Capitolo 9

Integrali definiti ed impropri

Erano tali per me queste angustie che sopraggiunta l'invasione dei Francesi, e nella età di soli 20 anni correndo pericolo della libertà e della vita, in quelli orribili frangenti dicevo fra me "questo tuttavia è meno male che lo stare alla scuola". Monaldo Leopardi, *Autobiografia.*

L'integrale è un numero che si associa ad una funzione definita su un intervallo (e dotata di opportune proprietà). Nel caso che la funzione prenda valori positivi, il suo integrale definisce l'area della parte di piano compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse.

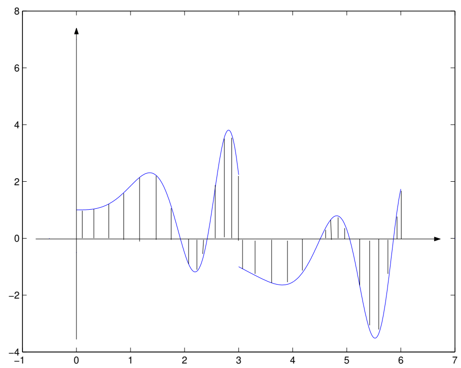
9.1 La definizione dell'integrale

Sia $f(x)$ una funzione **limitata e definita su un intervallo** $[a, b]$**.** Dunque, assumiamo che esista un numero M tale che $|f(x)| < M$ per ogni $x \in [a, b]$. Si noti che **non richiediamo** che la funzione $f(x)$ prenda valori maggiori o uguali a zero. Chiamiamo $\boxed{\textit{trapezoide}}$ individuato dalla funzione $f(x)$ l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$a \leq x \leq b\,, \quad \text{e} \quad \begin{cases} f(x) \leq y \leq 0 & \text{se} \quad f(x) \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0\,, \end{cases}$$

si veda la figura 9.1, nella quale $[a, b] = [0, 6]$. Il trapezoide è la parte di piano tratteggiata. Vogliamo **definire** un numero che corrisponda al concetto

Figura 9.1: Nel piano cartesiano, il trapezoide relativo alla funzione f è individuato dalla parte di piano compresa tra il grafico di f e l'intervallo $[a, b]$ su cui f è definita



intuitivo di **area** del trapezoide di $f(x)$, se $f(x)$ prende valori non negativi; oppure, in generale, alla **differenza** tra le aree della parte di trapezoide **sopra** l'asse delle ascisse e di quella che sta **sotto.** Per questo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ con un numero finito di punti **equidistanti**[1].

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b\,,$$
$$\text{con } x_k = a + k\tfrac{b-a}{n}, \quad 0 \le k \le n\ \ .$$

In questo modo,

$$[a, b] = [x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}) \cup [x_{n-1}, x_n]\,.$$

Abbiamo cioè costruito una $\boxed{\textit{partizione}}$ di $[a, b]$ di tipo particolare: abbiamo rappresentato $[a, b]$ come unione di intervalli (disgiunti) chiusi a sinistra ed aperti a destra (salvo l'ultimo che è anche chiuso a destra). Indichiamo con $\mathcal{P}_n$ la partizione introdotta sopra e chiamiamo $\boxed{\textit{finezza}}$ della partizione il numero $\delta_n = (b - a)/n$, che è la distanza tra due punti consecutivi della partizione. Data la partizione $\mathcal{P}_n$, indichiamo con m_i ed M_i i numeri

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\nolimits_{x\in[x_i,x_{i+1})} f(x)\,,\\ M_i &= \sup\nolimits_{x\in[x_i,x_{i+1})} f(x)\,. \end{aligned}$$

[1]Stiamo presentando una definizione semplificata di integrale. La semplificazione consiste nel richiedere che i punti siano equidistanti. Vedremo in seguito che questa condizione, che semplifica le definizioni (ma non le dimostrazioni, che però verranno omesse), è poco appropriata per il calcolo numerico degli integrali.

Ricordiamo che la funzione $f(x)$ è limitata: $|f(x)| < M$. Dunque, per ogni indice i si ha:

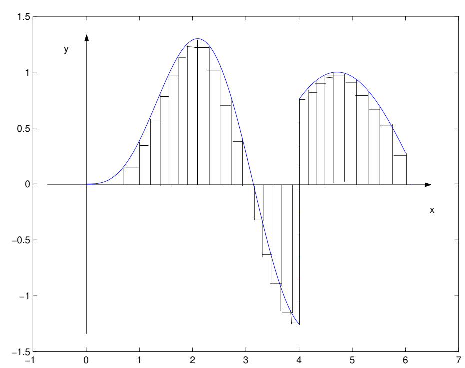
$$-M \leq m_i \leq M_i \leq M\,.$$

Associamo ora alla partizione $\mathcal{P}_n$ due numeri, s_n ed S_n,

$$\begin{aligned} s_n &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,,\\ S_n &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Questi numeri rappresentano somme di "aree" di rettangoli, l'area essendo presa col segno **negativo** se il rettangolo è **sotto l'asse delle ascisse.** La figura 9.2 illustra i rettangoli che si usano per costruire la s_n quando i punti di divisione x_i sono i numeri interi i. Si faccia la figura analoga per S_n. E'

Figura 9.2: La sommatoria, per $i = 0, \ldots, (n-1)$ dell'area dei rettangoli di base x_i, x_{i+1} e altezza m_i è una approssimazione per difetto dell'area del trapezoide relativo a f.



chiaro che

$$-M(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a) \tag{9.2}$$

(la disuguaglianza intermedia segue dal fatto che ciascun addendo di s_n è minore o uguale all'addendo corrispondente di S_n). **Per per la proprietà di Dedekind** esistono i numeri

$$s = \sup_n\{s_n\}\,, \qquad S = \inf_n\{S_n\}\,.$$

Si potrebbe provare che

$$s \leq S \qquad \text{ossia} \qquad S - s \geq 0\,. \tag{9.3}$$

Più precisamente:

$$-M(b-a) \leq s_n \leq s = \sup_n \{s_n\} \leq \inf_n \{S_n\} = S \leq S_n \leq M(b-a)\,.$$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN
Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e **limitata.** Se accade che

$$s = S \qquad \text{ossia} \qquad s = \sup_n \{s_n\} = \inf_n \{S_n\} = S$$

il numero $s = S$ si chiama *integrale di Riemann* (o semplicemente *integrale*) di $f(x)$ su $[a, b]$; e la funzione $f(x)$ si dice *integrabile* su $[a, b]$. L'integrale di Riemann si chiama anche *integrale definito*

L'integrale di Riemann di $f(x)$ su $[a, b]$ si indica col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 177 Si noti il contrasto tra i termini *integrale definito* ed *integrale indefinito.* Il primo indica un **numero** mentre il secondo indica l'**insieme** di **tutte le primitive** di $f(x)$. ■

Usando la definizione, si verifichi che una funzione costantemente uguale a c su $[a, b]$ ha integrale uguale a $c \cdot (b-a)$, ossia **uguale all'area del rettangolo di base** $[a, b]$ **ed altezza** c**,** se $c \geq 0$; all'opposto dell'area se $c < 0$. L'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ si interpreta come **area** del trapezoide quando accade che $f(x) \geq 0$; come **differenza** tra l'area della parte di trapezoide che sta **sopra** l'asse delle ascisse e quella che sta **sotto** altrimenti.

Osservazione 178 (Sulla notazione) La notazione $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ha una ragione storica e va presa come unico blocco: non si possono separare $\int_a^b$ e $\mathrm{d}x$. Anzi, sarebbe anche lecito scrivere semplicemente $\int_a^b f$ invece di $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Il simbolo più complesso aiuta a ricordare certe formule che vedremo, sia in questo che in corsi successivi. Inoltre, sottolineiamo che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è **un numero.** La "variabile" x non ha alcun ruolo e si chiama la $\boxed{\textit{variabile muta d'integrazione}}$ "Muta" nel senso che il simbolo prescelto per essa non influisce sul valore dell'integrale, e può essere cambiato a piacere. Quindi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ \ldots$$

E' però importante capire subito un uso della variabile muta d'integrazione e del simbolo $\mathrm{d}x$. Talvolta si ha una famiglia di funzioni $x \mapsto f(x,y)$, una funzione di $x \in [a,b]$ per ogni valore del parametro y. Può essere necessario integrare ciascuna di queste funzioni, ottenendo un numero per ogni valore di y; ossia ottenendo una funzione della variabile y:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

E' la presenza della notazione $\mathrm{d}x$ che ci dice quale è la variabile muta d'integrazione e quale è il parametro. ■

Esempio 179 Quest'esempio mostra la debolezza della definizione che abbiamo scelto: per calcolare

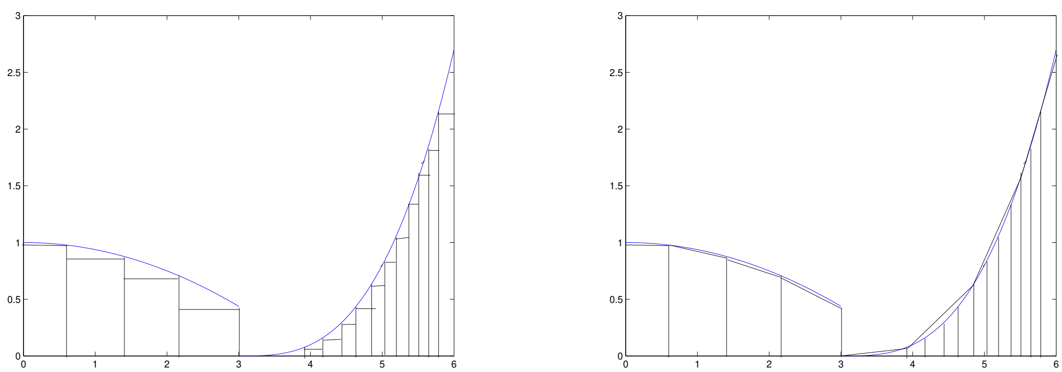
$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

basta usare **un solo rettangolo.** Non c'è nessun bisogno di suddividere il trapezoide in "tanti" rettangoli. Ciò fa capire che dovendo calcolare numericamente l'integrale di una funzione il cui grafico è quello in figura 9.3, a sinistra, converrà usare una partizione non uniforme dell'intervallo $[a,b]$, mettendo pochi punti di suddivisione dove la funzione è circa costante e tanti punti dove varia velocemente. La figura 9.3, a destra, mostra che un metodo ancora più efficiente consiste nell'approssimare l'area da calcolare mediante trapezi, invece che mediante rettangoli. Nella figura a destra abbiamo disegnato i trapezi usando meno punti di suddivisione di quanti ne avessimo usati per i rettangoli per non confondere il lato del trapezio col grafico della funzione; e ciò nonostante è evidente che l'approssimazione mediante "pochi" trapezi è migliore di quella con "tanti" rettangoli. ■

Una definizione più generale. L'esempio 179 mostra l'utilità per il calcolo numerico di approssimare il valore dell'integrale mediante partizioni dell'intervallo $[a,b]$ ottenute con punti non equidistanti. Si potrà quindi

Figura 9.3: Nella figura a sinistra, l'area del trapeziode è approssimata per difetto dalla somma delle aree dei rettangoli come in Figura 9.2. Nella figura a destra, il segmento congiungente i punti $(x_i, f(x_i)$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1})$ è il lato obliquo del trapezio rettangolo con base maggiore $f(x_i)$ e base minore $f(x_{i+1})$ (o viceversa).

(a) (b)



cercare di ripetere la costruzione dell'integrale usando partizioni con punti non equidistanti, costruendo le somme s ed S con formule analoghe a quelle delle s_n ed S_n e mandando a zero la $\boxed{\textit{finezza}}$ della partizione, ossia la massima delle distanze tra i punti consecutivi della partizione. Potrebbe venire il dubbio che in questo modo si ottenga un numero diverso da quello che si trova mediante partizioni con punti equidistanti. Senza indugiare a provarlo, diciamo che ciò non accade.

9.1.1 Proprietà dell'integrale

Le proprietà cruciali dell'integrale sono la **linearità,** la **monotonia** e l'**additività.**

Linearità dell'integrale. In generale si chiama "lineare" una trasformazione che si distribuisce sulla somma e da cui "si portano fuori" le costanti moltiplicative; ossia una trasformazione, diciamo $\mathcal{J}$, con questa proprietà:

$$\mathcal{J}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\mathcal{J}f+\beta\mathcal{J}g\,.$$

L'integrale di Riemann ha questa proprietà. Infatti, vale:

Teorema 180 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili sul medesimo intervallo $[a,b]$ e siano α e β due numeri reali. In tal caso la funzione*

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile su $[a, b]$ e inoltre vale

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx \, .$$

La dimostrazione non è difficile ma un po' macchinosa. Questa proprietà si chiama *linearità dell'integrale* Ricordiamo che

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \, , \qquad f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

da cui

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) \, , \qquad |f(x)| = f_+(x) - f_-(x) \, .$$

Si potrebbe provare:

Teorema 181 *La funzione $f(x)$, limitata su (a, b), è integrabile se e solo se sono integrabili ambedue le funzioni $f_+(x)$ ed $f_-(x)$.*

Ciò combinato con la proprietà di linearità dell'integrale dà:

Teorema 182 *Se $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ allora $|f(x)|$ è integrabile su $[a, b]$. Inoltre, valgono le uguaglianze*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f_+(x) \, dx + \int_a^b f_-(x) \, dx \, ,$$
$$\int_a^b |f(x)| \, dx = \int_a^b f_+(x) \, dx - \int_a^b f_-(x) \, dx \, .$$

Monotonia dell'integrale. E' pressoché immediato dalla definizione di integrale:

Teorema 183 *Sia $f(x)$* integrabile e positiva. *Allora,*

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \, .$$

Sia ora

$$g(x) \leq f(x) \qquad \text{ossia} \qquad f(x) - g(x) \geq 0 \, .$$

Usando la linearità si vede che

$$0 \leq \int_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Dunque:

Corollario 184 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili sul medesimo intervallo $[a, b]$ e se $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora si ha*

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{monotonia dell'integrale}}$ Usando l'integrabilità del valore assoluto (Teorema 182) e la disuguaglianza

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si trova

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Additività dell'integrale. Sia $f(x)$ definita su $[a, b]$ e sia $c \in (a, b)$. Vale

Teorema 185 *La funzione $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ se e solo se è integrabile sia su $[a, c]$ che su $[c, d]$ e in tal caso si ha*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{additività dell'integrale}}$ Grazie a questo teorema, possiamo definire la funzione integrale di $f(x)$. Sia $f(x)$ integrabile su $[a, b]$. Per ogni $x \in (a, b]$ calcoliamo la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Poniamo inoltre

$$F(a) = 0$$

cosìche $F(x)$ è definita su $[a, b]$. La funzione $F(x)$ si chiama la $\boxed{\textit{funzione integrale}}$ di $f(x)$.

Integrale ed operazioni. La proprietà di linearità mostra le relazioni tra le operazioni di somma e di moltiplicazione per costanti e il calcolo dell'integrale. Il Teorema 182 mostra che se $f(x)$ è integrabile allora $f_+(x)$, $f_-(x)$ e $|f(x)|$ sono integrabili, senza dare modo di calcolarne l'integrale. Vale anche:

Teorema 186 *Si ha:*

- *se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili su $[a, b]$ anche $f(x)g(x)$ è integrabile su $[a, b]$;*
- *se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili su $[a, b]$ e inoltre se $g(x)$ è continua e non si annulla su $[a, b]$, allora anche $f(x)/g(x)$ è integrabile su $[a, b]$.*

Va detto però che non c'è alcuna relazione semplice tra gli integrali di due funzioni e quello del loro prodotto o del loro quoziente.

9.1.2 Classi di funzioni integrabili

Valgono i due teoremi seguenti:

Teorema 187 *Se $f(x)$ è continua sull'intervallo* limitato e chiuso $[a, b]$*, essa è integrabile su $[a, b]$ e quindi su ciascun suo sottointervallo.*

Teorema 188 *Se $f(x)$ è monotona sull'intervallo* limitato e chiuso $[a, b]$*, essa è integrabile su $[a, b]$ e quindi su ciascun suo sottointervallo.*

Combinando questi teoremi con la proprietà di additività dell'integrale, segue che se l'intervallo $[a, b]$ è unione di due o più sottointervalli su ciascuno dei quali la funzione ha restrizione continua oppure monotona, allora la funzione $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. **Dimostrazione del Teorema 188.** Supponiamo

per fissare le idee che la funzione sia crescente su $[a, b]$. Notiamo che la funzione è limitata su $[a, b]$. Infatti vale

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) .$$

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali $[x_i, x_{i+1})$ e consideriamo le somme (9.1), ossia

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \text{ove } m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x),$$
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \text{ove } M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x).$$

cosìche

$$m_i = f(x_i) , \qquad M_i \leq f(x_{i+1}) .$$

Ricordiamo che l'integrale esiste se

$$s = S \quad \text{ove } s = \sup_n\{s_n\},\ S = \inf_n\{S_n\}$$

e che in generale (si veda la (9.3)):

$$0 \leq S - s\,.$$

Dobbiamo quindi provare che **la differenza $S - s$ non è strettamente positiva.** Ossia[2], dobbiamo provare che per ogni $\epsilon > 0$ vale

$$0 \leq S - s < \epsilon\,.$$

Notiamo che

$$s_n \leq s \leq S \leq S_n \implies 0 \leq S - s \leq S_n - s_n\,.$$

Dunque, basta provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un opportuno $N = N_\epsilon$ tale che

$$S_N - s_N < \epsilon\,.$$

Si ricordi che l'intervallo $[a, b]$ si è diviso in n parti uguali, ossia $x_{i+1} - x_i = (b - a)/n$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}
S_n - s_n &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - f(x_i)) \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots \\
&+ (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + (f(x_n) - f(x_{n-1}))\Big] = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]\,.
\end{aligned}$$

Queste relazioni valgono per ogni n. Fissato $\epsilon > 0$ esiste N tale che

$$\frac{b-a}{N}\left[f(b) - f(a)\right] < \epsilon$$

e quindi vale

$$0 \leq S - s \leq S_N - s_N \leq \epsilon\,,$$

come volevamo. ■

[2] si ricordi la proprietà di Archimede.

9.1.3 La media integrale

Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia

$$m = \inf_{[a,b]} f(x)\,, \qquad M = \sup_{[a,b]} f(x)\,.$$

Consideriamo le due funzioni

$$h(x) \equiv m\,, \qquad k(x) \equiv M$$

cosìche

$$h(x) \le f(x) \le k(x)\,.$$

La monotonia dell'integrale mostra che

$$m(b-a) = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x = M(b-a)\,;$$

ossia **esiste** $c \in (m, M)$ **tale che:**

$$c(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il numero c è ovviamente definito da

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

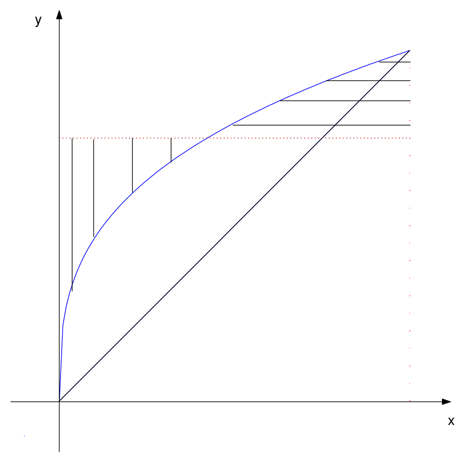
La sua proprietà essenziale è di essere compreso tra $\inf_{[a,b]} f(x)$ e $\sup_{[a,b]} f(x)$. Il numero c si chiama la $\boxed{\textit{media integrale}}$ di $f(x)$. Sia ora $f(x)$ **continua** su $[a,b]$. Ricordando il teorema dei valori intermedi si ha:

Teorema 189 *Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, la sua media integrale è uno dei valori della funzione; ossia esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$(b-a)f(x_0) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{ossia} \quad f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Se $f(x) \ge 0$, il significato del numero c, media integrale di $f(x)$ su $[a,b]$, è il seguente: **il numero c è l'altezza del rettangolo di base $[a,b]$, la cui area è uguale a quella del trapezoide.** Ciò è illustrato in figura 9.4. La figura mostra anche la bisettrice del primo quadrante che non ha alcun ruolo nella media integrale. E' disegnata solo per sottolineare il fatto che l'unità di misura è la medesima sui due assi.

Figura 9.4: La media integrale



9.2 Integrale orientato

Nel simbolo dell'integrale di Riemann

$$\int_a^b$$

necessariamente $a \leq b$. Vogliamo ora definire questo simbolo anche nel caso $a > b$. Ciò si fa semplicemente ponendo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Uno dei due membri è definito e l'uguaglianza definisce l'altro. Si noti che se $a = b$ si trova

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

L'integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

cosìintrodotto, senza che debba essere $a \leq b$, si chiama $\boxed{\textit{integrale orientato}}$ Per esso valgono tutte le proprietà viste per l'integrale di Riemann, salvo la monotonia che richiede un po' di cautela, perché le disuguaglianze cambiano verso quando si cambia segno ai due membri. Quindi:

la disuguaglianza

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{NON VALE PER L'INTEGRALE ORIENTATO}}$ perché il secondo membro può essere negativo ed il primo positivo. Essa va sostituita da

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| .$$

Invece, la definizione della media integrale rimane la stessa anche per l'integrale orientato: la media integrale sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1 è

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s$$

e tale numero è compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori che la funzione prende sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1, sia quando $x_0 < x_1$ che quando $x_1 < x_0$.

Invece, per l'integrale orientato vale la proprietà di additività

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

senza alcun vincolo sull'ordine dei tre numeri a, b e c. Usando ciò, si può definire la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

sia per $x \ge a$ che per $x < a$ (ovviamente, se è definita $f(x)$). Infatti

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s & \text{se} x \ge a \\ & (\int_a^x \text{ indica l'integrale di Riemann}), \\ -\int_x^a f(s)\,\mathrm{d}s & \text{se} x < a \\ & (\int_x^a \text{ indica l'integrale di Riemann}). \end{cases}$$

In particolare,

Teorema 190 *Se $f(x) \ge 0$ è definita su $\mathbb{R}$ e* positiva, *la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

è crescente su $\mathbb{R}$.

9.3 La funzione integrale

Ricordiamo che se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ essa è integrabile su ogni sottointervallo. In particolare è integrabile su $[a,x]$ e quindi possiamo definire la funzione integrale di $f(x)$, ossia la funzione

$$F(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \quad x\in(a,b]\,,\qquad F(a)=0\,.$$

Se accade che la funzione $f(x)$ è definita anche a sinistra di a, la funzione integrale si definisce anche a sinistra di a, facendo intervenire l'integrale orientato:

$$\text{se } x<a \text{ allora}\quad F(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s=-\int_x^a f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Se la funzione $f(x)$ ha segno costante, la funzione integrale è monotona:

Teorema 191 *Se $f(x)$ è positiva la funzione integrale è crescente mentre se $f(x)$ è negativa allora la funzione integrale è decrescente.*

Dim. Proviamo la crescenza, supponendo che $f(x)$ sia positiva. Sia $x_1<x_2$ e proviamo che $F(x_1)\le F(x_2)$. Ciò è ovvio se $x_1<a<x_2$ perché in tal caso $F(x_1)\le 0\le F(x_2)$. Quindi consideriamo i due casi $a\le x_1<x_2$ ed $x_1<x_2\le a$:

caso $a\le x_1<x_2$: usando l'additività dell'integrale si ha

$$F(x_2)=\int_a^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\ge\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s=F(x_1)$$

perché $\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\ge 0$.

caso $x_1<x_2\le a$: la definizione di integrale orientato e l'additività dell'integrale danno

$$\begin{aligned}\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s&=-\int_{x_1}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s=-\left(\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_{x_2}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\\&=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s-\int_{x_2}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_a^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\\&=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+F(x_2)\le F(x_2)\end{aligned}$$

perché $x_1<x_2$ e quindi $-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\le 0$. ■

Proviamo il lemma seguente:

Lemma 192 *Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia $x_0 \in [a,b]$. Si ha:*

$$\lim_{h \to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds = 0$$

(se $x_0 = a$ allora $h > 0$ mentre se $x_0 = b$ allora $h < 0$).

Dim. Ricordiamo che una funzione integrabile è per definizione limitata:

$$|f(x)| \le M \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dunque si ha

$$0 \le \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \le \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(s)|\,\mathrm{d}s \right| \le \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M\,\mathrm{d}s \right| = M|h|\,.$$

L'asserto segue dal teorema di confronto dei limiti. ■

Conseguenza di questo risultato è che **la funzione integrale è continua** anche se $f(x)$ può non essere continua:

Teorema 193 *La funzione $F(x)$ è continua su $[a,b]$.*

Dim. Va provato:

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s \right\} = 0$$

(se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ allora $h > 0$ oppure $h < 0$). L'additività dell'integrale permette di scrivere

$$\begin{aligned}\int_a^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s &= \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per il Lemma 192, come si voleva. ■

Proviamo ora:

Lemma 194 *Sia $f(x)$ continua in $x_0 \in [a,b]$. Allora,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds = f(x_0)\,.$$

Dim. Va provato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$ si ha

$$f(x_0) - \epsilon < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s < f(x_0) + \epsilon\,. \tag{9.4}$$

Usando la continuità di $f(x)$ in x_0 si trova: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $s \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha:

$$f(x_0) - \epsilon < f(s) < f(x_0) + \epsilon\,.$$

Scegliamo h con $|h| < \delta$. La monotonia dell'integrale dà (sia se $h > 0$ che se $h < 0$, usando la definizione di integrale orientato):

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \epsilon)\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \epsilon)\,\mathrm{d}s$$

ossia, se $|h| < \delta$ si ha

$$f(x_0) - \epsilon \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \le f(x_0) + \epsilon\,,$$

che è quanto volevamo provare. ■

Se $f(x)$ è una funzione integrabile qualsiasi, la funzione $F(x)$ può non essere derivabile. Invece, se $f(x)$ è continua la funzione $F(x)$ è derivabile:

Teorema 195 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se $f(x)$ è continua su $[a, b]$, la funzione $F(x)$ è derivabile su (a, b) e vale*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)\,, \quad F'_+(a) = f(a)\,, \quad F'_-(b) = f(b)\,.$$

Ossia, *la funzione integrale di una funzione continua $f(x)$* ammette derivata[3] in ogni punto di $[a, b]$, ed $F'(x)$ è la funzione integranda $f(x)$. Di conseguenza,

Corollario 196 *Ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive.*

Dimostrazione del Teorema 195. La funzione $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e quindi il Lemma 194 può applicarsi in ciascun punto di $[a, b]$. Dunque, per ogni $x \in [a, b]$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[F(x+h) - F(x) \right] = F'(x) \end{aligned}$$

[3]direzionale negli estremi a e b

(intendendo che $F'(x)$ indica la derivata destra se $x = a$ e la derivata sinistra se $x = b$). ■

L'importanza pratica di questo risultato sta nel fatto che, se $f(x)$ è continua, il calcolo dell'integrale definito può ottenersi tramite il calcolo delle primitive. Ossia, la $F(x)$, funzione integrale, è una particolare primitiva di $f(x)$: è quella primitiva che si annulla in a. Ricordiamo ora che due primitive diverse su un intervallo (a, b) di una medesima funzione hanno differenza costante. Quindi, se mediante le tecniche di calcolo delle primitive, si è trovata una **qualsiasi** primitiva $F(x)$ della funzione continua $f(x)$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Lo scarto $F(b) - F(a)$ si indica anche col simbolo

$$F\Big|_a^b$$

e quindi si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^b\,.$$

9.3.1 Integrazione per sostituzione

Il teorema fondamentale del calcolo integrale permette di correlare integrali calcolati mediante trasformazioni del dominio di integrazione. Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua primitiva. Come si è visto,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,. \tag{9.5}$$

Sia $\phi(t)$ una funzione continua su un intervallo $[\alpha, \beta]$ e derivabile su (α, β). Supponiamo inoltre che $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Quindi esistono punti c e d in $[a, b]$ tali che

$$\phi(\alpha) = c\,, \qquad \phi(\beta) = d\,.$$

E'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

e quindi

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ma,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi si ha anche

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

ossia

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{9.6}$$

Si noti che questa formula vale in generale per l'integrale orientato. Anzi, anche se l'integrale a sinistra di (9.6) è un'integrale di Riemann, può ben essere che gli estremi dell'integrale di destra coincidano o anche che sia $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$.

Osservazione 197 Se l'integrale da calcolare è (9.5) allora dovremo identificare un intervallo $[\alpha, \beta]$ ed una trasformazione $\phi(t)$ tale che $\phi(\alpha) = a$ e $\phi(\beta) = b$ (o viceversa) e tale che l'integrale a sinistra in (9.6) sia più facile da calcolare di quello a destra. Non abbiamo richiesto che la funzione $\phi(t)$ sia iniettiva. Se lo è allora la formula (9.6) si può scrivere nella forma

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \quad \blacksquare$$

9.4 Integrale improprio

Si chiama $\boxed{\textit{integrale improprio}}$ quello che si ottiene estendendo l'integrale di Riemann a funzioni dotate di asintoto verticale oppure definite su una semiretta (o ambedue le cose) mediante il calcolo di un limite. Conviene vedere separatamente i due casi seguenti, che verranno poi combinati insieme. Introduciamo un termine: sia $f(x)$ definita su un intervallo (a, b), limitato o meno. Non si richiede che la funzione sia limitata. La funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{localmente integrabile}}$ quando è integrabile (nel senso di Riemann e quindi anche limitata) su ogni intervallo $[c, d]$ **limitato e chiuso** contenuto in (a, b).

9.4.1 L'integrale su una semiretta

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita sulla semiretta $[a, +\infty)$ ed integrabile (nel senso di Riemann e quindi limitata) su ogni intervallo $[a, T]$. E'

Tabella 9.1: I casi dell'integrale improprio

Se	**l'integrale improprio si dice**	**si scrive**
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x = l \in \mathbb{R}$	$\boxed{\textit{integrale convergente}}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = l$
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$	$\boxed{\textit{integrale divergente}}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$ non esiste	$\boxed{\textit{non esiste}}$ $\boxed{\textit{indeterminato}}$ $\boxed{\textit{oscillante}}$	

cosìpossibile definire la funzione

$$F(T) = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

Consideriamo

$$\lim_{T\to+\infty} F(T)\,.$$

Se questo limite esiste, finito o meno, si **definisce**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty} F(T)$$

e si chiama $\boxed{\textit{integrale improprio}}$ (su $(a,+\infty)$) di $f(x)$. Si hanno i casi elencati nella tabella 9.1

9.4.2 L'integrale in presenza di un asintoto verticale

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia definita su $(a, b]$ ed abbia asintoto verticale $x = a$:

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty\,.$$

Supponiamo inoltre che sia localmente integrabile su $(a, b]$. In questo caso, si può definire la funzione

$$F(\epsilon) = \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni $\epsilon \in (a, b]$ e si può studiarne il limite per $\epsilon \to a+$. Se questo limite esiste lo indicheremo col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to a+} \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

e lo chiameremo ancora $\boxed{\textit{integrale improprio}}$ su (a, b). Se il limite è finito diremo che l'integrale improprio *converge;* se è $+\infty$ oppure $-\infty$ diremo che *diverge*. Se il limite non esiste, diremo che l'integrale improprio *non esiste* (equivalentemente, *oscilla* o *è indeterminato*). Ossia, per l'integrale improprio su $(a, b]$ si può fare una tabella analoga alla 9.1.

9.4.3 Casi più generali

I due casi precedenti possono combinarsi tra loro. Per esempio:

- se $f(x)$ è localmente integrabile su $(a, +\infty)$, si possono studiare i due limiti

  $$\lim_{\epsilon\to a} \int_\epsilon^c f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

  con lo stesso c. Usando l'additività dell'integrale, si mostra che se i due limiti esistono finiti o infiniti **di segno concorde** la loro somma non dipende dalla scelta di $c \in (a, +\infty)$ e si scrive

  $$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\lim_{\epsilon\to a} \int_\epsilon^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$

- in modo analogo si procede se la funzione ha più asintoti verticali;

- in modo analogo, se $f(x)$ è localmente integrabile su $\mathbb{R}$, scriveremo

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{S\to-\infty} \int_S^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

(i limiti devono essere finiti o infiniti di segno concorde). E' importante sottolineare che i due limiti, per $S \to -\infty$ e per $T \to +\infty$, **vanno calcolati indipendentemente.** Per esempio, la funzione $f(x) = \arctan x$ non ha integrale improprio su $\mathbb{R}$ perché i due limiti precedenti sono il primo $-\infty$ e il secondo $+\infty$. Però,

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \arctan x \, \mathrm{d}x = 0$$

perché la funzione è dispari e quindi

$$\int_{-T}^{T} \arctan x \, \mathrm{d}x = 0$$

per ogni T.

9.5 Criteri di convergenza per integrali impropri

In pratica, il calcolo di un integrale improprio è difficile e non si riesce a fare esplicitamente. Si danno però dei criteri che assicurano la convergenza o divergenza dell'integrale, che conviene esaminare prima nel caso di funzioni positive.

9.5.1 Criteri di convergenza: funzioni positive su semirette

Per fissare le idee, supponiamo di lavorare su una semiretta verso destra, $[a, +\infty)$ e di avere una funzione **che prende valori maggiori o uguali a zero e che è integrabile su ogni intervallo limitato** $[a, b]$**.** Consideriamo la funzione

$$T \longmapsto \int_{a}^{T} f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Questa è una funzione **crescente** di T perché la $f(x)$ è positiva. Quindi, per il teorema delle funzioni monotone,

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{a}^{T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

esiste, finito o meno. Dunque,

Teorema 198 *Se la funzione $f(x)$ prende valori maggiori o uguali a zero, l'integrale improprio*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx$$

converge oppure diverge. Esso non può essere oscillante.

Quindi, se possiamo dire che esiste M tale che

$$\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x < M$$

per ogni T allora l'integrale converge; se invece la funzione di T è minorata da una funzione divergente a $+\infty$, l'integrale improprio diverge. Quest'osservazione si usa confrontando la funzione $f(x)$ con funzioni di "forma più semplice" il cui integrale si sa calcolare. Infatti:

Teorema 199 (di confronto per gli integrali impropri) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ localmente integrabili su $[a, +\infty)$. Valga inoltre*

$$0 \le f(x) \le g(x)\,.$$

Allora:

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty\,;$$
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty\,.$$

Siamo quindi ridotti a cercare delle funzioni di confronto $g(x)$ abbastanza semplici. Ricordando che gli infinitesimi fondamentali di confronto per $x \to +\infty$ sono le funzioni

$$g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$$

è naturale confrontare con queste funzioni, i cui integrali si calcolano facilmente:

$$\begin{cases} \text{se}\gamma \neq 1 & \int_a^T \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{1}{T^{\gamma-1}} - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right] \\ \text{se}\gamma = 1 & \int_a^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log T - \log a \end{cases}$$

Dunque, si ha la situazione riassunta nella tabella 9.2. Inoltre,

Teorema 200 *la funzione $f(x)$ (non negativa) abbia parte principale $\frac{M}{x^\gamma}$ per $x \to +\infty$. I due integrali impropri di $f(x)$ e di $1/x^\gamma$ hanno lo stesso comportamento.*

Dim. Infatti, l'ipotesi implica che $M \neq 0$ e inoltre

$$f \sim \frac{M}{x^\gamma} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Tabella 9.2: integrali impropri su una semiretta

$0 \le f(x) \le M\frac{1}{x^\gamma}$	$\boxed{\gamma > 1}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$
$f(x) \ge M\frac{1}{x^\gamma}$	$\boxed{\gamma \le 1 \text{ e } M > 0}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

e quindi in particolare, per x abbastanza grande, vale

$$\frac{1}{2}\frac{M}{x^\gamma} \le f(x) \le 2\frac{M}{x^\gamma}\,. \quad \blacksquare$$

Si noti che la condizione

$$0 \le f(x) < M\frac{1}{x^\gamma}$$

si verifica in particolare se $f(x)$ è (positiva ed) **un infinitesimo** per $x \to +\infty$, di **ordine maggiore** di $1/x^\gamma$. Dunque,

Teorema 201 *Se $f(x) \ge 0$ ed inoltre per $x \to +\infty$ la funzione $f(x)$ è un infinitesimo di ordine* maggiore *di $1/x^{1+\epsilon}$ con $\boxed{\epsilon > 0}$, ossia*

$$f(x) = \ \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{1+\epsilon}}\right) \qquad \textit{per } x \to +\infty \textit{ e con } \epsilon > 0\ \ ,$$

allora l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

è convergente.

E' importante notare che nell'enunciato precedente la condizione $\epsilon > 0$ è cruciale. La condizione che $f(x)$ sia infinitesima di ordine **maggiore** ad $1/x$, **con esponente esattamente** 1, **non implica la convergenza dell'integrale.** Per esempio,

$$f(x) = \frac{1}{x\log x} = \text{ o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ma una primitiva di $1/(x\log x)$ è $\log(\log x)$ e quindi

$$\lim_{T\to+\infty}\int_2^T \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty}\left(\log(\log T) - \log(\log 2)\right) = +\infty\,.$$

9.5.2 Criteri di convergenza: funzioni positive su intervalli

Consideriamo il caso in cui $f(x) \geq 0$ su $(a,b]$, con asintoto verticale $x = a$. In questo caso, la funzione

$$\epsilon \longmapsto \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

è **decrescente** e quindi dotata di limite per $x \to a+$, finito o meno. E quindi si può ancora enunciare il teorema del confronto, come segue:

Teorema 202 (di confronto per gli integrali impropri) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ localmente integrabili su $(a,b]$. Valga inoltre*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,.$$

Allora:

$$\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx < +\infty\,;$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty\,.$$

Naturalmente, è ancora naturale scegliere come funzione di confronto gli infiniti campione $f(x) = 1/(x-a)^\gamma$. Vale anche in questo caso

Teorema 203 *la funzione $f(x)$ (non negativa) abbia parte principale $\frac{M}{(x-a)^\gamma}$ per $x \to a$. I due integrali impropri di $f(x)$ e di $1/(x-a)^\gamma$ hanno lo stesso comportamento.*

Tabella 9.3: integrali impropri su un intervallo

$0 \leq f(x) \leq M\frac{1}{(x-a)^{\gamma}}$	$\boxed{\gamma < 1}$	$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$
$f(x) \geq M\frac{1}{(x-a)^{\gamma}}$	$\boxed{\gamma \geq 1 \text{ e } M > 0}$	$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

Quindi, va capito quando diverge oppure converge l'integrale improprio di $\frac{1}{(x-a)^{\gamma}}$. E' ancora vero che l'integrale improprio è divergente se $\gamma = 1$, però **ora le due condizioni $\gamma > 1$ e $\gamma < 1$ hanno ruolo scambiato:**

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\gamma}}\,\mathrm{d}x < +\infty \quad \text{se} \quad \gamma < 1\,, \\ \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\gamma}}\,\mathrm{d}x = +\infty \quad \text{se} \quad \gamma \geq 1\,. \end{cases}$$

Quindi, si può ancora dare una tavola analoga alla 9.2, **ma con versi delle disuguaglianze scambiate.** Si veda la tabella 9.3 (dove $c > a$ e si intende che $f(x)$ è integrabile nel senso di Riemann su $[a+\epsilon, c]$ per ogni $\epsilon > 0$). Si noti che la condizione

$$0 \leq f(x) < M\frac{1}{x^{\gamma}}$$

si verifica in particolare se $f(x)$ è (positiva ed) **un infinito** per $x \to +\infty$, di **ordine inferiore** ad $1/(x-a)^{\gamma}$. Dunque,

Teorema 204 *Se $f(x) \geq 0$ ed inoltre per $x \to a^+$ la funzione $f(x)$ è un infinito di ordine* inferiore *ad $1/(x-a)^{1-\epsilon}$ con $\boxed{\epsilon > 0}$, ossia*

$$f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(x-a)^{1-\epsilon}}\right) \qquad \textit{per } x \to a^+ \textit{ e con } \epsilon > 0\ \ ,$$

allora l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è convergente.

Ripetiamo ancora che se $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore esattamente ad 1 (ossia se nell'enunciato precedente si ha $\epsilon = 0$) niente può affermarsi dell'integrale improprio di $f(x)$.

9.5.3 Il caso delle funzioni che cambiano segno

Ricordiamo le notazioni

$$f_+(x) = \max\{f(x)\,,0\}\,, \qquad f_-(x) = \min\{f(x)\,0\}$$

cosìche

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f(x) - f_-(x)\,.$$

Dunque, se $|f(x)|$ ha integrale improprio convergente, anche le due funzioni $f_+(x)$ e $-f_-(x)$ hanno integrale improprio convergente. E quindi la loro somma $f(x)$ ha integrale improprio convergente. Si può quindi enunciare

Teorema 205 *Una funzione localmente integrabile il cui valore assoluto ha integrale improprio convergente, ha essa stessa integrale improprio convergente.*

E si noti che quest'asserto vale sia su semirette che su intervalli. In sostanza, questo è l'unico criterio (ovviamente solo sufficiente) di cui disponiamo per provare che una funzione di segno variabile ha integrale improprio convergente: si prova che è $\boxed{\textit{assolutamente integrabile}}$ (ossia che il suo valore assoluto è integrabile) usando i criteri noti per le funzioni di segno costante. Se ne deduce che l'integrale improprio della funzione converge.

9.6 Alcuni esercizi

1. Si traccino i grafici delle funzioni

   $$f(x) = \ \mathrm{sgn}\,(\sin x)\,, g(x) = \ \mathrm{sgn}\,(\sin 2x)\,, \quad h(x) = \ \mathrm{sgn}\,(\sin 4x)$$

   e si calcolino gli integrali su $[0,\pi]$ dei loro prodotti.

2. Sia $f(x)$ integrabile su $(-a,a)$ e dispari. Si mostri che $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. Trovare una funzione pari e non nulla, tale che $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, con $a > 0$.

4. **($\star$)** Se esiste, si trovi un esempio di funzione integrabile $f(x) \geq 0$, definita su $[0,1]$, con $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Può essere che $f(x)$ sia continua? (Si ricordi il teorema di permanenza del segno).

5. Sia $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$, con $xf(x) > 0$ per $x \neq 0$. Mostrare che $f(x^2)$ ha integrale strettamente positivo su qualsiasi intervallo.

6. Sia $f(x)$ dispari e continua su $\mathbb{R}$. Mostrare che $\int_{-1}^{1} f(x^3)\,\mathrm{d}x = 0$.

7. Sia $f(x)$ integrabile su $[a, b]$ e non negativa. Si mostri che
$$a \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \le b \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
E se $f(x)$ è negativa?

8. **($\star$)** Si provi che se $f(x)$ è positiva su $\mathbb{R}$ e localmente integrabile e $g(x)$ crescente, allora
$$H(x) = \int_0^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s$$
è crescente. Esaminare cosa può dirsi se $g(x)$ è decrescente, e cosa può dirsi di
$$K(x) = \int_{g(x)}^0 f(s)\,\mathrm{d}s$$

9. I due problemi seguenti sono formulazioni diverse dello stesso fatto:
   - sia $f(x) \in C^1(0, +\infty)$. Calcolare
   $$\int_a^b f'(t) f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   - sia $f(x)$ continua per $t \ge 0$. Mostrare che per ogni $t > 0$ si ha
   $$\int_0^t f(s) \left(\int_0^s f(r)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \ge 0$$
   (è possibile che, con $f(x)$ non nulla, valga l'uguaglianza per un opportuno $t > 0$? E per ogni $t > 0$?) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Mostrare che la disuguaglianza precedente vale anche se $t < 0$ intendendo l'integrale come integrale orientato.

10. **($\star$)** Sia $f(x)$ monotona crescente su $\mathbb{R}$. Mostrare che esiste il limite
$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$
Il limite può essere nullo?

11. La funzione $f(x)$ sia positiva, con integrale improprio convergente su $[0, +\infty)$. Si chiede di sapere se può essere $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$.

12. ($\star$) La funzione $f(x)$ sia positiva, con integrale improprio convergente su $[0, +\infty)$. Si chiede di sapere se deve essere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

13. ($\star$) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n - (1/2^n) < x < n \\ 0 & \quad\text{altrimenti.} \end{cases}$$
Si disegni il grafico di $f(x)$ e (usando la formula (1.6)) si calcoli
$$\int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

14. ($\star$) Si dica se esiste una funzione continua e positiva, con integrale improprio finito su $[0, +\infty)$, ma priva di limite per $x \to +\infty$.

15. Sia
$$\int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = L$$
(L finito o meno). Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x^3(3+\sin x)} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

16. Sia $f(x)$ una funzione per la quale converge l'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Mostrare che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\,\mathrm{d}x$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$. Cosa può dirsi se l'integrale improprio diverge oppure oscilla?

17. Si mostri che $\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$. Spiegare come si trasforma questa formula se l'integrale è sull'intervallo $[a, t]$ con $a \neq 0$ (incluso il caso $a = -\infty$, supponendo la convergenza degli integrali impropri).

18. ($\star$) Si considerino le funzioni definite all'esercizio 26 del Cap. 2, ossia le funzioni definite su $[0,1]$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ n & \text{se} \quad 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{se} \quad 2/n \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Si calcoli $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ e si consideri la successione di numeri $\left\{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$. Se ne calcoli il limite e si rifletta sulla relazione, o mancanza di relazione, che intercorre tra questa successione e il limite di $\{f_n(x)\}$, per ogni $x \in [0,1]$, calcolato all'esercizio 26 del Cap. 2.

19. ($\star$) Una sbarretta di densità variabile è distesa sull'intervallo $[a,b]$ dell'asse x. Sia $\rho(x)$ la densità del punto di ascissa x. In Fisica, si definiscono $\boxed{\textit{massa}}$ e $\boxed{\textit{centro di massa}}$ della sbarra i due numeri seguenti:

$$M = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad x_0 = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si provi che se $\rho(x) = f''(x)$ vale

$$x_0 = \frac{bf'(b) - af'(a) - (\,f(b) - f(a)\,)}{f'(b) - f'(a)}\,.$$

20. Sia $f \in C(a,b)$ e sia

$$S(x) = \frac{\int_a^x xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x}\,, \qquad \forall x \in (a,b)\,.$$

Usando la formula di L'Hospital si provi che

$$\lim_{x\to a} S(x) = a\,;$$

ossia: *il centro di massa di un segmento* $[a,x]$ *tende ad* a *quando la lunghezza del segmento tende a* 0*.*

Appendice A

Glossario

- $\boxed{\textit{Limitazione superiore}}$ di un insieme significa "maggiorante"; per dire "minorante" si dice anche $\boxed{\textit{limitazione inferiore}}$
- Le notazioni seguenti si equivalgono:
$$\sup\{x\,, x\in A\}\,,\quad \sup_{x\in A}\{x\}\,.$$
Analogamente, si equivalgono
$$\max\{x\,, x\in A\}\,,\quad \max_{x\in A}\{x\}\,.$$
In particolare si potrà scrivere:
$$\sup\{f(x)\,, x\in A\}\,,\quad \sup_{x\in A}\{f(x)\}\,;\qquad \max\{f(x)\,, x\in A\}\,,\quad \max_{x\in A}\{f(x)\}\,.$$
- La notazione (x_n) indica la successione $n\to x_n$. Il simbolo $\{x_n\}$ può indicare sia la successione $n\to x_n$ che l'insieme degli elementi x_n, ossia l'immagine della successione. Talvolta una successione si indica col simbolo x_n, senza parentesi, cosìcome si scrive f per indicare la funzione $x\mapsto f(x)$.
- Abbiamo notato che le definizioni di limite si formulano in modo unificato se si usa il linguaggio degli intorni. Però noi abbiamo preferito specificare[1] "$x\to x_0$ con $x_0\in\mathbb{R}$ oppure $x_0=+\infty$ oppure $x_0=-\infty$". Si

[1]noi abbiamo preferito usare x_0 solo nel caso in cui x_0 è un numero, usando lettere greche altrimenti, ma ovviamente ciò è stato fatto solo per fissare le idee.

può abbreviare questa frase introducendo la notazione $\overline{\mathbb{R}}$, ove $\overline{\mathbb{R}}$ indica l'unione di $\mathbb{R}$ e dei due simboli $+\infty$ e $-\infty$. In questo modo, la frase tra virgolette viene compendiata dalla scrittura $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Invece di $\overline{\mathbb{R}}$ si usa anche il simbolo $\mathbb{R}^*$.

- $\boxed{\textit{Successione indeterminata}}$ o $\boxed{\textit{successione oscillante}}$ è una successione priva di limite (per $n \to +\infty$). *Si noti che invece* $\boxed{\text{soluzione oscillante}}$ *di un'equazione differenziale indica una soluzione con infiniti cambiamenti di segno, anche se dotata di limite, come per esempio* $e^{-x} \sin x$.

- $\boxed{\textit{Funzione indeterminata}}$ (per $x \to \alpha$) si usa per dire che $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ non esiste.

- Il punto x_0 si dice
  - $\boxed{\textit{punto estremale}}$,
  - $\boxed{\textit{punto critico}}$,
  - $\boxed{\textit{punto singolare}}$,
  - $\boxed{\textit{punto stazionario}}$,
  - $\boxed{\textit{punto di stazionarietà}}$

  per una funzione $f(x)$ se è un punto interno al dominio di $f(x)$, la $f(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $f'(x_0) = 0$. I punti di massimo e di minimo (locali o globali) di $f(x)$ si chiamano anche "estremi globali" o "estremi locali" della funzione. Fare ben attenzione a non confonderli con gli estremi dell'immagine della funzione!

- Si equivalgono i termini $\boxed{\textit{integrale definito}}$ ed $\boxed{\textit{integrale di Riemann}}$.

- Sia (a, b) un intervallo, limitato o meno. Una funzione si dice $\boxed{\textit{localmente integrabile}}$ su (a, b) quando è integrabile (nel senso dell'integrazione di Riemann) su ogni intervallo limitato e chiuso $[c, d]$ contenuto in (a, b).

- Un integrale improprio si dice $\boxed{\textit{indeterminato}}$ quando non esiste il limite mediante il quale esso è definito; ossia, se per esempio l'integrale improprio da considerare è $\lim_{T\to+\infty} \int_a^T$, quest'integrale è indeterminato quando il limite non esiste.

- Per indicare l'insieme delle primitive, invece di

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

si può anche scrivere

$$\int f\,.$$

Per indicare l'integrale definito, invece di

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

si può anche scrivere

$$\int_a^b f\,.$$

Simboli analoghi possono usarsi anche per gli integrali impropri.