Capitolo 3

Velocità, tangenti e derivate

> Tutte le leggi sono dettate dall'esperienza, ma per enunciarle ci vuole un linguaggio speciale; il linguaggio ordinario è troppo povero e vago per esprimere dei rapporti cosìdelicati, ricchi e precisi.
> Ecco quindi una ragione perchè il fisico non possa ignorare la matematica. Henri Poincaré *Il valore della scienza*

In questo capitolo proseguiamo nello studio delle proprietà locali delle funzioni, studiandone la proprietà di derivabilità, suggerita dalla meccanica per il calcolo della velocità istantanea e dell'accelerazione istantanea, e dalla geometria per la definizione della retta tangente al grafico di una funzione.

3.1 La derivata

Supponiamo che un punto si muova lungo l'asse delle ascisse, e che all'istante t la sua posizione sia $x(t)$. Abbiamo cioè una funzione $t \mapsto x(t)$ che rappresenta il moto del punto. Fissiamo un intervallo di tempo di estremi t_0 e t_0+h (a destra o a sinistra di t_0). Si chiama $\boxed{\textit{velocità media}}$ del punto su quest'intervallo il numero

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} .$$

Può accadere che esista finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} .$$

In fisica, questo numero si chiama "velocità istantanea" del punto all'istante t_0 e si indica col simbolo $v(t_0)$ oppure con uno dei simboli[1] $x'(t_0)$ oppure $\dot{x}(t_0)$. Va detto subito che la velocità media esiste sempre, mentre la velocità istantanea può esistere o meno. Per esempio non esiste negli istanti nei quali si verificano degli urti. Se la velocità istantanea esiste per ogni valore di t, allora si può definire l'"accelerazione media" sull'intervallo di estremi t_0 e $t_0 + h$ come

$$\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}\,.$$

Se il limite seguente esiste, questo si chiama l'"accelerazione istantanea" all'istante t_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}\,.$$

In ambedue i casi, si incontra quindi un rapporto con al numeratore l'incremento del valore di una funzione al passare del suo argomento da t_0, fissato, a $t_0 + h$ e al denominatore l'incremento h della variabile indipendente. **L'incremento h può essere positivo oppure negativo.** Questo rapporto si chiama $\boxed{\textit{rapporto incrementale}}$ della funzione che si sta considerando; e del rapporto incrementale si deve fare il limite per $h \to 0$. Un problema analogo si incontra in geometria, quando si cerca di definire la tangente al grafico di una funzione $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Si vuol definire la tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Per questo consideriamo la secante che congiunge i due punti $(x_0, f(x_0))$, considerato fisso, e il punto $(x_0+h, f(x_0+h))$, variabile sul grafico. Il coefficiente angolare della secante è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e quindi la secante è la retta

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)\,.$$

Se esiste il limite per $h \to 0$ di questi coefficienti angolari,

$$m_0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

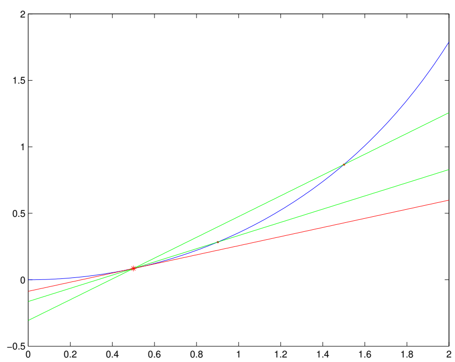
la retta

$$y = f(x_0) + m_0(x-x_0)$$

si chiama $\boxed{\textit{retta tangente}}$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Si veda la figura 3.1. Si vede da qui che il limite del rapporto incrementale compare in

[1] altre notazioni si vedranno in seguito. Notiamo che l'ultima, col punto sovrapposto, si usa quasi solamente in problemi di meccanica ed è la notazione introdotta da Newton.

Figura 3.1: Una funzione (nella sonificazione: $f(x) = (x^2)/2)$, alcune secanti (nella sonificazione: secante nel punto (1, 0.5)) e una tangente (rossa) (nella sonificazione: tangente nel punto (1,0.5))



applicazioni diverse, e ce ne sono ancora molte altre. Quindi, questo limite va studiato in generale.

Definizione 90 *Sia $f(x)$ definita su un intervallo (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Se* **esiste finito** *il numero*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,,$$

questo si chiama la $\boxed{\text{derivata}}$ *della funzione $f(x)$ in x_0 e si indica con uno dei simboli*

$$f'(x_0)\,, \quad \dot{f}(x_0)\,, \qquad D_{x_0} f\,, \qquad Df(x_0)\,, \qquad \frac{d}{dx} f(x_0)\,.$$

Un'altra notazione si vedrà più avanti. Il simbolo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$ è dovuto a Leibniz e ricorda che la derivata è il **limite** di un quoziente. NON è un quoziente e quindi il simbolo non indica una frazione. La notazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, di proposito evidenziata in colore, va letta come simbolo unico. Si osservi che la derivata **deve essere un numero.** Non può essere $+\infty$ oppure $-\infty$. Infatti, molte delle proprietà delle funzioni derivabili che vedremo **NON** valgono quando il limite del rapporto incrementale esiste, ma non è finito. Per esempio:

Teorema 91 *Se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0 essa è continua in x_0.*

Dim. Infatti,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Per ipotesi, il limite del rapporto incrementale esiste **finito** e quindi

$$0=\lim_{h\to 0} h\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]\,;$$

ossia, posto $x=x_0+h$ ed usando il teorema dei limiti delle funzioni composte,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,. \quad \blacksquare$$

Esempio 92 Il risultato precedente **non vale** se il limite del rapporto incrementale è $+\infty$. Per vederlo, si consideri la funzione $\operatorname{sgn} x$ in $x_0=0$. Essa è discontinua. Il limite del rapporto incrementale esiste, ma non è un numero:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sgn} h}{h}=+\infty\,. \quad \blacksquare$$

Un'altro punto a cui fare attenzione è questo: la derivata si definisce solo nei punti interni al dominio della funzione. Se $x_0=a$ oppure $x_0=b$ si possono studiare i due limiti

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{h\to 0-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}\,.$$

Se uno dei limiti esiste[2], **finito o meno,** esso si chiama la *derivata direzionale* in a oppure in b. La derivata direzionale si può talvolta definire anche in punti x_0 di non derivabilità. Se esiste, **finito o meno,** uno dei due limiti

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

questo si chiama la *derivata direzionale*, rispettivamente destra oppure sinistra, di $f(x)$ in x_0. La derivata direzionale destra o sinistra si indica con uno dei simboli

$$D_+f(x_0)\,, \qquad f'_+(x_0)\,, \qquad D_-f(x_0)\,, \qquad f'_-(x_0)\,.$$

[2]attenzione al fatto che la maggior parte degli autori intende che anche le derivate direzionali, come le derivate, debbano essere finite e non dà nome al limite direzionale del rapporto incrementale, quando questo non è finito.

Sottolineiamo che, a differenza della derivata, la derivata direzionale non è necessariamente finita.

Una dimostrazione del tutto analoga a quella del Teorema 91 mostra che:

Teorema 93 *Se in $x_0 \in [a,b]$ esiste* finita *la derivata destra (o sinistra) di $f(x)$, allora la funzione $f(x)$ è continua da destra (rispettivamente, da sinistra) in x_0.*

Concludiamo con una definizione il cui interesse apparirà principalmente nei corsi successivi. Si chiama *differenziale* della funzione $f(x)$ in x_0 la funzione

$$h \mapsto f'(x_0)h\,.$$

Questa trasformazione si indica spesso col simbolo $\mathrm{d}f$. Il significato geometrico del differenziale è illustrato al paragrafo 3.2.

Esempio 94 Calcoliamo la derivata di alcune potenze. Se $f(x) \equiv c$, costante, allora $f(x_0+h) - f(x_0) = 0$ per ogni h. Il rapporto incrementale è nullo e tale è il suo limite: *la derivata di una funzione costante è nulla.* Sia $f(x) = x$. Allora,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} 1 = 1\,.$$

Sia $f(x) = x^2$. Allora, $f(x) - f(x_0) = x - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$. Dunque,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [x + x_0] = 2x_0\,.$$

In generale, si ricordi la formula per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{x^n - 1}{x - 1}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \frac{x_0^n}{x_0} \frac{1 - (x/x_0)^n}{1 - (x/x_0)} \\ &= x_0^{n-1} \left(1 + (x/x_0) + (x/x_0)^2 + \cdots + (x/x_0)^{n-1}\right)\,. \end{aligned}$$

Gli addendi in parentesi sono in numero di n e ciascuno di essi tende ad 1 per $x \to x_0$. Dunque,

$$D_{x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n x_0^{n-1}\,.$$

Sia ora
$$f(x)=\frac{1}{x}\,.$$
Il rapporto incrementale in x_0 è
$$\frac{(1/x)-(1/x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{xx_0}\frac{x_0-x}{x-x_0}=-\frac{1}{xx_0}$$
e quindi
$$D_{x_0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to x_0}\frac{(1/x)-(1/x_0)}{x-x_0}=-\frac{1}{x_0^2}\,.\quad\blacksquare$$

3.1.1 La funzione derivata e le derivate successive

Ricordiamo che la derivata è un numero che si associa ad un punto x_0: $f'(x_0)$. Può essere però che tale numero esista per ogni $x\in(a,b)$ o per ogni $x\in(a,c)\subseteq(a,b)$. In tal caso si costruisce una funzione
$$x\mapsto f'(x)$$
che si chiama la $\boxed{\textit{funzione derivata}}$ di $f(x)$. Può accadere che la funzione derivata sia ulteriormente derivabile (come deve essere per definire l'accelerazione). In questo caso, si può calcolare il numero
$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$
che si chiama la $\boxed{\textit{derivata seconda}}$ di $f(x)$ in x_0. In questo contesto, la "derivata" si chiama anche $\boxed{\textit{derivata prima}}$ La derivata seconda si indica con uno dei simboli
$$f''(x_0)\,,\qquad D^2_{x_0}f\,,\qquad D^2f(x_0)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x_0)\,.$$
In meccanica, si usa anche il simbolo di Newton $\ddot{f}\,(x_0)$. Ovviamente:

Teorema 95 *Se la funzione $f(x)$ ammette derivata seconda in* ogni *punto di (a,b) allora sia $f(x)$ che $f'(x)$ sono continue su (a,b).*

Quanto detto si può ora ripetere: se la derivata seconda esiste in ogni punto si può cercare di derivarla, definendo, se esiste, la derivata terza, quarta, n-ma ecc. Le derivate successive si indicano con i simboli
$$D^n_{x_0}f\,,\qquad D^nf(x_0)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x_0)\,.$$

Ovviamente, le notazioni con gli apostrofi o i punti non sono pratiche oltre al terzo ordine. In certe formule, conviene indicare la derivata n-ma in x_0 col simbolo

$$f^{(n)}(x_0)$$

e in questo contesto si definisce

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)\,.$$

Sottolineiamo che **se esiste la derivata n-ma in *ogni* punto di (a, b), esistono le derivate precedenti, e sono continue in *ogni* punto**[3] **di (a, b).** Invece l'esistenza di $f^{(n)}(x)$ nel solo punto x_0 implica l' esistenza della derivata $f^{(n-1)}(x)$ in un intorno di I di x_0 e quindi le derivate precedenti a quella di ordine $n - 1$ sono continue su I mentre la $f^{(n-1)}(x)$ è continua in x_0 ma potrebbe essere discontinua in ogni altro punto. Una funzione che ammette le derivate fino all'ordine n incluso su (a, b), **continue** si dice $\boxed{\textit{di classe } C^n}$ e si scrive[4]

$$f \in C^n(a, b)\,.$$

Scrivendo

$$f \in C^0(a, b) \quad \text{o anche } f \in C(a, b)$$

si intende dire che $f(x)$ è continua su $[a, b]$. Scrivendo $f(x) \in C^\infty(a, b)$ (leggi $f(x)$ di $\boxed{\textit{classe } C^\infty}$ su (a, b)) si intende che la funzione ammette derivate di ogni ordine in ciascun punto di (a, b).

3.2 La prima formula degli incrementi finiti

La sostituzione $h = x - x_0$ mostra che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ossia, **essendo $f'(x_0)$ un numero,**

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} = 0\,.$$

[3] invece l'esistenza di $f^{(n)}(x)$ nel solo punto x_0 implica l' esistenza della derivata $f^{(n-1)}(x)$ in un intorno di I di x_0 e quindi le derivate precedenti a quella di ordine $n-1$ sono continue su I mentre la $f^{(n-1)}(x)$ è continua in x_0 ma potrebbe essere discontinua in ogni altro punto.

[4] Come si è notato, l'esistenza della derivata n-ma su (a, b) implica la continuità delle derivate degli ordini inferiori, e anche di $f(x)$. Dunque $f \in C^n(a, b)$ quandi ammette le derivate fino a quella di ordine n in ogni punto di (a, b) e tale derivata è continua.

Dunque, usando il simbolo di Landau,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\ \mathrm{o}(1)\,.$$

Ma,

$$(x - x_0)\ \mathrm{o}(1) = \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Dunque,

la derivata $f'(x_0)$, se esiste, è quel numero m tale che

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Dunque, $f'(x_0)$ verifica

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Questa formula si chiama *prima formula degli incrementi finiti*
Viceversa, se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0) \tag{3.1}$$

allora

$$m = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\mathrm{o}(x - x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)\,.$$

Quindi, la prima formula degli incrementi finiti è anche una equivalente definizione di derivata: la derivata è quel **numero** m per il quale è verificata l'uguaglianza (3.1). Ciò ha una conseguenza utile per il calcolo di certe derivate:

Teorema 96 *Sia $f(x)$ definita in un intorno di x_0. Se per $x \to x_0$ vale*

$$f(x) - f(x_0) = \ \mathrm{o}(x - x_0) \tag{3.2}$$

allora $f'(x_0)$ esiste e

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Dim. Infatti, la (3.2) coincide con la prima formula degli incrementi finiti (3.1) scritta con $m = 0$. ■

Nella prima formula degli incrementi finiti compare la funzione

$$(x - x_0) \to f'(x_0)(x - x_0)$$

che abbiamo chiamato il $\boxed{\textit{differenziale}}$ della funzione $f(x)$ in x_0. La prima formula degli incrementi finiti combinata con l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$, ossia

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

mostra il significato geometrico del differenziale: $f(x) - f(x_0)$ è l'incremento della quota del **punto del grafico della funzione**, quando si passa da x_0 ad x. Invece,

$$f'(x_0)(x - x_0) = \{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\} - f(x_0)\,.$$

Dunque, il differenziale indica l'**incremento dell'ordinata del punto della tangente** quando ci si sposta da x_0 ad x e questo incremento differisce dal corrispondente incremento di ordinata sul grafico della funzione per infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto ad $h = (x - x_0)$, ossia rispetto all'incremento h dato all'ascissa. Ciò è illustrato in figura 3.2.

3.3 Regole di calcolo per le derivate prime

Ci sono quattro regole per il calcolo delle derivate: la derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa. Inoltre, esiste una formula per la derivata di un quoziente, che si ottiene dalle precedenti.

Derivata di una somma Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti (quando ambedue esistono **finiti**). Dunque, se f e g sono derivabili in x_0 vale

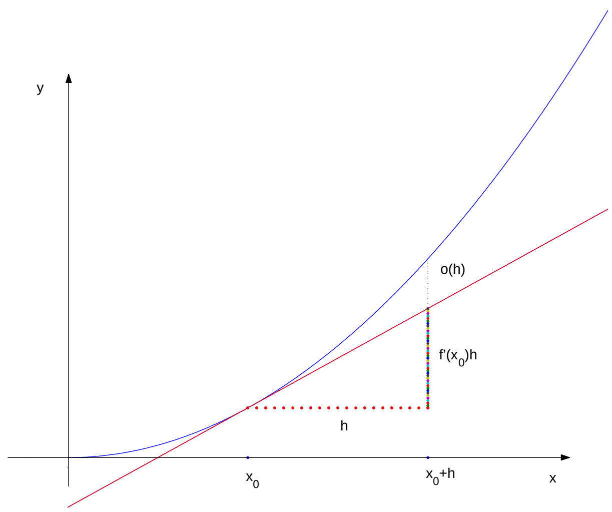
$$\boxed{D_{x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = f'(x_0) + g'(x_0)\,.}$$

Derivata del prodotto La formula per la derivata del prodotto si chiama $\boxed{\textit{formula di Leibniz}}$ e si vede meglio partendo dalla prima formula degli incrementi finiti. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in x_0 vale[5]

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}_1(x - x_0)\,,$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}_2(x - x_0)\,.$$

[5] la notazione $\mathrm{o}_1(x - x_0)$, $\mathrm{o}_1(x - x_0)$ è sovrabbondante. Non ha alcun interesse distinguere gli " o" l'uno dall'altro. Ma in questo caso aiuta a seguire i calcoli.

Figura 3.2: Significato geometrico del differenziale: Sono rappresentati in figura il grafico della funzione f e la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Considerata la retta $x = x_0 + h$, essa interseca la retta tangente nel punto $(x_0 + h, f'(x_0)h)$ e il grafico della funzione f nel punto $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. La differenza tra le ordinate di tali punti è trascurabile rispetto a h.



Moltiplicando membro a membro si ha

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\,(x - x_0) \\ + \{[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\ \mathrm{o}_2(x - x_0) \\ + [g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)]\ \mathrm{o}_1(x - x_0) \\ + f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0)^2 + \ \mathrm{o}_1(x - x_0)\ \mathrm{o}_2(x - x_0)\} \ . \end{aligned}$$

La parentesi graffa è $\mathrm{o}(x - x_0)$ e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \, .$$

Vale quindi la $\boxed{\textit{formula di Leibniz}}$

$$\boxed{D_{x_0}\,(f(x)g(x)) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \, .}$$

Supponiamo che $g(x) \equiv c$ sia costante. Allora,

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0\,.$$

Dunque,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(cf(x_0)) = cf'(x_0)\,.$$

Combinando quest'osservazione con la regola di derivazione della somma, si trova:

quando a e b sono numeri

$$\boxed{D_{x_0}\,(af(x) + bg(x)) = af'(x_0) + bg'(x_0)\,.}$$

Questa regola si chiama $\boxed{\textit{linearità}}$ della derivata.

Derivata della funzione composta Siano ora $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e supponiamo che la funzione composta $f(g(x))$ sia definita su un intervallo (a, b). Sia $x_0 \in (a, b)$ e supponiamo che $g(x)$ sia derivabile in x_0 mentre $f(x)$ sia derivabile in $y_0 = g(x_0)$. Allora vale

$$\boxed{D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)\,.}$$

I colori sono stati usati per evidenziare il fatto che la derivata della funzione composta si calcola iniziando col derivare la funzione più esterna. La dimostrazione è semplice: per ipotesi valgono le due formule degli incrementi finiti

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0) \\ f(y) &= f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \ \mathrm{o}(y - y_0) \end{aligned}$$

e inoltre

$$y_0 = g(x_0)$$

Si tenga conto di ciò e si sostituisca y con $g(x)$. Si trova

$$\begin{aligned} f(g(x)) = f(g(x_0)) &+ f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \{f'(y_0)\ \mathrm{o}(x - x_0) + \ \mathrm{o}(y - y_0)\}\ . \end{aligned}$$

E'

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{o}(y-y_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{o}(y-y_0)}{y-y_0}\,\frac{y-y_0}{x-x_0} = 0\,.$$

Dunque, la parentesi graffa è $\mathrm{o}(x-x_0)$ e la prima formula degli incrementi finiti vale in x_0 per $f(g(x))$, con coefficiente

$$f'(g(x_0))g'(x_0)\,,$$

che è quindi la derivata della funzione composta:

$$\boxed{D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)\,.}$$

Esempio 97 Ricordiamo che

$$D_{x_0}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0^2}\,.$$

Consideriamo ora $h(x) = 1/x$ e una generica funzione $g(x)$ derivabile e non nulla in x_0. Sia $\phi(x) = h(g(x)) = 1/g(x)$. La formula di derivazione della funzione composta dà:

$$D_{x_0}\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)\,. \quad \blacksquare$$

Combinando il caso visto nell'Esempio 97 con la formula di derivazione del prodotto si trova:

$$\boxed{D_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.}$$

Si usi questa formula per provare che

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

e si calcoli la formula analoga per $\cot x$ e per le corrispondenti funzioni iperboliche.

Esempio 98 Si sa, dalla tabella 2.4, che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| = \frac{1}{x}$$

(ovviamente se $x \neq 0$). Dunque, se $f(x)$ è derivabile e non nulla,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Applicando questa formula alla funzione $f(x) = \tan x$ si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|\tan(x/2)| = \frac{1}{\sin x}\,.$$

Ovviamente questa formula vale se $x \neq k\pi + \pi/2$, perchè in questi punti $\tan x$ non è definita, e se $x \neq k\pi$ perché in tali punti si annulla la derivata. Ricordando che

$$\cos x = \sin(x + \pi)$$

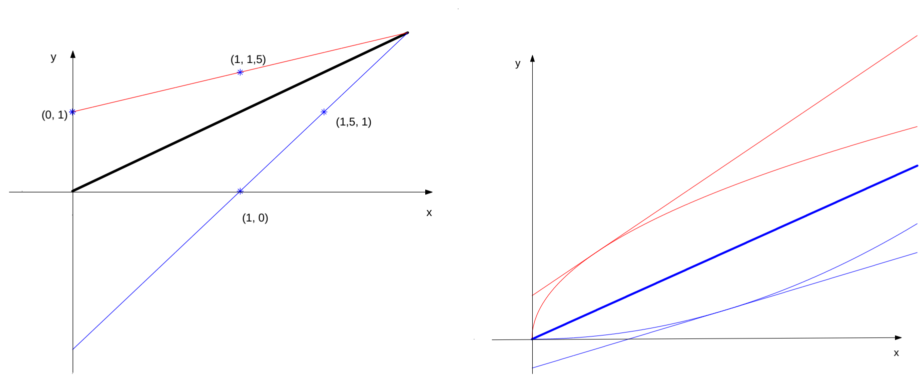
si trovi una funzione la cui derivata è $1/\cos x$. Queste formule sono utili nel calcolo delle primitive. ■

Derivata della funzione inversa La regola per il calcolo della derivata della funzione inversa è più complicata e richiede un'ipotesi in più: si deve avere una funzione $f(x)$ iniettiva e **continua su un intervallo** (a, b)**. Inoltre, la funzione deve essere derivabile in** $x_0 \in (a, b)$ **e deve essere** $f'(x_0) \neq 0$**.** Sia $f^{-1}(y)$ la funzione inversa di $f(x)$ e sia $y_0 = f(x_0)$. Sotto queste condizioni vale la formula:

$$\boxed{D_{y_0} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x_0)}\,, \qquad y_0 = f(x_0) \quad \text{ossia} \quad x_0 = f^{-1}(y_0)\,.}$$

Limitiamoci ad illustrare geometricamente questa formula. Ricordiamo che il grafico di una funzione e della sua funzione inversa devono partire ambedue dall'asse delle ascisse e che l'uno è il simmetrico dell'altro rispetto alla prima bisettrice. Le tangenti, quindi, sono simmetriche rispetto alla prima bisettrice. Sia $y = y_0 + m(x - x_0)$ una retta passante per (x_0, y_0). La sua simmetrica rispetto alla prima bisettrice ha coefficiente angolare $1/m$. E ora ricordiamo che il coefficiente angolare della tangente, quando essa non è verticale, è la derivata della funzione nel punto che stiamo considerando.

Figura 3.3: Derivata della funzione inversa



Questi argomenti sono illustrati in figure 3.3. Vediamo come si usa questa regola per calcolare la derivata della funzione $\arctan x$, funzione inversa della restrizione a $(-\pi/2, \pi/2)$ della funzione $\tan x$. E':

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x\,.$$

Se $y_0 = \tan x_0$, la derivata di $\arctan x$ in y_0 è

$$\frac{1}{D_{x_0} \tan x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}\,.$$

La tabella 3.1 riassume le regole di derivazione ed elenca le derivate principali che vanno ricordate. Le regole di calcolo sono state appena dimostrate mentre le formule delle derivate fondamentali si deducono dai limiti notevoli, combinati con le regole di calcolo. Notiamo che la tabella non riporta una formula per la derivata di $f(x)^{g(x)}$, perché invece di ricordare questa formula conviene notare che

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}\,.$$

La derivata dell'espressione a destra si calcola semplicemente usando la regola di derivazione delle funzioni composte e quella del prodotto.

Tabella 3.1: Derivate fondamentali e regole di calcolo

funzione	derivata
$D_{x_0}(hf(x)+kg(x))$	$hf'(x_0)+kg'(x_0)$
$D_{x_0}f(x)g(x)$	$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
$D_{x_0}f(g(x))$	$f'(g(x_0))g'(x_0)$
$D_{y_0}f^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
$D_{x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
$D_{x_0}\log\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

funzione	derivata
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotan} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$\log\lvert x\rvert$	$1/x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$
sett sh$x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
sett ch$x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
sett th$x$	$\frac{1}{1-x^2}$
sett cth$x$	$\frac{1}{1-x^2}$

funzione	derivata
x^a	ax^{a-1}
$D_{x_0}\lvert x\rvert$	$\frac{x_0}{\lvert x_0\rvert}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

3.4 Notazioni usate nei corsi di fisica

Nei corsi di fisica, e in generale nei corsi a carattere più applicativo, sembra a prima vista che le notazioni sulle derivate vengano usate in modo alquanto "libero". Per esempio, si trova che

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g \qquad \text{viene scritto} \qquad \mathrm{d}f = g\,\mathrm{d}x\,.$$

In realtà non si tratta di abusi, ma questi procedimenti tengono nascosti alcuni passaggi che è bene chiarire. Prima di tutto va detto che il simbolo d in questo contesto viene usato per indicare la derivata, al posto del simbolo D (cosa che noi faremo al Cap. 4, nel contesto della ricerca delle primitive). Nelle applicazioni, si sottintende il fatto che la x è a sua volta funzione di una ulteriore variabile, diciamo t, che non viene indicata. Allora,

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = f'(x(t))x'(t) = g(t)x'(t)$$

che, con la notazione d per indicare la derivata e sottintendendo[6] la variabile t, si scrive appunto

$$\mathrm{d}f = g\,\mathrm{d}x\,.$$

Un (apparente) abuso di notazioni analogo si incontra anche nell'uso del differenziale. Ricordiamo che il differenziale di $f(x)$ in x_0 è la trasformazione

$$h \mapsto f'(x_0)h\,.$$

Questa *trasformazione* si indica anche col simbolo $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f(x_0)h = f'(x_0)h\,.$$

Nel caso particolare della funzione $g(x) = x$ la sua *trasformazione* differenziale è

$$\mathrm{d}x = h$$

e ciò suggerisce di scrivere la *trasformazione* differenziale di f come

$$\mathrm{d}f\ \mathrm{d}x$$

(ossia, $\mathrm{d}f(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)h$, ma usualmente x_0 si sottintende). L'utilità di questa notazione dipende ancora dal fatto che in fisica x è funzione di una sottintesa variabile t e quindi

$$\mathrm{d}f\ \mathrm{d}x = f'(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

è un modo veloce di scrivere il differenziale della funzione composta. Ulteriori apparenti abusi di notazione[7], analoghi ai precedenti, si incontrano quando si devono usare funzioni di più variabili, e verranno spiegati al paragrafo 8.4 e nel corso di Analisi Matematica 2.

3.5 Derivate ed ordine dei numeri reali

Sia $f(x)$ una funzione derivabile su (a, b). La relazione di ordine dei numeri reali conduce alla definizione di funzione monotona e, per mezzo della regola

[6] come usa fare, e come noi faremo al Cap. 8.

[7] Notiamo anche questo fatto: il simbolo d viene manipolato come appena descritto, e quindi viene considerato la *trasformazione* $h \mapsto \mathrm{d}fh = f'(x_0)h$; però poi compaiono anche espressioni del tipo "il differenzaile è *piccolo*". In questo caso si intende che $\mathrm{d}fh = f'(x_0)h$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad altre funzioni i h che si stanno considerando, che per esempio possono tendere a zero come $\sqrt{h}$. Ma l'espressione usata fa pensare che si stia confondendo la *trasformazione* differenziale con i suoi valori.

dei segni del prodotto, alla definizione di funzioni pari e dispari[8]. Ricordiamo che $f(x)$ è $\boxed{\textit{crescente}}$ su (a,b) quando

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \forall x,\ x_0 \in (a,b) x \neq x_0\ .$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si trova che $f'(x_0) \geq 0$ e ciò vale per ogni $x_0 \in (a,b)$. Trattando in modo analogo le funzioni decrescenti si trova:

Teorema 99 *Se $f(x)$ è derivabile e crescente (non necessariamente in senso stretto) su (a,b) allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$; Se $f(x)$ è derivabile e decrescente (non necessariamente in senso stretto) su (a,b) allora $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.*

Osservazione 100 E' opportuno notare gli esempi seguenti:

- la derivata può annullarsi in un punto anche se la funzione è strettamente monotona: la funzione $f(x) = x^3$ è derivabile e **strettamente crescente** su $\mathbb{R}$ *ma* $f'(0) = 0$.

- la derivata può essere positiva in un punto senza che la funzione sia monotona in nessun intorno del punto. Un esempio si può costruire in questo modo: Sia $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$ e $g(0) = 0$. Notando che $g(x) - g(0) = \ \mathrm{o}(x)$ si vede che $g'(0) = 0$. Se $f(x) = (1/2)x + g(x)$ allora $f'(0) = 1/2 > 0$. La funzione $f(x)$ non è crescente su nessun intervallo $(-\epsilon, \epsilon)$. Infatti, se fosse crescente la sua derivata dovrebbe essere non negativa su tale intervallo. Invece, per $x \neq 0$ si ha

  $$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{e quindi } f'(x) = -1/2 \text{ se } x = 1/2k\pi.$$

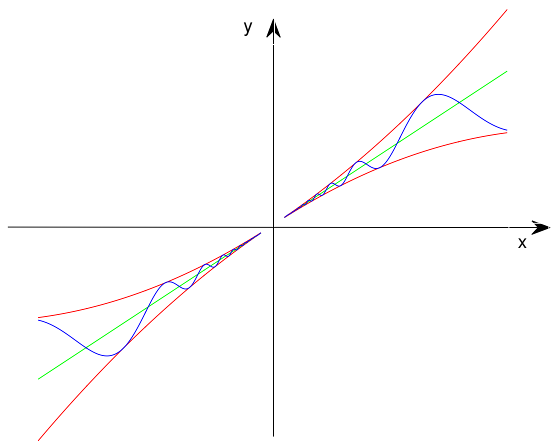
  La figura 3.4 riporta il grafico di questa funzione. ■

Il problema della relazione tra derivata e monotonia verrà ripreso al Cap. 4. Consideriamo ora la relazione tra parità e derivata. Sia $f(x)$ derivabile si $(-a,a)$. Vale:

$$\text{la funzione è } \textbf{pari} \text{ se } f(x) = f(-x);$$
$$\text{la funzione è } \textbf{dispari} \text{ se } f(x) = -f(-x).$$

[8]conduce anche alla definizione di convessità, che qui non consideriamo.

Figura 3.4: Il grafico della funzione $f(x) = (1/2)x + x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (link)



Derivando i due membri mediante il teorema della funzione composta si trova

$$\text{se la funzione è } \textbf{pari:}\ f'(x) = -f'(-x);$$
$$\text{se la funzione è } \textbf{dispari:}\ f'(x) = f'(-x).$$

Dunque si ha:

Teorema 101 *Sia $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se $f(x)$ è pari oppure dispari, le sue derivate di ordine* pari *hanno la stessa parità di $f(x)$, quelle di ordine* dispari *hanno parità opposta.*

Una funzione dispari deve annullarsi in $x_0 = 0$. Vale quindi:

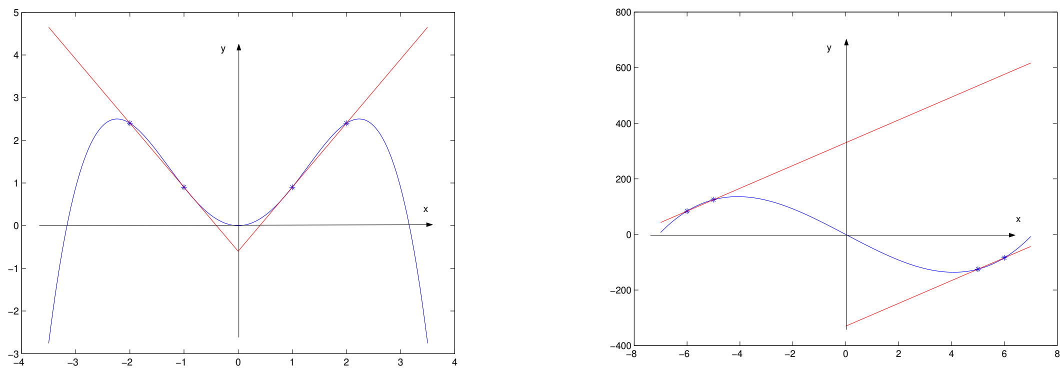
Teorema 102 *La derivata in $x_0 = 0$ di una funzione pari è nulla e quindi se $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ è* pari *tutte le sue derivate* di ordine dispari *sono nulle in $x_0 = 0$; se $f(x)$ è* dispari *tutte le sue derivate* di ordine pari *sono nulle in x_0.*

E' interessante vedere l'interpretazione geometrica del Teorema 101 notando che le secanti in punti corrispondenti del grafico sono parallele, e quindi hanno la stessa pendenza, nel caso di funzioni dispari; hanno pendenza opposta nel caso di funzioni pari, come illustrato nella figura 3.5. Tale relazione si conserva passando al limite dei rapporti incrementali, ossia si conserva per le derivate.

Figura 3.5: Grafici e secanti di funzioni pari e dispari.

(a) funzione pari; secanti della funzione pari;

(b) funzione dispari; prima secante della funzione dispari; seconda secante della funzione dispari



3.5.1 Il teorema di Fermat ed i punti di estremo

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita su un intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. **punto importante da sottolineare: x_0 è interno all'intervallo. NON è uno degli estremi.** Vale il teorema seguente:

Teorema 103 (di Fermat) *Se:*

- *$f(x)$ è definita in (a,b);*
- *$x_0 \in (a,b)$ è punto di massimo oppure di minimo locale di $f(x)$*
- *la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0,*

allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Per assurdo, sia

$$f'(x_0) > 0\,, \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Il teorema di permanenza del segno asserisce che esiste $\delta > 0$ tale che

$$-\delta < h < \delta \Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0\,,$$

ossia,

$$f(x_0+h)-f(x_0) \text{ ed } h \text{ hanno segno concorde.}$$

Dunque, se $h > 0$ vale $f(x_0+h) > f(x_0)$ mentre se $h < 0$ vale $f(x_0+h) < f(x_0)$ e quindi $f(x_0)$ non è né punto di massimo né punto di minimo di $f(x)$. Il caso $f'(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. ■

L'interpretazione geometrica di questo teorema: ricordiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza della tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dunque, **se esiste la tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ ed x_0 è un punto di massimo o di minimo INTERNO AL DOMINIO DELLA FUNZIONE, la tangente è orizzontale.**

Osservazione 104 Il teorema di Fermat NON si applica alle derivate direzionali. La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, definita su $[-1, 1]$, ha minimo nei punti -1 e $+1$. Le derivate direzionali in tali punti non sono nulle; anzi sono $+\infty$ e $-\infty$. La funzione $f(x) = x$ definita su $[0, 1]$ ha minimo in $x = 0$ e massimo in $x = 1$. Le derivate direzionali in ambedue questi punti valgono 1. ■

Il teorema di Fermat ha questa conseguenza importante:

i punti di massimo e di minimo relativo di una funzione vanno cercati tra i punti nei quali la derivata prima non esiste; i punti nei quali la derivata prima si annulla e, se ivi definita, gli estremi del dominio della funzione.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 105 Sia $f(x) = |x|$, definita su $[-1, 1]$. La funzione non è derivabile in $x = 0$ e, dove derivabile, ha derivata

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \,. \end{cases}$$

Dunque, $f'(x)$ non si annulla mai. Quindi, i punti di massimo e di minimo vanno ricercati tra i punti $-1,\ 0,\ +1$. Sia invece $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, definita su $\mathbb{R}$. La derivata si annulla nel solo punto $x = 0$ e quindi la funzione ha al più un solo punto o di massimo o di minimo, nel punto $x = 0$. Nel caso specifico $x = 0$ è punto di minimo ma **questo non si deduce dall'annularsi della derivata prima.** Infatti:

- la funzione $f(x) = -x^2$ ha nulla la derivata nel solo punto $x = 0$ che però ora è un punto di massimo;

- Non è detto che la condizione $f'(x_0) = 0$ implichi che x_0 è punto di massimo o di minimo. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, definita su $\mathbb{R}$, ha derivata $f'(x) = 3x^2$, nulla per $x = 0$. Il punto $x = 0$ **non** è né punto di massimo né punto di minimo di $f(x)$ perché $x^3 < 0$ per $x < 0$ mentre $x^3 > 0$ per $x > 0$. ■

I punti nei quali si annulla la derivata prima si chiamano $\boxed{\textit{punti estremali}}$ oppure $\boxed{\textit{punti stazionari}}$ oppure $\boxed{\textit{punti critici}}$ della funzione. Il teorema di Fermat asserisce che i punti di massimo o di minimo (assoluto o relativo) di una funzione sono punti estremali quando: 1) sono punti interni al dominio; 2) la funzione è derivabile in tali punti.

3.6 Osservazione finale ed importante

Si è insistito sul fatto che la derivata si definisce **nei punti interni.** Quindi, quando si afferma l'esistenza di $f'(x_0)$ implicitamente si afferma anche che la funzione $f(x)$ è definita in un intorno di x_0 ed inoltre, dal teorema 91, la funzione $f(x)$ è continua in x_0. Potrebbe essere discontinua in ogni altro punto. Vediamo la conseguenza di queste osservazioni sulle derivate successive. Affermando che esiste $f''(x_0)$ implicitamente si afferma che esiste $f'(x)$ e quindi anche $f(x)$ **in un intorno di** x_0**.** La funzione $f'(x)$ deve essere continua in x_0 per il teorema 91. L'esistenza di $f'(x)$ in ogni punto di un intorno di x_0 implica che $f(x)$ è continua in tale intorno. Queste osservazioni si ripetono per le derivate successive: se esiste $f^{(n)}(x_0)$ allora $f^{(n-1)}(x_0)$ è definita in un intorno di x_0 (ed è continua in x_0); tutte le derivate precedenti sono **definite e continue** in tale intorno.

3.7 Alcuni esercizi

1. (a) Un punto materiale si muove con velocità costante di $0,1\ \mathrm{m/\,sec}$. Calcolarne la velocità in centimetri al secondo.

   (b) Un punto materiale si muove con accelerazione costante di $0,01\ \mathrm{m/\,sec}^2$. Calcolarne l'accelerazione in centimetri al secondo per secondo.

   (c) la legge del moto del punto suddetto è $x(t)$ quando le lunghezze si misurano in metri e $\xi(t)$ quando si misurano in centimetri. E' quindi $\xi(t) = 100x(t)$. Ritrovare i risultati precedenti sulla velocità e accelerazione usando linearità della derivata.

2. (a) Un punto materiale si muove con velocità costante di $0,1$ m/ sec. Calcolarne la velocità in metri al minuto.
   (b) Un punto materiale si muove con accelerazione costante di $0,01$ m/ sec^2. Calcolarne l'accelerazione in metri al minuto per minuto.
   (c) la legge del moto del punto suddetto è $x(t)$ quando il tempo si misura in secondi e $\xi(\tau)$ quando il tempo si misura in minuti. E' quindi $\xi(\tau) = x(60\tau)$. Ritrovare i risultati precedenti sulla velocità e accelerazione usando la regola di derivazione della funzione composta.

3. Le regole di derivazione mostrano che per ogni numero reale a vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin ax = a\cos ax\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ax} = ae^{ax}$$

   e simili. Invece,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log ax = \frac{1}{x}$$

   (si ha qui $a > 0$ ed $x > 0$). Dunque, in questo caso il fattore moltiplicativo a "non ha effetto" sul calcolo della derivata. Spiegare il motivo usando le regole di calcolo dei logaritmi.

4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Dare condizioni per la derivabilità di $|f(x)|$ in x_0, sia quando $f(x_0) \neq 0$ che quando $f(x_0) = 0$. Ha qualche interesse sapere se x_0 è nullo?

5. Si è visto che che se $f(x)$ è pari e derivabile allora $f'(x)$ è dispari; se $f(x)$ è dispari e derivabile allora $f'(x)$ è pari. Si illustri il significato di questa proprietà tracciando i grafici di due funzioni, una pari e una dispari, e disegnando alcune tangenti. Ossia, si considerino le figure 3.5 in alcuni casi concreti.

6. ($\star$) Si mostri che se $f(x)$ è una funzione derivabile per cui $f(x) = f(1/x)$ allora $f'(x)$ verifica

$$x^2 f'(x) = -\,f'\left(\frac{1}{x}\right)\,; \tag{3.3}$$

   se $g(x)$ è una funzione derivabile per cui $g(x) = -g(-1/x)$ allora $g'(x)$ verifica

$$x^2 g'(x) = -\,g'\left(-\frac{1}{x}\right)\,. \tag{3.4}$$

Si verifichi che le funzioni

$$f(x) = (1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) = (1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

hanno le proprietà richieste e si verifichi che le loro derivate effettivamente soddisfano le (3.3) e (3.4).

7. ($\star$) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

8. ($\star$) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

9. ($\star$) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

10. ($\star$) Costruire una funzione $f(x)$ con queste proprietà:

    - è continua in $x_0 = 0$
    - per $x \to 0$ vale $f = \mathrm{o}(x^5)$
    - la funzione non ha derivata seconda in $x_0 = 0$.

11. ($\star$) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si mostri che $f(x)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$ e che per $x \to 0$ si ha $f = \mathrm{o}(x^2)$. Dire se è vero che $f'(x) = \mathrm{o}(x)$ (per $x \to 0$).

12. Sia

$$f(x) = x + x^2 \sin(1/x) \quad \text{se} x \neq 0\,, \quad f(0) = 0\,.$$

Mostrare che $f'(0) = 1$ ma che non esistono intorni di 0 su cui $f(x)$ è crescente. Si studi la derivabilità della funzione anche per $x \neq 0$.

13. Sia
$$f(x) = x \text{ se} x \in \mathbb{Q}\,, \quad f(x) = \sin x \quad \text{ se} x \notin \mathbb{Q}\,.$$
Mostrare che $f'(0) = 1$ ma che non esistono intorni di 0 su cui $f(x)$ è crescente. Si studi la derivabilità della funzione anche per $x \neq 0$.

14. **($\star$)** si costruisca una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ con queste proprietà:
    (a) la funzione è dispari ed $f(x) \leq 0$ per $x < 0$ (e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$ ed $f(0) = 0$);
    (b) la tangente a grafico nel punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ è orizzontale;
    (c) il punto $x_0 = 0$ non è punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione $f(x)$.

15. Si consideri la parabola $y = x^2$. Se ne calcoli la tangente nel punto di coordinate (x_0, x_0^2) e si mostri che tale retta tangente biseca il segmento congiungente il vertice della parabola col punto $(x_0, 0)$.

16. Si consideri l'iperbole $y = 1/x$ e per ogni $x_0 > 0$ se ne calcoli la tangente nel punto $(x_0, 1/x_0)$. Si calcoli l'area del triangolo che ha per vertici l'origine e le intersezioni di tale tangente con gli assi coordinati. Si mostri che l'area del triangolo non dipende da x_0.

17. Sia $f(x) = x^2$. Si considerino i due punti del grafico di $f(x)$, (x_0, x_0^2) ed (x_1, x_1^2). Si calcolino le tangenti al grafico in tali punti e si calcoli l'ascissa del loro punto comune. Si noti che tale ascissa è la $\boxed{\textit{media aritmetica}}$ $(x_0 + x_1)/2$ dei due numeri x_0 ed x_1.

18. Sia $f(x) = \sqrt{x}$. Si considerino i due punti del grafico di $f(x)$, $(x_0, \sqrt{x}_0)$ ed $(x_1, \sqrt{x}_1)$. Si calcolino le tangenti al grafico in tali punti e si calcoli l'ascissa del loro punto comune. Si noti che tale ascissa è la $\boxed{\textit{media geometrica}}$ $\sqrt{x_0 x_1}$ dei due numeri x_0 ed x_1.

19. Elevando al quadrato ambedue i membri membri, si provi che vale la disuguaglianza
$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$
ossia, *la media geometrica è minore della media aritmetica.* Si usino le osservazioni agli esercizi 17 e 18. Si traccino i grafici delle due funzioni $f(x) = x^2$ ed $f(x) = \sqrt{x}$ e si interpreti la disuguaglianza precedente mediante le ascisse dei punti di intersezione delle tangenti ai due grafici.