni suggeriscono di elencare prima le relazioni tra limiti ed operazioni sia nella versione “giusta” che nella versione “sbagliata”:

GIUSTA	SBAGLIATA
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 1 La somma dei limiti è uguale al limite della somma </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 1 Il limite della somma è uguale alla somma dei limiti </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 2 il prodotto dei limiti è uguale al limite del prodotto </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 2 il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 3a Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $a_n \rightarrow 0$ anche $\gamma_n a_n \rightarrow 0$. </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 3a Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $\{\gamma_n a_n\}$ converge, anche $\{a_n\}$ converge. </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> 3b Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $a_n \rightarrow 0$ anche $\gamma_n a_n \rightarrow 0$. </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> 3b Sia $\{\gamma_n\}$ limitata. Se $\{a_n\}$ converge, anche $\{\gamma_n a_n\}$ converge. </div>

Ricordiamo brevemente perché le affermazioni a destra sono sbagliate: per esempio nel caso **1**, il limite della somma di due funzioni può esistere, senza che le due funzioni individualmente abbiano limite, come è il caso del limite, per $x \rightarrow +\infty$, quando le due funzioni sono

$$f(x) = x^3 + \sin x, \quad g(x) = \frac{x+1}{1-x} \sin x.$$

In questo caso,

$$f(x) + g(x) = \frac{2 \sin x}{1-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = 0.$$

Questo limite **non** è uguale a

$$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] + \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right]$$

per la semplice ragione che i due limiti **non** esistono. Il caso **2**, del prodotto è analogo. Vale la pena però di vedere un caso banale che però può indurre in errore nel caso delle serie: **NON** è vero che la formula seguente vale per **OGNI** numero reale γ :

$$\lim [\gamma f(x)] = \gamma [\lim f(x)].$$

Questa formula vale solo se $\gamma \neq 0$ oppure se $\lim f(x)$ esiste finito, come mostrano gli esempi delle funzioni

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin x.$$

In ambedue i casi, se $\gamma = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\gamma f(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\gamma g(x)] = 0$$

mentre le espressioni

$$\gamma \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \gamma \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

non hanno senso. Vediamo ora il caso **3a**. Chiaramente, da $\gamma_n a_n \rightarrow 0$ non si può dedurre la convergenza a zero di $\{a_n\}$: si consideri il caso $\gamma_n \rightarrow 0$ ed $a_n \equiv 1$. Il caso **3b**: si consideri l'esempio della successione $\{a_n\}$ con $a_n = (n-1)/(n+1)$, convergente ad 1, mentre $\gamma_n = (-1)^n$. La successione $\{\gamma_n a_n\}$ è oscillante. Richiamato ciò, definiamo:

Somma di serie

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right] + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n).$$

Prodotto di una serie per un numero

$$\alpha \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n).$$

In queste definizioni, l'ordine degli addendi è quello indicato. Supponiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = l, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = m.$$

Allora:

1) somma di serie. Vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = l + m$$

purché uno almeno dei due limiti sia un numero oppure sia l che m siano ambedue $+\infty$ oppure $-\infty$.

2) prodotto di un numero per una serie. La definizione ha senso (e l'uguaglianza vale) solo se $\alpha \neq 0$ oppure se la serie converge.

1.6. OPERAZIONI ALGEBRICHE E SERIE

La definizione di prodotto di serie è più complessa e si vedrà nel paragrafo 1.7. Si potrebbe anche provare:

Teorema 33 Sia $\sum a_n = l \in \mathbb{R}$ e sia $a_n > 0$ per ogni n . Sia $\{\gamma_n\}$ una successione limitata. Allora, la serie $\sum \gamma_n a_n$ converge.

Gli esempi seguenti mostrano i problemi che si possono incontrare usando le operazioni sulle serie senza le dovute cautele:

Esempio 34 Consideriamo la serie seguente:

$$\sum c_n, \quad c_n = 0.$$

Ovviamente la somma della serie è 0. Scrivendo

$$c_n = a_n + b_n, \quad a_n = (-1)^n, \quad b_n = -(-1)^n$$

si potrebbe essere tentati di usare una specie di “regola dello scomponendo” e scrivere

$$\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n.$$

Ovviamente questo non ha senso, perché le due serie a destra non convergono; e quindi non definiscono numeri che si possano sommare. Un esempio analogo, un po’ più riposto, è quello delle serie

$$\sum a_n, \quad \sum b_n, \quad a_n = \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \frac{n(\sqrt{n}-n)}{n^3+8}.$$

Le due serie non convergono mentre la serie

$$\sum [a_n + b_n]$$

converge. ■

La regola del prodotto sembra “più innocua” nel senso che sembra più difficile sbagliare. In realtà anche questa regola è fonte di errori, come mostra l’esempio seguente:

Esempio 35 Sia x un parametro reale. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{1/2}(1+nx^2)}. \quad (1.12)$$

Si lascia per esercizio di provare che la serie converge per ogni x . Si noti che essa certamente converge per $x = 0$ perché in tal caso tutti i termini della serie

sono nulli. Però, sembra del tutto naturale mettere in evidenza x portandolo fuori dal segno di serie, scrivendo

$$x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}(1+nx^2)} \right]$$

e magari studiando la convergenza della serie “piú semplice”

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}(1+nx^2)}.$$

Si dimentica in questo modo che il parametro x può essere nullo. Se $x \neq 0$ questa serie converge e il procedimento seguito, di mettere in evidenza x , è corretto. Se però $x = 0$, l’ultima serie scritta non converge, mentre la (1.12) ovviamente converge. L’errore è consistito nel “mettere in evidenza” il fattore 0 dai termini della serie, errore favorito dal fatto che il fattore è stato indicato col generico simbolo x . ■

Ci sono anche altri errori nei quali si può cadere trattando le operazioni sulle serie senza la dovuta attenzione:

Esempio 36 Un modo veloce di “calcolare” la somma della serie geometrica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

è il seguente:

$$S = 1 + q \left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \right] = 1 + qS$$

Dunque,

$$(1 - q)S = 1 \quad \text{ossia} \quad S = \frac{1}{1 - q}.$$

Questo risultato, apparentemente giusto, è in realtà sbagliato. Infatti da nessuna parte si è usata la condizione $|q| < 1$ e quindi sembrerebbe da questo calcolo che la serie geometrica converga per ogni valore di q , cosa notoriamente falsa. Si lascia per esercizio di trovare l’errore in questo ragionamento. ■

Infine, vediamo una diversa dimostrazione del Teorema 26 basata sulle proprietà illustrate in questo paragrafo: La serie $\sum |x_n|$ è una serie a termini positivi. Se essa converge, dal teorema 15 convergono anche le due serie $\sum y_n$ e $\sum z_n$, con

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{se } x_n > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad z_n = \begin{cases} -x_n & \text{se } x_n < 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, per il teorema 16, converge anche $\sum (y_n - z_n)$ che è $\sum x_n$.

1.7 Prodotto alla Cauchy

Il prodotto di serie può definirsi in vari modi. Quello più utile è il prodotto alla Cauchy. L'espressione del prodotto alla Cauchy può sembrare macchinosa, ma se ne capisce la ragione se si considera l'esempio di un prodotto di **polinomi**. Consideriamo il caso del prodotto di due polinomi di grado 4. Il prodotto

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)$$

è la somma di tutti i possibili addendi $a_j b_k x^{k+j}$ con $0 \leq j \leq 4$, $0 \leq k \leq 4$. Raccogliendo i coefficienti degli addendi del medesimo grado il prodotto si scrive come

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 \\ & + (a_1 b_0 + b_0 a_1) x \\ & + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 \\ & + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) x^3 \\ & + (a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4) x^4. \end{aligned}$$

Posto $x = 1$, il prodotto

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

si trova scritto come segue:

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 \\ & + (a_1 b_0 + b_0 a_1) \\ & + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \\ & + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) \\ & + (a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4). \end{aligned}$$

Ciò suggerisce le due definizioni seguenti:

- Si chiama convoluzione delle due successioni (a_n) e (b_n) la successione (c_n) con

$$c_n = \sum_{r=0}^n a_{n-r} b_r = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

- Si chiama prodotto alla Cauchy delle due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{1.13}$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{r=0}^n a_{n-r} b_r.$$

Osservazione 37 Se l'indice di una, o ambedue, le serie non parte da zero, la formula del prodotto alla Cauchy si intende scritta aggiungendo un numero finito di termini tutti nulli, in modo da far partire gli indici da 0. ■

La convergenza di ambedue le serie (1.13) non implica la convergenza del loro prodotto alla Cauchy. Vale invece:

Teorema 38 *Le due serie (1.13) convergano, ed abbiano somma rispettivamente α e β . Allora:*

- *se le due serie convergono ambedue assolutamente, anche il loro prodotto alla Cauchy converge assolutamente ad $\alpha\beta$.*
- *se una delle due serie converge e l'altra converge assolutamente, il prodotto alla Cauchy converge ad $\alpha\beta$, in generale non assolutamente.*

Concludiamo con un esempio che mostra due serie convergenti (non assolutamente), il cui prodotto alla Cauchy non converge.

Esempio 39 Consideriamo la serie (convergente per il criterio di Leibniz)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

e calcoliamone il prodotto alla Cauchy con se stessa. Notiamo che l'indice di questa serie parte da 1 invece che da zero e quindi la formula del prodotto alla Cauchy va lievemente modificata come detto nell'osservazione 37:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{\sqrt{n-r}} \frac{(-1)^r}{\sqrt{r}} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{nr - r^2}} \right].$$

Si vede facilmente che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{nx - x^2}}$$

è crescente per $1 < x < n/2$ e decrescente per $n/2 < x < n - 1$ e quindi ha minimo per $x = 1$ e per $x = n - 1$. Il minimo vale $1/\sqrt{n-1}$. Dunque

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{nr - r^2}} \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}} :$$

il termine generale del prodotto alla Cauchy non converge a zero e quindi la serie ottenuta come prodotto alla Cauchy non converge. ■

1.8 Appendici

1.8.1 Appendice: ancora sul test di MacLaurin

Il test di MacLaurin può ulteriormente precisarsi notando che la (1.8), ossia

$$\int_1^k g(x) dx \leq s_k = \sum_{n=1}^k a_n \leq \int_0^1 g(x) dx + \int_1^k g(x) dx,$$

si può anche scrivere come

$$0 \leq \left[\sum_{n=1}^k a_n \right] - \int_1^k g(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$$

e che, al crescere di k , la successione

$$k \longrightarrow \left\{ \left[\sum_{n=1}^k a_n \right] - \int_1^k g(x) dx \right\}$$

decresce, e quindi ammette limite compreso tra 0 ed $\int_0^1 g(x) dx$. Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\sum_{n=1}^k a_n \right] - \int_1^k g(x) dx \right\} - \left\{ \left[\sum_{n=1}^{k+1} a_n \right] - \int_1^{k+1} g(x) dx \right\} \\ &= -a_{k+1} + \int_k^{k+1} g(x) dx = \int_k^{k+1} [g(x) - g(k+1)] dx \geq 0. \end{aligned}$$

Ossia, al crescere di k , i valori delle somme parziali e dell'integrale "si avvicinano" anche se l'integrale improprio (e quindi anche la serie) diverge. Quest'osservazione può usarsi per ottenere "stime asintotiche" delle somme parziali della serie per grandi valori di k . Mostriamo questo considerando l'esempio della serie armonica. Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{se } 0 \leq x > 1. \end{cases}$$

La serie armonica è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$$

e quindi diverge, dal criterio di MacLaurin. E' questo un modo di vedere che la serie armonica diverge, diverso da quello visto all'esempio 1.5. Però, il criterio di MacLaurin dà un'informazione in più:

$$0 \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \int_1^k \frac{1}{x} dx \leq \int_0^1 g(x) dx,$$

ossia

$$0 \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \log k \leq 1.$$

E inoltre,

$$\gamma = \lim_k \left[\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \log k \right]$$

esiste, $\gamma \in (0, 1)$. Il numero γ così definito si chiama *costante d'Eulero*.

1.8.2 La dimostrazione del Teorema di Leibniz

La dimostrazione di questo teorema, e di teoremi più generali di Abel e di Dirichlet che ora vedremo, è interessante perché permette di introdurre il concetto di sommazione per parti, da confrontare con quello di integrazione per parti. Nonostante che il carattere di una serie non dipenda dai primi addendi, in quest'appendice è bene specificare con cura i valori degli indici. Quindi scriveremo per esempio $\{b_n\}_{n \geq 1}$ per intendere che il valore del primo indice della successione è 1. Inoltre, se $\{b_n\}_{n \geq 1}$ indica una successione, con $\{B_n\}_{n \geq 1}$ intendiamo la successione delle sue somme parziali:

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Sia $\{b_n\}_{n \geq 1}$ una successione. Con $\{\Delta b_n\}_{n \geq 1}$ intendiamo la successione $\{(b_{n+1} - b_n)\}_{n \geq 1}$. Sia $1 \leq r < k$. La formula di *sommazione per parti* è:

$$\sum_{n=r}^k (\Delta b_n) c_n = [b_{k+1} c_k - b_r c_r] - \sum_{n=r}^k b_{n+1} \Delta c_n.$$

Questa formula si dimostra facilmente scrivendo la somma per esteso:

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^k (\Delta b_n) c_n &= \\ (b_{r+1} - b_r) c_r + (b_{r+2} - b_{r+1}) c_{r+1} + (b_{r+3} - b_{r+2}) c_{r+2} + \cdots + (b_k - b_{k-1}) c_{k-1} + (b_{k+1} - b_k) c_k \\ &= -b_r c_r + [-b_{r+1} (c_{r+1} - c_r) - b_{r+2} (c_{r+2} - c_{r+1}) - \cdots - b_k (c_k - c_{k-1})] + b_{k+1} c_k \\ &= b_{k+1} c_k - b_r c_r - \sum_{n=r}^{k-1} b_{n+1} \Delta c_n = -b_{k+1} [c_{k+1} - c_k] + b_{k+1} c_{k+1} - b_r c_r - \sum_{n=r}^{k-1} b_{n+1} \Delta c_n \\ &= b_{k+1} c_{k+1} - b_r c_r - \sum_{n=r}^k b_{n+1} \Delta c_n. \end{aligned}$$

Ci serve inoltre un risultato preliminare:

Lemma 40 Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ una serie tale che la successione $\{B_n\}$ delle somme parziali sia limitata e sia $\{c_n\}$ una successione positiva decrescente. Allora, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(\Delta c_n)$$

converge assolutamente.

Dim. Si noti che la successione $\{c_n\}_{n \geq 1}$ è convergente, $\lim c_n = l$, per il teorema della funzione monotona, e quindi limitata. Anzi,

$$0 \leq c_n \leq c_1.$$

Inoltre, $c_{n+1} - c_n < 0$. L'asserto del lemma segue perché ora proviamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} |B_n \Delta c_n| < +\infty$. Infatti,

$$\sum_{n=1}^k |B_n \Delta c_n| = \sum_{n=1}^k |B_n| (c_n - c_{n+1}) \leq M \sum_{n=1}^k (c_n - c_{n+1}) = M (c_1 - c_{k+1}) \leq M c_1. \quad \blacksquare$$

Osservazione 41 Si noti che il Lemma 40 non richiede la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. \blacksquare

Consideriamo ora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ e notiamo che

$$b_n = B_n - B_{n-1} = \Delta B_{n-1}.$$

Introducendo i numeri d_n definiti da

$$d_{n-1} = c_n \quad \text{ossia} \quad d_n = c_{n+1}$$

e usando la regola di sommazione per parti con primo indice 2, le sue somme parziali si rappresentano come segue:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k b_n c_n &= b_1 c_1 + \sum_{n=2}^k (\Delta B_{n-1}) c_n = b_1 c_1 + \sum_{n=2}^k (\Delta B_{n-1}) d_{n-1} \\ &= B_1 c_1 + \sum_{n=2}^k (\Delta B_{n-1}) d_{n-1} = B_1 c_1 + [B_{k+1} d_{k+1} - B_2 d_2] - \sum_{n=2}^k B_{n+1} \Delta d_n \\ &= B_1 c_1 + [B_{k+1} c_{k+2} - B_2 c_3] - \sum_{n=2}^k B_{n+1} \Delta c_{n+1}. \end{aligned}$$

Dunque, per garantire la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$, basta dare condizioni che garantiscano l'esistenza dei due limiti

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k c_{k+1}, \quad (1.14)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=2}^k B_{n+1} \Delta c_{n+1} \right]. \quad (1.15)$$

Un criterio per questo è dato dal Teorema di Dirichlet, che immediatamente implica il criterio di Leibniz:

Teorema 42 (Teorema di Dirichlet) Sia $\{c_n\}_{n \geq 1}$ una successione a valori positivi, decrescente e convergente a zero. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ una serie tale che $\{B_n\}_{n \geq 1}$ rimane limitata. Allora, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ converge.

Dim. Infatti, il limite (1.14) è nullo perché $\{B_n\}$ è limitata e $c_n \rightarrow 0$. Il limite (1.15) esiste per il Lemma 40. ■ Dimostrazione del criterio di convergenza di Leibniz
La dimostrazione del criterio di Leibniz per la serie a segni alterni

$$\sum_n (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0$$

con $\{a_n\}$ decrescente e convergente a zero, segue immediatamente: basta definire $b_n = (-1)^n$ e $c_n = a_n \rightarrow 0$ e notare che

$$B_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ +1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

e quindi $\{B_n\}_{n \geq 1}$ rimane limitata. Una diversa condizione per l'esistenza dei due limiti (1.14) e (1.15) è data dal teorema seguente:

Teorema 43 (Teorema di Abel) Sia $\{c_n\}_{n \geq 1}$ una successione a valori positivi e decrescente. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ una serie convergente. Allora, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n c_n$ converge.

Dim. Per ipotesi, esistono ambedue i limiti $\lim c_k$ e $\lim B_k$. Dunque, esiste il limite (1.14). La successione $\{B_k\}$, essendo convergente è anche limitata e quindi il limite (1.15) esiste per il Lemma 40. ■