Capitolo 6

Ricapitolazioni

Il Trònfero s'ammalvola in verbizie
incanticando sbèrboli giocaci
sbramìna con solènnidi e vulpizie
tra i tavoli e gli ortèdoni fugaci.

Fosco Maraini, *Via Veneto,* in *Gnòsi delle Fànfole.*

In questo capitolo ricapitoliamo alcuni dei concetti fondamentali incontrati fino ad ora. Ossia, ricapitoliamo i concetti relativi alle successioni, incontrati in particolare nei capitoli 1 e 2. La ricapitolazione relativa alle funzioni si otterrà mostrando come i concetti studiati si possano usare per tracciare qualitativamente i grafici di funzioni. Naturalmente, definizioni e teoremi vanno studiati ciascuno nel proprio capitolo.

6.1 le successioni

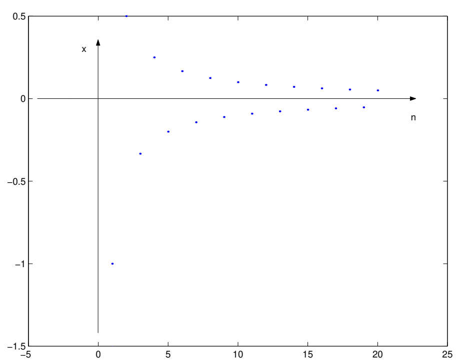
Ricordiamo che $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali (incluso o meno 0, come generalmente si deduce dal contesto) e che una successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$. Il simbolo usato per indicare una successione, invece di $f(n)$, è (f_n) oppure $\{f_n\}$. Quando, come spesso accade, si intende che la successione prenda valori sull'asse delle ascisse, scriveremo (x_n) oppure $\{x_n\}$.

Il simbolo $\{x_n\}$ è ambiguo perché indica sia la successione, ossia la funzione $n \mapsto x_n$, che l'insieme dei numeri x_n, ossia l'immagine della successione. Il significato va capito dal contesto.

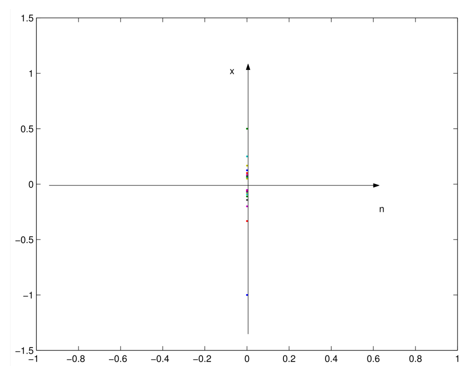
Il grafico di una successione è l'insieme delle coppie (n, x_n), che si rappresenta sul piano cartesiano come nell'esempio della figura 6.1, a sinistra. Si noti che in questa figura abbiamo indicato con n l'asse delle ascisse e con x quello delle ordinate, per coerenza con il simbolo $\{x_n\}$ usato per la successione. Quest'esempio aiuta anche a capire la differenza tra i due significati del simbolo $\{x_n\}$. La figura 6.1, a sinistra riporta il grafico della funzione $\{x_n\}$ mentre a destra ne riporta l'immagine, ossia l'insieme $\{x_n\}$.

Figura 6.1: Successione e immagine: II grafico della successione $(n, \frac{(-1)^n}{n})$ è l'insieme dei punti del piano cartesiano $(1,-1), (2, \frac{1}{2}), (3, -\frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), \ldots$. L'immagine della successione è l'insieme dei punti sulla retta $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

(a) Grafico della successione $\big((-1)^N/n\big)$



(b) La sua immagine



In pratica però tracciare il grafico di una successione non è molto utile perché di una successione interessa il "comportamento asintotico", ossia il comportamento per $n \to +\infty$ e questo non si vede disegnando pochi punti del grafico. Una successione è crescente se $n > m$ implica $x_n \geq x_m$ (se $n > m$ implica $x_n > x_m$ la successione si dice strettamente crescente). Si diano le definizioni di successione decrescente e strettamente decrescente. Una successione strettamente monotona (crescente o decrescente) è una trasformazione iniettiva e quindi invertibile. Gli unici limiti che possono studiarsi per una successione sono i limiti per $n \to +\infty$. In particolare una successione si dice

- $\boxed{\textit{regolare}}$ se $\lim_{n\to+\infty} x_n$ esiste, uguale a $+\infty$, a $-\infty$ oppure ad $l \in \mathbb{R}$.
- altrimenti, la successione si dice $\boxed{\textit{indeterminata}}$ o $\boxed{\textit{oscillante}}$

Le definizioni di limite di una successione sono state studiate al paragrafo 2.1. Dato che l'unico caso di limite che può studiarsi per una successione è quello per $n \to +\infty$, invece di scrivere $\lim_{n\to+\infty} x_n$, si può scrivere piuù brevemente $\lim x_n$. Infine, ricordiamo che per le successioni vale il teorema delle funzioni monotone, che può enunciarsi come segue:

Teorema 156 *Ogni successione monotona è regolare e precisamente vale:*

- *se la successione* $\{x_n\}$ *è crescente,*
$$\lim x_n = \sup\{x_n\}\,;$$
- *se la successione* $\{x_n\}$ *è decrescente,*
$$\lim x_n = \inf\{x_n\}\,.$$

Per interpretare l'enunciato di questo teorema, è importante aver capito i due significati diversi della notazione $\{x_n\}$. Infine, ricordiamo il limite notevole

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Combinando questo limite col teorema sui limiti di funzioni composte, si trova:

$$\lim \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a\,,\quad \lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}\,.$$

6.2 Studi di funzione

Si chiama "studio di funzione" il processo che conduce a tracciare qualitativamente il grafico di una funzione, individuandone dei punti particolarmente significativi. Nel fare ciò, si devono usare tutte le nozioni che abbiamo incontrato fino ad ora e conviene procedere con un certo metodo. Elenchiamone i punti salienti e poi commentiamoli.

A) il primo passo consiste nel determinare il dominio della funzione.

B) si determinano eventuali simmetrie e periodicità

C) Determinazione dei limiti (per x tendente agli estremi del dominio o ad altri punti notevoli) e degli eventuali asintoti.

D) Si studia quindi la continuità della funzione, identificando gli eventuali punti di discontinuità.

E) Si studia la derivabilità della funzione, individuando gli eventuali punti di non derivabilità.

F) Si determinano gli intervalli di monotonia ed i punti di estremo della funzione.

G) Si studia la convessità della funzione.

NOTA IMPORTANTE

In un compito d'esame usualmente viene proposta una funzione e vengono richieste solamente alcune delle proprietà del grafico. Per esempio, lo studio della convessità potrebbe non essere richiesto. Ciò non solo perché è difficile, ma anche perché si valuta che porti via del tempo da dedicare invece ad altre domande. Per questo si sconsiglia di fare studi non richiesti. Infatti:

1. parti in più oltre a quelle richieste non hanno punteggio, ma gli eventuali errori possono venir valutati;

2. parti in più di una parte del compito non compensano eventuali parti non svolte. Il punteggio delle parti non svolte non viene comunque attribuito.

Il grafico della funzione va tracciato qualitativamente solo sulla base degli elementi richiesti, ed **è importante che sia coerente con i risultati trovati, anche se sono sbagliati.** Un grafico corretto ma non coerente con gli errori fatti viene considerato incoerente e penalizzato. Talvolta certi errori rendono impossibile tracciare un grafico (per esempio, se si trova che la funzione decresce per $x > 0$ e contemporaneamente che diverge positivamente per $x \to +\infty$ il grafico non può farsi). In questo caso una delle informazioni trovate è sbagliata. Se possibile, conviene correggerla. Se non c'è tempo di correggerla, al momento di tracciare il grafico, NOTARE ESPLICITAMENTE l'incoerenza dei risultati trovati, dicendo quali si conservano nel tracciare il grafico. Ciò per evitare penalizzazioni dovute al grafico incoerente. Inoltre, un compito d'esame può fare altre domande, per esempio di individuare il numero delle intersezioni tra il grafico tracciato e certe famiglie di curve, per esempio rette; di dedurre dal grafico tracciato quello di altre funzioni (per esempio, dal grafico di $f(x)$ quello di $1/f(x)$ o di $|f(x)|$).

Ora commentiamo i vari passi.

A) Determinazione del dominio della funzione. Ricordiamo che questo è un problema **puramente scolastico.** Il dominio della funzione fa parte della descrizione del processo fisico che si intende studiare, e quindi è assegnato insieme alla funzione stessa. Invece, come puro esercizio scolastico, si intende che la funzione è definita in ciascuno dei punti nei quali possono effettuarsi le operazioni mediante le quali viene assegnata.

B) Simmetrie e periodicità. Ricordiamo che una funzione è pari o dispari se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine ed inoltre è pari se $f(x) = f(-x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) ed è dispari se $f(x) = -f(-x)$ (grafico simmetrico rispetto all'origine). Se una funzione è pari o dispari ci si può limitare a studiare la funzione per $x > 0$ e ottenerne il grafico su tutto il dominio usandone la simmetria. Non va dimenticato di studiare esplicitamente la natura che il punto $x = 0$ ha rispetto alla funzione (continuità, derivabilità, punto di estremo. . .). Una funzione è periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x + T)$. Il numero T si chiama "periodo" della funzione. Se esiste un minimo periodo che è strettamente positivo, generalmente è tale numero che si chiama "periodo". Naturalmente, una funzione periodica ha dominio illimitato sia superiormente che inferiormente ed è priva di limite per $x \to +\infty$ ed $x \to -\infty$, salvo il caso in cui sia costante. Se una funzione è periodica di periodo T, ci si può limitare a studiarne la restrizione all'intervallo $[0, T]$ e quindi tracciarne il grafico per periodicità (senza dimenticare di studiare la continuità, derivabilità, massimi o minimi. . . in 0 e in T).

C) Determinazione dei limiti e degli asintoti. Se il dominio è illimitato, si calcolano i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Se uno di questi limiti è finito, e vale l, la retta $y = l$ si chiama "asintoto orizzontale" (destro, sinistro oppure bilatero). Se invece la funzione è un infinito del primo ordine rispetto all'infinito di confronto x, può esistere o meno un "asintoto obliquo". Questo va determinato. Si calcolano quindi i punti x_0 tali che uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0 \pm} |f(x)| = +\infty .$$

In tal caso, la retta $x = x_0$ si chiama "asintoto verticale" per la funzione. Ricordiamo che se $x = x_0$ è un asintoto verticale, il punto x_0 può appartenere o meno al dominio della funzione.

D) Continuità della funzione, ed eventuali punti di discontinuità. Conviene anche studiare se la funzione ammette o meno estensione continua a punti che non appartengono al dominio. La funzione è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Può accadere che $f(x)$ non sia definita in x_0 ma che esista

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\,.$$

In tal caso, la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ l & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è continua in x_0 e si chiama l'$\boxed{\textit{estensione per continuità}}$ di $f(x)$ ad x_0. Per esempio, la funzione

$$f(x) = e^{-1/x^2}$$

non è definita in 0 ma può essere estesa per continuità a 0 perché

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0\,.$$

Naturalmente, può accadere che si possa definire un'estensione della funzione che è continua o solo da destra o solo da sinistra, come accade per la funzione

$$f(x) = e^{1/x}\,.$$

Questa funzione è priva di limite per $x \to 0$ e si ha

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty\,.$$

L'estensione

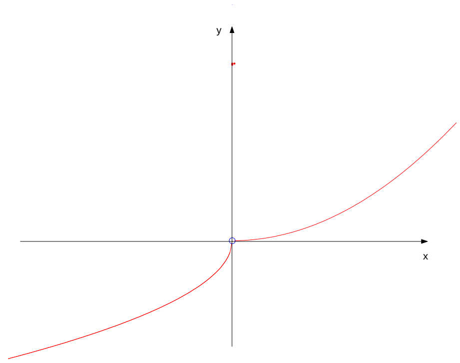
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, ma è **continua da sinistra** in 0. Se $f(x)$ non è continua in x_0 si possono avere i tre casi seguenti:

- **discontinuità eliminabile:** se il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, con $l \neq f(x_0)$. Un esempio è in figura 6.2, a sinistra.

Figura 6.2: Discontinuitá:

(a) Discontinuità eliminabile



(b) Discontinuitá di prima specie o salto

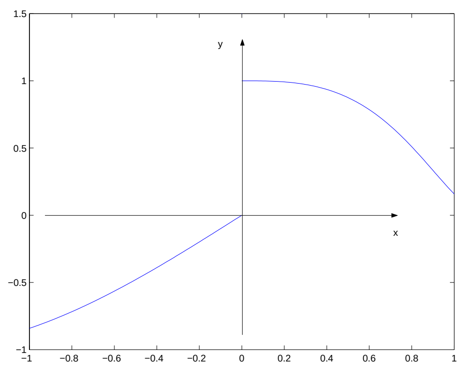
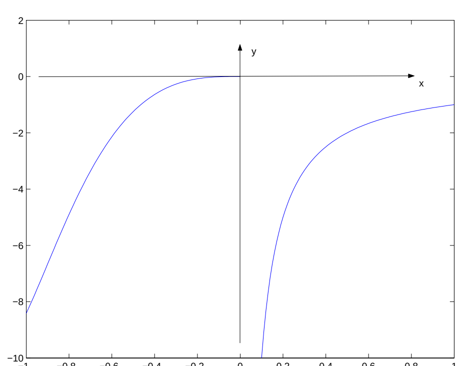
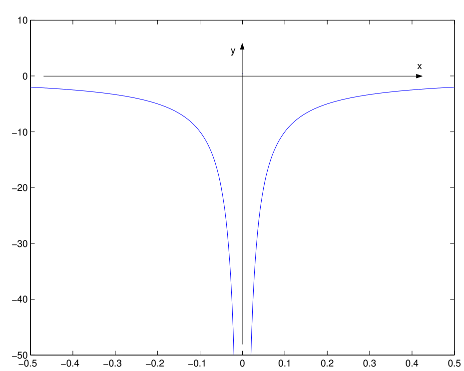


Figura 6.3: Discontinuità di seconda specie

(a) Prima funzione



(b) Seconda funzione



- **discontinuità di prima specie** o **salto** se ambedue i limiti direzionali seguenti esistono finiti, ma diversi tra loro. Non si esclude che uno dei due possa essere uguale ad $f(x_0)$, si veda la figura 6.2, a destra.
- **discontinuità di seconda specie** ogni altro caso. Esempi sono in figura 6.3.

E) Si studia la derivabilità della funzione ed eventuali punti di non derivabilità. Supponiamo che esista, finito o meno, il limite seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

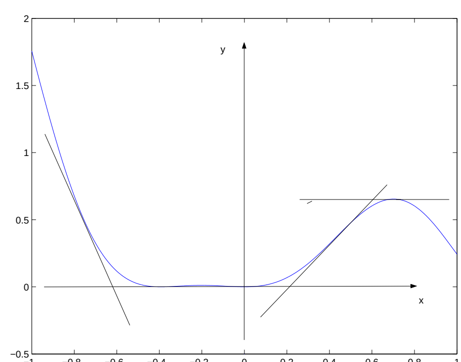
Si hanno i due casi seguenti:

- **il limite è finito.** In tal caso la funzione è continua in x_0 e il limite, che si chiama $\boxed{\textit{derivata}}$ di $f(x)$ in x_0, si indica col simbolo $f'(x_0)$. La retta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.1}$$

si chiama $\boxed{\textit{retta tangente}}$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Un esempio è in figura 6.4

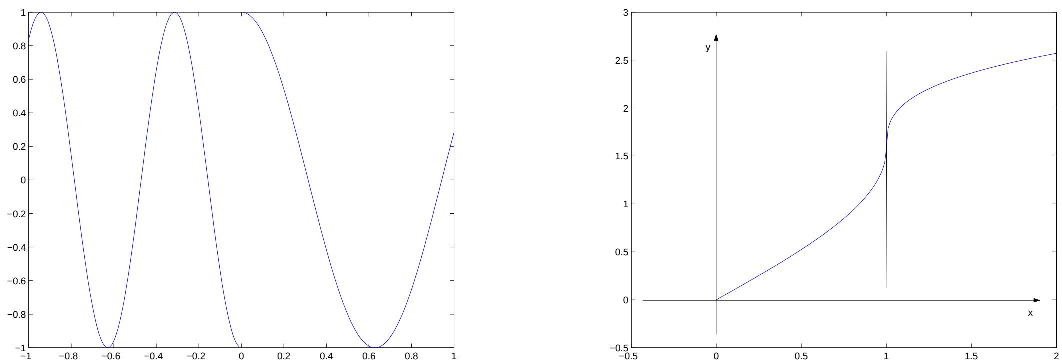
Figura 6.4: Rette tangenti



- il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$. In tal caso la funzione può essere discontinua in x_0. Se però **la funzione è continua in** x_0 allora si dice che la retta verticale $x = x_0$ è $\boxed{\textit{tangente}}$ al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$. I due casi sono illustrati in fig 6.5.

Figura 6.5: Il limite del rapporto incrementale è $+\infty$.

(a) Funzione discontinua (b) funzione continua



Supponiamo ora che il limite (6.1) *non* esista, ma che esistano, finiti o meno, ambedue i limiti direzionali

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)\,,\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)\,.$$

I due limiti si chiamano $\boxed{\textit{derivate direzionali}}$ (destra o sinistra) in x_0. Si ha:

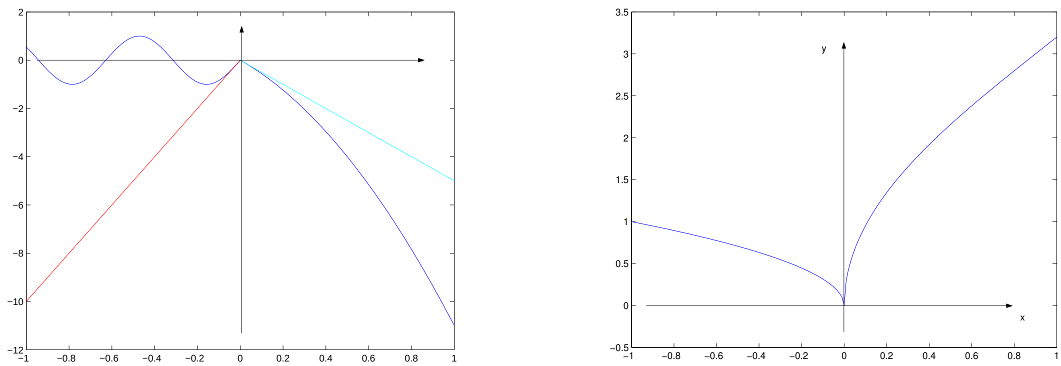
- se la derivata destra è finita, la funzione è continua in x_0 da destra; analoga affermazione per la derivata sinistra. Se una derivata direzionale è $+\infty$ oppure $-\infty$, la funzione può essere continua o meno.
- Se le due derivate direzionali sono ambedue finite **e diverse tra loro**, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice $\boxed{\textit{punto angoloso}}$ e le due rette

  $$\begin{aligned} y &= f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0)\,,\\ y &= f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

  si chiamano le $\boxed{\textit{tangenti}}$ al grafico di $f(x)$ da sinistra o da destra in x_0 (più correttamente, sono le tangenti in $(x_0, f(x_0))$ ai grafici delle restrizioni di $f(x)$ a $x\le x_0$, rispettivamente a $x\ge x_0$). Un esempio è in figura 6.6, a sinistra.
- se la funzione è continua in x_0 e se le due derivate direzionali in x_0 sono una $+\infty$ e l'altra $-\infty$, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice $\boxed{\textit{cuspide}}$ La retta $x=x_0$ si dice ancora $\boxed{\textit{tangente}}$ al grafico in $(x_0, f(x_0))$. Un

Figura 6.6: Punto angoloso e cuspide

(a) punto angoloso (b) cuspide



esempio è in figura 6.6, a destra mentre la figura 6.5 mostra due casi in cui il rapporto incrementale ha limite $+\infty$.

- Infine, supponiamo che $f(x)$ sia definita su un intervallo $[a, b]$ e $x_0 = a$ (oppure $x_0 = b$). Se esiste la derivata, rispettivamente destra o sinistra, in x_0, si può ancora parlare di tangente al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$. Naturalmente, se la derivata direzionale è $+\infty$ oppure $-\infty$ allora dovremo preventivamente richiedere che la funzione sia continua in x_0.

  Osservazione 157 Supponiamo $f(x)$ definita su (a, b), continua in $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che le due derivate direzionali in x_0 esitano e siano ambedue $+\infty$ oppure $-\infty$. Allora, $x = x_0$ è tangente verticale al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Il grafico taglia la tangente nel solo punto $(x_0, f(x_0))$, perché la funzione è univoca. Quindi, il grafico sta da una parte della tangente per $x < x_0$ e dall'altra per $x > x_0$. Se accade che la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra, il punto x_0 si chiama *flesso a tangente verticale* Questo caso è illustrato nella figura 6.5, a destra. ■

Lo studio della derivabilità nei punti in cui non si possono applicare le formule di derivazione, si fa studiando esplicitamente il limite del rapporto incrementale, generalmente mediante il Teorema di L'Hospital.

F) Gli intervalli di monotonia ed i punti di estremo della funzione. Gli intervalli di monotonia si determinano studiando il segno della derivata prima e quindi conducono alla risoluzione di opportune disequazione. Lo studio della monotonia può portare ad identificare immediatamente alcuni punti di estremo: quei punti x_0 nei quali **la funzione è continua** e monotona di senso opposto dalle due parti del punto. In generale, i punti di estremo della funzione vanno cercati tra i punti in cui si annulla la derivata prima e tra i punti nei quali la funzione non è derivabile (inclusi gli estremi del dominio, se la funzione vi è definita). Alternativamente, invece di dedurre le proprietà di estremo dallo studio della monotonia, si può studiare il segno delle derivate successive (ma spesso ciò conduce a calcoli più complessi e inoltre non si può fare negli estremi del dominio e nei punti in cui le derivate non esistono).

G) Convessità della funzione. Quando la funzione è derivabile, conviene studiare la monotonia della derivata prima, ossia il segno della derivata seconda. Supponiamo ora $x_0 \in (a, b)$ e che esista $f'(x_0)$. Confrontiamo il grafico di $f(x)$ con la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Si hanno tre casi:

- esiste un intorno di x_0 in cui vale
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$
In tal caso la funzione si dice $\boxed{\textit{convessa in } x_0}$
- esiste un intorno di x_0 in cui vale
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$
In tal caso la funzione si dice $\boxed{\textit{concava in } x_0}$ La figura 6.7 mostra il grafico di una funzione che è convessa in alcuni punti, concava in altri.
- esiste un I intorno di x_0 tale che
$$\begin{aligned} x \in I\,, x \leq x_0 \Longrightarrow &\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,\\ x \in I\,, x \geq x_0 \Longrightarrow &\quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$
(o le analoghe, con i versi delle disuguaglianze a destra scambiati tra loro). In tal caso si dice che x_0 è "punto di flesso". Un esempio è in figura 6.8, a sinistra.

  La figura 6.8, a destra, mostra una funzione che cambia di concavità in corrispondenza di un punto che non è di flesso, perché in tale punto non esiste la tangente al grafico della funzione.

Figura 6.7: Una funzione né concava né convessa (link)

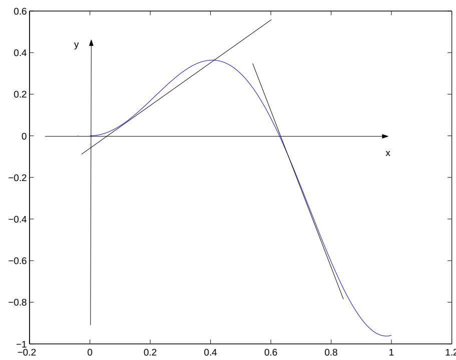
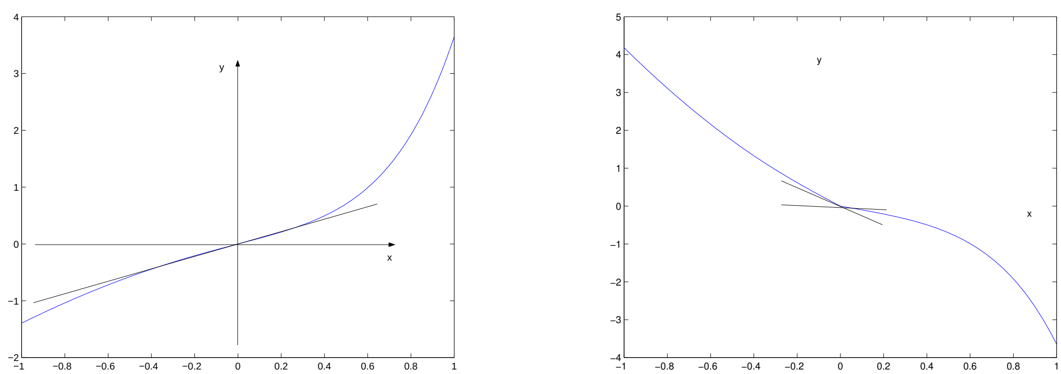


Figura 6.8: In figura viene mostrata una funzione con punto di flesso e una seconda funzione, la cui convessità cambia, ma che non possiede punto di flesso

(a) punto di flesso

(b) senza punto di flesso



Naturalmente, può darsi che nessuno dei casi descritti si verifichi. Si consideri l'esempio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$