

Capitolo 7

Numeri complessi

Non è per la sua cultura che lo amo—no, non è per quello. E' un autodidatta; in realtà conosce una quantità di cose, solo che non stanno così come le sa lui. Diario di Eva, Il diario di Adamo ed Eva di Mark Twain

In questo capitolo introduciamo le proprietà essenziali di una nuova classe di numeri che si chiamano numeri complessi. Per quanto storicamente falso, conviene pensare ai numeri complessi come introdotti per risolvere l'equazione

$$x^2 + 1 = 0,$$

ovviamente priva di soluzioni in \mathbb{R} .

7.1 La definizione dei numeri complessi

Si riferisca il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali¹ di origine in un punto O . In questo modo, un punto P viene identificato dalle sue coordinate x (ascissa) ed y (ordinata) e viene indicato in vari modi, per esempio $P(x, y)$. I numeri complessi sono i punti del piano cartesiano dotati di due operazioni che hanno un significato fisico che vedremo, ma la notazione che si usa per indicare i numeri complessi è diversa da quella usuale della geometria analitica o della fisica. La seconda componente, ossia l'ordinata, si identifica mediante un “fattore” usualmente² indicato con i , scritta indifferentemente

¹con la medesima unità di misura per le lunghezze su ambedue gli assi.

²ma non sempre: in elettrotecnica i indica la corrente e quindi l'ordinata si indica col “fattore” j .

prima o dopo. E il punto P di coordinate x ed y si indica con $x + iy$ o anche $x + yi$. Questa notazione permette di identificare immediatamente l'ordinata del punto, che è y , e quindi anche l'ascissa, che è x . Dunque, l'ordine in cui esse vengono scritte non ha influenza e lo stesso numero complesso può rappresentarsi indifferentemente

$$x + iy = x + yi = yi + x = iy + x.$$

Inoltre, se una delle due coordinate è nulla essa si sottintende e quindi

$$x \text{ indica } x + i0, \quad iy \text{ indica } 0 + iy.$$

Se ambedue le coordinate sono nulle, ossia se il punto corrisponde all'origine, esso si indica con 0 . Si noti in particolare:

1 indica $1 + i0$ e si chiama *unità dei numeri complessi*,

i indica $0 + 1i$ e si chiama *unità immaginaria*

Inoltre, i numeri iy si chiamano *numeri immaginari* (talvolta “immaginari puri”) e quindi l'asse delle ordinate si chiama anche *asse immaginario*. I numeri $x = x + i0$ si chiamano *numeri complessi reali* e l'asse delle ascisse si chiama anche *asse reale*. Nel contesto dei numeri complessi, i termini “ascissa” ed “ordinata” vengono sostituiti dai termini *parte reale* e *parte immaginaria*. Inoltre, i numeri complessi si indicano spesso con le lettere z, u, v, w ed è più frequente usare le lettere a e b (per esempio) invece di x ed y . Ossia, scriveremo

$$z = a + ib$$

e useremo le notazione seguenti per la parte reale e la parte immaginaria:

$$\Re z = a, \quad \Im z = b.$$

Si noti che “parte reale” e “parte immaginaria” sono ambedue numeri reali. Se $z = a + ib$, il simbolo $-z$ indica il numero $-a + i(-b)$ che si scrive più semplicemente $-a - ib$. Ossia,

$$-z = -a - ib.$$

L'insieme dei numeri complessi si chiama anche *piano complesso* o *piano di Argand-Gauss*. I numeri complessi si chiamano anche i “punti” del piano complesso. Per esercizio, si indichi un numero complesso z sul piano complesso, e quindi $-z$. L'insieme dei numeri complessi, dotato delle operazioni che vedremo, si indica col simbolo \mathbb{C} . La rappresentazione $a+ib$ si chiama *rappresentazione algebrica* dei numeri complessi. E' importante anche una seconda rappresentazione, che si chiama “trigonometrica”.

7.1. LA DEFINIZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi Consideriamo un'altra rappresentazione dei punti del piano cartesiano, e quindi anche dei punti del piano complesso, che si chiama la **rappresentazione polare**. Si congiunga il punto $P(x, y)$, ossia il numero complesso $z = x + iy$, con l'origine delle coordinate. Si trova un segmento la cui lunghezza è

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il numero r si chiama il **modulo** del numero complesso. Il segmento fa un'angolo θ con l'asse reale positivo.

Il numero θ si considera positivo se il semiasse reale positivo gira in senso **antiorario** per sovrapporsi al segmento PO , orientato da O verso P ; negativo altrimenti.

Quest'angolo si chiama **argomento** o **anomalia**. La coppia (r, θ) si chiama **rappresentazione polare** ad ogni coppia (r, θ) corrisponde un solo punto P .

Si noti però che la corrispondenza tra P e la sua rappresentazione polare non è biunivoca: l'angolo θ è determinato a meno di multipli di 2π se $r > 0$. Infatti,

$$(r, \theta) \quad \text{e} \quad (r, \theta + 2\pi)$$

identificano il medesimo punto P . Se $r = 0$, tutte le coppie $(0, \theta)$ identificano l'origine delle coordinate. Si ritrova una corrispondenza biunivoca, ma solamente per $r > 0$, se si impone di scegliere $\theta \in [0, 2\pi)$. L'argomento così scelto si chiama **argomento principale**.

Noti r e θ , si ha

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

e quindi il numero complesso $x + iy$ si scrive come

$$r \cos \theta + ir \sin \theta$$

che usa scrivere come

$$r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

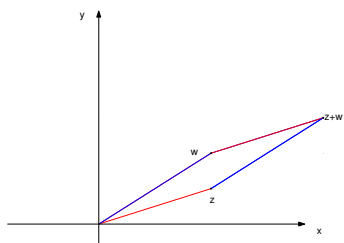
Si chiama questa la **rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi**.

7.2 Operazioni tra i numeri complessi

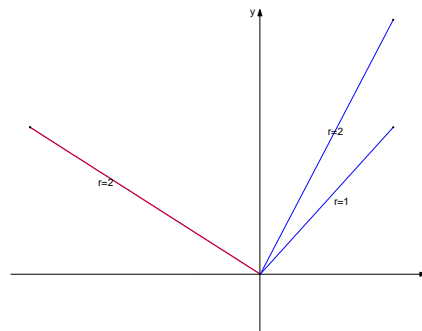
Per ora abbiamo descritto l'insieme dei numeri complessi. Descriviamo ora le operazioni tra essi, che sono due: la somma e il prodotto (che daranno anche la sottrazione e la divisione).

Figura 7.1: somma e prodotto

(a) somma: $(1 + i) + (1 + 2i)$:
Somma di due numeri complessi: il segmento congiungente $(0, 0)$ con $(1, 1)$ e il segmento congiungente $(0, 0)$ con $(1, 2)$ individuano un parallelogramma la cui diagonale è il segmento congiungente $(0, 0)$ con $(1 + 1, 1 + 2)$.



(b) prodotto: $[(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)][2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)]$: Il numero complesso prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per anomalia la somma delle anomalie



7.2.1 Somma di numeri complessi

E' l'operazione di somma di vettori con la regola del parallelogramma, ossia essa si fa sommando le componenti corrispondenti:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Si osservi che

- $z + 0 = z$
- $z + (-z) = 0$
- $(v + z) + w = v + (z + w)$
- $z + w = w + z.$

7.2.2 Il prodotto

Il prodotto di due numeri complessi si indica con $z \cdot w$ (o anche semplicemente come zw) e si capisce meglio rappresentando i numeri in forma trigonometrica. Definiamo

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)] \cdot [\rho(\cos \phi + i \sin \phi)] = r\rho(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)) .$$

Ossia, il prodotto opera in questo modo: prima si sommano gli argomenti, e quindi il primo punto viene ruotato di tanto quanto è l'argomento del secondo, e poi si fa il prodotto dei moduli. Per chi conosce un po' di elettrotecnica: è questa la forma che assume la legge di Ohm per le correnti alternate! Il numero

$$1 = 1 + i0 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

è l'elemento neutro rispetto al prodotto:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Il numero $w = 1/z$ deve verificare

$$wz = 1 .$$

Quindi, se $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) .$$

Definito il prodotto, si possono definire le potenze ad esponente intero:

$$z^2 = z \cdot z, \quad z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2, \dots$$

Il prodotto in notazione algebrica Usiamo i colori per distinguere un numero complesso dall'altro: sia

$$z = a + ib, \quad w = c + id$$

quando i due numeri sono rappresentati in notazione algebrica e, corrispondentemente

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) .$$

Dunque

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta, & b &= r \sin \theta, \\ c &= \rho \cos \phi, & d &= \rho \sin \phi. \end{aligned}$$

Il prodotto è:

$$\begin{aligned}
 z \cdot w &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho(\cos \phi + i \sin \phi) \\
 &= (r\rho)(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)) \\
 &= (r\rho)[(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)] \\
 &= [(r \cos \theta)(\rho \cos \phi) - (r \sin \theta)(\rho \sin \phi)] + i[(r \sin \theta)(\rho \cos \phi) + (r \cos \theta)(\rho \sin \phi)] \\
 &= (ac - bd) + i(ad + bc).
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la seguente formula per il prodotto di numeri complessi in notazione algebrica:

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (7.1)$$

Non è necessario ricordare questa formula, perché si può ottenerla facilmente in questo modo: distribuiamo i prodotti sulle somme, ottenendo

$$\begin{aligned}
 &(a + ib) \cdot (c + id) \\
 &= ac + ibd + aid + ibid
 \end{aligned}$$

Ora si proceda con le usuali regole algebriche, scambiando i simboli i nei prodotti e raccogliendoli. Si trova

$$\begin{aligned}
 &(a + ib) \cdot (c + id) \\
 &= ac + ibc + aid + ibid \\
 &= ac + ibc + iad + (i \cdot i)bd \\
 &= ac + i(bd + ad) + (i \cdot i)bd.
 \end{aligned}$$

Confrontiamo (7.1) con (7.1). Si vede che la seconda restituisce la prima se³ ad $i \cdot i = i^2$ si sostituisce -1 . Infatti, con quest'ultima sostituzione si trova la formula del prodotto:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Segue da qui che le operazioni algebriche tra i numeri complessi si fanno operando con le usuali regole algebriche, alle quali va aggiunta l'ulteriore "regola"

$$i^2 = -1.$$

³si noti che questa sostituzione è consistente col fatto che $i^2 = (-1 + i0)$, numero che abbiamo deciso di indicare semplicemente con -1 .

7.3 Il coniugato

Sia $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Il coniugato del numero z è il numero

$$\bar{z} = a - ib,$$

simmetrico di z rispetto all'asse reale. In notazione trigonometrica,

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Si noti che

$$z\bar{z} = r^2 = |z|^2.$$

I numeri \bar{z} e $1/z$ hanno i medesimi argomenti ma in generale modulo diverso. Si ha $\bar{z} = 1/z$ se e solo se $|z| = 1$, ossia se e solo se il punto del piano cartesiano che corrisponde al numero complesso z è sulla “circonferenza goniometrica”, ossia sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine delle coordinate.

Il coniugato è utile per esempio per scrivere in modo semplice l'espressione di $1/z$ in rappresentazione algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

e quindi

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}.$$

Si verifica immediatamente che **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati**, ossia,

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Si suggerisce di verificare la regola relativa al prodotto sia usando la rappresentazione algebrica che quella trigonometrica. Notiamo infine che se $z = a + ib$,

$$\Re z = a = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

7.4 Radici di numeri complessi

Ricordiamo che la radice n -ma di un qualsiasi numero z è un numero w che risolve l'equazione

$$w^n = z.$$

Vogliamo studiare quest'equazione tra i numeri complessi. Ricordiamo il significato geometrico del prodotto $w \cdot w$: è quel numero il cui modulo è $|w|^2$ ed il cui argomento è il doppio dell'argomento di w . In generale, se

$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \implies w^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta);$$

ossia, w^n ha per modulo $|w|^n$ e per argomento $n\theta$. In particolare, se $w \neq 0$ allora $w^n \neq 0$. Dunque, l'equazione

$$w^n = 0$$

ha la sola radice $w = 0$. Sia invece

$$z = \rho(\cos \psi + i \sin \psi) = \rho(\cos(\psi + 2k\pi) + i \sin(\psi + 2k\pi)) \neq 0.$$

Si ricercano numeri

$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

tali che

$$w^n = z \quad \text{ossia} \quad r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \rho(\cos(\psi + 2k\pi) + i \sin(\psi + 2k\pi)).$$

Quest'uguaglianza vale se e solo se $r^n = \rho$, ossia $r = \sqrt[n]{\rho}$ e inoltre

$$n\theta = \psi + 2k\pi$$

ove k è un qualunque numero intero. Dunque, θ deve essere uno dei numeri

$$\theta = \frac{\psi + 2k\pi}{n}.$$

Sono questi infiniti argomenti ma, a causa della periodicità delle funzioni $\sin \theta$ e $\cos \theta$, solamente gli argomenti che si ottengono per $k = 0, 1, \dots, n-1$ danno valori diversi di w . Ricapitolando:

- se $z = 0$ allora $w^n = z = 0$ ha l'unica soluzione $w = 0$;

7.5. ESPONENZIALE AD ESPONENTE COMPLESSO

- se $z \neq 0$ allora esistono n numeri complessi w che risolvono $w^n = z = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ e questi sono i numeri

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\psi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + 2k\pi}{n} \right) \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (7.2)$$

Questi numeri si chiamano le radici n -me di z .

Geometricamente, le radici n -me di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati, i cui vertici giacciono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|z|}$. La formula (7.2) talvolta si chiama anche formula di Moivre. Torniamo ora all'uguaglianza

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\cos^k \theta] (i)^{n-k} [\sin^{n-k} \theta].$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria di queste formule, si trovano espressioni per $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, scritte combinando solamente $\cos \theta$ e $\sin \theta$. Anche queste formule si chiamano formule di Moivre. Un fatto notevole da notare è che i termini reali al membro destro devono avere $n - k$ pari e in tal caso $\sin^{n-k} \theta$ si esprime mediante potenze (di ordine pari) di $\cos \theta$, ossia $\cos n\theta$ può rappresentarsi come combinazione di potenze di $\cos \theta$, senza far intervenire $\sin \theta$.

7.5 Esponenziale ad esponente complesso

Consideriamo un numero complesso non nullo, rappresentato in forma trigonometrica

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Dato che $r > 0$, si potrà scrivere

$$r = e^a$$

(con $a = \log r$). Dunque avremo

$$z = e^a(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Quest'uguaglianza suggerisce di definire

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

così che

$$z = e^{\alpha} e^{i\theta}.$$

Definiremo poi

$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha} e^{i\theta}$$

così che

$$z = e^{\alpha+i\theta}.$$

Si è così **definita** l'esponenziale di esponente complesso,

$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha} (\cos \theta + i \sin \theta) \tag{7.3}$$

Questo è niente altro che un simbolismo diverso per la rappresentazione trigonometrica di numeri complessi. Però, l'esponenziale di numeri complessi così definita gode delle proprietà caratteristiche dell'esponenziale reale. Infatti, siano z e w due numeri complessi non nulli,

$$z = [r(\cos \theta + i \sin \theta)], \quad w = [\rho(\cos \phi + i \sin \phi)].$$

I moduli sono positivi e quindi si può scrivere

$$r = e^{\alpha}, \quad \rho = e^{\beta}.$$

Dunque, il prodotto è

$$zw = e^{\alpha} e^{\beta} (\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)) = e^{\alpha+\beta+i(\theta+\phi)}.$$

Si trova quindi

$$e^{\alpha+i\theta} e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)}.$$

Ed inoltre,

$$e^0 = e^{0+i0} = e^0 (\cos 0 + i \sin 0) = 1 + i0 = 1.$$

Ossia, le proprietà cruciali dell'esponenziale reale continuano a valere per l'esponenziale complesso. La (7.3) definisce una funzione che ad un numero complesso associa un numero complesso, che si chiama *l'esponenziale di numeri complessi*.

Le sue proprietà essenziali sono:

- $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$;
- $|e^{\alpha+i\theta}| = |e^{\alpha} e^{i\theta}| = e^{\alpha}$. In particolare, **l'esponenziale di numeri complessi non si annulla**;
- $e^0 = 1$;

7.5. ESPONENZIALE AD ESPONENTE COMPLESSO

- $e^{\alpha+i\theta}e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)}$;
- $e^{\alpha+i0} = e^{\alpha} + i0$;

Queste proprietà sono le ovvie estensioni delle corrispondenti proprietà dell'esponenziale di numeri reali. Le seguenti proprietà invece non hanno analogo tra i numeri reali:

- $\overline{e^{\alpha+i\beta}} = e^{\alpha-i\beta}$;
- $e^{(\alpha+i\beta)+2\pi i} = e^{\alpha+i\beta}$.

L'ultima proprietà mostra che **l'esponenziale di numeri complessi è periodica di periodo $2\pi i$** . E quindi la definizione di logaritmo tra i numeri complessi, che non trattiamo, sarà alquanto delicata. Notiamo infine le formule seguenti:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} = e^{-i\pi} &= -1, & e^{2\pi i} &= 1, \\ e^{i\pi/2} &= i, & e^{-i\pi/2} &= -i. \end{aligned}$$

L'uguaglianza

$$e^{2\pi i} = 1$$

si chiama formula di Eulero La (7.3), che è la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi scritta in modo più compatto, è la forma più semplice e maneggevole quando si debbano fare operazioni di prodotto, quoziente, potenza e radice di numeri complessi. Per questo gli si dà il nome di rappresentazione esponenziale dei numeri complessi. **Si noti che il numero $0 = 0 + i0$ è l'unico numero complesso che non ha rappresentazione esponenziale, ossia non si può scrivere in forma e^z** . Infatti, l'esponenziale non si annulla mai. Usando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi, le radici n -me di

$$e^{\alpha+i\theta}$$

sono rappresentano come

$$e^{(\alpha+i\theta)/n} e^{(2k\pi i)/n}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

(ed ovviamente k intero). I numeri

$$\epsilon_k = e^{(2k\pi i)/n}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

sono le n radici n -me di 1.

7.6 Continuità e derivate

Consideriamo ora una funzione a valori complessi di una variabile reale che indichiamo con t :

$$t \mapsto z(t) = f(t) + ig(t).$$

Supponiamo che t appartenga ad un intervallo (a, b) . Limiti e continuità si definiscono per componenti, ossia, per la definizione di limite,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) + ig(t)] = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) + i \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right).$$

E quindi, in particolare, $z(t)$ è continua in t_0 se e solo se sia $f(t)$ che $g(t)$ lo sono. La derivata si definisce come il limite del rapporto incrementale,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t_0 + h) + ig(t_0 + h)) - (f(t_0) + ig(t_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} \right). \end{aligned}$$

Dunque, anche la derivata si definisce per componenti e $z(t)$ è derivabile se e solo se sono derivabili sia $f(t)$ che $g(t)$. In tal caso si ha:

$$\text{se } z(t) = f(t) + ig(t) \quad \text{allora} \quad z'(t) = f'(t) + ig'(t).$$

A noi interessa calcolare la derivata dell'esponenziale. Per essa vale una forma in tutto analoga a quella che si ha per l'esponenziale reale:

Teorema 158 *Vale:*

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}.$$

Dim. Sia

$$z_0 = a + ib \quad \text{così che} \quad e^{z_0 t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt).$$

Dunque,

$$e^{z_0 t} = f(t) + ig(t), \quad \text{con} \quad \begin{cases} f(t) = e^{at} \cos bt \\ g(t) = e^{at} \sin bt. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata della parte reale e della parte immaginaria:

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{at} [a \cos bt - b \sin bt], \\ g'(t) &= e^{at} [a \sin bt + b \cos bt]. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{z_0 t} = f'(t) + ig'(t) &= e^{at} [a \cos bt - b \sin bt] + i e^{at} [a \sin bt + b \cos bt] \\ &= (a + ib) \cdot [e^{at} (\cos bt + i \sin bt)] = z_0 e^{z_0 t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.7 Il teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza delle radici permette di risolvere le equazioni della forma

$$z^n + a = 0$$

ove a è il termine noto e z è l'incognita: Quest'equazione ha la sola soluzione nulla se $a = 0$. Altrimenti ammette n soluzioni. Consideriamo ora l'equazione che si ottiene uguagliando a zero un generico polinomio⁴

$$0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{r=0}^n a_r z^r, \quad a_n \neq 0. \quad (7.4)$$

Se $n = 1$ oppure $n = 2$ allora quest'equazione ammette soluzioni (rispettivamente, una soluzione oppure due soluzioni) ed esiste una formula per rappresentare le soluzioni. Formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado esistono, e sono state scoperte nel XVI secolo. Naturalmente, in generale le soluzioni sono numeri complessi. Tra il XVIII e il XIX secolo è stato provato che **non esistono** formule risolutive per equazioni di grado superiore al quarto (espresse mediante un numero finito di operazioni algebriche). Ciò nonostante, è stato provato il teorema seguente:

Teorema 159 (fondamentale dell'algebra) *Ogni equazione di grado $n > 0$ ammette almeno una soluzione complessa.*

Ora, si sa che se $z = z_0$ risolve l'equazione (7.4) allora si può scrivere

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = (z - z_0) \sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r.$$

ossia, $z - z_0$ divide il polinomio. Il teorema 159 può ora applicarsi al polinomio

$$\sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r.$$

Se $n > 1$ si trova un numero z_1 che annulla questo polinomio e che quindi risolve (7.4). Ovviamente, può accadere che sia $z_1 = z_0$. Iterando questo procedimento, si viene a scrivere

$$\sum_{r=0}^n a_r z^r = (z - z_0)^{r_0} (z - z_1)^{r_1} \cdots (z - z_\nu)^{r_\nu}$$

⁴si ricordi: in un polinomio gli esponenti di z devono essere **INTERI**. Ricordiamo inoltre che il polinomio in (7.4) si dice "di grado n " se il coefficiente a_n è diverso da zero. Un'equazione si dice *di grado n* se è ottenuta uguagliando a zero un polinomio di grado n .

e

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n. \quad (7.5)$$

I numeri z_j , che sono tutte e sole le **soluzioni** di (7.4) si dicono radici o anche zeri del polinomio e si dice che la radice z_j di (7.4), equivalentemente lo zero z_j del polinomio, ha molteplicità r_j , ove r_j è l'esponente del fattore $(z - z_j)$. La (7.5) vuol dire che **il numero totale delle radici, ciascuna contata secondo la propria molteplicità, è uguale al grado del polinomio.**

7.7.1 Polinomi a coefficienti reali

Ricordiamo queste proprietà dell'operazione di coniugio: **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati.** Ossia

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Dunque, $\overline{z^k} = (\bar{z})^k = \bar{z}^k$. Ricordiamo inoltre che un numero è reale se e solo se coincide col suo coniugato. Consideriamo ora un polinomio **a coefficienti reali**

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k$$

e supponiamo che esso si annulli in z_0 ,

$$0 = \sum_{k=0}^n a_k z_0^k.$$

Prendendo i coniugati dei suoi membri, e notando che $\bar{0} = 0$, si trova

$$0 = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}_0^k = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}_0^k.$$

Ossia, anche \bar{z}_0 è uno zero del polinomio, che pertanto è divisibile per il trinomio **a coefficienti reali**⁵

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (2\Re z_0)z + |z_0|^2.$$

Dunque,

⁵si è già usato questo fatto nel calcolo delle primitive di funzioni razionali.

Teorema 160 Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali e sia z_0 un suo zero di molteplicità r . In tal caso, anche \bar{z}_0 è uno zero di $P(z)$, della medesima molteplicità r .

Di conseguenza, le radici **non reali** di un polinomio **a coefficienti reali** vengono **a coppie**, e quindi esse sono in numero **pari**. Ricordiamo ora che il numero totale delle radici di un polinomio è il grado del polinomio, e quindi un polinomio di grado dispari ha un numero dispari di radici. Di conseguenza, se i coefficienti di un polinomio **di grado dispari** sono reali, almeno una delle sue radici deve essere reale:

Teorema 161 Il numero delle radici reali di un polinomio di grado dispari e a coefficienti reali è dispari. In particolare, ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.

Questo risultato si è già provato in altro modo, si veda il Corollario 114.

7.7.2 Il metodo di completamento dei quadrati

E' utile ricordare come si ottiene la formula risolutiva di

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0. \quad (7.6)$$

Si nota che quest'equazione si sa risolvere se $b = 0$. In questo caso le soluzioni sono le due radici di $-c/a$. Se quest'equazione può ricondursi alla forma

$$a(z - \alpha)^2 - \beta = 0 \quad (7.7)$$

allora essa è ancora immediatamente risolubile,

$$z = \alpha + \sqrt{\frac{\beta}{a}}$$

(si ricordi che la radice nel campo complesso prende **due** valori, e quindi questa espressione rappresenta **due** soluzioni). Mostriamo che **ogni** equazione della forma (7.6) può ricondursi alla forma (7.7) mediante il metodo del completamento dei quadrati Prima di tutto si nota che risolvere (7.6) equivale a risolvere

$$z^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)z + \frac{c}{a} = 0.$$

Vogliamo considerare il secondo addendo come il "doppio prodotto" di z con $b/2a$. Dunque sommiamo e sottraiamo $(b/2a)^2$. Si trova

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0.$$

E' ora immediato vedere che l'equazione ammette due soluzioni, date da

$$-\frac{b}{2a} + \sqrt{-\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si noti che non abbiamo scritto \pm di fronte alla radice perché per definizione la radice complessa prende due valori. In contrasto con ciò, la **radice positiva di un numero reale positivo** si chiama *radice aritmetica*

7.8 Alcuni esercizi

1. Sul piano di Argand-Gauss si segni la posizione di un numero complesso z . Si segnino quindi i punti della lista seguente:

$$\begin{array}{ll} 1/z, \bar{z}, & -\bar{z}, \\ 1/\bar{z}, -1/\bar{z}, & iz, \\ \bar{iz}, 1/iz, & 1/\bar{iz}. \end{array}$$

Si consideri in particolare il caso in cui z giace su uno dei quattro semiassi coordinati.

2. Sia $z = a + ib$, $w = c + id$. Calcolare $\bar{z}w$. Chi conosce le espressioni in coordinate cartesiane ortogonali del prodotto scalare e del prodotto vettoriale, noti come queste si ritrovano in questo prodotto.
3. Siano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ e $w = -\bar{z}$. Si identifichi la posizione di z e w sul piano complesso, e si rappresentino i due punti $z + w$ e $z - w$.
4. Si calcolino i numeri i^n per n intero compreso tra 0 e 16.
5. Usando la formula del binomio di Newton, si calcoli $(1 + i)^9$. Si scriva quindi la rappresentazione trigonometrica del numero $(1 + i)$ e si usi questa per calcolare $(1 + i)^9$. Rappresentare questo numero sul piano di Argand-Gauss.
6. I numeri complessi z , w abbiano modulo 1 e inoltre z abbia argomento $2\pi/3$ mentre w abbia argomento $4\pi/3$. Sul piano complesso, si individui il punto $z + w$. Si vuol sapere se esiste u tale che $z + w + u = 0$ e, nel caso affermativo, la sua posizione sul piano complesso.

7.8. ALCUNI ESERCIZI

7. Si consideri un quadrato sul piano complesso, inscritto nella circonferenza trigonometrica e i cui lati sono paralleli agli assi coordinati oppure alle bisettrici degli assi. Si vuol sapere se i suoi vertici sono o meno radici di un certo ordine di qualche numero.
8. Il numero complesso z abbia moduli 1 ed argomento $\pi/12$. Calcolare un numero di cui z è radice quarta. Quanti sono tali numeri?
9. Scrivere in forma trigonometrica il numero $(\cos \pi - i \sin \pi/2)$.
10. (★) Rappresentare sul piano di Argand-Gauss i numeri $\{(1/2)(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)\}^n$ e notare che essi si trovano su un numero finito di rette uscenti dall'origine. Dire se accade un fatto analogo per i numeri $\{2(\cos \pi/7 + i \sin \pi/7)\}^n$ e $\{2(\cos(\sqrt{2}\pi) + i \sin(\sqrt{2}\pi))\}^n$.
11. (★) Si mostri che vale l'uguaglianza $(zw)^2 = z^2w^2$. Si consideri quindi l'uguaglianza $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. Dire se quest'uguaglianza è corretta. In generale discutere l'uguaglianza $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$.
12. Rappresentare sul piano complesso i numeri $z(t) = e^{it}$ per $t \in \mathbb{R}$. E se invece si considerano i numeri $z(t) = e^{-it}$?
13. rappresentare sul piano di Argand-Gauss l'immagine della trasformazione $t \mapsto te^{it}$.
14. Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(t) = e^{2it}$ e rappresentare sul piano di Argand-Gauss sia $f(t)$ che $f'(t)$ ed $f''(t)$.
15. (★) Scrivere la formula di McLaurin di e^x e sostituire ad iy ad x . Trovare le relazioni tra la formula ottenuta e le formule di McLaurin di $\sin y$ e $\cos y$ (si ottiene una prima versione della "most remarkable formula in mathematics", come si esprime R. Feynman, nelle *Feynman Lectures on Physics*).
16. (★) Sia $z(t) = Ae^{i(\omega t + \alpha)}$, $w(t) = Be^{i(\omega t + \beta)}$. Dire se, fissati A ed ω , esistono valori di α e β tali che $z(t) + w(t) = 0$ per ogni t (è possibile cancellare un suono mediante un altro suono? Si calcolino le parti reali).
17. (★) Sia $z(t) = e^{i\omega t}$, $w(t) = e^{i(\omega + \nu)t}$. Calcolare la parte reale di $z(t) + w(t)$. Si riesce a scriverla in modo da vedere una relazione col fenomeno dei battimenti?

18. (★) si consideri la funzione $t \mapsto z(t) = Ae^{-i\omega t + \phi}$. Se ne rappresenti il valore sul piano complesso per ogni valore di t . Si trova un vettore applicato nell'origine, ruotante (in quale verso?) al crescere del tempo t . Si riesce ad interpretare $z(t) + \bar{z}(t)$ facendo intervenire il moto armonico?