Capitolo 8

Equazioni differenziali

Ebbi dunque il mio relatore, tanto coscienzioso quanto ben disposto; si lasciò sfuggire qualche lacuna nelle dimostrazioni, però mi diede utili consigli sulle virgole. André Weil, *Ricordi di apprendistato, vita di un matematico*

In questo capitolo studiamo tre tipi di equazioni differenziali, ossia equazioni in cui l'incognita è una funzione, e che coinvolgono, insieme alla funzione incognita, anche le sue derivate.

> ATTENZIONE
> Nello studio delle equazioni differenziali è cruciale questo risultato, provato al Teorema 195: *ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive.*

8.1 Introduzione

Le equazioni differenziali sono un argomento importantissimo in tutte le applicazioni della matematica, e molto vasto. Noi ci limitiamo a studiare le equazioni differenziali di tre classi particolari, che ora descriviamo. Diciamo però prima di tutto che, a differenza delle equazioni studiate fino ad ora, l'incognita da determinare quando si "risolve" un'equazione differenziale **è una funzione derivabile.** Le applicazioni fisiche richiedono che tale funzione **sia definita su un intervallo.** Le equazioni differenziali che studieremo hanno infinite soluzioni. Le applicazioni alla fisica richiedono di identificare tra tutte le soluzioni una (o più) che soddisfano certe condizioni accessorie. Noi ci limiteremo a considerare delle condizioni accessorie dette $\boxed{\textit{condizioni iniziali}}$ o anche $\boxed{\textit{condizioni di Cauchy}}$ Vedremo che la soluzione che verifica queste condizioni è unica se valgono opportune ipotesi usualmente soddisfatte nelle applicazioni. Descriviamo ora le equazioni differenziali che studieremo.

Equazioni a variabili separabili. Le equazioni a variabili separabili sono equazioni differenziali **del primo ordine** ossia equazioni in cui compare, insieme alla funzione incognita $x(t)$, anche la sua derivata prima (ma non compaiono derivate successive). Eventualmente dopo opportune manipolazioni, le equazioni a variabili separabili si riconducono alla forma seguente:

$$x'(t) = f(x(t))g(t)\,. \tag{8.1}$$

La proprietà essenziale è che la funzione f non dipende esplicitamente da t mentre la funzione g non dipende da x. Per esempio, **l'equazione differenziale $x' = \sin(tx(t))$ NON è un'equazione a variabili separabili.**

Definizione 162 *Una funzione $x(t)$ si chiama* $\boxed{\text{soluzione}}$ *dell'Eq (8.1) se ha le seguenti proprietà:*

- *è definita su un* **intervallo apero** (a, b) *(limitato o meno);*
- *è di classe $C^1(a, b)$;*
- *sostituita nei due membri di (8.1) verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a, b)$.*

Osservazione 163 (IMPORTANTE) *1.* Come si è detto, la funzione $x(t)$ da determinare **deve essere definita su un intervallo.** Un'equazione a variabili separabili (con $f(x)$ e $g(t)$ continue) ammette infinite soluzioni. E' importante notare che **soluzioni diverse della medesima equazione differenziale possono essere definite su intervalli diversi.**

2. la variabile indipendente è stata indicata con la lettera t perché in pratica indica il tempo. Però la stessa equazione differenziale potrebbe essere scritta con lettere diverse, per esempio

$$y'(x) = f(y(x))g(x)\,.$$

In questo caso la variabile "tempo" si è indicata con la lettera x.

3. La forma (8.1) in cui abbiamo scritto l'equazione differenziale è corretta, ma generalmente non usata. Di regola non si indica la dipendenza della soluzione dalla variabile "tempo" e la (8.1) si scrive usualmente in forma

$$x' = f(x)g(t)\,.$$

E' importante tener conto di ciò per esempio quando si vuol calcolare la derivata seconda di x, che va calcolata usando la regola di derivazione della funzione composta:

$$\begin{aligned} x''(t) &= g'(t)f(x(t)) + g(t)f'(x(t))x'(t) = \\ &= g'(t)f(x(t)) + g^2(t)f'(x(t))f(x(t))\,. \end{aligned}$$

4. La funzione $g(t)$ potrebbe essere costante. In questo caso, inglobando la costante nella funzione $f(x)$, l'equazione differenziale prende forma

$$x' = f(x)$$

e si chiama $\boxed{\textit{autonoma}}$ o $\boxed{\textit{tempo invariante}}$

Il $\boxed{\textit{problema di Cauchy}}$ per la (8.1) consiste nel trovare la soluzione o le soluzioni che verificano la condizione accessoria $x(t_0) = x_0$ ove t_0 ed x_0 sono assegnati. Ossia si chiede di determinare una soluzione il cui grafico contiene il punto (t_0, x_0). Convenzionalmente, t_0 si chiama $\boxed{\textit{istante iniziale}}$ e il problema di Cauchy si chiama anche $\boxed{\textit{problema ai dati iniziali}}$ Il problema di Cauchy per la (8.1) si scrive

$$\begin{cases} x' = f(x)g(t) \\ x(t_0) = x_0\,; \end{cases}$$

Vedremo che se $f(x)$ è una funzione di classe C^1 mentre $g(t)$ è continua, il problema di Cauchy ammette soluzione unica, definita in un intorno di t_0.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono sono le equazioni

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t)$$

usualmente scritte

$$x' = a(t)x + f(t)\,. \tag{8.2}$$

La funzione $a(t)$ si chiama il *coefficiente* dell'equazione differenziale (lineare del primo ordine) mentre $f(t)$ si chiama il *termine noto* Assumeremo che $a(t)$ ed $f(t)$ siano continue[1]. L'equazione differenziale del primo ordine si dice *a coefficiente costante* quando $a(t)$ è costante e si chiama *omogenea* quando $f(t) = 0$. Quando $f(t) \neq 0$ l'equazione si dice *completa* o anche *affine* Data l'equazione affine (8.2), la sua *equazione omogenea associata* è

$$x' = a(t)x\,.$$

Notiamo che un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine

$$x' = a(t)x$$

è anche un'equazione differenziale a variabili separabili. Per definizione, $x(t)$ è una *soluzione* dell'equazione differenziale (8.2) se è di classe C^1 su un **intervallo** (a, b) e se, sostituita nell'equazione, verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a, b)$. Il *problema di Cauchy* per la (8.2) consiste nel cercare la soluzione che soddisfa la condizione accessoria $x(t_0) = x_0$, ossia il cui grafico contiene il punto (t_0, x_0). Esso si scrive

$$\begin{cases} x' = a(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0\,. \end{cases}$$

Vedremo che nel caso delle **equazioni lineari** con coefficienti e termini noti continui su $\mathbb{R}$, il problema di Cauchy **ammette una ed una sola soluzione.** Questa affermazione è analoga a quella fatta per le equazioni differenziali a variabili separabili, ma **c'è una differenza importante:** Nel caso delle equazioni differenziali lineari, le soluzioni del problema di Cauchy sono definite su $\mathbb{R}$. Nel caso delle equazioni a variabili separabili in generale il dominio è un intervallo (diverso da $\mathbb{R}$) anche se il membro destro è definito per ogni x e per ogni t.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Sono le equazioni di forma

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,. \tag{8.3}$$

In quest'equazione, $f(t)$ si chiama il *termine noto* o *forzante* e b, c si chiamano i coefficienti. Noi studieremo solamente le equazioni differenziali

[1] è sufficiente che ammettano primitive, anche in senso generalizzato.

lineari del secondo ordine **a coefficienti costati,** mentre il termine noto potrà essere costante o meno. Ancora, l'equazione si dice $\boxed{\textit{omogenea}}$ se il termine noto è nullo; si dice $\boxed{\textit{affine}}$ o $\boxed{\textit{completa}}$ altrimenti; e l'equazione lineare omogenea del secondo ordine associata alla (8.3) è

$$x'' + bx' + cx = 0\,.$$

Per definizione, $x(t)$ è una $\boxed{\textit{soluzione}}$ dell'equazione differenziale (8.3) se è di classe C^1 su un **intervallo** (a,b) e se, sostituita nell'equazione, verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a,b)$. Nel caso delle equazioni differenziali del **secondo** ordine, il $\boxed{\textit{problema di Cauchy}}$ consiste nel risolvere

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = f(t)\,, \\ x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_1\,. \end{cases}$$

Ossia, si richiede una soluzione che in un istante t_0 ha il valore x_0 e anche tale che la sua derivata **nel medesimo istante** t_0 vale x_1. Geometricamente, si cerca una soluzione il cui grafico passa per il punto (t_0, x_0) e che, in tale punto ha tangente di pendenza x_1. Convenzionalmente, l'istante t_0 si chiama ancora $\boxed{\textit{istante iniziale}}$ Ricordando l'interpretazione della derivata come velocità istantanea, il problema di Cauchy consiste nel trovare una traiettoria $t \mapsto x(t)$ che ad un certo istante t_0 passa per la posizione x_0 con velocità x_1.

Anche nel caso delle equazioni differenziali **lineari** del secondo ordine, con termine noto definito su $\mathbb{R}$, le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$.

Osservazione 164 Consideriamo il problema

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

Questo **non è un problema di Cauchy** perché non impone alcuna condizione alla velocità iniziale, ed ammette infinite soluzioni: una soluzione per ciascuna condizione che si ottiene assegnando anche il valore di $x'(0)$. Analogamente, il problema $x''+bx'+cx = f(t)$, $x'(t_0) = x_1$ **non è un problema di Cauchy.** ■

8.2 Soluzione delle quazioni differenziali a variabili separabili

Ricordiamo che queste sono le equazioni della forma

$$x' = f(x)g(t) \qquad \text{ossia} \qquad x'(t) = f(x(t))g(t)\,. \tag{8.4}$$

Le funzioni $f(x)$ e $g(t)$ sono continue (più avanti richiederemo la derivabilità di $f(x)$). Studiamo prima come trovare tutte le soluzioni dell'equazione, e poi come trovare le soluzioni del problema di Cauchy

$$x' = f(x)g(t)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,. \tag{8.5}$$

Il primo passo nella ricerca delle soluzioni consiste nel ricercare le eventuali soluzioni costanti. **Un'equazione a variabili separabili può ammettere o meno soluzioni costanti.** Naturalmente, se $f(x) \equiv 0$ oppure $g(t) \equiv 0$ l'equazione si riduce a

$$x' = 0$$

e le sue soluzioni sono tutte e sole le funzioni costanti. Le funzioni definite su un intervallo e costanti, sono tutte e sole quelle con derivata nulla. Dunque, le soluzioni $x(t) \equiv k$ che risolvono la (8.4) sono quelle per cui vale

$$0 = f(k)g(t) \qquad \textbf{per ogni } t\,.$$

Ciò accade se il numero k è uno zero della funzione $f(x)$. Si ha quindi:

Primo passo della ricerca di soluzioni: si risolve l'equazione

$$f(x) = 0\,.$$

Se il numero k risolve quest'equazione, allora la funzione costante

$$x(t) = k$$

è soluzione di (8.5).

Ora ricerchiamo soluzioni non costanti. Se $f(x(t)) \neq 0$ per un valore $t = t_0$, la disuguaglianza continua a valere in un intorno di t_0, grazie al teorema di permanenza del segno per le funzioni continue. Dunque, in un intorno di t_0 si può scrivere

$$\frac{1}{f(x(t))}x'(t) = g(t)\,. \tag{8.6}$$

Le due funzioni

$$g(t)\,, \qquad h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

sono continue. Dunque ammettono primitive $G(t)$ ed $H(x)$. Ricordando la formula per la derivata delle funzioni composte, si vede che la (8.6) è niente altro che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t)) = g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)\,.$$

Abbiamo cosìdue funzioni della variabile t, **definite sul medesimo intervallo e con la medesima derivata.** Dunque, la differenza di queste due funzioni è costante:

$$H(x(t)) = G(t) + c\,. \tag{8.7}$$

Quest'espressione si chiama $\boxed{\textit{integrale primo}}$ o $\boxed{\textit{integrale generale}}$ dell'equazione a variabili separabili. Ogni soluzione non costante dell'equazione si trova assegnando a c un opportuno valore. E' anche possibile che certi valori di c portino ad identificare soluzioni costanti, ma ciò non è garantito perché il procedimento che abbiamo fatto (in particolare la divisione per $f(x(t))$) non è lecito se $x(t)$ è una soluzione costante.

8.2.1 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali a variabili separate

Consideriamo ora il problema di Cauchy (8.5) e ricerchiamo condizioni perché esso ammetta soluzioni, e perchè la soluzione sia unica. Vale il seguente

Teorema 165 (Teorema di Cauchy) *Se la funzione $g(t)$ è* continua *in un intorno di t_0 e se la funzione $f(x)$ è* continua *in un intorno di x_0, il problema di Cauchy (8.5) ammette soluzione, definita in un opportuno intorno di t_0. Se inoltre $f(x)$ è* di classe C^1, *la soluzione è unica.*

Per trovare esplicitamente la soluzione, dobbiamo prima di tutto controllare se la soluzione richiesta è costante, cosa che accade se $f(x_0) = 0$. Altrimenti, dobbiamo sostituire t_0 ed x_0 nei due membri di (8.7). Ciò identifica il valore della costante c. Ossia, si deve scegliere

$$c_0 = H(x(t_0)) - G(t_0)\,.$$

Ciò fatto, per ogni t si risolve rispetto ad x l'equazione

$$H(x(t)) = G(t) + c_0\,.$$

Osservazione 166 Se $f(x_0) \neq 0$, la funzione **continua** $f(x)$ ha **segno costante** in un intorno di x_0 cosìche $H(x)$ è ivi **continua e strettamente monotona.** Infatti, la sua derivata $H'(x) = 1/f(x)$ ha segno costante. Dunque l'immagine di $H(x)$ è un intervallo I che contiene $G(t_0) + c$. Per t "vicino" a t_0, avremo $G(t) + c \in I$, perché anche $G(t)$ è continua

Essendo strettamente monotona, $H(x)$ è invertibile. L'unica soluzione $x(t)$ del problema (8.7), e quindi del problema di Cauchy, è data da

$$x(t) = H^{-1}\left(G(t) + c_0\right)$$

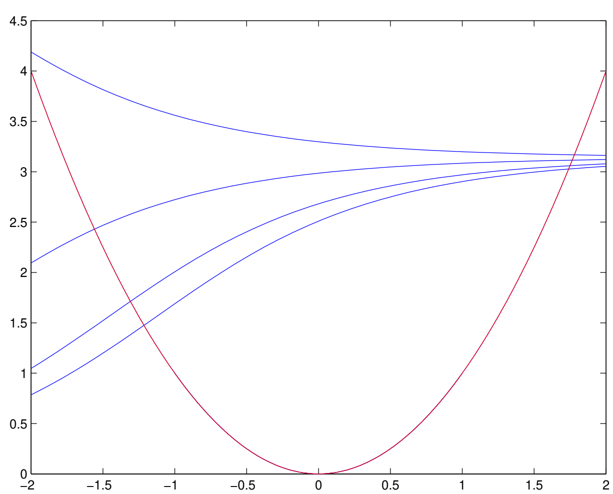
ed è definita per ogni t in un opportuno intorno di t_0. Però non è detto che sia sempre possibile esprimere questa funzione mediante funzioni elementari. Spesso dovremo contentarci dell'espressione implicita (8.7) e della determinazione del valore c_0. ■

Il significato geometrico del teorema 165 va capito bene: esso asserisce che, se $g(t)$ è **continua** ed $f(x)$ è **derivabile**, i grafici di soluzioni diverse della medesima equazione differenziale **non si intersecano.** La figura 8.1 mostra, in azzurro, i grafici di alcune soluzioni dell'equazione differenziale

$$x' = \sin x\,. \tag{8.8}$$

Il grafico in rosso interseca le soluzioni dell'equazione differenziale e quindi **non è grafico di una soluzione di (8.8).**

Figura 8.1: un grafico che non è grafico di soluzione: Alcuni grafici di soluzioni che non si intersecano. Invece, un altro grafico che interseca i precedenti non può essere soluzione.



Osservazione 167 Si sa, dalla tavola delle derivate fondamentali, che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t = e^t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = ae^{at}\,.$$

Quindi, la funzione ce^{at} risolve il problema di Cauchy

$$x' = ax\,, \qquad x(0) = c\,.$$

Il Teorema 165 garantisce che non ci sono altre funzioni che verificano queste condizioni. Infatti, il secondo membro $f(x) = ax$ è funzione derivabile di x. ■

Vediamo ora un'applicazione del Teorema 165, che conduce a risolvere un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine.

Esempio 168 Sia $a(t)$ una funzione continua e consideriamo l'equazione differenziale

$$x' = a(t)x\,.$$

Vogliamo trovarne tutte le soluzioni. Come sempre quando si studiano equazioni a variabili separabili, se ne cercano prima di tutto le soluzioni costanti. In questo caso l'unica soluzione costante è $x(t) \equiv 0$. Se $x(t)$ è una **soluzione non costante, essa rimane o sempre positiva o sempre negativa.** Infatti, essendo continua e definita su un intervallo, se cambiasse segno dovrebbe annullarsi in un certo istante t_0 e quindi $x(t)$ sarebbe una soluzione **non costante** del problema di Cauchy

$$x' = a(t)x\,, \qquad x(t_0) = 0\,.$$

Cioè, questo problema avrebbe sia la soluzione non costante $x(t)$ che la soluzione identicamente nulla. Il Teorema 165 mostra che ciò non può essere, e quindi che $x(t)$ non si annulla: o prende valori solamente positivi oppure prende valori solamente negativi. Dunque, possiamo dividere per $x(t)$ ottenendo

$$a(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log|x(t)|\,.$$

Sia ora $A(t)$ una primitiva di $a(t)$. Allora vale

$$\log|x(t)| = A(t) + c \quad \text{ossia} \quad |x(t)| = e^c e^{A(t)}\,.$$

Il numero c è **qualsiasi** e quindi il numero $k = e^c$ è un numero **positivo qualsiasi:**

$$|x(t)| = ke^{A(t)}\,, \qquad k > 0\,.$$

Ma, $x(t)$ ha segno costante, e quindi abbiamo

$$\boxed{\text{per ogni } t \text{ vale } x(t) = |x(t)| \text{ oppure } x(t) = -|x(t)|.}$$

Dunque avremo

$$x(t) = +ke^{A(t)} \qquad \text{oppure} \qquad x(t) = -ke^{A(t)} .$$

In definitiva,

$$x(t) = ke^{A(t)}$$

con $k = \pm e^c$ **reale qualsiasi, non nullo.** Si noti che la soluzione $x(t) \equiv 0$ non si è ritrovata. Però, noi sappiamo che $x(t) \equiv 0$ è una soluzione dell'equazione e quindi possiamo permettere a k di prendere il valore 0, trovando

$$x(t) = ke^{A(t)} \qquad k \textbf{ reale qualsiasi} \tag{8.9}$$

come espressione di **tutte** le soluzioni. ■

Si noti il ruolo particolare delle soluzioni costanti: talvolta queste non si ritrovano nell'integrale generale. Può essere possibile farvele comparire forzando la costante ad assume dei valori che non potrebbe assumere. Talvolta invece ciò non può farsi. Per questa ragione, le soluzioni costanti si chiamano anche $\boxed{\textit{soluzioni singolari}}$ Un'altra applicazione importante del Teorema 165 è che spesso permette di tracciare qualitativamente il grafico delle soluzioni, senza risolvere l'equazione differenziale, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 169 Consideriamo l'equazione differenziale[2]

$$y' = (1 - x^2) \sin y$$

Il Teorema 165 permette immediatamente di concludere che le soluzioni sono tutte funzioni limitate. Infatti, quest'equazione ha infinite soluzioni costanti, che "affettano" il piano in strisce parallele:

$$y(x) = k\pi \,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ovviamente queste soluzioni sono limitate. Sia $y(x)$ un'altra soluzione. Il punto $(x_0, y(x_0))$ del suo grafico starà in una striscia

$$\{(x, y) \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,, \quad k\pi < y < (k + 1)\pi\} \,.$$

Il grafico della soluzione non può uscire da questa striscia altrimenti, per il teorema dei valori intermedi, dovrebbe intersecare il grafico di una delle

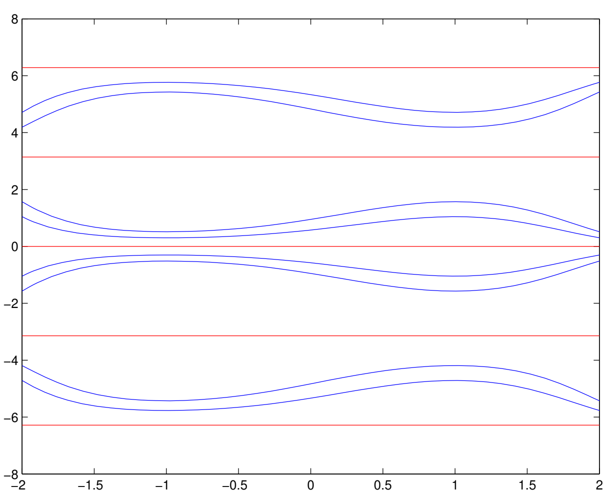
[2] di proposito qui cambiamo le lettere usate per la soluzione e per la variabile indipendente.

soluzioni costanti; e ciò non può essere per il Teorema 165. In realtà può dirsi anche di più: consideriamo una soluzione il cui grafico sta nella striscia $0 < y < \pi$ (le altre strisce si trattano in modo analogo). In questa striscia, $\sin y > 0$ e quindi avremo

$$y'(x) > 0 \qquad \text{se e solo se } (-1 < x < 1)\,.$$

Dunque, una soluzione $y(x)$ (il cui grafico è in questa striscia) decresce per $x < -1$ e per $x > 1$. In particolare, $x = -1$ è punto di minimo ed $x = +1$ è punto di massimo delle soluzioni. Note queste informazioni, non è difficile disegnare qualitativamente il grafico della soluzione. I grafici di alcune soluzioni sono in figure 8.2. ■

Figura 8.2: Grafici di soluzioni dell'equazione dell'esempio 169: Grafici qualitativi di soluzioni strettamente contenuti nelle strisce $\mathbb{R} \times (k\pi, (k+1)\pi)$.



Infine, consideriamo l'esempio seguente, che mostra che il problema di Cauchy (8.5) in generale ha più soluzioni, ovviamente quando la funzione $f(x)$ non è di classe C^1:

Esempio 170 Si consideri il problema di Cauchy

$$x' = \sqrt[3]{x}\,, \qquad x(1) = 0\,.$$

Ovviamente,

$$x(t) = 0$$

risolve questo problema. Si verifichi che anche la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \left[\frac{2}{3}(t-1)\right]^{3/2} & \text{se} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{se} \quad t < 1 \end{cases}$$

risolve il medesimo problema di Cauchy. ■

8.2.2 Domini massimali di soluzione

Per definizione, il dominio di una soluzione di un'equazione differenziale deve essere un intervallo (limitato o meno). Può venire il dubbio che nel caso in cui il membro destro di un'equazione a variabili separabili sia regolare il dominio debba essere $\mathbb{R}$. E' importante sapere che ciò **è falso.**

Esempio 171 Consideriamo il problema di Cauchy

$$x' = 1 + x^2 \,, \qquad x(t_0) = x_0 \,.$$

Ricordando che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tan(t+c) = 1 + \tan^2(t+c)$$

si vede immediatamente che la soluzione di questo problema di Cauchy è

$$x(t) = \tan\left((t - t_0) + \arctan x_0\right)$$

definita sull'intervallo

$$t_0 - \frac{\pi}{2} - \arctan x_0 < t < t_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan x_0 \,.$$

La soluzione ha per dominio un intervallo limitato, nonostante il fatto che il secondo membro dell'equazione non dipenda esplicitamente da t, e sia una funzione di classe C^∞. **Il dominio della soluzione cambia al variare di t_0, e questo è ovvio; ma, fissato il valore di t_0, cambia anche al variare di x_0.** ■

Naturalmente, una soluzione definita su un intervallo (a, b) è anche soluzione su qualsiasi sottointervallo $(c, d) \subseteq (a, b)$. L'interesse di quest'osservazione si vede leggendola al contrario: può essere che si riesca ad identificare un intervallo (c, d) su cui la soluzione è definita, ma che questo non sia il massimo intervallo su cui la soluzione è definita. Tale massimo intervallo si chiama *dominio massimale* della soluzione. E' molto facile verificare se un intervallo su cui abbiamo trovato una soluzione è dominio massimale o meno. Torniamo a considerare le soluzioni dell'equazione dell'Esempio 171. Queste divergono per x tendente agli estremi dell'intervallo su cui sono definite. Ciò avviene sempre:

Teorema 172 *Si consideri l'equazione differenziale*

$$x' = g(t)f(x)\,.$$

Supponiamo che $g(t)$ sia continua su $\mathbb{R}$ e che $f(x)$ sia derivabile (e quindi continua) su $\mathbb{R}$. Consideriamo la soluzione che verifica

$$x(t_0) = x_0\,.$$

Sia (S, T) il dominio massimale della soluzione e sia $T < +\infty$. Allora,

$$\lim_{t \to T-} |x(t)| = +\infty\,.$$

Proprietà analoga vale per $t \to S+$ se $S > -\infty$.

Di conseguenza:

- se troviamo una soluzione definita su (a, b) con $-\infty < a < b < +\infty$ e che non diverge per t tendente ad uno dei due estremi dell'intervallo, questo intervallo non è il dominio massimale della soluzione;
- le soluzioni dell'equazione differenziale dell'Esempio 169, essendo limitate, sono definite su $\mathbb{R}$.

Una soluzione definita su $\mathbb{R}$ può avere limite o meno per $t \to +\infty$ oppure per $t \to -\infty$. Per tracciare qualitativamente il grafico di soluzioni di equazioni differenziali, è utile conoscere il risultato seguente:

Teorema 173 *Sia $f(x)$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine autonoma*

$$x' = f(x)\,.$$

Sia $x(t)$ una sua soluzione definita su una semiretta. Se

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = l \in \mathbb{R} \qquad \textit{(oppure } \lim_{t \to -\infty} x(t) = l \in \mathbb{R}\textit{)}.$$

Allora,

$$f(l) = 0\,.$$

Ossia, **le soluzioni di equazioni differenziali *autonome del primo ordine,* con secondo membro regolare, se ammettono limite per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$, convergono al valore di una soluzione costante.**

8.3 Le equazioni differenziali lineari

La seconda classe di equazioni che vogliamo trattare è quella delle equazioni differenziali lineari, limitandoci ai casi:

- equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$x' = a(t)x + f(t)$$
col coefficiente $a(t)$ e termine noto $f(t)$ funzioni anche non costanti (assumeremo continue, ma basta che siano dotate di primitiva anche in senso generalizzato);
- equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti
$$x'' + bx' + cx = f(t)$$
con b e c costanti (mentre $f(t)$ non è costante; assumeremo per semplicità che sia continua, ma basta che sia dotata di primitiva anche in senso generalizzato). Il metodo che vedremo per le equazioni del secondo ordine si applica anche ad equazioni differenziali lineari di ordine più alto, purché a coefficienti costanti:
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdot + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)\,.$$

8.3.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Studiamo l'equazione
$$x' = a(t)x + f(t)\,. \tag{8.10}$$
Ricordiamo che quest'equazione si dice $\boxed{\textit{completa}}$ o $\boxed{\textit{affine}}$ se $f(t) \neq 0$ e che l'equazione differenziale lineare $\boxed{\textit{omogenea ad essa associata}}$ è quella che si ottiene ponendo $f(t) = 0$, ossia è
$$x' = a(t)x\,. \tag{8.11}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili e si è già risolta all'Esempio 168. Ogni sua soluzione ha forma
$$x(t) = ke^{A(t)}$$
ove $A(t)$ è una qualsiasi primitiva di $a(t)$. Se vogliamo la soluzione che verifica $x(t_0) = x_0$ sceglieremo
$$k = e^{-A(t_0)}x_0 \quad \text{e quindi} \quad x(t) = e^{A(t)-A(t_0)}x_0\,.$$

Nel caso particolare in cui $a(t) \equiv a$ è costante, una delle primitive è at e quindi le soluzioni sono
$$x(t) = ke^{at}$$
Risolviamo ora l'equazione completa. Presentiamo i calcoli nel caso in cui $a(t) \equiv a$ è costante. In modo del tutto analogo troveremo la soluzione anche nel caso del coefficiente variabile. Prima di tutto scriviamo la (8.10) come
$$x' - ax = f(t)\,.$$
Poi moltiplichiamo i due membri per e^{-at}:
$$e^{-at}x' - ae^{-at}x = e^{-at}f(t)\,.$$
L'espressione a sinistra è la derivata di un prodotto e quindi si ha:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-at}x(t) = e^{-at}f(t)\,.$$
Dunque, una primitiva del membro destro e una del membro sinistro differiscono per una costante (ricordiamo che stiamo lavorando su un intervallo):
$$e^{-at}x(t) = k + \int_c^t e^{-as}f(s)\,\mathrm{d}s$$
ossia
$$x(t) = e^{at}k + e^{at}\int_c^t e^{-as}f(s)\,\mathrm{d}s$$
ove k è un qualsiasi numero reale. Quando $a = a(t)$ calcoli del tutto analoghi portanto a trovare la formula seguente per la soluzione. In questa formula, $A(t)$ è una qualsiasi primitiva di $a(t)$:
$$x(t) = e^{A(t)}k + e^{A(t)}\int_c^t \left[e^{-A(s)}f(s)\right]\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.12}$$
Osserviamo ora questa formula, notando in particolare due fatti importanti.

Fatto 1

La formula (8.12) mostra che $x(t)$ è somma di due addendi. Il primo è

$$e^{A(t)}k\,.$$

Al variare della costante arbitraria k quest'addendo dà **tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.** Il secondo è

$$e^{A(t)}\int_c^t \left[e^{-A(s)}f(s)\right]\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.13}$$

Questa è una **particolare** soluzione dell'equazione completa (quella che si annulla per $t = c$). Dunque: l'integrale generale di (8.10) si ottiene scegliendo una soluzione particolare dell'equazione (8.10) stessa e sommandogli **tutte** le soluzioni dell'omogenea associata (8.11).

Fatto 2

Se accade che il termine affine è combinazione lineare di due funzioni

$$\alpha f(t) + \beta g(t)$$

allora

$$\int_c^t e^{A(s)}\left(\alpha f(s) + \beta g(s)\right)\,\mathrm{d}s = \alpha\int_c^t e^{A(s)}f(s)\,\mathrm{d}s + \beta\int_c^t e^{A(s)}g(s)\,\mathrm{d}s$$

si ricordi la *proprietà di linearità del calcolo delle primitive.* Dunque, quando il termine noto è somma di funzioni più semplici, per trovare una soluzione particolare si possono trovare soluzioni particolari corrispondenti ai singoli addendi, e poi sommarle. Introduciamo ora i termini seguenti: il membro destro di (8.12) si chiama *integrale generale* di (8.10) mentre la funzione in (8.13) si chiama *integrale particolare* di (8.10). Ciò che abbiamo notato è particolarmente importante, e vale la pena di evidenziarlo:

Per trovare l'integrale generale dell'equazione completa (8.10) si calcola, in qualunque modo, anche semplicemente per tentativi, una soluzione particolare dell'equazione (8.10) stessa e le si sommano **tutte** le soluzioni dell'omogenea associata (8.11). Quando il termine noto è somma di più addendi, una soluzione particolare si trova ricercando soluzioni particolari relative ai singoli addendi, e quindi sommandole.

8.3.2 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricordiamo che il problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine è il problema

$$x' = a(t)x + f(t)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,. \tag{8.14}$$

Supponiamo che $f(t)$ sia definita su $\mathbb{R}$. Allora, **questo problema ammette soluzione unica, definita su $\mathbb{R}$.** Essa si ottiene imponendo l'uguaglianza

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{ossia} \quad x_0 = e^{A(t_0)}k + e^{A(t_0)} \int_c^{t_0} \left[e^{-A(s)} f(s)\right] \, \mathrm{d}s\,.$$

In particolare, se si è scelto $c = t_0$ e come primitiva $A(t)$ quella che si annulla in t_0, basta scegliere $k = x_0$. Ciò completa quanto si può dire in generale sull'equazione differenziale lineare del primo ordine. Però in pratica è importantissimo saper trattare col minimo di calcoli alcuni casi particolari, che ora andiamo a vedere. Si tratta di equazioni col coefficiente costante e termine noto di tipo particolare, che si incontra frequentemente nelle applicazioni alla fisica.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del primo ordine, a coefficienti costanti

Vogliamo dare dei metodi semplici per calcolare una soluzione particolare dell'equazione

$$x' = ax + f(t)$$

(con coefficiente a costante) quando il termine noto $f(t)$ ha forma particolare. Esaminiamo i casi che interessano:

Il caso $f(t) = 1$ ed $a \neq 0$ In questo caso, si ricerchi una soluzione di forma $x(t) = c$, costante. Sostituendo nei due membri dell'equazione si vede che deve essere

$$0 = ac + 1 \qquad \text{ossia } c = -1/a\,.$$

Dunque, se $f(t) = \alpha$, costante, una soluzione particolare è

$$x(t) = -\frac{\alpha}{a}\,.$$

La forma esplicita della soluzione non va ricordata, nè in questo caso né nei successivi. Bisogna invece capire il procedimento in modo da poterlo usare correttamente, ricavando volta per volta l'espressione della soluzione particolare.

Il caso $f(t) = t$ ed $a \neq 0$ Si ricerchi una soluzione di forma

$$x(t) = ct + d\,.$$

Sostituendo nei due membri dell'equazione si vede che deve aversi

$$c = act + ad + t \qquad \text{e quindi } c = -1/a,\ d = -1/a^2.$$

Il caso $f(t)$ polinomio ed $a \neq 0$ Procedendo per sostituzione, come nei casi precedenti, si vede che una soluzione è **un polinomio dello stesso grado di $f(t)$.**

Il caso $f(t) = 1$ ed $a = 0$. In questo caso l'equazione è

$$x' = 1$$

e le sue soluzioni si ottengono semplicemente calcolando primitive, $x(t) = t + c$. Conviene però cercare di procedere come nei casi precedenti, per capire meglio il metodo. In questo caso, $x(t) = \alpha$ non risolve l'equazione completa, infatti, $x(t) = \alpha$ **risolve l'equazione omogenea.** Sostituendo si trova infatti

$$0 = a\alpha + 1 = 0 \cdot \alpha + 1$$

e l'uguaglianza non può valere. Però, se si prova a sostituire

$$x(t) = \alpha t$$

si trova

$$\alpha = 0 \cdot (\alpha t) + 1$$

e ora l'uguaglianza vale con $\alpha = 1$. Ossia **in questo caso la soluzione è un polinomio, di grado 1 invece che di grado 0.**

Il caso $f(t)$ polinomio ed $a = 0$ Procedendo come sopra, si vede che una soluzione particolare è un polinomio, di grado $n+1$ se il termine noto $f(t)$ ha grado n. I coefficienti del polinomio si ricavano sostituendo nei due membri e richiedendo che i due membri siano uguali (alternativamente ed in modo più semplice, calcolando le primitive dei due membri).

Il caso $f(t) = e^{bt}$ con $b \neq a$ In questo caso, una soluzione particolare ha forma

$$x(t) = \alpha e^{bt} \qquad \alpha = \tfrac{1}{b-a}$$

come si vede immediatamente sostituendo nei due membri dell'equazione.

Il caso $f(t) = e^{bt}$ con $b = a$ In questo caso, $x(t) = \alpha e^{bt} = \alpha e^{at}$ risolve l'equazione omogenea associata, e quindi non può risolvere l'equazione completa. Infatti, sostituendo si trova

$$\alpha a e^{at} = a\alpha e^{at} + e^{at} \qquad \text{ossia} \qquad 0 = e^{at}$$

uguaglianza **ovviamente falsa.** Una soluzione particolare però si trova scegliendo

$$x(t) = te^{at},$$

come si vede immediatamente sostituendo nei due membri dell'equazione.

Il caso $f(t) = p(t)e^{bt}$ con $p(t)$ polinomio. Vanno esaminati separatamente due casi:

***caso* $a \neq b$:** una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$x(t) = q(t)e^{bt}$$

ove $q(t)$ è un **polinomio dello stesso grado di $p(t)$.**

***caso* $a = b$:** una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$x(t) = q(t)e^{at} \tag{8.15}$$

ove $q(t)$ è un **polinomio di grado $n + 1$ se n è il grado di $p(t)$.** I coefficienti del polinomio si ricavano sostituendo nei due membri e richiedendo che i due membri siano uguali.

Nei casi particolari precedenti, un'attenzione particolare è necessaria quando il temine forzante $f(t)$ ha forma $p(t)y(t)$, con $p(t)$ polinomio ed $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea associata (e quindi $y(t)$ multiplo di e^{at}). In tal caso una soluzione particolare ha forma $y(t) = q(t)e^{at}$ ove $q(t)$ è un polinomio il cui grado supera di 1 quello di $p(t)$.

Osservazione 174 Quest'osservazione semplifica un po' i calcoli nel caso $a = b$: il termine costante q_0 del polinomio $q(t)$ conduce a $q_0 e^{at}$ che è una soluzione dell'equazione lineare omogenea associata e quindi possiamo limitarci a lavorare con polinomi $q(t)$ privi di termine costante; ossia, possiamo sostituire la (8.15) con

$$x(t) = tq_1(t)e^{at}$$

con $q_1(t)$ polinomio dello stesso grado di $p(t)$. ■

Notiamo ciò che hanno in comune i casi particolari precedenti: il termine noto appartiene ad un insieme $\mathcal{S}$ di funzioni, che gode di questa proprietà: le derivate di elementi di $\mathcal{S}$ sono ancora elementi dell'insieme; e inoltre, moltiplicando elementi di $\mathcal{S}$ si trovano altri elementi di $\mathcal{S}$. L'insieme $\mathcal{S} = \{\alpha \sin \omega t\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ non ha questa proprietà di invarianza, perché la derivata di $\sin \omega t$ è $\omega \cos \omega t$. Però, l'insieme $\mathcal{S} = \{\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t\}$ (con α e β reali qualsiasi) gode della proprietà detta sopra. E quindi:

Il caso $f(t) = \sin \omega t$ In questo caso una soluzione particolare è

$$x(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$$

come si vede sostituendo nell'equazione: per avere una soluzione, l'uguaglianza seguente deve valere per ogni t:

$$\alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t = a\alpha \sin \omega t + a\beta \cos \omega t + \sin \omega t\,.$$

Ciò accade se

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\omega = a\beta \\ -\beta\omega = a\alpha + 1 \end{array} \right. \qquad \text{ossia} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{a}{\omega^2+a^2} \\ \beta = -\frac{\omega}{\omega^2+a^2}\,. \end{array} \right.$$

In modo analogo si tratta il caso $f(t) = \cos \omega t$ ed i casi in cui il termine noto è combinazione lineare di polinomi moltiplicati per seni e coseni.

8.3.3 L'equazione differenziale lineare del secondo ordine

Premettiamo un'osservazione importante sull'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine, a coefficiente costante:

Si è già notato che le soluzioni dell'equazione

$$x' = ax$$

sono tutte e sole le funzioni $x(t) = ke^{at}$. Qui, a è costante. L'osservazione che ci interessa è che sia a che la costante k possono essere sia reali che complessi, si veda il paragrafo 7.6. Consideriamo ora le soluzioni di

$$x' = ax + be^{ct}$$

con a, b e c **numeri complessi** $\boxed{\textbf{ed } a \textbf{ diverso da } c}$**.** Un calcolo analogo a quello fatto nel caso reale mostra che le soluzioni sono le funzioni

$$ke^{at} + \gamma e^{ct}$$

(sostituendo nell'equazione si trova $\gamma = b/(c - a)$).

Passiamo ora a capire come sia possibile risolvere equazioni lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenee o meno. Per questo indichiamo con D l'operazione di fare la derivata e consideriamo un'equazione data in questa forma

$$(D - m_1)(D - m_2)x = f(t)\,. \tag{8.16}$$

Spieghiamo cosa si intende con questa notazione. Con $(D - m_2)x$ intendiamo

$$(D - m_2)x(t) = Dx(t) - m_2x(t) = x'(t) - m_2x(t)$$

A quest'espressione applichiamo $D - m_1$, ossia

$$\begin{aligned}(D - m_1)\left[(D - m_2)x\right] &= (D - m_1)\left[x'(t) - m_2x(t)\right]\\ &= D\left[x'(t) - m_2x(t)\right] - m_1\left[x'(t) - m_2x(t)\right]\\ &= \left[x''(t) - m_2x'(t)\right] - \left[m_1x'(t) - m_1m_2x(t)\right]\,.\end{aligned}$$

Dunque, la (8.16) è niente altro che l'equazione di secondo ordine

$$x'' - (m_1 + m_2)x' + m_1m_2x = f\,. \tag{8.17}$$

Come risolvere la (8.16) è immediatamente evidente. Si introduca il simbolo $y(t)$ per indicare la funzione (ancora incognita)

$$y(t) = (D - m_1)x(t)\,.$$

Allora, la funzione $y(t)$ deve risolvere l'equazione differenziale

$$y' - m_2 y = f(t)\,, \tag{8.18}$$

equazione che sappiamo risolvere. Calcolata $y(t)$, la soluzione $x(t)$ di (8.16) si ottiene semplicemente risolvendo

$$x' - m_1 x = y(t)\,. \tag{8.19}$$

Questi sono calcoli che già sappiamo fare, con m_1, m_2 sia reali che complessi. Ma ora, se l'equazione da risolvere è data nella forma

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,, \tag{8.20}$$

si sa come ridurla alla forma (8.16): si risolve l'equazione

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{8.21}$$

ottenendo le due soluzioni m_1 ed m_2, che saranno numeri reali oppure complessi. Si sa che queste soluzioni verificano

$$m_1 + m_2 = -b\,, \qquad m_1 m_2 = c$$

e quindi la (8.20) è niente altro che la (8.16), con questi numeri m_1 ed m_2; e quindi si sa come risolvere **tutte** le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, del secondo ordine. In questo contesto, l'equazione (8.21) si chiama l'*equazione caratteristica* dell'equazione differenziale e le sue soluzioni si chiamano *autovalori* dell'equazione differenziale.

Si ricordi che se i coefficienti b e c sono reali, gli autovalori possono essere sia reali che complessi, coniugati l'uno dell'altro.

Osservazione 175 Si parla di "equazione caratteristica" ed "autovalore" anche nel caso delle equazioni lineari del primo ordine. Nel caso di $x' = ax$, l'equazione caratteristica è $\lambda - a = 0$ e l'unico autovalore è a. In particolare, è reale se il coefficiente è reale. ■

E' del tutto ovvio che un metodo di fattorizzazione analogo si possa applicare a tutte le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, di qualsiasi ordine. A noi non interessa scrivere esplicitamente una formula per le soluzioni dell'equazione (8.20). La (8.20) in generale si risolve risolvendo prima la (8.18) e poi la (8.19). Interessa piuttosto conoscere il risultato seguente, che è semplice conseguenza dei **fatti 1–3** studiati per le equazioni del primo ordine:

fatto A) le soluzioni di (8.20) si ottengono sommando ad una **soluzione particolare** dell'equazione—comunque trovata—tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata;

fatto B) se il termine noto $f(t)$ è combinazione lineare di due funzioni,

$$f(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$$

una soluzione particolare di (8.20) si ottiene trovando soluzioni particolari con termine noto $g(t)$ ed $h(t)$ e poi combinandole linearmente con i medesimi coefficienti α e β.

Oltre a questo fatto, interessa:

- saper risolvere con prontezza i casi particolari che si incontrano più frequentemente nelle applicazioni;
- saper trovare soluzioni reali nel caso in cui gli autovalori siano numeri complessi e coniugati.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, *omogenee*

Esaminiamo i seguenti casi, che si risolvono applicando i metodi visti per le equazioni lineari del primo ordine con termine noto di tipo particolare.

Caso 1: autovalori reali e distinti. In questo caso, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$\alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t}$$

con α e β arbitrari numeri reali.

Caso 2: autovalori coincidenti. Sia $m = m_1 = m_2$ il valore comune degli autovalori In questo caso, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$\alpha e^{mt} + \beta t e^{mt}$$

con α e β arbitrari numeri reali. Si noti il caso particolare in cui $m_1 = m_2 = 0$. In questo caso la soluzione generale è

$$\alpha + \beta t\,.$$

Caso 3: autovalori complessi e coniugati. In questo caso gli autovalori sono distinti e quindi, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$x(t) = \alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t} \tag{8.22}$$

con α e β arbitrari numeri che ora potranno essere o reali o complessi. Nella maggior parte delle applicazioni i coefficienti dell'equazione sono reali e quindi m_1 ed m_2 sono tra loro coniugati

$$m_1 = \xi + i\omega\,, \qquad m_2 = \xi - i\omega\,.$$

In tal caso, la (8.22) prende forma

$$x(t) = e^{\xi t}\left\{\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right\}\,.$$

Se α e β sono numeri complessi qualsiasi, queste soluzioni prendono valori complessi. Spesso interessa identificare quelle che prendono valori reali. Dato che $e^{i\omega t}$ ed $e^{-i\omega t}$ sono tra loro coniugate, ciò si ottiene scegliendo anche α e β tra loro coniugati:

$$\alpha = c + id\,, \qquad \beta = c - id\,.$$

Con questa scelta si trova

$$x(t) = e^{\xi t}\left\{2\Re e\,\left[(c+id)e^{i\omega t}\right]\right\} = 2e^{\xi t}\left\{c\cos\omega t - d\sin\omega t\right\}\,.$$

Nei corsi di fisica si preferisce scrivere quest'espressione in una forma diversa. Prima di tutto questa si scrive

$$e^{\xi t}\sqrt{c^2+d^2}\left\{\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\cos\omega t - \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\sin\omega t\right\}\,.$$

I numeri

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\,, \qquad \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

sono le coordinate di un punto della circonferenza trigonometrica e quindi esiste un angolo ϕ tale che

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = \cos\phi\,, \qquad \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sin\phi\,.$$

Dunque,

$$x(t) = Ae^{\xi t}\left\{(\cos\phi)\cos\omega t - (\sin\phi)\sin\omega t\right\} = Ae^{\xi t}\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{8.23}$$

In quest'espressione, A è un numero **non negativo arbitrario.** Anche ϕ è un numero arbitrario ma naturalmente basta **scegliere** $\phi \in [0, 2\pi)$**.** Quando la soluzione $x(t)$ è scritta in forma (8.23), si usa la seguente terminologia:

- il numero A si chiama $\boxed{\textit{ampiezza}}$
- il numero ϕ si chiama $\boxed{\textit{fase}}$
- il numero ω si chiama $\boxed{\textit{frequenza angolare}}$
- il numero $-\xi$ (notare il segno!) si chiama $\boxed{\textit{costante di tempo}}$ del sistema.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del secondo ordine *complete*

Nel caso affine, le soluzioni si trovano risolvendo a catena le due equazioni differenziali del primo ordine (8.18) e (8.19), con calcoli che sappiamo già fare. Consideriamo esplicitamente i casi in cui il termine noto ha forma particolare, e ricerchiamo **soluzioni particolari** dell'equazione. A queste, per ottenere la soluzione generale, dovremo aggiungere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata. ossia

- il caso $f(t) = t^n e^{\gamma t}$

SOMIGLIANZA col caso del primo ordine: ricercheremo soluzioni particolari di forma $p(t)e^{\gamma t}$, con $p(t)$ polinomio di grado n, se γ non è autovalore dell'equazione; altrimenti ricercheremo soluzioni di forma $tp(t)e^{\gamma t}$ se γ è autovalore semplice oppure $t^2p(t)e^{\gamma t}$ se γ è autovalore doppio. In ambedue i casi, $p(t)$ ha grado n (si veda l'Osservazione 174 per spiegare l'assenza del termine di grado 0 e, nel caso dell'autovalore doppio, anche di grado 1). **DIFFERENZA rispetto al caso del primo ordine:** il procedimento per la ricerca della soluzione particolare ora va fatto due volte, una per l'equazione (8.18) e una seconda volta per (8.19). Ciò spiega perché è possibile che il grado **debba essere aumentato di due unità** invece che di una.

- il caso $f(t) = p(t)e^{\xi t}\sin\omega t$ oppure $f(t) = p(t)e^{\xi t}\cos\omega t$ con $p(t)$ polinomio di grado n.

Nel caso delle equazioni del primo ordine (a coefficienti reali) $\xi + i\omega$ non è mai un autovalore dell'equazione e quindi queste funzioni non sono mai soluzioni dell'equazione; e quindi si ricerca una soluzione particolare in forma

$$q_1(t)e^{\xi t}\sin\omega t + q_2(t)e^{\xi t}\cos\omega t \tag{8.24}$$

con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ polinomi ancora di grado n. **SOMIGLIANZA col caso del primo ordine:** anche nel caso dell'equazione lineare del secondo ordine si ricerca una soluzione di questa stessa forma (8.24) se $\xi + i\omega$ non è autovalore dell'equazione[3]; **DIFFERENZA rispetto al caso del primo ordine:** nel caso del secondo ordine, il numero complesso $\xi + i\omega$ può essere autovalore dell'equazione (necessariamente semplice se i coefficienti sono reali). In questo caso, dovremo aumentare il grado di 1, ricercando una soluzione particolare di forma

$$e^{\xi t}\left[tq_1(t)\sin\omega t + tq_2(t)\cos\omega t\right]$$

con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ polinomi del medesimo grado di $p(t)$.

Quando il termine forzante ha forma $p(t)e^{\xi t}\sin\omega t$ oppure $p(t)e^{\xi t}\cos\omega t$, con $\xi + i\omega$ autovalore dell'equazione, si dice che si presenta il fenomeno della *risonanza* e si dice che il termine forzante è *risonante*

8.3.4 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Ricapitolando, nel caso di un generico termine noto $f(t)$ (e non solo quando $f(t)$ ha forma particolare) l'*integrale generale* di (8.17) è

$$x(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) + F(t)$$

con $F(t)$ integrale particolare dell'equazione completa ed $u_1(t)$, $u_2(t)$ integrali particolari dell'equazione omogenea associata (questi avranno forme diverse a seconda che gli autovalori siano reali o meno, coincidenti o meno). Il problema di Cauchy per l'equazione del secondo ordine (8.17) consiste nel determinarne una soluzione che soddisfa alle ulteriori *condizioni di Cauchy*

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x'(t_0) = x_1\,.$$

Non è difficile mostrare

Teorema 176 *Sia $f(t)$ continua su $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy ammette soluzione unica qualunque siano t_0, x_0 ed x_1 e questa soluzione è definita su $\mathbb{R}$.*

[3] ciò accade in particolare se gli autovalori sono reali.

8.3.5 Il comportamento in futuro e la stabilità

Le applicazioni alla fisica delle equazioni differenziali, lineari o meno, richiedono spesso di poter dedurre informazioni sul comportamento delle soluzioni **in futuro,** ossia per $t \to +\infty$, senza dover preventivamente risolvere l'equazione.

Noi ci limitiamo a considerare questo problema per le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$x' = ax\,, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{8.25}$$

$$x'' + bx' + cx = 0\,, \qquad x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_1\,, \tag{8.26}$$

con coefficienti **reali e costanti.** Si noti: abbiamo esplicitamente assunto che il termine affine sia nullo.

Diamo quindi alcune definizioni **in forma semplificata, valida solamente per le equazioni differenziali (8.25) e (8.26).**

- la soluzione $x(t)$ si dice $\boxed{\textit{oscillante}}$ se per $t > t_0$ si annulla solamente nei punti t_n con
$$\lim t_n = +\infty$$
e inoltre se ove si annulla cambia segno[4].

- l'equazione differenziale si dice $\boxed{\textit{stabile}}$ se ogni sua soluzione rimane limitata su $[t_0, +\infty)$. In tal caso si dice anche che **la soluzione nulla dell'equazione differenziale è stabile.**

- l'equazione differenziale si dice $\boxed{\textit{asintoticamente stabile}}$ (o anche $\boxed{\textit{esponenzialmente stabile}}$) se ogni sua soluzione verifica
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,.$$
In tal caso si dice anche che **la soluzione nulla dell'equazione differenziale è asintoticamente (o esponenzialmente) stabile.**

Ripetiamo che se l'equazione da studiare non fosse lineare a coefficienti costanti, queste definizioni andrebbero precisate meglio. Le soluzioni della (8.25) sono le funzioni
$$x(t) = e^{at}x_0\,.$$

[4]quest'ultimo fatto, nel caso delle equazioni differenziali di primo o di secondo ordine, è conseguenza del teorema di unicità di soluzione.

Dunque, ricordando che a è reale, si hanno i risultati compendiati nella tabella 8.1.

Tabella 8.1: Equazioni differenziali del primo ordine omogenee, con coefficiente reale e costante

soluzioni oscillanti		mai
stabilità	quando	$a \leq 0$
stabilità asintotica	quando	$a < 0$

Consideriamo ora l'equazione differenziale (8.26) a coefficienti reali. Introduciamo le notazioni nella tabella 8.2, a sinistra. Ricordiamo infatti che se i coefficienti sono reali, si ha in ogni caso

$$\Re e\, \lambda_1 = \Re e\, \lambda_2\,.$$

Con queste notazioni, le soluzioni (in forma reale) si esprimono come scritto nella tabella 8.2, a destra mentre i risultati sulla stabilità per l'equazione (8.26), quando i coefficienti sono reali, si leggono nella tabella 8.3.

8.4 Manipolazioni usate nei corsi applicativi

Anche nel contesto delle equazioni differenziali, nei corsi di fisica e di ingegneria verranno usate delle manipolazioni piuttosto "libere", che è bene capire[5]. Prima di tutto consideriamo un modo veloce per risolvere equazioni a variabili separabili. La giustificazione di questo metodo è quella che noi abbiamo illustrato al paragrafo 8.2. Consideriamo quindi l'equazione a variabili separabili

$$x' = g(t)f(x) \qquad \text{ossia} \qquad h(x(t))x'(t) = g(t) \quad \text{ove} \quad h(x) = \frac{1}{f(x)}\,.$$

[5]Si confronti con quanto si è detto al paragrafo 3.4.

Tabella 8.2: Secondo ordine, coefficienti reali e costanti. Sinistra: notazioni. Destra: Equazioni del secondo ordine omogenee, soluzioni

$\Delta = b^2 - 4c > 0$	allora	$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$
$\Delta = b^2 - 4c = 0$	allora	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
$\Delta = b^2 - 4c < 0$	allora	$\lambda_1 = \xi + i\omega = \bar{\lambda}_2\,.$

$\Delta > 0$	$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$
$\Delta < 0$	$A e^{\xi t} \cos(\omega t + \phi)$

Tabella 8.3: Secondo ordine, coefficienti reali e costanti (e quindi $\Re e\,\lambda_1 = \Re e\,\lambda_2$. Se gli autovalori sono reali allora $\lambda_1 = \Re e\,\lambda_1$, $\lambda_2 = \Re e\,\lambda_2$)

soluzioni oscillanti	quando	$\Delta < 0$
stabilità	quando	$\begin{cases} \Re e\,\lambda_1 \leq 0\,\Re e\,\lambda_2 < 0 \\ \text{oppure} \\ \Re e\,\lambda_1 = \Re e\,\lambda_2 = 0 \quad \text{ma} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$
stabilità asintotica	quando	$\Re e\,\lambda_1 < 0\,, \quad \Re e\,\lambda_2 < 0$ (non si esclude $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)

Come si è visto, per trovarne le soluzioni, basta notare che

$$h(x(t))x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t))$$

ove $H(x)$ è primitiva di $h(x)$. E dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(t)$$

con $G(t)$ primitiva di $g(t)$. Ora calcoliamo le primitive dei due membri. Il simbolo usato per indicare le primitive di $H(x)$ è

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x + c$$

e pensando di fare la sostituzione $x = x(t)$ (con $x(t)$ soluzione di cui ancora non conosciamo l'esistenza) si trova

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x(t))\,\mathrm{d}x(t) = \int h(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Leggendo il primo e l'ultimo termine si trova che basta uguagliare

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

e poi sostituire x con la funzione incognita $x(t)$, Se uno dimentica che il segno di primitiva è $\int \, \mathrm{d}x$, da intendere come un unico simbolo indivisibile, potrebbe sembrargli che questa formula sia stata ottenuta intendendo $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; "moltiplicando per $\mathrm{d}t$" i due membri dell'equazione differenziale e poi mettendo davanti a tutto il simbolo $\int$, operazioni prive di senso. Nelle applicazioni, spesso si devono considerare *sistemi* di equazioni differenziali. Per esempio, si considera il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y)\,. \end{cases}$$

L'incognita è la coppia di funzioni $(x(t), y(t))$, dipendente da una variabile t che, come al solito, non si indica esplicitamente. Usando la notazione di Leibniz, la variabile "nascosta" $t$viene esplicitamente indicata almeno nel membro sinistro, e il sistema si scrive

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y)\,. \end{cases} \tag{8.27}$$

A questo punto i fisici dividono un'equazione per l'altra e "semplificano" $\mathrm{d}t$, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \qquad \text{ossia} \qquad y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

una sola equazione nell'incognita y, e con la x che è la variabile indipendente. La spiegazione di questo procedimento è la seguente: supponiamo di aver trovato una soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema (8.27). **Se accade che** $x'(t_0) \neq 0$ allora, **almeno localmente, in un intorno di** t_0**,** la funzione $t \mapsto x(t)$ è strettamente monotona e quindi invertibile. La sua funzione inversa $t = t(x)$ ha derivata

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \qquad \text{con } x = x(t).$$

Si può quindi costruire la funzione composta $y(t(x))$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(t(x)) = y'(t(x)) \frac{1}{x'(t(x))}\,.$$

I valori di t e di x sono correlati da

$$x = x(t) \qquad \text{ossia} \qquad t = t(x)$$

e quindi (almeno localmente) $y(t(x))$ è funzione della sola x, che viene indicata come $y(x)$, "nascondendo" t. Quindi

$$\text{scrivendo } y(x) \text{ per } y(t(x)) \text{ si ha} \qquad y' = y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}\,.$$

Va tenuto presente però che, a differenza delle pratiche descritte al paragrafo 3.4, questo procedimento ha senso soltanto in un intorno di un punto assegnato: in generale, un dato iniziale (x_0, y_0) per cui $f(x_0, y_0) \neq 0$ (oppure $g(x_0, y_0) \neq 0$, scambiando x con y) e che il risultato è corretto finché la traiettoria non incontra un punto in cui $f(x, y)$ si annulla. Però, non c'è nessun modo di capire se e quando ciò accadrà, guardando il dato iniziale.

8.5 Alcuni esercizi

1. Dire quali delle equazioni differenziali seguenti sono scritte in forma normale, quali sono a variabili separate e quali sono lineari:

$$x^2y' = (\log x)y + \sin x\,, x(y')^2 = (\log x)y + \sin x\,, \quad x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y)^2 = (\log x)y + \sin x\,,$$
$$x' = x^2 \sin t\,, x' = x \sin t\,, \qquad x' = x\sin t + \cos t\,.$$

2. Identificare le soluzioni costanti delle equazioni differenziali a variabili separabili seguenti, e spiegare se esse possono usarsi per studiare la limitatezza delle altre soluzioni

$$\begin{aligned} x' &= (t^3-1)(x^3-1)\,, & y' &= (t^3-1)(y^2-1)\,,\\ x' &= (t^2-1)(x^2-1)\,, & y' &= y(y^2-1)(x^2-4)\,,\\ y' &= x(y^2-1)(x^2-4)\,, & y' &= xy^2(y^2-1)(x^2-4)\,. \end{aligned}$$

   E' possibile avere anche qualche informazione sulla monotonia delle soluzioni?

3. Sapendo che $x(t)$ verifica

$$x' = 3x^2 - \sin t\,, \qquad x(0) = 1$$

   calcolarne le derivate prima, seconda e terza per $t = 0$.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = -2x^2\,.$$

Sia $x(t)$ la soluzione che verifica $x(0) = 1$. Si vuol sapere se esitono valori di $\alpha > 1$ tali che questa soluzione verifichi anche $x(1) = \alpha$. Si vuol sapere inoltre se esistono valori di $\beta > 0$ tali che la soluzione $x(t)$ verifichi $x'(1) = \beta$.

5. Si determinino i domini massimali delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy. L'equazione differenziale è $x' = -2x^2$ mentre la condizione di Cauchy è una delle seguenti:

$$x(0) = 0\,, x(1) = 0\,, \quad x(0) = 1\,,$$
$$x(1) = 1\,, x(1) = 2\,, \quad x(1) = -2\,.$$

6. Si consideri l'equazione del moto armonico

$$mx'' = -kx \tag{8.28}$$

($m > 0$ indica la massa e $k > 0$ è la costante elastica). Moltiplicando ambedue i membri per $x'(t)$ si trovi la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ costante.}$$

Si interpretino i due addendi che figurano in quest'uguaglianza.

7. Si sappia che una funzione $x(t)$ definita su un intervallo verifica

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left(x'(t)\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2(t) = E = \text{ costante.} \tag{8.29}$$

Si mostri che la funzione $x(t)$ risolve l'equazione del moto armonico (8.28). Quindi le due equazioni (8.28) e (8.29) "sono equivalenti" nel senso che hanno le medesime soluzioni. Si noti però che una è scritta in forma normale e l'altra no.

8. Si considerino le funzioni $y(t) = \alpha t^2$, con α parametro reale.

   (a) Si mostri che ciascuna di queste funzioni risolve l'equazione differenziale $y' = 2y/t$. Si noti che l'equazione differenziale non è definita per $t = 0$, ma le soluzioni dell'equazione hanno estensione continua a $t = 0$. Cosa si nota se si prova ad imporre la condizione di Cauchy $y(0) = 0$?

   (b) Esistono soluzioni dell'equazione che verificano $\lim_{t\to 0+} y(t) = 1$?

9. ($\star$) Per $t > 0$ si consideri l'equazione differenziale $y' = -y/t^2$. Si vuol sapere se esistono soluzioni dell'equazione differenziale tali che $\lim_{t\to 0+} y(t) = +\infty$ oppure $\lim_{t\to 0+} y(t) = c \in \mathbb{R}$.

10. ($\star$) Si vuole un'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ che gode di questa proprietà, che deve valere salvo un numero finito di valori x_0: la tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione incontra l'asse delle ascisse in un punto x che deve verificare $x/x_0 = c$, con c numero indipendente da x_0 (se $c = 2$ si confronti con l'esercizio 15 del Cap. 3).

11. ($\star$) Per $t > 0$ si consideri l'equazione differenziale $y' = -(\tan y)/t^2$. Si imponga la condizione $y(1) = \pi/2$ (si noti che il secondo membro non è definito per $y = \pi/2$. Si mostri che esiste una soluzione che verifica questa condizione, ma che il suo dominio di esistenza massimale non è un intervallo aperto.

12. Al variare del parametro reale α si studi la stabilità dell'equazione differenziale $y'' = -y - \alpha y'$.

13. Si consideri l'equazione differenziale $y'' = -y - \alpha y' + \sin t$ con $\alpha \neq 0$. Si mostri che una soluzione particolare è $y(t) = -(1/\alpha)\cos t$ e si calcoli una soluzione particolare quando $\alpha = 0$.

14. ($\star$) Si considerino l'osservazione 166 e l'esempio 170. Si spieghi perchè l'argomento nell'osservazione 166 non si applica al caso dell'esempio 170 (quante soluzioni ha l'equazione $(3/2)x^{2/3} = t$?). Si usi la spiegazione trovata per costruire una terza soluzione del problema di Cauchy all'esempio 170.

15. ($\star$) Siano $x(t)$ ed $y(t)$ due soluzioni diverse del medesimo problema di Cauchy (8.5), definite sullo stesso intervallo[6] $[t_0, T]$. Calcolando le primitive dei due membri di (8.5), si ha

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(s)f(x(s))\,\mathrm{d}s\,, \qquad y(t) = x_0 + \int_0^t g(s)f(y(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Usando la proprietà di monotonia del calcolo delle primitive (esercizio 21 del Capitolo 4) si ottenga per $0 \le t \le T$

$$|x(t) - y(t)| \le \int_0^t |g(s)|\,|f(x(s)) - f(y(s))|\,\mathrm{d}s\,.$$

[6]Le soluzioni sono definite su intervalli aperti. Spiegare perché qui è lecito considerare un intervallo chiuso.

Si deduca, usando l'esercizio 23 del Capitolo 4, che

$$|x(t) - y(t)| \leq T(HK)M$$

con $M = \max_{[0,T]} |x(t) - y(t)|$, $H = \max_{[0,T]} |g(t)|$, $K = \max_{[0,T]} |f'(x)|$. Si spieghi perché questa disuguaglianza non può valere se il numero T è stato scelto in modo che sia $THK < 1/2$ e se $x(t)$ e $y(t)$ sono diverse. Ciò mostra che, se valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy, i grafici di due soluzioni diverse non possono intersecarsi, nemmeno se una delle due soluzioni è costante (caso non considerato nell'osservazione 166).

16. Si xonsideri il problema di Cauchy $x' = 1/x$, $x(0) = 1$. Si mostri che la soluzione è definita per $t > -1$ e se ne studi il limite per $t \to -1^+$. Si spieghi la relazione di quanto trovato col Teorema 172.