Capitolo 7

Numeri complessi

Non è per la sua cultura che lo amo—no, non è per quello. E' un autodidatta; in realtà conosce una quantità di cose, solo che non stanno cosìcome le sa lui. Diario di Eva, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

In questo capitolo introduciamo le proprietà essenziali di una nuova classe di numeri che si chiamano $\boxed{\textit{numeri complessi}}$ Per quanto storicamente falso, conviene pensare ai numeri complessi come introdotti per risolvere l'equazione

$$x^2 + 1 = 0\,,$$

ovviamente priva di soluzioni in $\mathbb{R}$.

7.1 La definizione dei numeri complessi

Si riferisca il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali[1] di origine in un punto O. In questo modo, un punto P viene identificato dalle sue coordinate x (ascissa) ed y (ordinata) e viene indicato in vari modi, per esempio $P(x, y)$. I numeri complessi sono i punti del piano cartesiano dotati di due operazioni che hanno un significato fisico che vedremo, ma la notazione che si usa per indicare i numeri complessi è diversa da quella usuale della geometria analitica o della fisica. La seconda componente, ossia l'ordinata, si identifica mediante un "fattore" usualmente[2] indicato con i, scritta indifferentemente

[1] con la medesima unità di misura per le lunghezze su ambedue gli assi.

[2] ma non sempre: in elettrotecnica i indica la corrente e quindi l'ordinata si indica col "fattore" j.

prima o dopo. E il punto P di coordinate x ed y si indica con $x + iy$ o anche $x + yi$. Questa notazione permette di identificare immediatamente l'ordinata del punto, che è y, e quindi anche l'ascissa, che è x. Dunque, l'ordine in cui esse vengono scritte non ha influenza e lo stesso numero complesso può rappresentarsi indifferentemente

$$x + iy = x + yi = yi + x = iy + x\,.$$

Inoltre, se una delle due coordinate è nulla essa si sottintende e quindi

$$x\text{indica } x + i0\,, \qquad iy\text{indica } 0 + iy\,.$$

Se ambedue le coordinate sono nulle, ossia se il punto corrisponde all'origine, esso si indica con 0. Si noti in particolare:

$$1 \text{ indica } 1 + i0 \text{ e si chiama } \boxed{\textit{unità dei numeri complessi}};$$

$$i \text{ indica } 0 + 1i \text{ e si chiama } \boxed{\textit{unità immaginaria}}$$

Inoltre, i numeri iy si chiamano $\boxed{\textit{numeri immaginari}}$ (talvolta "immaginari puri") e quindi l'asse delle ordinate si chiama anche $\boxed{\textit{asse immaginario}}$ I numeri $x = x + i0$ si chiamano $\boxed{\textit{numeri complessi reali}}$ e l'asse delle ascisse si chiama anche $\boxed{\textit{asse reale}}$ Nel contesto dei numeri complessi, i termini "ascissa" ed "ordinata" vengono sostituiti dai termini $\boxed{\textit{parte reale}}$ e $\boxed{\textit{parte immaginaria}}$ Inoltre, i numeri complessi si indicano spesso con le lettere z, u, v, w ed è più frequente usare le lettere a e b (per esempio) invece di x ed y. Ossia, scriveremo

$$z = a + ib$$

e useremo le notazione seguenti per la parte reale e la parte immaginaria:

$$\Re e\, z = a\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = b\,.$$

Si noti che "parte reale" e "parte immaginaria" sono ambedue numeri reali. Se $z = a + ib$, il simbolo $-z$ indica il numero $-a + i(-b)$ che si scrive più semplicemente $-a - ib$. Ossia,

$$-z = -a - ib\,.$$

L'insieme dei numeri complessi si chiama anche $\boxed{\textit{piano complesso}}$ o $\boxed{\textit{piano di Argand-Gauss}}$ I numeri complessi si chiamano anche i "punti" del piano complesso. Per esercizio, si indichi un numero complesso z sul piano complesso, e quindi $-z$. L'insieme dei numeri complessi, dotato delle operazioni che vedremo, si indica col simbolo $\mathbb{C}$. La rappresentazione $a+ib$ si chiama $\boxed{\textit{rappresentazione algebrica}}$ dei numeri complessi. E' importante anche una seconda rappresentazione, che si chiama "trigonometrica".

Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi Consideriamo un'altra rappresentazione dei punti del piano cartesiano, e quindi anche dei punti del piano complesso, che si chiama la $\boxed{\textit{rappresentazione polare}}$ Si congiunga il punto $P(x, y)$, ossia il numero complesso $z = x + iy$, con l'origine delle coordinate. Si trova un segmento la cui lunghezza è

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Il numero r si chiama il $\boxed{\textit{modulo}}$ del numero complesso. Il segmento fa un'angolo θ con l'asse reale positivo.

Il numero θ si considera positivo se il semiasse reale positivo gira in senso **antiorario** per sovrapporsi al segmento PO, orientato da O verso P; negativo altrimenti.

Quest'angolo si chiama $\boxed{\textit{argomento}}$ o $\boxed{\textit{anomalia}}$ La coppia (r, θ) si chiama $\boxed{\textit{rappresentazione polare}}$ ad ogni coppia (r, θ) corrisponde un solo punto P.

Si noti però che la corrispondenza tra P e la sua rappresentazione polare non è biunivoca: l'angolo θ è determinato a meno di multipli di 2π se $r > 0$. Infatti,

$$(r, \theta) \qquad \text{e} \qquad (r, \theta + 2\pi)$$

identificano il medesimo punto P. Se $r = 0$, tutte le coppie $(0, \theta)$ identificano l'origine delle coordinate. Si ritrova una corrispondenza biunivoca, ma solamente per $r > 0$, se si impone di scegliere $\theta \in [0, 2\pi)$. L'argomento cosìscelto si chiama $\boxed{\textit{argomento principale}}$

Noti r e θ, si ha

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

e quindi il numero complesso $x + iy$ si scrive come

$$r\cos\theta + ir\sin\theta$$

che usa scrivere come

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

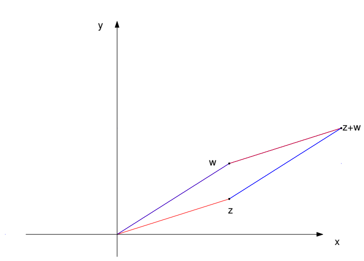
Si chiama questa la $\boxed{\textit{rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi}}$

7.2 Operazioni tra i numeri complessi

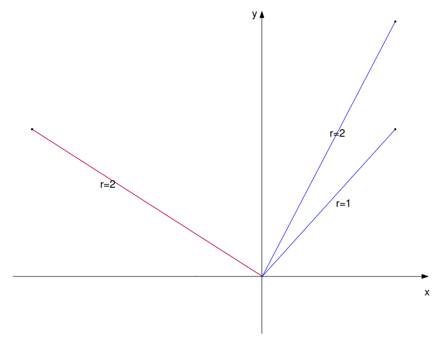
Per ora abbiamo descritto l'insieme dei numeri complessi. Descriviamo ora le operazioni tra essi, che sono due: la somma e il prodotto (che daranno anche la sottrazione e la divisione).

Figura 7.1: somma e prodotto

(a) somma: $(1+i)+(1+2i)$



(b) prodotto: $[(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)][2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)]$



7.2.1 Somma di numeri complessi

E' l'operazione di somma di vettori con la regola del parallelogramma, ossia essa si fa sommando le componenti corrispondenti:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)\,.$$

Si osservi che

- $z+0=z$
- $z+(-z)=0$
- $(v+z)+w=v+(z+w)$
- $z+w=w+z$.

7.2.2 Il prodotto

Il prodotto di due numeri complessi si indica con $z\cdot w$ (o anche semplicemente come zw) e si capisce meglio rappresentando i numeri in forma trigonometrica.

Definiamo

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)] \cdot [\rho(\cos\phi + i\sin\phi)] = r\rho\,(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))\ .$$

Ossia, il prodotto opera in questo modo: prima si sommano gli argomenti, e quindi il primo punto viene ruotato di tanto quanto è l'argomento del secondo, e poi si fa il prodotto dei moduli. Per chi conosce un po' di elettrotecnica: è questa la forma che assume la legge di Ohm per le correnti alternate! Il numero

$$1 = 1 + i0 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

è l'elemento neutro rispetto al prodotto:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Il numero $w = 1/z$ deve verificare

$$wz = 1\,.$$

Quindi, se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\,.$$

Definito il prodotto, si possono definire le potenze ad esponente intero:

$$z^2 = z \cdot z\,, \qquad z^{-1} = \frac{1}{z}\,, \qquad z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2\,, \ldots$$

Il prodotto in notazione algebrica Usiamo i colori per distinguere un numero complesso dall'altro: sia

$$\color{blue}{z = a + ib}\,, \qquad \color{red}{w = c + i d}$$

quando i due numeri sono rappresentati in notazione algebrica e, corrispondentemente

$$\color{blue}{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}\ , \qquad \color{red}{w = \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi)}\ .$$

Dunque

$$\begin{aligned} \color{blue}{a = r\cos\theta}\,, &\qquad \color{blue}{b = r\sin\theta}\,,\\ \color{red}{c = \rho\cos\phi}\,, &\qquad \color{red}{d = \rho\sin\phi}\,. \end{aligned}$$

Il prodotto è:

$$
\begin{aligned}
z \cdot w = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi) \\
(r\rho)\,(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\
= (r\rho)\,[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i\,(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\
= [(\,(r\cos\theta)(\rho\cos\phi) - (r\sin\theta)(\rho\sin\phi)\,) + i\,(\,(r\sin\theta)(\rho\cos\phi) + (r\cos\theta)(\rho\sin\phi)\,)] \\
= (ac - bd) + i\,(ad + bc)\ .
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi la seguente formula per il prodotto di numeri complessi in notazione algebrica:

$$
z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bd)\ . \tag{7.1}
$$

Non è necessario ricordare questa formula, perché si può ottenerla facilmente in questo modo: distribuiamo i prodotti sulle somme, ottenendo

$$
\begin{aligned}
&(a + ib) \cdot (c + id) \\
&= ac + ibd + aid + ibid
\end{aligned}
$$

Ora si proceda con le usuali regole algebriche, scambiando i simbili i nei prodotti e raccogliendoli. Si trova

$$
\begin{aligned}
&(a + ib) \cdot (c + id) \\
&= ac + ibc + aid + ibid \\
&= ac + ibc + iad + (i \cdot i)bd \\
&= ac + i\,(bd + ad) + (i \cdot i)bd\,.
\end{aligned}
$$

Confrontiamo (7.1) con (7.1). Si vede che la seconda restituisce la prima se[3] ad $i \cdot i = i^2$ si sostituisce -1. Infatti, con quest'ultima sostituzione si trova la formula del prodotto:

$$
(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\ .
$$

Segue da qui che le operazioni algebriche tra i numeri complessi si fanno operando con le usuali regole algebriche, alle quali va aggiunta l'ulteriore "regola"

$$
i^2 = -1\,.
$$

[3] si noti che questa sostituzione è consistente col fatto che $i^2 = (-1 + i0)$, numero che abbiamo deciso di indicare semplicemente con -1.

7.3 Il coniugato

Sia $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Il $\boxed{\textit{coniugato}}$ del numero z è il numero

$$\bar{z} = a - ib\,,$$

simmetrico di z rispetto all'asse reale. In notazione trigonometrica,

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)\,.$$

Si noti che

$$z\bar{z} = r^2 = |z|^2\,.$$

I numeri $\bar{z}$ e $1/z$ hanno i medesimi argomenti ma in generale modulo diverso. Si ha $\bar{z} = 1/z$ se e solo se $\lvert z\rvert = 1$, ossia se e solo se il punto del piano cartesiano che corrisponde al numero complesso z è sulla "circonferenza goniometrica", ossia sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine delle coordinate.

Il coniugato è utile per esempio per scrivere in modo semplice l'espressione di $1/z$ in rappresentazione algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\,;$$

e quindi

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Si verifica immediatamente che **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati,** ossia,

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Si suggerisce di verificare la regola relativa al prodotto sia usando la rappresentazione algebrica che quella trigonometrica. Notiamo infine che se $z = a + ib$,

$$\Re e\, z = a = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.$$

7.4 Radici di numeri complessi

Ricordiamo che la radice n–ma di un qualsiasi numero z è un numero w che risolve l'equazione
$$w^n = z\,.$$
Vogliamo studiare quest'equazione tra i numeri complessi. Ricordiamo il significato geometrico del prodotto $w \cdot w$: è quel numero il cui modulo è $|w|^2$ ed il cui argomento è il doppio dell'argomento di w. In generale, se

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\,;$$

ossia, w^n ha per modulo $|w|^n$ e per argomento $n\theta$. In particolare, se $w \neq 0$ allora $w^n \neq 0$. Dunque, l'equazione

$$w^n = 0$$

ha la sola radice $w = 0$. Sia invece

$$z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho\left(\cos(\psi + 2k\pi) + i\sin(\psi + 2k\pi)\right) \neq 0\,.$$

Si ricercano numeri
$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
tali che

$$w^n = z \qquad \text{ossia} \qquad r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) = \rho\left(\cos(\psi + 2k\pi) + i\sin(\psi + 2k\pi)\right)\,.$$

Quest'uguaglianza vale se e solo se $r^n = \rho$, ossia $r = \sqrt[n]{\rho}$ e inoltre

$$n\theta = \psi + 2k\pi$$

ove k è un qualunque numero intero. Dunque, θ deve essere uno dei numeri

$$\theta = \frac{\psi + 2k\pi}{n}\,.$$

Sono questi infiniti argomenti ma, a causa della periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$, solamente gli argomenti che si ottengono per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ danno valori diversi di w. Ricapitolando:

- se $z = 0$ allora $w^n = z = 0$ ha l'unica soluzione $w = 0$;

- se $z \neq 0$ allora esistono n numeri complessi w che risolvono $w^n = z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ e questi sono i numeri

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) \qquad 0 \le k \le n-1\,. \tag{7.2}$$

  Questi numeri si chiamano le $\boxed{\textit{radici } n\textit{–me}}$ di z.

Geometricamente, le radici n–me di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati, i cui vertici giacciono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|z|}$. La formula (7.2) talvolta si chiama anche $\boxed{\textit{formula di Moivre}}$ Torniamo ora all'uguaglianza

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left[\cos^k\theta\right](i)^{n-k}\left[\sin^{n-k}\theta\right]\,.$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria di queste formule, si trovano espressioni per $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, scritte combinando solamente $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Anche queste formule si chiamano $\boxed{\textit{formule di Moivre}}$ Un fatto notevole da notare è che i termini reali al membro destro devono avere $n-k$ pari e in tal caso $\sin^{n-k}\theta$ si esprime mediante potenze (di ordine pari) di $\cos\theta$, ossia $\cos n\theta$ *può rappresentarsi come combinazione di potenze di* $\cos\theta$*, senza far intervenire* $\sin\theta$.

7.5 Esponenziale ad esponente complesso

Consideriamo un numero complesso non nullo, rappresentato in forma trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Dato che $r > 0$, si potrà scrivere

$$r = e^a$$

(con $a = \log r$). Dunque avremo

$$z = e^a(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Quest'uguaglianza suggerisce di definire

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

cosìche
$$z = e^a e^{i\theta}\,.$$
Definiremo poi
$$e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta}$$
cosìche
$$z = e^{a+i\theta}\,.$$
Si è così**definita** l'esponenziale di esponente complesso,
$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{7.3}$$
Questo è niente altro che un simbolismo diverso per la rappresentazione trigonometrica di numeri complessi. Però, l'esponenziale di numeri complessi cosìdefinita gode delle proprietà caratteristiche dell'esponenziale reale. Infatti, siano z e w due numeri complessi non nulli,
$$z = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]\ , \qquad w = [\rho(\cos\phi + i\sin\phi)]\ .$$
I moduli sono positivi e quindi si può scrivere
$$r = e^{\alpha}\,, \qquad \rho = e^{\beta}\,.$$
Dunque, il prodotto è
$$zw = e^{\alpha}e^{\beta}\left(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right) = e^{\alpha+\beta+i(\theta+\phi)}\,.$$
Si trova quindi
$$e^{\alpha+i\theta}e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)}\,.$$
Ed inoltre,
$$e^0 = e^{0+i0} = e^0\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 1 + i0 = 1\,.$$
Ossia, le proprietà cruciali dell'esponenziale reale continuano a valere per l'esponenziale complesso. La (7.3) definisce una funzione che ad un numero complesso associa un numero complesso, che si chiama *l'esponenziale di numeri complessi*. Le sue proprietà essenziali sono:

- $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$;
- $|e^{\alpha+i\theta}| = |e^{\alpha}e^{i\theta}| = e^{\alpha}$. In particolare, **l'esponenziale di numeri complessi non si annulla;**
- $e^0 = 1$;

- $e^{\alpha+i\theta}e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)}$;
- $e^{\alpha+i0} = e^{\alpha} + i0$;

Queste proprietà sono le ovvie estensioni delle corrispondenti proprietà dell'esponenziale di numeri reali. Le seguenti proprietà invece non hanno analogo tra i numeri reali:

- $\overline{e^{\alpha+i\beta}} = e^{\alpha-i\beta}$;
- $e^{(\alpha+i\beta)+2\pi i} = e^{\alpha+i\beta}$.

L'ultima proprietà mostra che **l'esponenziale di numeri complessi è periodica di periodo $2\pi i$.** E quindi la definizione di logaritmo tra i numeri complessi, che non trattiamo, sarà alquanto delicata. Notiamo infine le formule seguenti:

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1\,, \qquad e^{2\pi i} = 1\,,$$
$$e^{i\pi/2} = i\,, \qquad e^{-i\pi/2} = -i\,.$$

L'uguaglianza

$$e^{2\pi i} = 1$$

si chiama $\boxed{\textit{formula di Eulero}}$ La (7.3), che è la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi scritta in modo più compatto, è la forma più semplice e maneggevole quando si debbano fare operazioni di prodotto, quoziente, potenza e radice di numeri complessi. Per questo gli si dà il nome di $\boxed{\textit{rappresentazione esponenziale}}$ dei numeri complessi. **Si noti che il numero $0 = 0 + i0$ è l'unico numero complesso che non ha rappresentazione esponenziale, ossia non si può scrivere in forma e^z.** Infatti, l'esponenziale non si annulla mai. Usando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi, le radici n-me di

$$e^{\alpha+i\theta}$$

sono rappresentano come

$$e^{(\alpha+i\theta)/n}e^{(2k\pi i)/n}\,, \qquad 0 \le k \le n-1$$

(ed ovviamente k intero). I numeri

$$\epsilon_k = e^{(2k\pi i)/n}\,, \qquad 0 \le k \le n-1$$

sono le n radici n-me di 1.

7.6 Continuità e derivate

Consideriamo ora una funzione a valori complessi di una variabile reale che indichiamo con t:

$$t \mapsto z(t) = f(t) + ig(t)\,.$$

Supponiamo che t appartenga ad un intervallo (a, b). Limiti e continuità si definiscono per componenti, ossia, per la definizione di limite,

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = \lim_{t\to t_0} [f(t) + ig(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right) + i\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\,.$$

E quindi, in particolare, $z(t)$ è continua in t_0 se e solo se sia $f(t)$ che $g(t)$ lo sono. La derivata si definisce come il limite del rapporto incrementale,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(t_0+h) + ig(t_0+h)) - (f(t_0) + ig(t_0))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} + i \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}\right)\,.\end{aligned}$$

Dunque, anche la derivata si definisce per componenti e $z(t)$ è derivabile se e solo se sono derivabili sia $f(t)$ che $g(t)$. In tal caso si ha:

$$\text{se} \quad z(t) = f(t) + ig(t) \qquad \text{allora} \quad z'(t) = f'(t) + ig'(t)\,.$$

A noi interessa calcolare la derivata dell'esponenziale. Per essa vale una forma in tutto analoga a quella che si ha per l'esponenziale reale:

Teorema 158 *Vale:*

$$\frac{\mathrm{d}}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}\,.$$

<u>Dim</u>. Sia

$$z_0 = a + ib \qquad \text{cosìche} \qquad e^{z_0 t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\,.$$

Dunque,

$$e^{z_0 t} = f(t) + ig(t)\,, \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} f(t) &= e^{at} \cos bt \\ g(t) &= e^{at} \sin bt\,. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata della parte reale e della parte immaginaria:

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{at}\left[a \cos bt - b \sin bt\right]\,, \\ g'(t) &= e^{at}\left[a \sin bt + b \cos bt\right]\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{z_0 t} = f'(t) + ig'(t) &= e^{at}\left[a \cos bt - b \sin bt\right] + ie^{at}\left[a \sin bt + b \cos bt\right] \\ &(a+ib) \cdot \left[e^{at}\left(\cos bt + i \sin bt\right)\right] = z_0 e^{z_0 t}\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.7 Il teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza delle radici permette di risolvere le equazioni della forma

$$z^n + a = 0$$

ove a è il termine noto e z è l'incognita: Quest'equazione ha la sola soluzione nulla se $a = 0$. Altrimenti ammette n soluzioni. Consideriamo ora l'equazione che si ottiene uguagliando a zero un generico polinomio[4]

$$0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 = \sum_{r=0}^{n} a_r z^r \,, \qquad a_n \neq 0 \,. \tag{7.4}$$

Se $n = 1$ oppure $n = 2$ allora quest'equazione ammette soluzioni (rispettivamente, una soluzione oppure due soluzioni) ed esiste una formula per rappresentare le soluzioni. Formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado esistono, e sono state scoperte nel XVI secolo. Naturalmente, in generale le soluzioni sono numeri complessi. Tra il XVIII e il XIX secolo è stato provato che **non esistono** formule risolutive per equazioni di grado superiore al quarto (espresse mediante un numero finito di operazioni algebriche). Ciò nonostante, è stato provato il teorema seguente:

Teorema 159 (fondamentale dell'algebra) *Ogni equazione di grado $n > 0$ ammette almeno una soluzione* **complessa.**

Ora, si sa che se $z = z_0$ risolve l'equazione (7.4) allora si può scrivere

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 = (z - z_0) \sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r \,.$$

ossia, $z - z_0$ *divide* il polinomio. Il teorema 159 può ora applicarsi al polinomio

$$\sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r \,.$$

Se $n > 1$ si trova un numero z_1 che annulla questo polinomio e che quindi risolve (7.4). Ovviamente, può accadere che sia $z_1 = z_0$. Iterando questo procedimento, si viene a scrivere

$$\sum_{r=0}^{n} a_r z^r = (z - z_0)^{r_0} (z - z_1)^{r_1} \cdots (z - z_\nu)^{r_\nu}$$

[4]si ricordi: in un polinomio gli esponenti di z devono essere **INTERI**. Ricordiamo inoltre che il polinomio in (7.4) si dice "di grado n" se il coefficiente a_n è diverso da zero. Un'equazione si dice *di grado n* se è ottenuta uguagliando a zero un polinomio di grado n.

e

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \,. \tag{7.5}$$

I numeri z_j, che sono tutte e sole le **soluzioni** di (7.4) si dicono $\boxed{\textit{radici}}$ o anche $\boxed{\textit{zeri}}$ del polinomio e si dice che la radice z_j di (7.4), equivalentemente lo zero z_j del polinomio, ha $\boxed{\textit{molteplicità}}$ r_j, ove r_j è l'esponente del fattore $(z - z_j)$. La (7.5) vuol dire che **il numero totale delle radici, ciascuna contata secondo la propria moltaplicità, è uguale al grado del polinomio.**

7.7.1 Polinomi a coefficienti reali

Ricordiamo queste proprietà dell'operazione di coniugio: **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati.** Ossia

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \,, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \,.$$

Dunque, $\overline{z^k} = (\overline{z})^k = \overline{z}^k$. Ricordiamo inoltre che un numero è reale se e solo se coincide col suo coniugato. Consideriamo ora un polinomio **a coefficienti reali**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

e supponiamo che esso si annulli in z_0,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \,.$$

Prendendo i coniugati dei suoi membri, e notando che $\bar{0} = 0$, si trova

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}_0^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}_0^k \,.$$

Ossia, anche $\bar{z}_0$ è uno zero del polinomio, che pertanto è divisibile per il trinomio **a coefficienti reali**[5]

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (2\Re e\, z_0) z + |z_0|^2 \,.$$

Dunque,

[5]si è già usato questo fatto nel calcolo delle primitive di funzioni razionali.

Teorema 160 *Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali e sia z_0 un suo zero di molteplicità r. In tal caso, anche $\overline{z_0}$ è uno zero di $P(z)$, della medesima moltiplicità r.*

Di conseguenza, le radici **non reali** di un polinomio **a coefficienti reali** vengono **a coppie,** e quindi esse sono in numero **pari.** Ricordiamo ora che il numero totale delle radici di un polinomio è il grado del polinomio, e quindi un polinomio di grado dispari ha un numero dispari di radici. Di conseguenza, se i coefficienti di un polinomio **di grado dispari** sono reali, almeno una delle sue radici deve essere reale:

Teorema 161 *Il numero delle radici* reali *di un polinomio* di grado dispari e a coefficienti reali *è dispari. In particolare, ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Questo risultato si è già provato in altro modo, si veda il Corollario 114.

7.7.2 Il metodo di completamento dei quadrati

E' utile ricordare come si ottiene la formula risolutiva di

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{con} \quad a \neq 0\,. \tag{7.6}$$

Si nota che quest'equazione si sa risolvere se $b = 0$. In questo caso le soluzioni sono le due radici di $-c/a$. Se quest'equazione può ricondursi alla forma

$$a(z - \alpha)^2 - \beta = 0 \tag{7.7}$$

allora essa è ancora immediatamente risolubile,

$$z = \alpha + \sqrt{\frac{\beta}{a}}$$

(si ricordi che la radice nel campo complesso prende **due** valori, e quindi questa espressione rappresenta **due** soluzioni). Mostriamo che **ogni** equazione della forma (7.6) può ricondursi alla forma (7.7) mediante il metodo del $\boxed{\textit{completamento dei quadrati}}$ Prima di tutto si nota che risolvere (7.6) equivale a risolvere

$$z^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)z + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Vogliamo considerare il secondo addendo come il "doppio prodotto" di z con $b/2a$. Dunque sommiamo e sottraiamo $(b/2a)^2$. Si trova

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0\,.$$

E' ora immediato vedere che l'equazione ammette due soluzioni, date da

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{-\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.$$

Si noti che non abbiamo scritto $\pm$ di fronte alla radice perché per definizione la radice complessa prende due valori. In contrasto con ciò, la **radice positiva di un numero reale positivo** si chiama $\boxed{\textit{radice aritmetica}}$

7.8 Alcuni esercizi

1. Sul piano di Argand-Gauss si segni la posizione di un numero complesso z. Si segnino quindi i punti della lista seguente:

$$\begin{aligned} 1/z\,, \bar{z}\,, \qquad & -\bar{z}\,, \\ 1/\bar{z}\,, -1/\bar{z}\,, \qquad & iz\,, \\ \overline{iz}\,, 1/iz\,, \qquad & 1/\overline{iz}\,. \end{aligned}$$

   Si consideri in particolare il caso in cui z giace su uno dei quattro semiassi coordinati.

2. Sia $z = a + ib$, $w = c + id$. Calcolare $\bar{z}w$. Chi conosce le espressioni in coordinate cartesiane ortogonali del prodotto scalare e del prodotto vettoriale, noti come queste si ritrovano in questo prodotto.

3. Siano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ e $w = -\bar{z}$. Si identifichi la posizione di z e w sul piano complesso, e si rappresentino i due punti $z + w$ e $z - w$.

4. Si calcolino i numeri i^n per n intero compreso tra 0 e 16.

5. Usando la formula del binomio di Newton, si calcoli $(1 + i)^9$. Si scriva quindi la rappresentazione trigonometrica del numero $(1 + i)$ e si usi questa per calcolare $(1 + i)^9$. Rappresentare questo numero sul piano di Argand-Gauss.

6. I numeri complessi z, w abbiano modulo 1 e inoltre z abbia argomento $2\pi/3$ mentre w abbia argomento $4\pi/3$. Sul piano complesso, si individui il punto $z + w$. Si vuol sapere se esiste u tale che $z + w + u = 0$ e, nel caso affermativo, la sua posizione sul piano complesso.

7. Si consideri un quadrato sul piano complesso, inscritto nella circonferenza trigonometrica e i cui lati sono paralleli agli assi coordinati oppure alle bisettrici degli assi. Si vuol sapere se i suoi vertici sono o meno radici di un certo ordine di qualche numero.

8. Il numero complesso z abbia moduli 1 ed argomento $\pi/12$. Calcolare un numero di cui z è radice quarta. Quanti sono tali numeri?

9. Scrivere in forma trigonometrica il numero $(\cos\pi - i\sin\pi/2)$.

10. ($\star$) Rappresentare sul piano di Argand-Gauss i numeri $\{(1/2)(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)\}^n$ e notare che essi si trovano su un numero finito di rette uscenti dall'origine. Dire se accade un fatto analogo per i numeri $\{2(\cos\pi/7 + i\sin\pi/7)\}^n$ e $\left\{2\left(\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)\right)\right\}^n$.

11. ($\star$) Si mostri che vale l'uguaglianza $(zw)^2 = z^2w^2$. Si consideri quindi l'uguaglianza $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. Dire se quest'uguaglianza è corretta. In generale discutere l'uguaglianza $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$.

12. Rappresentare sul piano complesso i numeri $z(t) = e^{it}$ per $t \in \mathbb{R}$. E se invece si considerano i numeri $z(t) = e^{-it}$?

13. rappresentare sul piano di Argand-Gauss l'immagine della trasformazione $t \mapsto te^{it}$.

14. Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(t) = e^{2it}$ e rappresentare sul piano di Argand-Gauss sia $f(t)$ che $f'(t)$ ed $f''(t)$.

15. ($\star$) Scrivere la formula di McLaurin di e^x e sostituire ad iy ad x. Trovare le relazioni tra la formula ottenuta e le formule di McLaurin di $\sin y$ e $\cos y$ (si ottiene una prima versione della "most remarkable formula in mathematics", come si esprime R. Feyman, nelle *Feyman Lectures on Physics*).

16. ($\star$) Sia $z(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)}$, $w(t) = Be^{i(\omega t+\beta)}$. Dire se, fissati A ed ω, esitono valori di α e β tali che $z(t) + w(t) = 0$ per ogni t (è possibile cancellare un suono mediante un altro suono? Si calcolino le parti reali).

17. ($\star$) Sia $z(t) = e^{i\omega t}$, $w(t) = e^{i(\omega+\nu)t}$. Calcolare la parte reale di $z(t)+w(t)$. Si riesce a scriverla in modo da vedere una relazione col fenomeno dei battimenti?

18. ($\star$) si consideri la funzione $t \mapsto z(t) = Ae^{-i\omega t+\phi}$. Se ne rappresenti il valore sul piano complesso per ogni valore di t. Si trova un vettore applicato nell'origine, ruotante (in quale verso?) al crescere del tempo t. Si riesce ad interpretare $z(t)+\bar{z}(t)$ facendo intervenire il moto armonico?