Capitolo 4

Funzioni: proprietà globali

Niente la soddisfa mai, eccetto le dimostrazioni; le teorie non dimostrate non fanno per lei, non le accetta. E' questo lo spirito giusto, lo ammetto: mi attrae, ne sento l'influenza; se stessi di più con lei, penso che l'adotterei anch'io. Diario di Adamo, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

Fino ad ora abbiamo studiato le proprietà "locali" delle funzioni, che dipendono solamente dal comportamento della funzione in un intorno del punto x_0. Ora invece studiamo le proprietà delle funzioni in relazione a tutto il loro dominio, che frequentemente (ma non sempre) sarà un intervallo.

4.1 Teorema delle funzioni monotone

La definizione di limite permette solamente di **verificare** che il limite è effettivamente ciò che l'intuizione ci ha suggerito. In particolare, non asserisce che un limite debba esistere o meno. Un teorema che asserisce l'esistenza del limite, e ne indica il valore, è il seguente, che si chiama *teorema delle funzioni monotone* Lo enunciamo nel caso delle funzioni crescenti, lasciando per esercizio di adattare l'asserto al caso delle funzioni decrescenti.

Teorema 106 *Sia $f(x)$ una funzione crescente (anche non strettamente). Si ha:*

- *se*[1] *x_0 è punto di accumulazione per* $\mathrm{dom}\, f_{|(-\infty,x_0)}$ *allora esiste il limite* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *e inoltre*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x)\ |x<x_0\}\ .$$

[1] non si esclude che x_0 indichi $+\infty$.

- *Se*[2] x_0 *è punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f_{|(x_0,+\infty)}$ *allora esiste* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *e vale*
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf\{f(x)\ |x>x_0\} .$$

Notiamo che il segno di disuguaglianza è stato scritto in colore, per sottolineare che le disuguaglianze sono **strette.** Anche se la funzione è definita in x_0, il valore che essa prende in x_0 non compare nell'enunciato del teorema.

Prima di provare il teorema, vediamone alcune conseguenze.

- Se $f(x)$ è crescente in (a,b) e se $x_0\in[a,b]$ allora si ha
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x) .$$

- niente vieta che $\lim_{x\to x_0-} f(x)=+\infty$. In questo caso la funzione, se deve essere crescente, non può essere definita a destra di x_0 e quindi $x_0=b$. Analogamente, se $\lim_{x\to x_0+} f(x)=-\infty$, la funzione, se crescente, non può essere definita a sinistra di x_0 e quindi $x_0=a$. In particolare: se la funzione (crescente) è definita in x_0, i limiti direzionali **esistono e sono finiti.** Ossia: **i punti di discontinuità di funzioni monotone sono tutti salti.**

- di conseguenza, l'**immagine di una funzione monotona su un intervallo e discontinua NON è un intervallo.** Quest'affermazione è importante perché permette di provare la continuità di certe funzioni senza fare calcoli. Per esempio:
  - la funzione $f(x)=\sqrt{x}$ è continua. Infatti è la funzione inversa della restrizione a $[0,+\infty)$ di $g(x)=x^2$. E' monotona e la sua immagine è $[0,+\infty)$, un intervallo; e pertanto è continua;
  - la funzione $\arctan x$ è la funzione inversa della restrizione a $(-\pi/2,\pi/2)$ di $\tan x$, che è monotona. Dunque anche $\arctan x$ è monotona e la sua immagine è l'intervallo $(-\pi/2,\pi/2)$. Quindi non ha salti e pertanto è continua.

[2] non si esclude che x_0 indichi $-\infty$.

La dimostrazione del teorema delle funzioni monotone

Proviamo il teorema per i limiti sinistri di funzioni crescenti. Inoltre, studiamo il caso $x_0 < +\infty$ lasciando per esercizio il caso in cui $x_0 = +\infty$. Conviene distinguere due casi:

Caso 1: $\sup\{f(x) \; |x < x_0\} = +\infty$ **, ossia** $f(x)$ **superiormente illimitata** Come si è notato, in questo caso x_0 è l'estremo destro del dominio della funzione e bisogna provare

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = +\infty\,.$$

Dunque vanno considerate le disequazioni

$$f(x) > \epsilon$$

e va provato che ciascuna di esse è soddisfatta in un intervallo (c, x_0), con $c = c_\epsilon < x_0$. Essendo la funzione superiormente illimitata, **esiste** un particolare x_ϵ tale che

$$f(x_\epsilon) > \epsilon\,.$$

La funzione è **crescente** e quindi per $x \in (x_\epsilon, x_0)$ si ha

$$f(x) \geq f(x_\epsilon) > \epsilon\,.$$

Dunque, si può scegliere $c_\epsilon = x_\epsilon$.

Caso 2: $\sup\{f(x) \,|x < x_0\} = l < +\infty$ In questo caso va provato

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = l$$

e quindi vanno considerate le disequazioni

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon\,.$$

Va mostrato che ciascuna di esse è soddisfatta in un intervallo (c_ϵ, x_0). La definizione di estremo superiore mostra che **esiste** x_ϵ per cui

$$l - \epsilon < f(x_\epsilon)\,.$$

La funzione è **crescente** e quindi

$$x \in (x_\epsilon, x_0) \Longrightarrow f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq l\,.$$

L'ultima disuguaglianza discende dalla definizione di l. L'asserto segue scegliendo $c_\epsilon = x_\epsilon$. ■

Ripetiamo che il teorema delle funzioni monotone non richiede che il dominio sia un intervallo. Esso vale per funzioni definite su un **qualsiasi** insieme, purché i limiti da destra e/o da sinistra possano studiarsi. In particolare, **vale per le successioni.** Nel caso delle successioni, il teorema delle funzioni monotone può enunciarsi come segue:

Teorema 107 *Se $\{x_n\}$ è una successione monotona, essa ammette limite per $n \to +\infty$, finito o meno, e vale:*

- *se la successione è crescente allora* $\lim x_n = \sup\{x_n\,, n \in \mathbb{N}\}$*;*
- *se la successione è decrescente allora* $\lim x_n = \inf\{x_n\,, n \in \mathbb{N}\}$.

Prendiamo l'occasione offerta dal Teorema 107 per introdurre un nuovo termine: una successione che ammette limite per $n \to +\infty$, finito oppure $+\infty$ oppure $-\infty$, si chiama $\boxed{\textit{successione regolare}}$ Se il limite è finito la successione è una $\boxed{\textit{successione convergente}}$

Si noti che la dimostrazione del Teorema delle funzioni monotone usa la completezza dei numeri reali, ossia la proprietà di Dedekind.

4.2 Il Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ricordiamo che si chiama $\boxed{\textit{successione convergente}}$ una successione che ammette limite finito. Il teorema seguente è importante in moltissime applicazioni:

Teorema 108 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata ammette sottosuccessioni convergenti, ossia dotate di limite finito.*

Dim. Indichiamo con m l'estremo inferiore dell'immagine $\{x_n\}$ della successione,

$$m = \inf\{x_n\}\ .$$

Ora procediamo in modo iterativo:

Passo 1: Sia $S_1 = \{x_n\}$, l'immagine della successione e sia

$$c_1 = \sup S_1\,.$$

Ovviamente, $c_1 \geq m$. Scegliamo un qualsiasi x_{n_1} tale che

$$c_1 - 1 < x_{n_1} \leq c_1 \, .$$

L'indice n_1 esiste per la definizione di estremo superiore.

Passo 2: Definiamo

$$S_2 = \{x_n \, , \, |n > n_1\} \, , \qquad c_2 = \sup S_2 \, .$$

Ovviamente, $S_2 \subseteq S_1$ e quindi $m \leq c_2 \leq c_1$. Scegliamo x_{n_2} tale che

$$c_2 - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq c_2 \; .$$

E':

$$n_2 > n_1 \, .$$

Passo 3: Definiamo

$$S_3 = \{x_n \, , \, |n > n_2\} \, , \qquad c_3 = \sup S_3 \, .$$

Ovviamente, $S_3 \subseteq S_2$ e quindi $m \leq c_3 \leq c_2$. Scegliamo x_{n_3} tale che

$$c_3 - \frac{1}{3} < x_{n_3} \leq c_3 \; .$$

E':

$$n_3 > n_2 \, .$$

Passo k: Definiamo

$$S_k = \{x_n \, , \, |n > n_{k-1}\} \, , \qquad c_k = \sup S_k \, .$$

Ovviamente, $S_k \subseteq S_{k-1}$ e quindi $m \leq c_k \leq c_{k-1}$. Scegliamo x_{n_k} tale che

$$c_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq c_k \tag{4.1}$$

e si ha

$$n_k > n_{k-1} \, . \tag{4.2}$$

In questo modo abbiamo costruito due successioni:

- la successione $\{c_k\}$ *decrescente* ed inferiormente limitata, e quindi dotata di limite finito l:

$$\lim c_k = l \in \mathbb{R} \, .$$

- la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ della successione $\{x_n\}$. Si noti che $\{x_{n_k}\}$ è effettivamente una sottosuccessione, perché $\{n_k\}$ è *crescente,* si veda la (4.2).

La (4.1) mostra che $\{x_{n_k}\}$ ammette limite, uguale a quello di $\{c_k\}$, e quindi finito. Ciò è quanto volevamo provare. ■

Si noti che la dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass usa il Teorema delle funzioni monotone e quindi usa la completezza dei numeri reali

.

4.3 Il teorema di Weierstrass

Notiamo che esistono funzioni continue prive di punti di massimo e di minimo. Sono esempi le funzioni $\arctan x$, definita su $\mathbb{R}$, la funzione $f(x) = 1/x$ definita su $(0, +\infty)$ ma anche la funzione $f(x) = 1/x$ definita su $(0, 1]$, che ammette punto di minimo ($x = 1$) ma non punto di massimo. In questi esempi le funzioni sono continue su intervalli che non sono chiusi oppure non sono limitati. Invece:

Teorema 109 (di Weierstrass) *Sia $f(x)$ definita su un intervallo* **limitato e chiuso** *$[a, b]$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia* **continua** *su $[a, b]$. L'immagine della funzione ammette sia massimo che minimo e quindi esistono x_0 ed x_1 in $[a, b]$ tali che:*

$$x_0 \text{ è } \boxed{\text{punto di massimo}} \text{ ossia } f(x_0) = \max\{f(x)\,, x \in [a, b]\};$$

$$x_1 \text{ è } \boxed{\text{punto di minimo}} \text{ ossia } f(x_1) = \min\{f(x)\,, x \in [a, b]\}.$$

Il teorema non afferma l'unicità dei punti di massimo o di minimo. E' importante notare che questo teorema si può riadattare per dimostrare l'esistenza di punti di massimo e/o di minimo anche in casi in cui le ipotesi non sono soddisfatte. Consideriamo l'esempio seguente:

Esempio 110 Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$ e verifichi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = c\,. \tag{4.3}$$

Esista un punto x_0 tale che $d = f(x_0) > c$. Allora, la funzione ammette punto di massimo. Infatti, sia $\epsilon = (d-c)/2$. Per definizione di limite, esiste $R > 0$ tale che

$$|x| > R \Longrightarrow f(x) < c + \frac{d-c}{2} = \frac{d+c}{2} < d\,.$$

Dunque, se $|x| > R$ vale $f(x) < d = f(x_0)$. Aumentando il valore di R, si può anche avere $|x_0| < R$. La funzione $f(x)$ è continua in particolare su $[-R, R]$, intervallo limitato e chiuso, e quindi ammette ivi un punto di massimo x_1:

$$f(x_1) \geq f(x) \qquad \forall x \in [-R, R]\,.$$

In tale punto si ha

$$f(x_1) \geq f(x_0) = d$$

più grande di $f(x)$ sia se $|x| > R$ che se $|x| \leq R$. Questo caso è illustrato nei grafici della figura 4.1. Si noti che il grafico a sinistra mostra anche l'esistenza di un punto di minimo, che però non è conseguenza della proprietà (4.3). Infatti, la funzione a destra non ha punti di minimo. In modo analogo si provi che se $f(x)$ è definita su (a, b) e se

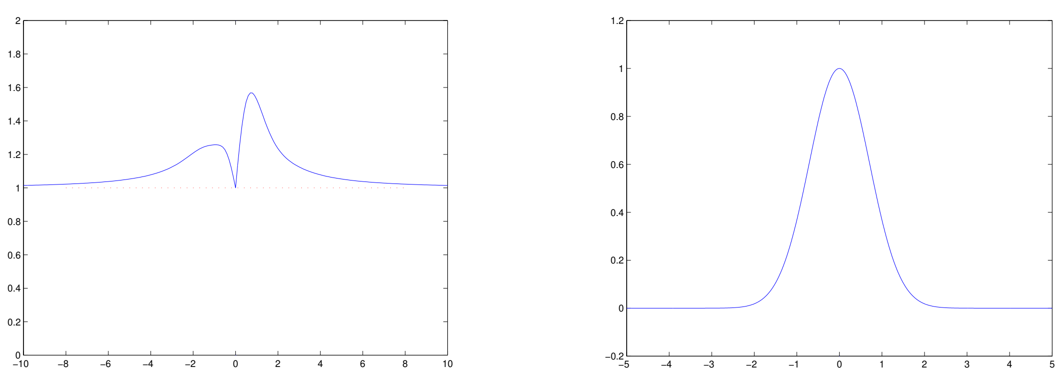
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

allora la funzione ammette punti di minimo (assoluti).

Figura 4.1: Teorema di Weierstrass:

(a) funzione con due massimi e un minimo

(b) funzione con un massimo



4.3.1 La dimostrazione del Teorema di Weierstrass

Premessa: nella dimostrazione useremo il Teorema di Bolzano Weierstrass e le proprietà seguenti:

A) se $\{x_n\}$ è una successione a valori in $[a, b]$, ossia se $a \le x_n \le b$, e se esiste $\lim x_n = x_0$, allora[3] si ha anche $a \le x_0 \le b$.

B) se $f(x)$ è continua in x_0 e se $x_n \to x_0$ allora[4] $f(x_n) \to f(x_0)$ (naturalmente si suppone $x_n \in \operatorname{dom} f(x)$).

C) se una successione converge, ogni sua sottosuccessione converge, ed ha il medesimo limite, finito o meno (Teorema 83). Applicheremo questo teorema ad una successione $\{f(x_n)\}$. Non sapremo che $\{x_n\}$ converge, ma sapremo che $f(x_n) \to L$. Se $\{x_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$ allora $\{f(x_{n_k})\}$ è sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$ e quindi $f(x_{n_k}) \to L$.

Proviamo ora il teorema di Weierstrass. Proviamo l'esistenza dei punti di massimo (la dimostrazione dell'esistenza di punti di minimo è analoga). La dimostrazione è in tre passi:

Passo 1: la costruzione di una successione massimizzante Si chiama $\boxed{\textit{successione massimizzante}}$ per una funzione $f(x)$ definita su un insieme D una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in \operatorname{dom} f(x)$ per ogni n, e tale che inoltre

$$\lim f(x_n) = \sup\{f(x)\,, x \in D\}\,.$$

L'estremo superiore può essere finito o meno, e la successione $\{x_n\}$ generalmente non è regolare. **Una successione massimizzante esiste sempre, senza alcuna condizione né sulla funzione $f(x)$ né sul suo dominio.** Infatti, sia

$$L = \sup A\,, \quad A = \operatorname{im} f(x) = \{f(x)\,, x \in D\}\,.$$

Sia nel caso $L = +\infty$ che nel caso $L \in \mathbb{R}$, esiste una successione $\{y_n\}$ di punti di A che converge ad L. I punti di A sono valori della funzione $f(x)$ e quindi esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $f(x_n) = y_n$. Dunque[5],

$$\lim f(x_n) = L\,.$$

[3] per il **teorema di permanenza del segno.**
[4] per il **teorema sui limiti delle funzioni composte**.
[5] proprietà **B)**

Passo 2: se *textnormaldom* $f(x) = [a, b]$ **allora esiste una** ***successione massimizzante*** **per** $f(x)$ **che è anche** ***convergente.*** Sia $\{x_n\}$ la successione massimizzante costruita al passo 1. Si ha:

$$a \leq x_n \leq b\,.$$

E quindi la successione $\{x_n\}$ è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, essa ammette almeno una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente:

$$\lim x_{n_k} = x_0\,.$$

Per la proprietà **A),** il punto x_0 appartiene all'intervallo **chiuso** $[a, b]$. Inoltre, $\{f(x_{n_k})\}$ è sottosuccessione della successione convergente $\{f(x_n)\}$ e quindi[6] ha lo stesso limite L:

$$\lim f(x_{n_k}) = L\,.$$

Paso 3: se $f(x)$ **è continua, il punto** x_0 **è punto di massimo per** $f(x)$ Sia $x_0 = \lim x_{n_k}$ il numero costruito al Passo 2. Si è notato[7] che $x_0 \in [a, b]$ e quindi è un punto del dominio della **funzione continua** $f(x)$. Dunque[8] si ha:

$$f(x_0) = \lim f(x_{n_k}) = L = \sup\{f(x)\,, x \in [a, b]\}\,.$$

Ossia, l'immagine della funzione ammette massimo ed x_0 è punto di massimo. Ciò completa la dimostrazione

Il teorema di Weierstrass dipende dal teorema di Bolzano-Weierstrass e quindi usa la proprietà di completezza dei numeri reali.

4.4 Teorema dei valori intermedi

Questo teorema afferma che, sotto certe ipotesi, esistono soluzioni dell'equazione

$$f(x) = c\,.$$

Essenzialmente, le ipotesi sono che **1)** $f(x)$ sia continua e **2)** che il grafico di $f(x)$ "tagli quota c". Dunque, il contenuto di questi teoremi sembra intuitivo, ma non è per niente così. Infatti, si consideri l'equazione

$$x^3 = 2\,.$$

[6]proprietà **C)**
[7]proprietà **A)**
[8]proprietà **C).**

Per provare l'esistenza di soluzioni, si può ragionare così: la funzione $f(x) = x^3$ vale -8 per $x = -2$ e vale $+8$ per $x = +2$. Inoltre è continua. Quindi, il suo grafico "non fa salti" e da qualche parte deve tagliare la retta $y = 2$; ossia l'equazione ammette almeno una soluzione. Questo discorso, dall'apparenza convincente, è sostanzialmente falso: pensiamo di lavorare con valori di x **solamente razionali.** Le condizioni su $f(x)$ dette sopra valgono in $\mathbb{Q}$, ma nessun numero razionale verifica $x^3 = 2$. Dunque, il ragionamento è sbagliato. Proviamo però che l'asserto **vale se si lavora in** $\mathbb{R}$**.** Ricordiamo la differenza essenziale tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$: in $\mathbb{R}$ vale la **proprietà di Dedekind:** ogni insieme superiormente limitato ammette estremo superiore; ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore. E' grazie alla proprietà di Dedekind che si può provare il risultato seguente:

Teorema 111 *Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$. Si consideri l'equazione*

$$f(x) = c\,, \qquad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{4.4}$$

Quest'equazione ammette almeno una soluzione se c è compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Il teorema non asserisce l'unicità della soluzione. Prima di provare il teorema, premettiamo vari commenti. Ricordiamo ora che, Il Teorema di Weierstrass asserisce l'esistenza di punti di massimo e di minimo della funzione $f(x)$ in $[a, b]$ **se essa è continua sull'intervallo** $[a, b]$**.** Esistono cioè x_0 ed x_1 in $[a, b]$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,, \qquad f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Il Teorema 111 vale anche sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1 e quindi si può enunciare:

Teorema 112 *Una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso prende tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.*

L'asserto dei due teoremi 111 e 112 si chiama teorema dei $\boxed{\textit{valori intermedi}}$ La versione del teorema che si ottiene quando $f(a)f(b) < 0$ e si sceglie $c = 0$ si chiama *teorema di* $\boxed{\textit{esistenza degli zeri}}$

Teorema 113 (di esistenza degli zeri) *Una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ e che ivi prende sia valori positivi che valori negativi, si annulla almeno in un punto di $[a, b]$.*

> Il teorema dei valori intermedi dipende dalla proprietà di completezza dei numeri reali, e richiede in modo essenziale che il dominio della funzione sia un intervallo.

Dimostrato il teorema dei valori intermedi, possiamo anche estendere in vari modi le considerazioni da cui siamo partiti. Per esempio:

Corollario 114 *Se $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ ed inoltre i due limiti (finiti o meno)*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

hanno segni opposti, la funzione ammette almeno uno zero. In particolare, tutti i polinomi di grado dispari hanno uno zero in $\mathbb{R}$.

Dim. Infatti, il teorema di permanenza del segno garantisce l'esistenza di R tale che

$$f(-R) \text{ ed } f(R) \text{ hanno segno opposto.}$$

Si applica quindi il teorema 112 all'intervallo $[-R, R]$. Questo risultati si applica in particolare ai polinomi di grado dispari perché essi sono infiniti di segno opposto per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Il Teorema dei valori intermedi mostra che *le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli.* Più precisamente si ha, usando il Teorema 112:

Corollario 115 *Sia J un intervallo (limitato o meno, chiuso o meno). Se $f(x)$ è definita e continua su J allora $f(J)$ è un intervallo. Se inoltre J è un intervallo limitato e chiuso, $J = [a, b]$, allora $f(J)$ è un intervallo limitato e chiuso contentente l'intervallo $[f(a), f(b)]$.*

Si faccia un esempio per mostrare che in generale $f(J)$ **contiene propriamente** l'intervallo $[f(a), f(b)]$. Interpretiamo ora questi risultati dal punto di vista del grafico di due funzioni:

Corollario 116 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue su $[a, b]$ e supponiamo che*

$$f(a) < g(a)\,, \qquad f(b) > g(b)$$

(o viceversa). I grafici delle due funzioni hanno almeno un punto comune.

Dim. I grafici hanno un punto comune quando esiste una soluzione $x \in [a, b]$ dell'equazione

$$f(x) = g(x) \qquad \text{ossia di} \qquad f(x) - g(x) = 0\,.$$

L'esistenza di (almeno) una soluzione di quest'equazione segue dal Teorema 112, notando che

$$f(a) - g(a) < 0\,, \qquad f(b) - g(b) > 0\,. \quad \blacksquare$$

4.4.1 La dimostrazione del teorema dei valori intermedi

Nella dimostrazione useremo la proprietà seguente, conseguenza del **teorema di permanenza del segno per le funzioni continue: Osservazione:** supponiamo che la funzione $f(x)$ sia continua su $[a, b]$ e sia $m \in (a, b)$. Allora si ha:

A) se $f(x) < c$ per $x < m$ allora $f(m) = \lim_{x \to m-} f(x) \le c$ (si noti che si è usato la continuità di $f(x)$ nel punto m).

B) sia $\{x_n\}$ una successione per cui $x_n > m$, $\lim x_n = m$ ed $f(x_n) \ge c$. Sempre usando la continuità di $f(x)$ nel punto m si ha $f(m) = \lim f(x_n) \ge c$.

Proviamo ora il teorema. Per fissare le idee facciamo la dimostrazione nel caso $f(a) < f(b)$ e quindi $f(a) \le c \le f(b)$. Naturalmente, se $c = f(a)$ oppure $c = f(b)$ l'asserto è provato e quindi consideriamo il caso in cui le disuguaglianze sono strette:

$$f(a) < c < f(b)\,. \tag{4.5}$$

Consideriamo l'insieme

$$S_c = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \ge c\}\ .$$

L'insieme S_c è limitato e quindi esiste

$$m = \inf S_c\,, \quad m \in [a, b]\ .$$

Osserviamo che:

- La funzione $f(x)$ è continua e quindi, per (4.5) e per il teorema di permanenza del segno, esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$f(x) < c \quad \forall x \in [a, a+\epsilon]\,, \qquad f(x) > c \quad x \in [b-\epsilon, b]\,. \tag{4.6}$$

  E quindi

$$S_c \subseteq [a+\epsilon, b]\,, \quad \text{ed } m < b-\epsilon, \text{ ossia } a+\epsilon \le m \le b-\epsilon.$$

  Il punto da sottolineare è che m è *interno* al dominio della funzione.

- Inoltre si ha:

$$\text{se } x < m \text{ allora } f(x) < c\,. \tag{4.7}$$

La proprietà **A)** dell'**Osservazione** mostra che

$$f(m) \leq c\,. \tag{4.8}$$

Proviamo ora che $f(m) = c$, e quindi che m è una soluzione (in generale non l'unica) dell'equazione $f(x) = c$. La dimostrazione consistere nel provare che si ha anche $f(m) \geq c$, cosìche dovrà essere $f(m) = c$. Notiamo che m è il **massimo dei minoranti** di S_c. Dunque, per ogni n esiste $x_n \in S_c$ tale che

$$m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n}\,.$$

Per il teorema del confornto sui limiti, $x_n \to m$. Inoltre, essendo $x_n \in S_c$, si ha anche $f(x_n) \geq c$. La proprietà **B)** dell'**Osservazione** mostra che

$$f(m) \geq c\,. \tag{4.9}$$

Confrontando (4.8) and (4.9) si conclude che si ha

$$f(m) = c\,.$$

Ciò prova l'asserto.

4.4.2 Una conseguenza sulle funzioni iniettive

Una funzione **strettamente** monotona è iniettiva e quindi invertibile. Il contrario non vale. Si sono visti esempi di funzioni invertibili ma non monotone. Però gli esempi che abbiamo visto sono

- esempi di funzioni continue ma non definite su un intervallo;
- esempi di funzioni definite su un intervallo ma non continue.

Il teorema seguente mostra la ragione:

Teorema 117 *Sia $f(x)$ una funzione* continua su un intervallo $[a, b]$. *Se essa è iniettiva, allora è strettamente monotona.*

<u>Dim</u>. L'iniettività implica che $f(a) \neq f(b)$. Consideriamo il caso

$$f(a) < f(b)\,.$$

Proviamo che ciò implica che la funzione è **strettamente crescente,** ossia che **per ogni** x_1 ed x_2 di $[a, b]$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$f(x_1) < f(x_2)$$

(l'uguaglianza non può aversi perché la funzione è iniettiva). Consideriamo prima di tutto i tre punti a, x_1 e b e proviamo che $f(a) < f(x_1) < f(b)$. Sia per assurdo

$$f(x_1) < f(a) < f(b)\,.$$

Il teorema dei valori intermedi applicato a $[x_1, b]$ implica che esiste $d \in (x_1, b)$ tale che $f(d) = f(a)$. Ciò non può darsi perché la funzione è iniettiva. Dunque,

$$f(a) < f(x_1)$$

e procedendo in modo analogo si vede anche che

$$f(x_1) < f(b)\,.$$

Sia ora $x_2 \in (x_1, b]$. Sull'intervallo $[x_1, b]$ si può lavorare come si è fatto prima sull'intervallo $[a, b]$ e si trova

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b)\,.$$

In definitiva, **qualsiasi** coppia di punti x_1, x_2 di $[a, b]$ tali che $x_1 < x_2$ verifica anche $f(x_1) < f(x_2)$. E quindi la funzione è **crescente** su $[a, b]$. Il caso $f(a) > f(b)$ si tratta in modo analogo. ■

4.5 Funzioni derivabili su intervalli

I due teoremi principali che riguardano le funzioni derivabili in tutti i punti di un intervallo sono il $\boxed{\textit{Teorema di Rolle}}$ e il $\boxed{\textit{Teorema di Lagrange}}$

Teorema 118 (Teorema di Rolle) *Sia $f(x)$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *il suo dominio è un intervallo $[a, b]$* limitato e chiuso*;*
- *è continua nei punti dell'intervallo* chiuso *$[a, b]$;*
- *è derivabile nei punti dell'intervallo* aperto *(a, b);*
- *vale $f(a) = f(b)$.*

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim. Se la funzione è costante, la sua derivata è nulla in ogni punto e quindi un qualsiasi punto di (a, b) può scegliersi come punto c. Sia $f(x)$ non costante. La funzione è continua su $[a, b]$, limitato e chiuso, e quindi per il Teorema di Weierstrass ammette un punto di minimo x_0 e un punto di massimo x_1 e vale

$$f(x_0) \neq f(x_1)\,,$$

perché la funzione non è costante. Dunque non può essere che x_0 ed x_1 siano gli estremi a e b dell'intervallo, perché in tali punti la funzione prende lo stesso valore. Quindi almeno uno dei due punti x_0 oppure x_1 è interno all'intervallo: si tratta di un punto c di estremo, interno all'intervallo, e in cui la funzione è derivabile. In tale punto la derivata è nulla per il Teorema di Fermat. ■

Esempio 119 Osserviamo che le ipotesi del Teorema di Rolle non possono essere eliminate, come provano gli esempi seguenti:

- sia $f(x)$ definita su $[0, 1] \cup [2, 3]$, e sia $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ ed $f(x) = 3 - x$ per $x \in [2, 3]$ (si faccia il grafico di questa funzione). La funzione è continua sul suo dominio e derivabile nei punti interni al suo dominio. Inoltre prende lo stesso valore nell'estremo sinistro e nell'estremo destro del dominio, *che non è un intervallo*. La derivata di $f(x)$ non si annulla.
- la funzione
$$f(x) = x \text{ per } 0 \leq x < 1,\ f(1) = 0$$
non è continua su $[0, 1]$ ma verifica le altre ipotesi del Teorema di Rolle. La sua derivata non si annulla.
- la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile su $(-1, 1)$ ma verifica le altre ipotesi del Teorema di Rolle su $[-1, 1]$. In nessuno dei punti in cui esiste, la derivata prima si annulla.
- la funzione $f(x) = x$, definita su $[-1, 1]$, verifica le prime due ipotesi del Teorema di Rolle, ma non la terza. La sua derivata prima non si annulla. ■

Se si rimuove l'ultima ipotesi del Teorema di Rolle si trova:

Teorema 120 (Teorema di Lagrange) *La funzione $f(x)$ verifichi le seguenti ipotesi:*

- *è definita su un intervallo* limitato e chiuso *$[a, b]$;*

- *è continua nei punti di* $[a, b]$*;*
- *è derivabile nei punti di* (a, b)*.*

Allora, esiste $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

<u>**Dim.**</u> Si noti che

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

è l'equazione della corda che congiunge i punti del grafico

$$(a, f(a))\,, \qquad (b, f(b))\,.$$

Dunque, la funzione

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right\}$$

verifica le tre ipotesi del Teorema di Rolle. Dunque, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$g'(c) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \quad \blacksquare$$

Ricordando che $f'(c)$ è la pendenza della tangente al grafico della funzione in $(c, f(c))$ si vede il significato geometrico del Teorema di Lagrange: **esiste un punto del grafico in cui la tangente al grafico stesso è parallela alla corda congiungente i suoi estremi.** Il punto c che figura nel Teorema di Lagrange si chiama $\boxed{\textit{punto di Lagrange}}$ per $f(x)$ su (a, b). Il teorema asserisce l'esistenza, sotto le opportune ipotesi, del punto di Lagrange ma non l'unicità: potrebbero esistere infiniti punti di Lagrange per $f(x)$ sull'intervallo (a, b).

Osservazione 121 Va osservato che:

- il teorema di Rolle implica il Teorema di Lagrange che, a sua volta, si riduce al Teorema di Rolle se vale $f(a) = f(b)$. Ossia, i due teoremi sono equivalenti. Usa tenerli distinti solo per chiarezza di esposizione;
- come nel caso del Teorema di Rolle, nessuna delle ipotesi del Teorema di Lagrange si può rimuovere.

- se la funzione è derivabile su (a,b), allora le ipotesi del Teorema di Lagrange valgono su ogni sottointervallo $[x_1,x_2]$ di (a,b), e anzi vale di più: le ipotesi valgono in $[x_1,x_2]$ se $f(x)$ è derivabile su (a,b), anche se non è continua negli estremi. Quindi: *sia $f(x)$ derivabile su (a,b). Per ogni coppia di punti x_1, x_2 di (a,b) esiste c tale che*

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,. \tag{4.10}$$

  Il punto c dipende sia da x_1 che da x_2.

- Applicando il teorema di Rolle alla funzione $f(x) - g(x)$ si può anche provare la seguente generalizzazione del teorema di Lagrange:

  Teorema 122 *se le due funzioni sono continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b) e se inoltre*

$$f(a) = g(a)\,, \qquad f(b) = g(b)$$

  allora esiste $c \in (a,b)$ con questa proprietà: le tangenti ai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente nei punti $(c, f(c))$ e $(c, g(c))$ (con la medesima ascissa c) sono parallele. Ossia, in tale punto si ha

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

  Si veda la figura 4.2.

La formula (4.10) si chiama *seconda formula degli incrementi finiti* o anche *formula della media* La formula della media si scrive anche

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad \text{ossia} \qquad f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)\,. \tag{4.11}$$

4.5.1 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Vediamo due conseguenze importanti del Teorema di Lagrange.

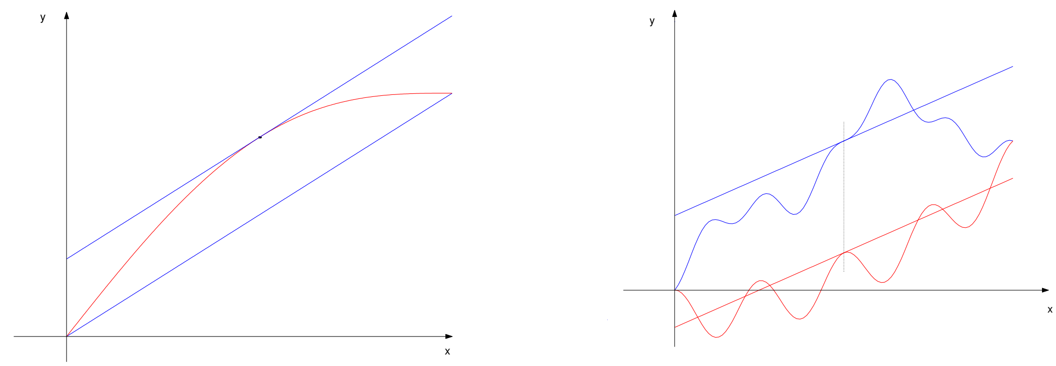
Conseguenza 1) Sia $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$. Se $f'(x) = 0$ in ogni punto dell'intervallo (a,b), allora $f(x)$ è costante su $[a,b]$. Infatti, si fissi un punto $x_0 \in (a,b)$. Facciamo vedere che in ogni altro punto vale

$$f(x) = f(x_0)\,.$$

Figura 4.2: Il teorema di Lagrange e la sua generalizzazione

(a) Teorema di Lagrange: Presa la retta r congiungente due punti $(a, f(a)), (b, f(b))$ appartenenti al grafico della funzione f, esiste $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ è parallela a r

(b) Generalizzazione del teorema: Prese due funzioni arbitrarie f, g tali che $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, esiste $c \in (a, b)$ tale che le tangenti ai grafici di f in $(c, f(c))$ e di g in $(c, g(c))$ sono parallele.



Per questo, basta notare che la (4.11) implica l'esistenza di c tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)\,.$$

L'asserto segue perché $f'(c) = 0$. Di conseguenza:

Lemma 123 *Siano $F(x)$ e $G(x)$ definite sul medesimo intervallo (a, b) e derivabili in ciascun punto di (a, b). Se per ogni $x \in (a, b)$ si ha*

$$F'(x) = G'(x)$$

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c\,.$$

Dim. Infatti, la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla su (a, b) e quindi è costante,

$$F(x) - G(x) \equiv c\,. \quad \blacksquare$$

Se $F(x) = G(x) + c$ con c costante, si dice che "le due funzioni differiscono per una costante".

Osservazione 124 L'ipotesi che il dominio delle funzioni sia un **intervallo** è essenziale. Per esempio, si considerino le due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ definite su $(-2,0)\cup(0,2)$ con $F(x)\equiv 0$ e invece $G(x)=\ \operatorname{sgn} x$. Ambedue le funzioni hanno derivata nulla in tutti i punti del loro dominio, ma la loro differenza non è costante. Ciò è conseguenza del fatto che i teoremi di Rolle e di Lagrange valgono solo quando il dominio della funzione *è un intervallo.* ■

Conseguenza 2) Se $f(x)$ è derivabile su (a,b) e se $f'(x)\geq 0$, allora $f(x)$ è **crescente** su (a,b); se $f(x)$ è derivabile su (a,b) e se $f'(x)\leq 0$, allora $f(x)$ è **decrescente** su (a,b). Sia $f'(x)\geq 0$ su (a,b). Si scelgano x_1 ed x_2 arbitrari in (a,b). La (4.10) mostra che

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\,.$$

Il punto c è un opportuno punto, che non è noto; ma comunque $f'(c)\geq 0$:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0\,.$$

Poiché ciò vale per **ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 in (a,b), segue che la funzione è crescente. In modo analogo si tratta il caso $f'(x)\leq 0$. Riassumiamo quanto abbiamo detto nel primo enunciato del teorema seguente:

Teorema 125 *vale:*

- *se $f(x)$ è derivabile su (a,b) con derivata* positiva, *la funzione è* crescente *su (a,b); se la derivata è* negativa *la funzione è* decrescente *su (a,b);*
- *se $f(x)$ è:*
  - *continua su (a,b)*
  - *derivabile su (a,x_0) con derivata positiva (oppure: negativa)*
  - *derivabile su (x_0,b) con derivata negativa (oppure: positiva)*

  la funzione ha punto di massimo (oppure: minimo) in x_0.

Dim. La prima affermazione è già stata provata. Proviamo la seconda. La funzione è crescente in (a,x_0) ed essendo continua in x_0 si ha

$$f(x_0)\geq f(x)\qquad \forall x<x_0\,.$$

La funzione è decrescente in (x_0, b) ed essendo continua in x_0 si ha ancora

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x > x_0\,.$$

In definitiva, $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$, ossia x_0 è punto di massimo. In modo analogo si tratta il caso del minimo. ■

4.6 Le primitive

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite su un medesimo intervallo (a, b). La funzione $F(x)$ si dice $\boxed{\textit{primitiva}}$ di $f(x)$ su (a, b) se **è derivabile in ogni** $x \in (a, b)$ **e vale**

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a, b)\,.$$

Dunque, **una primitiva è sempre una funzione continua.** Fatto importante: mentre la derivata, se esiste, è unica, la primitiva, se esiste, non è mai unica. Infatti, se $c \in \mathbb{R}$, per ogni $x_0 \in (a, b)$ vale:

$$D_{x_0}\left(F(x) + c\right) = F'(x_0)\,.$$

Dunque, $F(x)$ ed $F(x)+c$ sono primitive della medesima funzione. Vale anche il viceversa:

Teorema 126 *Siano $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ due primitive della funzione $f(x)$ sul medesimo intervallo (a, b). Esse "differiscono per una costante", ossia esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F_1(x) = F_2(x) + c\,.$$

Dim. Si veda il Lemma 123. ■

Di conseguenza:

Corollario 127 *Supponiamo che $f(x)$ ammetta primitive su (a, b). Esiste un'unica primitiva $F(x)$ che si annulla in un fissato $x_0 \in (a, b)$.*

Dim. Sia infatti $F_1(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$ su (a, b). La primitiva che si annulla in x_0 è

$$F(x) = F_1(x) - F_1(x_0)\,. \quad ■$$

L'insieme di tutte le primitive della funzione $f(x)$ su un intervallo (a, b) si indica col simbolo

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

e si chiama l'$\boxed{\textit{integrale indefinito}}$ di $f(x)$. Si noti che:

- l'intervallo (a, b) non compare esplicitamente nel simbolo ma viene sottinteso;
- il colore rosso è stato usato per sottolineare il fatto che
$$\int \quad \mathrm{d}x$$
è un unico simbolo, e non va separato.

Noi useremo il simbolo
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$
per intendere quella particolare primitiva che si annulla in x_0.

VARIABILE MUTA DI INTEGRAZIONE

Il simbolo
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$
indica un insieme di funzioni definite su un (sottinteso) intervallo (a, b). La lettera che si usa per indicare la variabile indipendente non ha alcuna influenza sul concetto di primitiva. Per questo potremmo cambiarla arbitrariamente scrivendo per esempio
$$F(x) + c = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(s)\,\mathrm{d}s = \int f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
ecc. Analogamente, per indicare la primitiva che si annulla in x_0 potremo scrivere
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$
Per questa ragione la lettera che indica la "variabile" sotto il segno di primitiva si chiama *variabile muta d'integrazione*

Attenzione che il simbolo $\int \quad \mathrm{d}x$ e il termine "integrale" hanno vari significati concettualmente diversi. Il significato di "primitiva" è solo uno di essi.

Sebbene questo non sia esplicitamente richiesto dalla definizione di primitiva, nella maggior parte dei casi le primitive di $f(x)$ su (a,b) sono definite e continue sull'intervallo $[a,b]$. In tal caso,

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

indicherà quella particolare primitiva che si annulla in a. Se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva (continua in a) di $f(x)$, sarà

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

Infine, notiamo questo teorema, che proveremo in seguito (si veda il Teorema 195):

Teorema 128 *Ogni funzione continua su un intervallo ammette ivi primitive.*

Si noti però che esistono funzioni continue la cui primitiva non si può esprimere in modo elementare. Per esempio, non è possibile rappresentare le primitive di e^{x^2} oppure di $\sin x^2$ mediante funzioni "elementari". Se una funzione definita su (a,b) non è continua, essa può ammettere primitive o meno. E' importante conoscere il risultato[9]:

Teorema 129 *Se $f(x)$ è definita su (a,b) ed ha un salto in $x_0 \in (a,b)$ allora essa* non *ammette primitive.*

Per esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non ammette primitive in nessun intorno di 0.

Regole di calcolo per le primitive

NOTAZIONE

In questo paragrafo, useremo lettere maiuscole e le corrispondenti lettere minuscole, F ed f, per indicare funzioni. Intenderemo che tra queste coppie di funzioni valga

$$f(x) = F'(x)\,.$$

[9] si veda il Corollario 145 per la dimostrazione.

Le primitive si calcolano leggendo alla rovescia la tabella delle derivate e usando le regole di calcolo che ora vediamo e che sono conseguenza della **linearità della derivata,** della **regola di Leibniz** e della **regola di derivazione della funzione composta.** Nel calcolo delle primitive, è utile ricordare anche le due formule seguenti, viste all'esempio 98:

$D\log\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| = \frac{1}{\sin x}$	$D\log\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| = \frac{1}{\cos x}$

Esaminiamo ora come si usano le tre regole di derivazione per il calcolo delle primitive.

Conseguenza della linearità della derivata è la $\boxed{\textit{linearità dell'integrale}}$ ossia

$$c\int f(x)\,\mathrm{d}x + d\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(cf(x)+dg(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

(c e d sono numeri).

Conseguenza della regola di Leibniz è una regola che si chiama $\boxed{\textit{integrazione per parti}}$ Siano $F(x)$ e $G(x)$ primitive rispettivamente di $f(x)$ e $g(x)$ su (a,b). Allora vale

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Questa regola si ricorda facilemte intendendo che "d" indichi la derivata, cosìche dx indica 1. Con questa convenzione, la regola di integrazione per parti si scrive

$$\int F(x)\,\mathrm{d}G(x) = F(x)G(x) - \int G(x)\,\mathrm{d}F(x)\,.$$

La regola di integrazione per parti è utile quando è dato da calcolare l'integrale di sinistra, che non si sa calcolare direttamente, mentre invece si riesce a calcolare quello di destra.

Esempio 130 Si vogliono le primitive di xe^x. Una primitiva del fattore e^x è nota (ed è e^x stessa). Quindi si può procedere cosí:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c\,.$$

L'uso "sbagliato" della regola di integrazione per parti conduce in genere ad un integrale più complicato di quello di partenza, ma questo non sempre è un male.

Esempio 131 La tabella delle derivate non aiuta a calcolare le primitive di

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}\,.$$

Si conosce però una primitiva di $1/(1+x^2)$:

$$\arctan x + c = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Usiamo la formula di integrazione per parti trovando:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{1+x^2} - \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} = x\frac{1}{1+x^2} + \int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\frac{1}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Si trova quindi

$$2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x + c\,.$$

Conseguenza della regola di derivazione della funzione composta è la regola di $\boxed{\textit{integrazione per sostituzione}}$ Sia $F(y)$ una primitiva di $f(y)$ su (a,b) e sia $G(x)$ definita su (α,β). Allora vale

$$\int f(G(x))G'(x)\,\mathrm{d}x = F(G(x)) + c\,.$$

Anche questa regola si ricorda meglio se si integrpreta "d" come segno di derivata perché cosìessa prende la forma

$$\int f(G(x))dG(x) = F(G(x)) + c$$

e si può interpretare come segue: alla $G(x)$ si sostituisce la "variabile" u e si calcola

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c\,.$$

Quindi ad u si sostituisce nuovamente $G(x)$. La semplice formulazione non inganni. Questa è la più difficile delle regole da usare e presenta due casi distinti.

Caso 1) L'integrando ha forma $f(G(x))g(x)$ con $g(x) = G'(x)$.

In questo caso, si calcola $F(y)$ e al posto di y si sostituisce $G(x)$.

Esempio 132 Si voglia calcolare

$$\int (\sin x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Si scriva quest'integrale come

$$\int (\sin x)^2 \;\mathrm{d}\sin x\,.$$

Si sostituisca $\sin x = u$ e si noti che

$$\int u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + c\,.$$

Si sostituisca ora u con $\sin x$. Si ottiene

$$\int (\sin x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x + c\,. \quad \blacksquare$$

Caso 2) La sostituzione "va inventata".

In questo caso è data da calcolare la primitiva di una funzione $f(x)$ e l'abitudine o la fantasia porta ad immaginare una funzione $G(x)$ tale che sia facile il calcolo delle primitive di $f(G(x))G'(x)$. Le formule di trigonometria, circolare o iperbolica, spesso suggeriscono la sostituzione.

Esempio 133 Si vogliono le primitive della funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Ovviamente $x \in (-1, 1)$. Non è affatto evidente come si possano calcolare queste primitive. Però si nota che

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

è la metà superiore della circonferenza trigonometrica e, come si è notato al paragrafo 2.5, ciascun punto della circonferenza trigonometrica si rappresenta come $(\cos\theta, \sin\theta)$. La rappresentazione è unica se si sceglie $\theta \in [0, 2\pi)$ e si ha la semicirconferenza superiore se si sceglie $\theta \in (0, \pi)$. Ciò suggerisce la trasformazione

$$x = G(\theta) = \cos\theta \Longrightarrow g(\theta) = G'(\theta) = -\sin\theta\,.$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \cos\theta \\ \mathrm{d}x &\longrightarrow \mathrm{d}\cos\theta = -\sin\theta\ \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

si trova l'integrale

$$-\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Ricordando la formula di bisezione,

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left[1-\cos 2\theta\right]\,.$$

Quindi

$$-\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c\,,\qquad \theta\in(0,\pi)\,.$$

Il calcolo però non è concluso. Questa è la primitiva $F(G(\theta))$ di $f(G(\theta))G'(\theta)$ mentre noi vogliamo $F(x)$. La funzione $\cos\theta$ su $[0,\pi]$ è invertibile: la sua funzione inversa è $\arccos x$. Al posto di θ si sostituisce ora $\arccos x$ e si trova

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{4}\sin 2\left(\arccos x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\sin\left(\arccos x\right)\cos\left(\arccos x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + x\sqrt{1-\left(\cos\left(\arccos x\right)\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\,.\quad\blacksquare \end{aligned}$$

Usando la formula

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

si calcolino le primitive di

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}\,.$$

Primitive di funzioni razionali

Dalla tabella delle derivate si vede che

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,.$$

Combinando quest'osservazione con la linearità dell'integrale, segue che **ogni polinomio ammette primitive, e queste sono polinomi.** La tabella delle derivate mostra che

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a| + c\,, \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c\,,\quad \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + c\,.$$

Dunque, integrando funzioni razionali si possono trovare funzioni "più complicate"; si possono trovare logaritmi ed arcotangenti. Proviamo ora che funzioni razionali, logaritmo ed arcotangente bastano ad integrare tutte le funzioni razionali.

Osservazione sulla notazione

Le primitive devono essere definite su intervalli. Dunque, $\log|x-a|$ ed $1/x$ **non** sono funzioni primitive. Sono funzioni primitive le funzioni

$$\begin{array}{llll} \log(x-a) & x>a\,, & \log(a-x) & x<a\,, \\ \dfrac{1}{x} & x>0\,, & \dfrac{1}{x} & x<0\,. \end{array}$$

Per non appesantire la notazione, in genere si lascia al lettore di determinare l'intervallo su cui lavorare. Quest'osservazione, che sembra qui un po' capziosa, assumerà un **significato fisico importante** quando studieremo le equazioni differenziali.

Ricordiamo che come *funzione razionale* si intende il quoziente di due polinomi,

$$R(x)=\frac{p(x)}{d(x)}\,.$$

Se il grado di $p(x)$ è maggiore o uguale di quello del denominatore, si può dividere ottenendo

$$R(x)=\frac{p(x)}{d(x)}=p_0(x)+\frac{q(x)}{d(x)}$$

e il grado di $q(x)$ è minore di quello di $d(x)$. Dato che le primitive dei polinomi si sanno calcolare, basta calcolare le primitive di

$$\frac{q(x)}{d(x)}\,,\qquad \text{grado di } q<\text{grado di } d.$$

Il calcolo delle primitive ora si fa identificando i *poli* della funzione razionale; ossia i punti in cui si annulla il denominatore, che possono essere reali o complessi. I numeri complessi si studieranno in seguito, ma per i calcoli che ora andiamo a fare non ne abbiamo realmente bisogno. Il calcolo delle primitive si fa con i metodi illustrati negli esempi seguenti.

Poli reali semplici E' il caso in cui $d(x)$ ha grado n ed inoltre ha n radici distinte. Se ciò vale si dice che la funzione $f(x)$ ha n $\boxed{\textit{poli semplici}}$ In questo caso si procede come nell'esempio che segue:

$$r(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x-2)(x+3)}\,.$$

Si scrive $r(x)$ come somma:

$$r(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Riducendo allo stesso denominatore si trova che i tre numeri A, B, C devono verificare

$$\begin{aligned} &A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\ &= x^2(A+B+C) + x(A+3B-2C) + (-6A) \\ &= x^2 - 4x + 1\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Quindi, i valori di A, B, C si trovano risolvendo il sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} -6A & = & 1 \\ A+3B-2C & = & -4 \\ A+B+C & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{da cui} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} A & = & -\frac{1}{6} \\ B & = & -\frac{3}{10} \\ C & = & \frac{22}{15}\,. \end{array}\right.$$

Noti i valori delle costanti A, B e C, il calcolo della primitiva è immediato. Questo metodo può usarsi tutte le volte che il denominatore ha tutte le radici reali e distinte.

> Risolvere questo sistema è alquanto fastidioso. Un metodo più semplice è il seguente: sostituendo $x = 0$ nei due membri di (4.12) si trova immediatamente
>
> $$-6A = 1 \qquad \text{e quindi } A = -1/6.$$
>
> Analogamente sostituendi $x = 2$ si trova $B = -3/10$ e sostituendo $x = -3$ si trova il valore di C.

Poli reali semplici o meno Se un polinomio $P(x)$ si fattorizza come

$$P(x) = (x - x_0)^r Q(x)\,, \qquad Q(x_0) \neq 0\,,$$

si dice che x_0 è uno $\boxed{\textit{zero di molteplicità } r}$ di $P(x)$; e se $P(x)$ è il denominatore di una funzione razionale il cui numeratore non si annulla in x_0, si dice che x_0 è un $\boxed{\textit{polo di molteplicità } r}$ della funzione razionale. In questo caso si procede come nell'esempio seguente:

Esempio 134

$$r(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2(x+3)} \, .$$

Il polo semplice 3 si tratta come sopra: gli si fa corrispondere un'addendo

$$\frac{C}{x+3} \, .$$

Invece al polo doppio 2 si fa corrispondere l'addendo

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2}$$

Imponendo

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{Ax+B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}$$

Riducendo allo stesso denominatore si trova che i numeri A, B e C devono verificare l'identità

$$x^2 - 4x + 1 = (Ax+B)(x+3) + C(x-2)^2 \tag{4.13}$$

e quindi

$$(A+C)x^2 + (3A+B-4C)x + 3B + 4C = x^2 - 4x + 1 \, .$$

Usando il principio di identità dei polinomi si trova il sistema

$$A + C = 1 \, , \quad 3A + B - 4C = -4 \, , \quad 3B + 4C = 1$$

da cui

$$A = \frac{3}{25} \, , \qquad B = -\frac{21}{25} \, , \qquad C = \frac{22}{25} \, .$$

A questo punto si nota che

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2) + (2A+B)}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{2A+B}{(x-2)^2} \, .$$

La primitiva di questi addendi si trova direttamente dalla tavola delle derivate.

Anche in questo caso, può essere più semplice fare opportune sostituzioni per ricavare immediatamente almeno una parte dei coefficienti. Per esempio sostituendo $x = -3$ in (4.13) si ottiene immediatamente $C = 22/25$ e quindi

$$(Ax+B)(x+3) = x^2 - 4x + 1 - \frac{22}{25}(x-2)^2 \, .$$

Sostituendo $x = 0$ si ottiene subito, $B = -21/25$. Tenendo conto di ciò e sostituendo $x = 2$ si trova $A = 3/25$.

In generale, ad ogni polo x_0 di molteplicità n si fa corrispondere un addendo

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}\,. \quad \text{Il grado di } p(x) \text{ è } n-1. \tag{4.14}$$

Le primitive di questi addendi possono calcolarsi perché ciascuno di essi a sua volta può decomporsi come segue:

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_0)^n}\,. \tag{4.15}$$

Talvolta però, specialmente quando $n = 2$ oppure $n = 3$, opportuni artifici, come quelli visti all'Esempio 134, conducono al calcolo delle primitive di (4.14) senza passare attraverso l'ulteriore decomposizione (4.15).

Osservazione 135 Notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{(x-x_0)^n} &= \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_0)^n}\\ &= \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{-A_2}{x-x_0} + \cdots + \frac{A_n}{(1-n)}\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}\right\}.\end{aligned}$$

Dunque, il secondo membro di (4.15) si può anche scrivere come

$$\frac{A_1}{x-x_0} + +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n-1}}\,. \quad \text{Il grado di } r(x) \text{ è } n-2.$$

Quindi se per esempio ci sono due poli reali x_0 ed x_1 di molteplicità n_1 ed n_2 (maggiore di 1) a tali poli si possono associare gli addendi

$$\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{x-x_1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n_0-1}(x-x_1)^{n_1-1}}\,. \quad \text{Il grado di } r(x) \text{ è } n_0+n_1-3$$

ossia $r(x)$ ha grado minore di una unità del grado del denominatore. I coefficienti di $r(x)$ si determinano facendo la derivata del quoziente, riducendo i due membri al medesimo denominatore e imponendo l'uguaglianza dei polinomi a numeratore. Una volta determinato $r(x)$, la primitive cercate sono

$$\log|x-x_0| + \log|x-x_1| + \frac{r(x)}{(x-x_0)^{n_0-1}(x-x_1)^{n_1-1}} + c\,. \quad \blacksquare$$

Il caso generale In generale, il denominatore avà anche zeri non reali. Noi ci limitiamo al caso in cui gli zeri **non reali** sono semplici[10]. Il prototipo è il caso

$$\frac{1}{x^2+bx+c}\,, \qquad c-\frac{1}{4}b^2=\gamma^2>0\,.$$

In questo caso, si può "completare il quadrato", scrivendo

$$\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\gamma^2}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma}\right)^2}$$

le cui primitive sono

$$\frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma}\right)+c\,.$$

E ora, nel caso in cui ci siano anche poli reali, semplici o meno, si decompone la funzione razionale in una somma di termini del tipo

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}$$

se x_0 è radice reale del denominatore, di molteplicità n. Il polinomio $p(x)$ deve avere grado $n-1$. Le primitive di questi addendi si calcolano come abbiamo già visto. A ciascuno dei fattori x^2+bx+c del denominatore, con discriminante negativo, si fa corrispondere un addendo della forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,.$$

La decomposizione appena descritta delle funzioni razionali si chiama $\boxed{\textit{decomposizione in fratti semplici}}$

Osservazione 136 Il metodo descritto all'Osservazione 135 si può anche usare quando il denominatore ha fattori $(x^2+bx+c)^k$, privi di zeri. In tal caso si isolano gli addendi $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ e al denominatore del termine di cui si calcola la derivata si aggiunge un fattore $(x^2+bx+c)^{k-1}$. Il grado del polinomio al numeratore (che è da determinare) va aumentato di $k-2$. ■

[10]Se ci sono zeri non reali e multipli, di molteplicità n, il denominatore avrà un fattore $(x^2+bx+c)^n$ a cui si fanno corrispondere addendi

$$\frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}\,, \quad 1\le k\le n\,.$$

Le primitive di tali addendi si trovanoiterando integrazioni per parti, come si è visto, quando $k=2$, all'Esempio 131.

4.6.1 Primitive generalizzate

Supponiamo che $F(x)$ sia **continua** su (a, b) e che valga

$$F'(x) = f(x)$$

in tutti i punti di (a, b), salvo un numero finito di essi. In tal caso si dice che $F(x)$ è una $\boxed{\textit{primitiva generalizzata}}$ di $f(x)$. Si noti che $F(x)$ potrebbe non essere derivabile in alcuni punti di (a, b) (in numero finito) e quindi la continuità va imposta esplicitamente. Le primitive generalizzate si calcolano facilmente procedendo come nell'esempio seguente.

Esempio 137 Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ \cos x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Le funzioni

$$F_1(x) = (1/3)x^3 + c\,, \qquad F_2(x) = \sin x + d$$

verificano rispettivamente

$$\begin{cases} F_1'(x) = f(x) & \text{se} \quad x < 0 \\ F_2'(x) = f(x) & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

La funzione $F(x) = F_1(x)$ per $x < 0$ ed $F_2(x) = F_2(x)$ per $x > 0$ **NON** è una primitiva di $f(x)$ perché non è definita in 0; e non lo è in generale nemmeno se si assegna ad essa un valore in 0 perché in generale non sarà continua. Però vale

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0-} F_1(x) = c \\ \lim_{x\to 0+} F_2(x) = d\,. \end{cases}$$

Si imponga allora **prima di tutto l'uguaglianza dei limiti** ossia in quest'esempio si imponga

$$c = d\,.$$

Quindi si estenda $F(x)$ per continuità anche nel punto 0 ossia, in quest'esempio si imponga

$$F(0) = c = d\,.$$

Si è trovata cosìuna primitiva generalizzata di $f(x)$. Dunque, l'insieme di tutte le primitive generalizzate di $f(x)$ è

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + c & \text{se} \quad x \le 0 \\ c + \sin x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Si noti che la $f(x)$ non era definita in $x = 0$, mentre $F(x)$ deve essere definita su un intervallo, e quindi anche in 0. Se si fosse assegnato

$$f(0) = 7\,,$$

o qualsiasi altro numero, niente sarebbe cambiato nella procedura descritta. Infatti, non si richiede né che $F(x)$ sia derivabile in 0 né, se derivabile, si richiede $F'(0) = f(0)$. Dunque, le funzioni

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + c & \text{se} \quad x \le 0 \\ c + \sin x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

sono anche le primitive di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ f(x) = 7 & \text{se} \quad x = 0 \\ \cos x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases} \quad \blacksquare$$

L'esempio precedente si adatta in generale e in particolare si potrebbe provare che **l'insieme delle primitive generalizzate, se non è vuoto, dipende da una (sola) costante arbitraria.**

4.7 Alcuni esercizi

1. **($\star$)** Il teorema dei valori intermedi asserisce che una funzione continua trasforma intervalli in intervalli. Si mostri che esistono funzioni non continue che hanno questa proprietà esaminando le funzioni

   $$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ a & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

   Si consideri separatamente il caso $|a| \le 1$ ed il caso $|a| > 1$ e si noti che, in uno dei due casi, questa funzione, discontinua in 0, trasforma intervalli in intervalli.

2. Il teorema dei valori intermedi combinato col teorema di Weierstrass implica che una funzione continua definita su un intervallo chiuso lo trasforma in un intervallo chiuso. L'asserto analogo non vale per gli intervalli aperti: si costruisca un esempio di funzione continua su un intervallo aperto, la cui immagine è un intervallo chiuso.

3. ($\star$) Le funzioni monotone che trasformano intervalli in intervalli sono ovunque continue. Si spieghi la ragione e si mostri un esempio di funzione monotona definita su $\mathbb{R}$, con un unico punto di discontinuità e la cui immagine non contiene l'insieme $(-1,0)\cup(0,1)$ ma contiene il punto 0.
4. Sia $f(x)$ monotona su $[a,b]$. Mostrare che la funzione ha sia punti di massimo che di minimo assoluto.
5. ($\star$) Sia $f(x)$ crescente su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un suo punto di discontinuità. Si vuol sapere se è possibile che ambedue gli insiemi $f([a,x_0])$ ed $f([x_0,b])$ siano intervalli chiusi.
6. Sia $f(x)$ crescente su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un suo punto di discontinuità. Si vuol sapere se è possibile che l'insieme $f([a,x_0])$ sia un intervallo aperto.
7. ($\star$) Sia $f(x)$ monotona su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che esista $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Mostrare che $f(x)$ è continua in x_0. Vale quest'asserto se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$?
8. per $x \in [0,1]$ sia $f(x) = (\,\mathrm{sgn}\,(M(x)))\,e^x$ (si ricordi che $M(x)$ indica la mantissa di x). Tracciare il grafico di $f(x)$, studiarne la monotonia e la continuità su $[0,1]$.
9. Sia $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e sia $g(x) = 3x$. Provare che se i grafici delle due funzioni si intersecano in due punti allora la tangente al grafico di $f(x)$ ha pendenza 3 in almeno un punto. Provare inoltre che esiste un intervallo I su cui $f(x)$ è crescente.
10. ($\star$) Usando il teorema di Rolle, si provi che se una funzione è di classe C^2 su (a,b) e se $f''(x)$ non si annulla allora ogni coppia di tangenti al grafico di $f(x)$ si interseca.
11. ($\star$) Su $x > 0$ vale $0 < \sin x < x$. Usare questa proprietà, il teorema di Rolle ed il teorema dei valori intermedi per provare che $\cos x > 1 - x^2/2$ sia per $x > 0$ che per $x < 0$.
12. Si è visto che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\;\mathrm{sett\,th}x = \frac{1}{1-x^2}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\;\mathrm{sett\,cth}x = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Spiegare se è vero o meno che le due funzioni $\mathrm{sett\,th}x$ e $\mathrm{sett\,cth}x$ differiscono per una costante.

13. Le due funzioni $f(x) = \arcsin x$ e $g(x) = -\arccos x$ sono definite sul medesimo intervallo $[-1,1]$ e su $(-1,1)$ hanno la stessa derivata. Dunque differiscono per una costante. Trovare il valore della costante e illustrare questo fatto geometricamente a partire dai grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ (si confronti con l'esercizio 39 del Capitolo 1).

14. Sia
$$f(x) = \arctan x\,, \qquad g(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}\,.$$
Mostrare che $f'(x) = g'(x)$. Tracciare il grafico delle funzioni e notare che le due funzioni non differiscono per una costante. Spiegare.

15. Sia
$$f(x) = \arctan x\,, \qquad g(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}\,.$$
Notare che
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) + g(x)\right) = 0\,.$$
E' vero che $f(x) + g(x)$ è costante?

16. Si mostri, sia mediante le formule di trigonometria che mediante il calcolo delle derivate:
$$\operatorname{cotan} \frac{1}{2}x = \operatorname{cotan} x + \frac{1}{\sin x}\,.$$

17. Mostrare che
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$
è costante per $x > 0$ e per $x < 0$ e calcolarne i valori.

18. **(⋆)** Si ricordi che
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)(\tan\beta)}\,.$$
Dire se si può applicare questa formula con
$$\alpha = \arctan x\,, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{x}$$
per calcolare il valore di $(\arctan x + \arctan(1/x))$. Usare il risultato trovato all'esercizio 17.

19. Rolle (1652-1719) enuncia il suo teorema nel suo libro *Traité d'algebre* del 1690, limitandosi a considerare "funzioni algebriche", ossia funzioni espresse mediante polinomi. Con linguaggio moderno, l'enunciato di Rolle è il seguente: *tra due zeri reali consecutivi della derivata di una funzione algebrica si trova al più uno zero della funzione stessa.* Si provi che questo enunciato è vero usando la formulazione moderna del Teorema di Rolle, ossia l'enunciato del Teorema 118.

20. Si calcolino le primitive

$$\int \frac{1}{\sqrt{m^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

e si mostri che l'uguaglianza

$$\int \frac{1}{\sqrt{m^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{m} + c$$

non è corretta. Si trovi l'espressione giusta. In modo analogo si tratti

$$\int \sqrt{m^2 + x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

21. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni dotate di primitive $F(x)$ e $G(x)$ su un intervallo (a, b). Sia $F(x_0) = G(x_0)$ e sia $f(x) \geq g(x)$ per $x > x_0$. Si deduca che vale la proprietà di *monotonia del calcolo delle primitive* $F(x) \geq G(x)$ per $x \geq x_0$.

22. Sia $f(x) \in C^1(a, b)$ e sia $|f'(x)| < K$ su $[a, b]$. Usando il Teorema di Lagrange, si mostri che per ogni coppia di punti x_1 ed x_2 in $[a, b]$ vale

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|\,.$$

23. **($\star$)** Sia $F(x)$ primitiva su $[a, b]$ della funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ e valga $|f(x)| \leq K$. Siano $x(t)$ ed $y(t)$ funzioni continue su un intervallo $[\alpha, \beta]$, a valori in $[a, b]$. Mostrare che

$$\left|\int_\alpha^t [f(x(t)) - f(y(t))]\,\mathrm{d}t\right| \leq \left[K \max_{s\in[\alpha,t]} |x(s) - y(s)|\right](t - a)\,.$$