Capitolo 5

Teoremi di l'Hospital e di Taylor

> *Ormai so che l'acqua scorre sempre verso il basso, se non quando è buio. So che questo accade perché lo stagno non si prosciuga mai, come naturalmente succederebbe se l'acqua non ritornasse in su.* Diario di Eva, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

In questo capitolo si presentano i Teoremi di l'Hospital e la formula di Taylor e le loro conseguenze, concludendo lo studio sia locale che globale delle funzioni. Il Teorema di L'Hospital serve per il calcolo dei limiti quando si incontrano forme indeterminate di tipo fratto mentre la formula di Taylor estende la prima e la seconda formula degli incrementi finiti al caso in cui una funzione $f(x)$ ammette più derivate.

5.1 Teorema di l'Hospital

E' un teorema che è utile per il calcolo di limiti nel caso che si incontri una forma indeterminata di tipo fratto,

$$\frac{0}{0} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\infty}{\infty}\,,$$

nel calcolo di un limite per $x \to \alpha$ dove α può essere un numero oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Anzi, se $\alpha \in \mathbb{R}$ il Teorema di l'Hospital si può usare anche per il calcolo dei limiti direzionali $x \to \alpha+$ oppure $x \to \alpha-$. Illustriamolo nel caso del limite per $x \to \alpha-$ intendendo che se $\alpha = +\infty$ questo sarà il limite per $x \to +\infty$. Ricordiamo lo scopo: calcolare

$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quando si incontra la forma indeterminata $0/0$ oppure ∞/∞. Le ipotesi sono le seguenti:

- per $x \to \alpha-$ ambedue le funzioni $|f(x)|$ e $|g(x)|$ tendono a 0 oppure a $+\infty$;
- ambedue le funzioni sono derivabili a sinistra di α. Niente si richiede alle funzioni per $x = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{R}$.
- esiste un intorno sinistro[1] di α su cui $g'(x)$ **non si annulla.**
- esiste
$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \tag{5.1}$$
ove β può essere un numero, può essere $+\infty$ oppure può essere $-\infty$.

Il teorema asserisce:

Teorema 138 (di $\boxed{\textbf{\textit{l'Hospital}}}$) *Se valgono le ipotesi enunciate sopra, esiste*
$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{f(x)}{g(x)}$$
e inoltre, con β dato da (5.1),
$$\lim_{x \to \alpha-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta \,.$$

La dimostrazione, alquanto complessa, viene omessa.

Esempio 139 Illustriamo alcuni esempi ed alcuni problemi che possono incontrarsi nell'uso di questo teorema.

1. Consideriamo il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} \,.$$
Le funzioni a numeratore e denominatore verificano le ipotesi del Teorema di l'Hospital e inoltre (D indica l'operazione di derivazione)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{D(\log x)}{D(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \,.$$

[1]ossia una semiretta $(r, +\infty)$ se $\alpha = +\infty$ oppure in intervallo $(\alpha - \epsilon, \alpha)$.

Quindi si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0\,.$$

In modo analogo si provi che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

2. Consideriamo ora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Proviamo a fare il quoziente delle derivate. Si trova

$$\frac{e^x}{2x}\,.$$

Dato che, grazie ad un preventivo uso del teorema di l'Hospital, questo limite si conosce, ed è $+\infty$, e le altre ipotesi del teorema valgono, si può concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty\,.$$

Ossia, il teorema di l'Hospital si può applicare più volte in sequenza.

3. Non è detto che il Teorema di L'Hospital permetta sempre di calcolare il limite, nemmeno se le ipotesi sono soddisfatte. Per esempio, sia $f(x) = \sinh x$ e $g(x) = \cosh x$. E' immediato dalla definizione delle funzioni iperboliche che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1\,.$$

Tutte le ipotesi del teorema di l'Hospital valgono per questo quoziente, ma il teorema stesso non serve al calcolo del limite perché derivando numeratore e denominatore si trova alternativamente

$$\frac{\cosh x}{\sinh x}\,,\quad \frac{\sinh x}{\cosh x}\,,\quad \frac{\cosh x}{\sinh x}\quad \ldots$$

Ossia, usando quante volte si voglia il teorema di l'Hospital si finisce sempre sulla medesima forma indeterminata. Un esempio simile è il calcolo del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\,(\log x)^{\log x}\,.$$

Il quoziente delle derivate è

$$\frac{1}{x}\,(\log x)^{\log x} + \frac{\log\log x}{x}\,(\log x)^{\log x}$$

e quindi fa intervenire nuovamente proprio il quoziente di cui si intendeva calcolare il limite. Si noti che questo limite è stato calcolato per sostituzione all'Esempio *84*.

4. Può anche essere che il limite del quoziente delle funzioni esista, ma che non esista quello del quoziente delle derivate. Notando che

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| < 1$$

si vede che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\sin x} = 0\,.$$

Se si calcola il quoziente delle derivate si trova

$$\frac{2x\sin 1/x - \cos 1/x}{\cos x}\,,$$

privo di limite per $x \to 0$, nonostante che le altre condizioni del teorema di l'Hospital siano soddisfatte.

5. Se si usa il teorema di L'Hospital quando le ipotesi non sono soddisfatte, si possono trovare risultati sbagliati. Per esempio,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Le ipotesi del teorema di L'Hospital non sono soddisfatte da questo quoziente, che non conduce ad una forma indeterminata. Facendo il limite del quoziente delle derivate si trova

$$\lim_{x\to 0+}\frac{0}{1} = 0 \neq +\infty\,.$$

6. Il teorema di L'Hospital talvolta può applicarsi e conduce al risultato corretto, ma il calcolo fatto è fallace perché tautologico; ossia perché usa proprio l'informazione che si sta cercando. Per esempio, usando il teorema di L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1\,.$$

Sembra quindi di aver trovato un modo molto veloce per il calcolo del limite notevole. Ciò è però falso perché in questo calcolo si è usato $D\sin x = \cos x$, formula che si dimostra proprio a partire dal limite notevole di $(\sin x)/x$.

7. Infine, notiamo che col teorema di l'Hospital si possono anche calcolare certi limiti che apparentemente non sono nella forma di quoziente. Per esempio, si voglia studiare

$$\lim_{x\to 0} x \log x\,.$$

Scrivendo questo limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x}$$

si ha una forma indeterminata $(-\infty)/(+\infty)$ a cui il Teorema di l'Hospital può applicarsi. Il quoziente delle derivate è

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{1}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = 0\,.$$

Di consequenza si deduce anche

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\log x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x \log x} = 1\,. \quad \blacksquare$$

Infine, osserviamo la seguente conseguenza del Teorema di l'Hospital. Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ e supponiamo che

$$f(x) = \mathrm{o}(x-a)\,.$$

Usiamo il Teorema di l'Hospital per calcolare

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{2(x-a)}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{2(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{o}(x-a)}{2(x-a)} = 0\,.$$

Ciò mostra che

$$F(x) - F(a) = \mathrm{o}(x-a)^2\,.$$

Più in generale,

Teorema 140 *Sia $F(x)$ primitiva di $f(x)$ sull'intervallo (a, b) e supponiamo che*

$$f(x) = \mathrm{o}\,(x-a)^n\,.$$

Allora,

$$F(x) - F(a) = \mathrm{o}(x-a)^{n+1}\,.$$

5.1.1 Calcolo di derivate direzionali

Un argomento analogo a quello usato nella dimostrazione del Teorema 140 dà anche un modo molto utile che può usarsi per il calcolo di derivate direzionali. Il problema è questo: talvolta si può provare che una funzione è derivabile su (a, x_0) e su (x_0, b) e usando le regole di derivazione se ne calcola facilmente la derivata. E' invece difficile vedere se esistono le derivate direzionali in x_0. Una condizione **sufficiente** per l'esistenza di $f'(x_0)$ è la seguente:

Teorema 141 *Sia* $f(x)$ **continua in** x_0 *e inoltre* **derivabile in** (x_0, b)**.** *Se esiste il limite direzionale* $f'(x_0+)$*, ossia se siste*

$$\lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

allora esiste anche la derivata direzionale $f'_+(x_0)$ *e inoltre si ha l'uguaglianza*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = f'(x_0+)\,.$$

<u>Dim</u>. Per definizione,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Il limite è una forma indeterminata $0/0$, **perché la funzione è continua in** x_0**.** Per il calcolo di questo limite si può usare il teorema di l'Hospital,

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

ovviamente se l'ultimo limite scritto esiste. ■

Asserto analogo vale per la derivata sinistra:

Teorema 142 *Sia* $f(x)$ **continua in** x_0 *e inoltre* **derivabile in** (a, x_0)**.** *Se esiste*

$$\lim_{x \to x_0-} f'(x)$$

allora esiste $f'_-(x_0)$ *e inoltre*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f'(x) = f'(x_0-)\,.$$

E quindi:

Teorema 143 *Se* $f(x)$ *è*

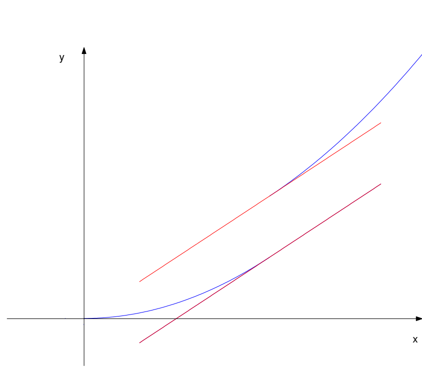
- *derivabile in* (a, x_0)
- *derivabile in* (x_0, b)
- *continua in* x_0
- *esiste* $\lim_{x\to x_0} f'(x)$

allora la funzione $f(x)$ *è derivabile in* x_0 *e vale*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)\,.$$

Osservazione 144 L'ipotesi che $f(x)$ sia continua in x_0 è essenziale nel Teorema 143. Se non vale, le tangenti nei punti $(x, f(x))$ tendono a diventare parallele quando $x \to x_0$, senza sovrapporsi per $x = x_0$, si veda la figura *5.1.* ■

Figura 5.1



Segue dal Teorema 143:

Corollario 145 *Se* $f'(x)$ *è definita su* (a, b) *e discontinua in* $x_0 \in (a, b)$ *allora la discontinuità è di seconda specie.*

Dim. Ricordiamo che $f'(x)$ ha discontinuità eliminabile oppure di prima specie in $x_0 \in (a, b)$ quando esistono ambedue i limiti direzionali $\lim_{x\to x_0-} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0+} f'(x)$, ed uno almeno è diverso da $f'(x_0)$. Per ipotesi, $f'(x_0)$ esiste e quindi $f(x)$ è continua in x_0. Il teorema precedente garantisce che i due limiti direzionali, se esistono, valgono $f'(x_0)$; ossia x_0 non può essere né punto di salto né discontinuità eliminabile di $f'(x)$. ■

Questo risultato permette in particolare di asserire che **la funzione** $\mathrm{sgn}(x)$ **non è una funzione derivata in nessun intorno di** 0**, e quindi non ammette primitive.** Esistono però funzioni ovunque derivabili, la cui derivata ammette discontinuità di seconda specie. Un esempio è la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, ed $f(0) = 0$.

5.2 La formula di Taylor

La formula di Taylor è un'estensione della prima o della seconda formula degli incrementi finiti. Vediamo separatamente i due casi.

5.2.1 La formula di Taylor con resto in forma di Peano

La formula di Taylor (con resto in forma di Peano) è un'estensione della prima formula degli incrementi finiti a funzioni che **in un punto** x_0 **hanno più di una derivata.** Notiamo che:

- il punto x_0 è indicato in colore, x_0, per sottolineare che è considerato fissato, mentre la variabile si indica con x;
- se una funzione ha n derivate in x_0 allora ha $n-1$ derivate in un intorno di x_0.

Supponiamo che in x_0 esista la derivata seconda. Allora, si può scrivere la prima formula degli incrementi finiti in x_0 per la funzione $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)\,. \tag{5.2}$$

Per definizione, $f'(x)$ ammette primitive e $x \to (x - x_0)f''(x_0)$ ammette primitive. Dunque anche $\mathrm{o}(x - x_0)$ ammette primitive. Le primitive che si annullano in x_0 di $f'(x)$, di $f'(x_0)$ e di $(x - x_0)f''(x_0)$ (funzioni della variabile x) sono rispettivamente

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0)\,, \\ f'(x_0)(x - x_0)\,, \\ \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2\,. \end{aligned}$$

Come si è notato, da (5.2) si vede che anche $\mathrm{o}(x - x_0)$ ammette primitive e, per il Teorema 140,

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{o}(s - x_0)\,\mathrm{d}s = \mathrm{o}(x - x_0)^2\,.$$

Uguagliando le primitive che si annullano in x_0 dei due membri di (5.2) si trova

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathrm{o}(x - x_0)^2 .$$

Quest'argomento si può ripetere se ci sono derivate di ordine successivo. Per esempio, se c'è la derivata terza in x_0, si può scrivere la prima formula degli incrementi finiti per $f''(x)$,

$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0) .$$

Prendendo due volte le primitive dei due membri che si annullano in x_0 si trova

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+ \mathrm{o}(x-x_0)^3 .$$

In generale, se $f(x)$ ammette n derivate in x_0, si trova[2]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}(x - x_0)^n .$$

Questa formula si chiama $\boxed{\textit{formula di Taylor}}$ con resto in $\boxed{\textit{forma di Peano}}$ e, più precisamente:

- il punto x_0 si chiama il $\boxed{\textit{centro}}$ della formula di Taylor;
- il polinomio, della variabile x,

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  si chiama il $\boxed{\textit{polinomio di Taylor}}$ di ordine n di $f(x)$, di centro x_0;
- $\mathrm{o}(x - x_0)^n$ si chiama il $\boxed{\textit{resto in forma di Peano}}$
- E' particolarmente importante il caso in cui $x_0 = 0$:

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x)^n .$$

  Questa formula si chiama $\boxed{\textit{formula di MacLaurin}}$ Ovviamente, essa è solamente un caso particolare della formula di Taylor. Per esercizio, si mostri che le formule degli infinitesimi fondamentali nella tavola 2.7 sono particolari formule di MacLaurin.

[2]ricordiamo che $f^{(k)}(x_0)$ indica la derivata k-ma in x_0 e che $f^{(0)}(x_0)$ indica $f(x_0)$.

Osservazione 146 Sia $f(x)$ una funzione dotata di derivata n-mma in x_0 e sia $P_n(x)$ il suo polinomio di Taylor di grado n e centro x_0. Esso verifica

$$f(x) - P_n(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^n \qquad \text{per } x \to x_0 \,.$$

Si potrebbe provare che nessun altro polinomio di grado n in $(x-x_0)$ ha questa proprietà. ■

5.2.2 La formula di Taylor con resto in forma di Lagrange

La formula di Taylor (con resto in forma di Lagrange) è un'estensione della seconda formula degli incrementi finiti a funzioni che **hanno più di una derivata in un intorno di x_0.** Limitiamoci ad enunciarla. Sia $f(x)$ definita su (a,b) ed ivi dotata di n derivate. Sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che $f^{(n+1)}(x)$ esista in (x_0,b). Allora **esiste** $c \in (x_0,b)$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \,.$$

Analogo risultato vale, con $c \in (a, x_0)$ se $f^{(n+1)}(x)$ esiste in (a, x_0). L'errore

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$$

si chiama $\boxed{\textit{resto in forma di Lagrange}}$

5.2.3 Polinomio di McLaurin e parità di una funzione

Ricordiamo che una funzione $f(x)$ dispari e definita in $x_0 = 0$ è ivi nulla. Quest'osservazione è stata usata al paragrafo 3.5 per provare che le derivate di ordine **dispari** di una funzione **pari** sono nulle in $x_0 = 0$; le derivate di ordine **pari** di una funzione **dispari** sono nulle in $x_0 = 0$ (si veda il Teorema 102). Possiamo quindi enunciare:

Teorema 147 *Sia $p(x)$ polinomio di McLaurin di una funzione $f(x)$. Allora:*

- *se la funzione è pari, le potenze x^n con n dispari hanno coefficiente nullo;*
- *se la funzione è dispari, le potenze x^n con n pari hanno coefficiente nullo.*

Naturalmente, non è vietato che anche i coefficienti di alcune potenze pari siano nulli quando $f(x)$ è pari (ed analoga osservazione quando $f(x)$ è dispari).

5.3 Estremi e convessità

Al Teorema 125 abbiamo visto che i punti di massimo o di minimo di una funzione *continua su un intervallo* possono individuarsi studiando la monotonia della funzione *a destra e a sinistra* del punto. Qui mostriamo che si possono anche studiare esaminando le derivate successive *nel punto stesso.* Inoltre, mostreremo come studiare la convessità di una funzione.

5.3.1 Derivate successive ed estremi

Sia $f(x)$ *derivabile due volte* in x_0. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora certamente x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo (si ricordi il Teorema di Fermat). Supponiamo quindi $f'(x_0) = 0$. Si ha:

Teorema 148 *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora il punto x_0 è punto di minimo; Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ il punto x_0 è punto di massimo per $f(x)$.*

Dim. Scriviamo la formula di Taylor di centro x_0 arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano. Ricordando che $f'(x_0) = 0$ si vede che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathrm{o}(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2 \left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \mathrm{o}(1) \right] .$$

Per $x \to x_0$, la funzione $\frac{1}{2} f''(x_0) + \mathrm{o}(1)$ tende ad $f''(x_0)/2$ e quindi in un intorno di x_0 ha il segno di $f''(x_0)/2$; il fattore $(x - x_0)^2$ è maggiore o uguale a zero e quindi in tale intorno

$$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 ; \quad f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 . \quad \blacksquare$$

Niente può dirsi se $f''(x_0) = 0$. Però, una dimostrazione in tutto analoga prova che:

Teorema 149 *Esista $f^{(2n)}(x_0)$ e sia $f^{(k)}(x_0) = 0$* per ogni $k < 2n$. *Se $f^{(2n)}(x_0) > 0$ il punto x_0 è punto di minimo; se $f^{(2n)}(x_0) < 0$ il punto x_0 è punto di massimo per $f(x)$.*

5.3.2 Convessità e punti di flesso

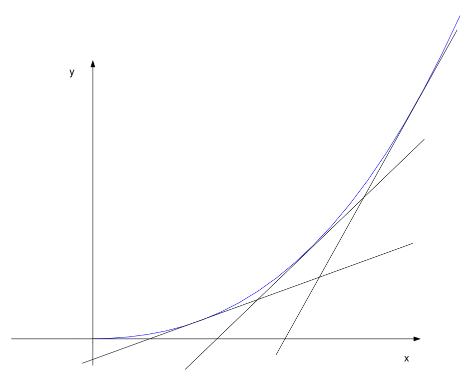
Ricordiamo la definizione di convessità data al paragrafo 1.8.3: una funzione è convessa su un intervallo $[a, b]$ quando **per ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 di $[a, b]$, la corda che unisce $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$ **sta sopra** al grafico della restrizione della funzione ad (x_1, x_2).[3] Ricordiamo anche che una funzione è $\boxed{\textit{concava}}$ quando $-f(x)$ è convessa. La definizione di convessità è stata data usando le secanti, che esistono anche se $f(x)$ non è derivabile. Se però $f(x)$ è derivabile su (a, b) allora si ha il risultato seguente, illustrato nella figura 5.2 e che non proviamo:

Teorema 150 *La funzione $f(x)$ è convessa su (a, b) se e solo se per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $\xi \in (a, b)$ si ha*

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)\,.$$

Ossia, **la funzione derivabile $f(x)$ è convessa su $[a, b]$ se e solo se il suo grafico è ovunque sopra a ciascuna delle tangenti nei punti del grafico stesso.** Si enunci la proprietà analoga per le funzioni derivabili e concave. Questa proprietà di tipo geometrico si formula in modo analitico usando la

Figura 5.2: Funzione convessa e tangenti



formula di Taylor. Supponiamo che esista $f''(x)$ e scriviamo la formula di Taylor di centro ξ e resto in forma di Lagrange:

$$f(x) - [f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)] = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2 \tag{5.3}$$

Quest'uguaglianza mostra che[4] se $f''(c) \geq 0$ per ogni $c \in (a, b)$ allora

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)\,.$$

[3]Ricordiamo che quando una funzione è convessa si dice che **il suo grafico ha la concavità rivolta verso l'alto.**

[4]questa è la condizione sufficiente nella seconda parte del Teorema 151. La dimostrazione della parte necessaria è più complicata perché niente dice che ogni $c \in (a, b)$ debba comparire in (5.3).

Dunque:

Teorema 151 *Sia $f(x)$ due volte derivabile su (a,b). La funzione $f(x)$ è convessa su (a,b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$*[5].

Sia ora $f(x)$ una funzione di classe C^2. Se $f''(x_0) > 0$ allora, per il teorema di permanenza del segno, $f''(x) > 0$ in un intorno di x_0 e in tale intorno la funzione è convessa. Se invece $f''(x_0) = 0$ ed $f''(x)$ cresce oppure decresce, allora la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra. Un caso in cui ciò avviene è il seguente:

Teorema 152 *Sia $f(x)$ di classe C^3 e sia $f''(x_0) = 0$ ed $f'''(x_0) \neq 0$. In questo caso la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra.*

Dim. Sia per esempio $f'''(x_0) > 0$. Allora, per il teorema di permanenza del segno applicato alla funzione $f'''(x)$, che è continua, $f'''(x)$ rimane positiva in un intorno di x_0. In tale intorno, $f''(x)$ è crescente e quindi negativa per $x < x_0$ (dove la funzione è concava) e positiva per $x > x_0$ (dove la funzione è convessa. Si tratti in modo analogo il caso $f'''(x_0) < 0$. ■

Consideriamo più in dettaglio il caso di $f(x)$ di classe C^3, con $f''(x_0) = 0$ ma $f'''(x_0) \neq 0$. Per fissare le idee sia $f'''(x_0) > 0$ cosìche $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ ed $f''(x) > 0$ per $x > x_0$: la funzione è concava a sinistra e convessa a destra di x_0. Dunque, a sinistra di x_0 il grafico è **sotto** le tangenti ed a destra è **sopra.** Vediamo cosa accade in x_0. Scrivendo la formula di Taylor con resto in forma di Peano si vede che

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = (x - x_0)^3 \left[\frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0) + \mathrm{o}(1) \right] .$$

Se $f^{(3)}(x_0) > 0$, l'uguaglianza precedente mostra che il grafico della funzione **taglia la tangente al grafico in** $(x_0, f(x_0))$ e in particolare il grafico è sotto alla tangente per $x < x_0$ e sopra per $x > x_0$. Ciò suggerisce la definizione seguente:

Definizione 153 *Sia $f(x)$ una funzione* **derivabile su un intervallo** (a,b) **che contiene** x_0**.** *Se la funzione è convessa su (a,x_0) e concava su (x_0,b) (o viceversa), il punto x_0 si dice* $\boxed{\text{punto di flesso}}$ *per $f(x)$. Si dice che x_0 è* $\boxed{\text{punto di flesso ascendente}}$ *per $f(x)$ se il grafico di $f(x)$ è sotto*

[5]essendo $f''(x) \geq 0$ su (a,b) se e solo se $f'(x)$ è crescente, il teorema si può anche enunciare come segue: *la funzione $f(x)$ è convessa su (a,b) se e solo se $f'(x)$ è ivi crescente.* Quest'enunciato vale anche se la funzione $f(x)$ ammette la sola derivata prima.

la tangente in $(x_0, f(x_0))$ *per* $x < x_0$ *e sopra per* $x > x_0$*; Il punto* x_0 *si dice* punto di flesso discendente *se il grafico di* $f(x)$ *è sopra la tangente in* $(x_0, f(x_0))$ *per* $x < x_0$ *e sotto per* $x > x_0$*. Se* x_0 *è punto di flesso ed inoltre* $f'(x_0) = 0$*, allora si dice che* x_0 *è* punto di flesso a tangente orizzontale

Riassumendo

Teorema 154 *Sia* $x_0 \in (a, b)$ *e sia* $f(x) \in C^3(a, b)$*. Se* $f^{(2)}(x_0) = 0$ *mentre* $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ *allora* x_0 *è punto di flesso. Il flesso è ascendente se* $f'''(x_0) > 0$*, discendente se* $f'''(x_0) < 0$*.*

Naturalmente, può accadere che anche $f^{(3)}(x_0)$ sia nulla. Cosìcome fatto per gli estremi, si possono guardare (se esistono) le derivate successive e si ha:

Teorema 155 *Se la prima derivata non nulla di* $f(x)$ *in* x_0 **di ordine maggiore di** 1 *è di ordine dispari, la funzione ha punto di flesso in* x_0*. Il flesso è ascendente se tale derivata è positiva, discendente altrimenti.*

5.4 Alcuni esercizi

1. Sia $F(x_0) = 0$, con $F(x)$ primitiva di $f(x)$. Si è visto (al Teorema 140) che $f(x) = \mathrm{o}\,(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$ implica che $F(x) = \mathrm{o}\,(x - x_0)^{n+1}$. Si vuol sapere se ciò vale solamente per n intero, o se vale per qualsiasi esponente positivo (ovviamente restringendosi alle $x > x_0$).

2. **($\star$)** Ancora con riferimento al Teorema 140: supponiamo di sapere che $f(x) = \mathrm{o}\,(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$. Mostrare su un esempio che in generale non vale $f'(x) = \mathrm{o}\,(x - x_0)^{n-1}$ per $x \to x_0$ (un esempio si trova all'esercizio 11 del Cap. 3).

3. Per $x \to +\infty$ sia $f(x) = \mathrm{o}\,(g(x))$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ primitive rispettivamente di $f(x)$ e di $g(x)$. Supponiamo che $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Si chiede se vale $F(x) = \mathrm{o}\,(G(x))$.

4. Trovare esempi di funzioni diverse $f(x)$ e $g(x)$, di classe $C^1(\mathbb{R})$, i cui grafici hanno un punto (x_0, y_0) comune e tali che valga una delle ulteriori proprietà seguenti:

   - x_0 è punto di massimo oppure di minimo per ambedue le funzioni;
   - x_0 sia punto di massimo per l'una e di minimo per l'altra;
   - una delle due sia convessa e l'altra concava.

($\star$) Può essere che x_0 sia asintoto verticale per una delle due funzioni?

5. Sia $f(x)$ derivabile su $(a, +\infty)$ e illimitata. Si mostri che se esiste un asintoto obliquo $y = mx + n$ allora $m = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

6. ($\star$) Sia $y = mx + n$ asintoto obliquo destro della funzione derivabile $f(x)$. E' vero che deve esistere $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$?

7. ($\star$) Si consideri la funzione cosídefinita: $f(n) = n$; $f(n + 1/n^2) = (n+1/n)$. Negli altri punti il grafico si ottiene congiungendo con segmenti i punti $(n, f(n))$ ed $((n+1), f(n+1))$. Si tracci il grafico della funzione. Questa funzione è derivabile salvo che nei punti n ed $n + 1/n^2$. Si dica se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. Si illustri qualitativamente come sia possibile modificare il grafico di questa funzione, in modo da rispondere alla domanda 6.

8. Si mostri un esempio di funzione monotona la cui derivata prima ammette zeri. E' possibile che $f'(x)$ ammetta infiniti zeri su $\mathbb{R}$? E su un intervallo limitato?

9. Si sa che $f(x)$ è continua in $x = 0$ e che per $x \to 0$ vale
$$f(x) = 5 + 3x^2 + 2x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$
Si noti che questa funzione è derivabile per $x = 0$ (Teorema 96) ma che l'espressione scritta può non essere una formula di Taylor, perché la $f(x)$ potrebbe non essere derivabile per $x \neq 0$. Ciò nonostante, si provi che 0 è punto di minimo locale della funzione.

10. ($\star$) Sapendo solamente che $f(x)$ è continua in 5 e che per $x \to 5$ vale
$$f(x) = 3 + 2(x-5) - 7(x-5)^9 + \mathrm{o}(x-5)^9,$$
può dedursi che x_0 è punto di flesso di $f(x)$? Anche se $\operatorname{dom} f(x) = [-1, 5]$?

11. Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano di calsse $C^4(\mathbb{R})$ e per $x \to x_0$ valga
$$f(x) - g(x) = 4(x-x_0)^2 + \mathrm{o}\left(x-x_0\right)^2.$$
Cosa può dedursi sulle tangenti alle due funzioni? E se invece
$$f(x) - g(x) = 3 + 4(x-x_0)^2 + \mathrm{o}\left(x-x_0\right)^2$$
cosa può dedursi sulle tangenti?

12. Trovare una coppia di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, tali che

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x)$$

ma tali che nessuna retta sia tangente ad ambedue le funzioni.

13. **($\star$)** Talvolta si trova la seguente come definizione di flesso: la funzione derivabile $f(x)$ ha flesso in x_0 se il grafico traversa la tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dire se questa definizione e quella data al paragrafo 5.3.2 si equivalgono. Si consideri la funzione all'esercizio 47 del Capitolo 1. Si dica se $x_0 = 0$ è punto di flesso per questa funzione, per la definizione appena data, per la definizione al paragrafo 5.3.2, o per ambedue.

14. Sia $f(x)$ una funzione di classe C^3 con $f'''(x_0) \neq 0$. Mostrare che le due definizioni di punto di flesso, quella del paragrafo 5.3.2 e quella dell'esercizio 13, coincidono.

15. Sia $f(x) = x^2$ se $x \in \mathbb{Q}$, ed $f(x) = -x^2$ altrimenti. Mostrare che il punto $x_0 = 0$ è punto critico, ossia che la funzione è derivabile in $x_0 = 0$, con derivata uguale a zero, ma che il punto $x_0 = 0$ non è né punto di massimo, né punto di minimo, né punto di flesso.

16. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x} + 5x + \cos x}{\sin x - x - \log x}\,.$$
Verificare se questa funzione verifica o meno le condizioni del teorema di l'Hospital e studiare il limite del quoziente delle derivate.