Capitolo 2

I limiti

Il moto vien definito dai Gassendisti[a] *una continua e non interrotta mutazione del luogo.* Giacomo Leopardi, *Dissertazione sopra il moto.* Nel periodo in cui Giacomo Leopardi scriveva le sue riflessioni sui principi della fisica (intorno al 1810) il concetto di "continua e non interrotta mutazione" non è ancora chiaro. Verrà chiarito una quindicina di anni dopo da Augustin-Louis Cauchy ed è l'oggetto di questo capitolo.

[a]Pierre Gassend, contemporaneo di Cartesio e propugnatore dell'empirismo nelle scienze.

In questo capitolo si studia il comportamento delle funzioni al variare della variabile x, per x che prende valori via via più grandi (diremo per x "tendente a $+\infty$") o negativi, via via più piccoli, (e diremo per x "tendente a $-\infty$"), oppure per x che approssima un numero x_0 (e diremo per x "tendente ad x_0"). Non è necessario che x_0 appartenga al dominio della funzione; anzi, se gli appartiene, non studiamo la funzione $f(x)$ ma la restrizione di $f(x)$ ad $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Ossia, **l'eventuale valore che $f(x)$ prende in x_0 non deve intervenire.** Per dire x "tendente a $+\infty$" useremo la notazione $x \to +\infty$; significato analogo hanno le notazioni $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0$. Ricordiamo il significato del termine $\boxed{\textit{intorno}}$, visto al paragrafo 1.5. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *intorno di* x_0 un qualsiasi intervallo aperto (a, b) contenente x_0. Dato che l'intervallo è aperto, il punto x_0 è *interno* all'intorno: l'intorno di x_0 interseca sia $(-\infty, x_0)$ che (x_0, ∞) e le intersezioni sono due intervalli. Un intorno di x_0 si dice *intorno simmetrico di* x_0 se ha forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r > 0$. Si chiama *intorno di* $+\infty$ un sottoinsieme $(a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$ mentre si chiama *intorno* *di* $-\infty$ un sottoinsieme $(-\infty, a)$ di $\mathbb{R}$. Le proprietà cruciali degli intorni sono le seguenti:

- l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0; l'intersezione di due intorni di $+\infty$, oppure di $-\infty$, è ancora un intorno di $+\infty$, oppure di $-\infty$.

- se $x_1 \neq x_2$ esistono intorni $I(x_1)$ ed $I(x_2)$ (rispettivamente di x_1 ed x_2) **che non si intersecano.** Per esempio, hanno questa proprietà i due intorni simmetrici $(x_1 - (\epsilon/2), x_1 + (\epsilon/2))$ ed $(x_2 - (\epsilon/2), x_2 + (\epsilon/2))$ se $\epsilon < |x_2 - x_1|$. Analoga proprietà vale se si considerano anche intorni di $\pm\infty$.

Richiederemo:

- il dominio di $f(x)$ deve essere **illimitato superiormente** se vogliamo studiare il caso $x \to +\infty$; il dominio di $f(x)$ deve essere **illimitato inferiormente** se vogliamo studiare il caso $x \to -\infty$;

- il dominio di $f(x)$ deve intersecare **ogni** intorno di x_0 **in punti diversi da** x_0 se vogliamo studiare il caso $x \to x_0$.

Queste condizioni saranno sempre sottintese e non più ripetute. Inoltre è inteso che quando scriveremo $f(x)$ dovrà essere $x \in \operatorname{dom} f$. Anche questa condizione verrà spesso sottintesa.

2.1 Limiti per prova $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Studieremo esplicitamente il caso $x \to +\infty$ lasciando come esercizio di adattare ciò che diremo al caso $x \to -\infty$. Vanno considerati due casi distinti.

2.1.1 I limiti infiniti

La definizione è la seguente:

Definizione 16

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quando accade che **per ogni** ϵ **esiste** N *tale che se* $x > N$ *si ha* $f(x) > \epsilon$. *In simboli* *si ha* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se*

$$\forall\epsilon \quad \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap (N, +\infty) \Longrightarrow f(x) > \epsilon\,.$$

In questa definizione il numero N dipende dal particolare ϵ scelto e usa indicare tale dipendenza scrivendo N_ϵ invece che semplicemente N. Come notazione, quando è sottinteso che si lavora per $x \to +\infty$, per dire che vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si scrive brevemente $f(x) \to +\infty$ e si dice che $f(x)$ *tende a* $+\infty$ o anche che *diverge a* $+\infty$. Per dire che una funzione tende a $+\infty$ si dice anche che la funzione è un $\boxed{\textit{infinito positivo}}$ Per dire che una funzione tende a $-\infty$ si dice anche che la funzione è un $\boxed{\textit{infinito negativo}}$ E' immediato dalla definizione:

Teorema 17 (di permanenza del segno per gli infiniti) *Sia*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Sia inoltre $a > 0$. *Esiste una semiretta* $(N, +\infty)$ *su cui* $f(x) > a$.

Come si è detto, il numero x deve appartenere al dominio della funzione e niente vieta che la funzione sia una successione. In questo caso la definizione precedente si trascrive come segue:

si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ se

$$\forall\epsilon \quad \exists N \,|n > N \Longrightarrow x_n > \epsilon\,.$$

Nel caso delle successioni i limiti per $n \to -\infty$ e per $n \to x_0$ (questi verranno introdotti più avanti) non possono studiarsi e quindi nel caso delle successioni si può anche scrivere $\lim x_n$ invece di $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Lasceremo come esercizio di adattare ciò che andiamo a dire al caso delle successioni. Ricapitolando, la verifica della proprietà

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{2.1}$$

si riduce a questo: si considerano **tutte** le disequazioni

$$f(x) > \epsilon\,, \tag{2.2}$$

una disequazione per ogni valore di ϵ. La (2.1) è verificata quando ciascuna di queste disequazioni è soddisfatta **per tutti** i punti del dominio della funzione che appartengono ad un **opportuno** intorno di $+\infty$ (ossia, ad una opportuna semiretta illimitata superiormente). Naturalmente, se (2.2) è verificata per un certo ϵ_0, essa è automaticamente soddisfatta per ogni $\epsilon < \epsilon_0$ e quindi ci si può limitare a studiare le disequazioni con $\epsilon > 0$ (o $\epsilon > 5$ oppure di qualsiasi altro numero fissato). Osserviamo le seguenti proprietà:

Teorema 18 *Sia* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Allora l'immagine della funzione* **non** *è superiormente limitata.*

Dim. Infatti, se $f(x) < M$ per ogni x, la (2.2) non ha soluzioni quando $\epsilon > M$. ■

Lemma 19 *Sia* $K \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$g(x) = f_{|_{[k,+\infty)}}(x)\,,$$

la restrizione di $f(x)$ *a* $[K, +\infty)$. *La (2.1) vale se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Dim. La condizione per avere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ è che per ogni ϵ la (2.2) sia soddifatta per $x > N$ (x nel dominio di f). L'analogo di (2.2) per $g(x)$ è che

$$\text{se } x > K \text{ allora} \qquad g(x) > \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad f(x) > \epsilon\,. \tag{2.3}$$

Quindi le due condizioni (2.2) e (2.3) si equivalgono. ■

Conseguenza: per lo studio dei limiti per $x \to +\infty$ possiamo limitarci a considerare la restrizione delle funzioni ad una semiretta verso destra. E' per questo che le proprietà di limite si chiamano "proprietà locali".

Teorema 20 (Teorema del confronto per gli infiniti) *Valga:*

a) *le funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *hanno il medesimo dominio;*

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*;*

c) $g(x) \geq f(x)$.

Allora, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Dim. Le disequazioni da studiare per provare la tesi sono

$$g(x) > \epsilon \tag{2.4}$$

Essendo

$$g(x) > f(x)\,,$$

la (2.4) è certamente soddisfatta quando vale

$$f(x) > \epsilon\,.$$

L'ipotesi fatta su $f(x)$ mostra che questa disequazione, e quindi la (2.4), vale su un'opportuna semiretta $(N_\epsilon, +\infty)$. ■

Osservazione 21 Va notato che la (2.4) potrebbe essere soddisfatta anche su un insieme più grande di $(N_\epsilon, +\infty)$, ma a noi ciò non interessa. A noi basta trovare **una** semiretta (verso destra) su cui vale (2.4). **Non è richiesto di individuare l'insieme di tutte le sue soluzioni.** ■

Lemma 22 *Per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} (f(x) + M) = +\infty\,.$$

Dim. Per provare che

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + M) = +\infty$$

vanno studiate le disequazioni

$$f(x) + M > \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad f(x) > \sigma = \epsilon - M\,.$$

Essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, esiste un intorno di $+\infty$ su cui vale $f(x) > \sigma$. ■

Combinando questo lemma col Teorema 20 si ha:

Teorema 23 *Se $f(x)$ e $g(x)$ hanno il medesimo dominio e inoltre valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- *$g(x)$ è inferiormente limitata su una semiretta $[a, +\infty)$*

allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Dim. Infatti, su $[a,+\infty)$ si ha $g(x) > M$, per un opportuno valore di M; e quindi

$$f(x) + g(x) > f(x) + M \to +\infty\,. \quad \blacksquare$$

Combinando questo teorema con quello di permanenza del segno si ha anche:

Corollario 24 *Se, per $x \to +\infty$, ambedue le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ divergono a $+\infty$, anche la funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$.*

Conseguenza del Corollario 24: se calcolando formalmente si trova un'espressione

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) + g(x)] = +\infty + \infty$$

allora vale

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Ossia, come **regola mnemonica,** si può scrivere

$$+\infty + \infty = +\infty\,.$$

Esempio 25 E' immediato verificare che

$$a > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} ax = +\infty\,; \qquad a < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} ax = -\infty\,.$$

Dunque, dal teorema del confronto, se $a > 0$ oppure se $a < 0$ si ha rispettivamente

$$\lim_{x\to+\infty}(ax + \sin x\,) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty}(ax + \sin x\,) = -\infty\,.$$

Si noti che che la funzione $f(x) = \sin x$, che è limitata, **non** diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$. Infatti, la disequazione $|\sin x| > \epsilon = 2$ non ha soluzione. $\blacksquare$

L'osservazione seguente è importantissima. Essa richiede di sapere che

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty\,.$$

Si lascia per esercizio la verifica di questo limite.

Osservazione 26 Consideriamo le due funzioni divergenti a $+\infty$, $f(x) = x$ e $g(x) = x$. La funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$, mentre la funzione $f(x) + (-g(x))$ **non è un infinito.** Quindi la condizione di limitatezza inferiore nel Teorema 23 non si può eliminare. Consideriamo ora $f(x) = x$ e $g(x) = -\sqrt{x}$. Essendo

$$f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

(l'ultima disuguaglianza vale per esempio se $x > 10$) per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x}\right] = +\infty\,.$$

Invece

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} - x\right] = -\infty\,.$$

Dunque, se si trova un'espressione del tipo

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty + (-\infty)\,,$$

che scriveremo semplicemente come

$$+\infty - \infty\,,$$

niente può dirsi del comportamento della somma $f(x) + g(x)$: **non si può attribuire un significato all'espressione formale**

$$+\infty - \infty\,.$$

E' questo il primo esempio in cui i teoremi sui limiti non permettono di dedurre niente sul comportamento di una funzione, il cui limite va studiato con metodi particolari. Per questo quando si incontra l'espressione $+\infty - \infty$ si dice che si incontra una $\boxed{\textit{forma indeterminata}}$ Consideriamo ora il quoziente delle funzioni $f(x)$ e $|g(x)|$. E':

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{|g(x)|} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

mentre invece $g(x)/f(x) = 1/\sqrt{x}$, essendo limitata su $[1, +\infty)$, **non è un infinito.** Dunque, anche se si incontra formalmente l'espressione

$$\frac{\infty}{\infty}$$

niente può dirsi in generale del limite del quoziente delle funzioni e il limite va studiato con tecniche particolari. Quindi, ∞/∞ è un secondo esempio di **forma indeterminata.** Altri esempi vedremo in seguito. ■

Passiamo ora ad esaminare le relazioni tra le funzioni divergenti a $+\infty$ oppure $-\infty$ e l'operazione di prodotto. Chiaramente, la funzione $0 \cdot f(x)$ non è un infinito, mentre:

Lemma 27 *Se $f(x)$ è un infinito positivo ed $a > 0$ allora $af(x)$ è un infinito positivo; se $f(x)$ è un infinito positivo ed $a < 0$ allora $af(x)$ è un infinito negativo.*

Combinando quest'affermazione col teorema di permanenza del segno e col teorema di confronto si ha:

Teorema 28 *Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Vale:*

- *se $g(x) > M > 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} g(x)f(x) = +\infty$;*
- *se $g(x) < M < 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} g(x)f(x) = -\infty$.*

In particolare:

Corollario 29 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti (per $x \to +\infty$) anche $f(x)g(x)$ lo è; precisamente, è un infinito positivo se $f(x)$ e $g(x)$ divergono ambedue a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Altrimenti è un infinito negativo.*

Le condizioni $g(x) > M > 0$ oppure $g(x) < M < 0$ **non** possono sostituirsi con le condizioni $g(x) > 0$ oppure $g(x) < 0$. Infatti, $f(x) = x$ è un infinito positivo e $g(x) = 1/x$ è positiva per ogni valore di x; ma $f(x)g(x) \equiv 1$ **non** è un infinito. Invece,

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = +\infty\,.$$

Ossia,

la sola condizione $\lvert g(x)\rvert > 0$, invece di $\lvert g(x)\rvert > M > 0$, non permette di dire niente del prodotto $f(x)g(x)$, quando $f(x)$ è un infinito.

La tabella 2.1 ricapitolale regole e le forme indeterminate che abbiamo trovato:

Tabella 2.1: "Regole" di calcolo, a sinistra, forme indeterminate a destra

regole	forme indeterminate
$+\infty + \infty = +\infty$	$+\infty - \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2.1.2 I limiti finiti

La definizione è:

Definizione 30

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,, \tag{2.5}$$

e si dice che $f(x)$ **tende ad** l **per** x **tendente a** $+\infty$**,** *quando accade che per* **ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** N *con questa proprietà: ogni* x *(appartenente al dominio di* $f(x)$*) e tale che* $x > N$ *verifica* $|f(x) - l| < \epsilon$*. In simboli:*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap \{x \,|x > N\} \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.}$$

Il numero N dipende da ϵ e per sottolineare ciò si scrive anche $N = N_\epsilon$. Ripetiamo che questa definizione può darsi solo se il dominio della funzione è superiormente illimitato e naturalmente, niente vieta che la funzione che si considera sia una successione. Inoltre, la definizione si adatta facilmente per definire

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\,.$$

La definizione è

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap \{x \,|x < N\} \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Si esprima questa definizione a parole.

Esempio 31 Sia $f(x)$ costante, $f(x) \equiv l$. Si provi che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l\,. \ \blacksquare$$

Le funzioni che ammettono limite uguale a 0 sono particolarmente importanti nelle applicazioni, ed hanno un nome particolare:

Definizione 32 *Una funzione $f(x)$ tale che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

si dice un $\boxed{\text{infinitesimo}}$ *(per $x \to +\infty$).* ■

OSSERVAZIONE IMPORTANTE
Molto spesso e solo in apparenza, nelle applicazioni fisiche sembra che il termine "infinitesimo" sia usato come sinonimo di "quantità piccola". Per esempio, si sente dire una frase del tipo "prendiamo un quadrato di area *infinitesima*. Allora la pressione è…" Il significato da attribuire a questa frase è il seguente: facendo misure concrete, si trova che il valore della pressione è diverso da quello proposto, ma "non troppo" e che l'approssimazione è "via via migliore al tendere dell'area a zero"; ossia, la pressione dipende dalla variabile "area del quadrato" ed è difficile da calcolare. Il valore proposto si ottiene come limite quando la variabile "area del quadrato" tende a zero.

Per verificare se vale (2.5) vanno studiate le infinite disequazioni

$$|f(x) - l| < \epsilon\,,$$

una disequazione per ciascun valore di ϵ, e va provato che ciascuna di esse vale in tutti i punti del dominio di $f(x)$ che appartengono anche ad un intorno di $+\infty$, ossia ad un'opportuna semiretta $(N, +\infty)$. Queste disequazioni coincidono con quelle da studiare se vogliamo provare che

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad \text{ove} \qquad g(x) = f(x) - l\,.$$

Dunque:

Teorema 33 *Vale*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - l) = 0\,;$$

ossia se e solo se $(f(x) - l)$ è un infinitesimo. In particolare, $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to +\infty$) se e solo se $|f(x)|$ lo è.

Studiamo ora i risultati principali concernenti i limiti finiti, quando la variabile x tende a $+\infty$. I risultati analoghi per $x \to -\infty$ si lasciano per esercizio. Prima di tutto mostriamo la proprietà seguente, da contrastare con quella enunciata nel Teorema 18:

Teorema 34 (***della limitatezza locale***) *Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora esistono numeri M ed N tali che se $x > N$ allora $|f(x)| < M$; ossia, $f(x)$ è limitata sulla semiretta $[N, +\infty)$.

Dim. Si scelga $\epsilon = 1$ (per esempio) nella definizione di limite e sia N il numero tale che se $x > N$ valga

$$|f(x) - l| < 1 .$$

Per $x > N$ si ha:

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$$

ossia, il risultato vale con $M = 1 + l$. ■

Una funzione può essere o meno dotata di limite, finito o infinito. Però, se il limite esiste esso è unico:

Teorema 35 (***unicità del limite***) *Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = m\,.$$

Allora, $l = m$.

Dim. Non si può avere $l \in \mathbb{R}$ ed $m = +\infty$ perché se $m = +\infty$ la funzione è illimitata su ogni semiretta $(N, +\infty)$, mentre se $l \in \mathbb{R}$ deve esistere una di tali semirette su cui $f(x)$ è limitata. Consideriamo il caso in cui l ed m sono ambedue numeri. Se per assurdo fosse $l \ne m$ potremmo scegliere due intorni $I(l)$ ed $I(m)$ (rispettivamente di l e di m) **privi di punti comuni.** Notiamo che:

- essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, esiste un intorno $V(+\infty)$ tale che

$$x \in V(+\infty) \cap (\text{ dom } f(x)) \implies f(x) \in I(l)\,;$$

- essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = m$, esiste un intorno $W(+\infty)$ tale che

$$x \in W(+\infty) \cap (\text{ dom } f(x)) \implies f(x) \in I(m)\,.$$

Abbiamo notato che $V(+\infty)\cap W(+\infty)$ è un intorno di $+\infty$ e quindi **contiene almeno un punto** $x_0 \in \operatorname{dom} f(x)$**.** Tale punto deve verificare $f(x_0) = I(l) \cap I(m)$ e ciò **contrasta** con la condizione $I(l) \cap I(m) = \emptyset$. Dunque deve essere $l = m$. ■

Osservazione 36 Si noti che in questa dimostrazione abbiamo usato ambedue le proprietà cruciali degli intorni. ■

Proviamo

Teorema 37 ($\boxed{\textbf{\textit{di confronto}}}$ **)** *Siano $f(x)$, $g(x)$ ed $h(x)$ definite sul medesimo insieme e sia*

- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = m$.

Allora si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = m\,.$$

<u>Dim</u>. Sottraendo m ai tre membri della disuguaglianza si ha

$$f(x) - m \leq h(x) - m \leq g(x) - m\,.$$

L'ipotesi è che esistano due numeri r_1 ed r_2 tali che

$$\begin{aligned} x > r_1 \Longrightarrow |f(x) - m| < \epsilon \qquad &\text{ossia} \quad m - \epsilon < f(x) < m + \epsilon \\ x > r_2 \Longrightarrow |g(x) - m| < \epsilon \qquad &\text{ossia} \quad m - \epsilon < g(x) < m + \epsilon\,. \end{aligned}$$

Dunque, ambedue le disequazioni valgono per $x > R$ con R il maggiore dei numeri r_1 ed r_2. Per $x > R$ si ha quindi anche

$$-\epsilon < f(x) - m \leq h(x) - m \leq g(x) - m < \epsilon$$

e quindi l'asserto. ■

Proviamo ora:

Teorema 38 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano il medesimo dominio e valga*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = m \in \mathbb{R}\,.$$

Allora vale:

- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = l+m$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = lm$.

Dim. Si sa che $f(x)-l$ e $g(x)-m$ sono infinitesimi (per $x \to +\infty$) e quindi, per ogni $\epsilon > 0$ esitono due numeri r_1 ed r_2 tali che:

$$x > r_1 \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon/2\,, \qquad x > r_2 \Longrightarrow |g(x)-m| < \epsilon/2\,.$$

Dunque, ambedue le disequazioni valgono per $x > R$ con R il maggiore dei numeri r_1 ed r_2. La prima affermazione del teorema segue perché per $x > R$ si ha

$$\begin{aligned} 0 \le |(f(x)+g(x))-(l+m)| &= |(f(x)-l)+(g(x)-m)| \\ &\le |f(x)-l|+|g(x)-m| < \epsilon\,. \end{aligned}$$

La seconda affermazione si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-lm| &= |f(x)g(x)-(f(x)m-f(x)m)-lm| \\ &\le |f(x)|\,|g(x)-m|+|m|\,|f(x)-l|\;. \end{aligned}$$

Ill teorema della limitatezza locale afferma che $f(x)$ è limitata su un'opportuna retta $(a,+\infty)$:

$$x > a \Longrightarrow |f(x)| < M\,.$$

Dunque, se x è più grande sia di a che di R vale

$$|f(x)g(x)-lm| < \frac{M+|m|}{2}\epsilon\,.$$

Questo è un numero tanto arbitrario quanto ϵ e ciò prova l'asserto. ■

Le relazioni con le operazioni di quoziente sono più complicate. Per studiarle, dobbiamo premettere un risultato importante:

Teorema 39 (**_della permanenza del segno_**) *Sia* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$ *(disuguaglianza stretta). Esiste* $\beta > 0$ *(disuguaglianza stretta) ed esiste una semiretta* $(r,+\infty)$ *su cui vale la disuguaglianza*

$$f(x) > \beta > 0\,.$$

Sia invece $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l < 0$ *(disuguaglianza stretta). Esiste* $\beta < 0$ *(disuguaglianza stretta) ed esiste una semiretta* $(r,+\infty)$ *su cui vale la disuguaglianza*

$$f(x) < \beta < 0\,.$$

Dim. Consideriamo il caso $l > 0$. Si scelga nella definizione di limite come valore di ϵ il numero $l/2$. Allora, esiste una semiretta $(R, +\infty)$ su cui vale

$$|f(x) - l| < \epsilon = \frac{l}{2} \qquad \text{ossia} \qquad -\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2}\,.$$

Sommando l ai tre membri si trova

$$\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2} l\,.$$

La disuguaglianza richiesta è quella di sinistra. ■

Osservazione 40 Si noti che la disuguaglianza di destra dà nuovamente la dimostrazione del Teorema di limitatezza locale. ■

Possiamo ora enunciare:

Teorema 41 *Si ha:*

1. *se* $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$;
2. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *e se* $f(x)$ *non è identicamente nulla su nessuna semiretta* $(R, +\infty)$, *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$;
3. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$;
4. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ *e se* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = m$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m}{l}$.

Dim. Proviamo la proprietà 3, lasciando le altre per esercizio. Per ipotesi, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una semiretta $(r, +\infty)$ su cui vale

$$|f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Su questa semiretta vale (il numero $\beta \neq 0$ è quello del teorema di permanenza del segno)

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|l - f(x)|}{|lf(x)|} < \frac{|l - f(x)|}{|l\beta|} < \frac{\epsilon}{l\beta}\,.$$

L'asserto segue perché $\epsilon/(l\beta)$, al variare di $\epsilon > 0$, è un arbitrario numero positivo. ■

Infine, mostriamo che la regola sul limite del prodotto può rendersi più precisa quando una delle due funzioni è un infinitesimo.

Teorema 42 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano lo stesso dominio. Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

e $g(x)$ è limitata su una semiretta $(r, +\infty)$ allora vale anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0\,.$$

<u>Dim</u>. La condizione su $g(x)$ mostra che per un opportuno numero M e per $x > r$ si ha $|g(x)| < M$. Dunque, per $x > r$ vale

$$0 \le |f(x)g(x)| < M|f(x)|$$

Sia $\epsilon > 0$. Vale $M|f(x)| < \epsilon$ se $|f(x)| < \epsilon/M$ e ciò avviene su una semiretta $(L, +\infty)$, perché $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Allora, se $x > L$ ed anche $x > r$ si ha

$$0 \le |f(x)g(x)| < M|f(x)| < \epsilon\,;$$

Ossia, la funzione $f(x)g(x)$ tende a zero per $x \to +\infty$. ■

Si noti che **questo teorema non richiede che $g(x)$ abbia limite finito, ma, grazie al teorema della limitatezza locale, vieta che abbia limite $+\infty$ oppure $-\infty$.**

Relazioni tra limiti finiti e infiniti Combinando i risultati dei Teoremi 38 e 41 si trova in particolare: se $|f(x)| \to +\infty$ e $g(x) \to 0$ allora:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty\,, \qquad \frac{g(x)}{f(x)} \to 0\,.$$

Invece, niente può dirsi in generale del prodotto di un infinito e di un infinitesimo e del quoziente di due infinitesimi, come si vede esaminando $f(x)g(x)$ con

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1/x, \text{ oppure } = 1/x^2, \text{ oppure } = 1/\sqrt{x}.$$

Si hanno quindi quattro ulteriori "regole di calcolo" e due ulteriori forme indeterminate, riassunte nella tabella 2.2.

Tabella 2.2: Ulteriori regole e forme indeterminate

regole	forme indeterminate
$\left\lvert \frac{\pm\infty}{0} \right\rvert = +\infty$	$0 \cdot (\pm\infty)$
$0/(\pm\infty) = 0$	$0/0$
$\begin{cases} l + (+\infty) = l + \infty = +\infty \\ l + (-\infty) = l - \infty = -\infty \end{cases}$	
$l(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se } l > 0 \\ -\infty \text{ se } l < 0 \end{cases}$	

2.2 I limiti per x tendente ad x_0

Anche in questo caso, conviene dividere lo studio in due sottocasi, il caso degli infiniti ed il caso dei limiti finiti. Ricordiamo prima di tutto:

> il fatto cruciale è che il concetto di limite vuol rappresentare il comportamento della funzione, quando x "si avvicina" ad x_0. L'eventuale valore della funzione in x_0 non deve essere considerato.

2.2.1 I limiti infiniti

Una funzione si chiama un *infinito positivo* per $x \to x_0$ se accade quanto segue:

Definizione 43 *Per* **ogni** ϵ **esiste** *un numero $\delta > 0$ con questa proprietà: per* **ogni** x *(appartenente al dominio della funzione) tale che*

$$x \neq x_0 \quad \textit{e inoltre tale che} \quad |x - x_0| < \delta$$

vale

$$f(x) > \epsilon\,.$$

Ossia,

$$\boxed{\forall\epsilon\exists\delta>0\,|x\neq x_0, x\in \ \mathrm{dom}\, f\,, |x-x_0|<\delta \Longrightarrow f(x)>\epsilon\,.}$$

Quando ciò accade si dice anche che "la funzione tende a $+\infty$ per x tendente a x_0" e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\,.$$

Il numero δ che compare in questa definizione dipende dalla scelta di ϵ. Per sottolineare ciò talvolta si scrive semplicemente δ_ϵ invece che semplicemente δ. La definizione di *infinito negativo* (per $x\to x_0$) è analoga: si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

se **per ogni** ϵ **esiste** un numero $\delta>0$ con questa proprietà: per **ogni** x (appartenente al dominio della funzione) tale che

$$x\neq x_0 \quad \text{e inoltre tale che} \quad |x-x_0|<\delta$$

vale

$$f(x)<\epsilon\,.$$

La cosa importante da notare in queste definizioni è la seguente:

> non si richiede che la funzione sia definita in x_0 e anzi se essa in x_0 è definita si impone esplicitamente di non considerare il valore di $f(x)$ nel punto x_0; ossia, in queste definizioni non si lavora con la funzione $f(x)$ ma con la restrizione di $f(x)$ a $(\ \mathrm{dom}\, f(x))-\{x_0\}$. Ribadiamo però che è necessario, per poter dare questa definizione, che **ogni** intorno di x_0 contenga punti del dominio di $f(x)$ **diversi da** x_0 **stesso.**

Per definizione, un punto x_0 si dice *punto di accumulazione* per un insieme A se **ogni** suo intorno contiene punti di A **diversi** da x_0. Dunque, per verificare se una funzione è un infinito positivo si devono studiare le disequazioni

$$f(x)>\epsilon\,,$$

una disequazione per ogni valore di ϵ, e verificare se ciascuna di esse risulta soddisfatta in un opportuno intorno di x_0, **escluso al più** il valore x_0. **Non è richiesto né di determinare tutte le soluzioni della disequazione, né di determinare il più grande intorno di x_0 sul quale ogni singola disequazione è soddisfatte.**

Come notazione, quando è sottinteso che si lavora per $x \to x_0$, per dire che vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si scrive brevemente $f(x) \to +\infty$ e si dice che $f(x)$ *diverge a* $+\infty$.

La novità importante della definizione di infinito per $x \to x_0$ è l'aver escluso dalle nostre considerazioni il punto x_0, se esso appartiene al dominio della funzione. Un problema analogo non si incontrava lavorando per $x \to +\infty$ perché $+\infty$ non è un numero e quindi automaticamente non appartiene al dominio della funzione. A parte questa **importante differenza,** le due definizioni possono esprimersi in modo unificato. Per questo basta ricordare che con $\boxed{\textit{intorno di } +\infty}$ si intende una semiretta $(r, +\infty)$ e $\boxed{\textit{intorno di } -\infty}$ è una semiretta $(-\infty, r)$. Avremo quindi, con α che può essere x_0 oppure $-\infty$ oppure $+\infty$,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$$

se per ogni ϵ esiste un intorno di α tale che

$$x \in I \cap (\operatorname{dom} f) - \{\alpha\} \Longrightarrow f(x) > \epsilon\,.$$

Ovviamente, $(\operatorname{dom} f) - \{\alpha\} = \operatorname{dom} f$ se $\alpha \notin \operatorname{dom} f$; in particolare se α indica il simbolo $+\infty$ oppure $-\infty$. Notato ciò è facile verificare che **tutti** i risultati che abbiamo provato al paragrafo 2.1.1 valgono anche per $x \to x_0$, e con la medesima dimostrazione, **purché non si faccia intervenire il valore di $f(x)$ nel punto x_0.** Per esempio si ha il seguente risultato, da confrontare col Teorema 17:

Teorema 44 (di permanenza del segno per gli infiniti) *Sia*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

Sia inoltre $a > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ $\boxed{\text{e inoltre } x \neq x_0}$ si ha $f(x) > a$.

Dim. Si scelga come numero ϵ nella definizione di infinito positivo il numero a. ■

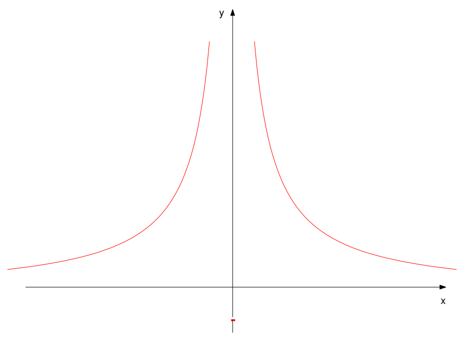
Osservazione 45 Dobbiamo sottolineare nuovamente che il teorema precedente non dà informazioni sul valore della funzione in x_0, se essa è ivi definita. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\{\,|\operatorname{sgn}(x)| + |x|\,\} - 1}$$

verifica

$$f(0) = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

Figura 2.1: grafico di $f(x) = 1/\{(|\mathrm{sgn}(x)| + |x|\,) - 1\}$



Vale anche il risultato seguente, da confrontare col Teorema 18:

Teorema 46 *Se* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ *la funzione* $f(x)$ *è illimitata in ogni intorno di* x_0 *.*

Si noti che in quest'enunciato non importa escludere il punto x_0 perché la proprietà che una funzione sia o meno limitata non dipende dal valore che essa assume in un solo punto. Il teorema di confronto e le sue conseguenze si riformulano come segue:

Teorema 47 (del confronto per gli infiniti) *Se:*

a) $(\ \mathrm{dom}\, f) - \{x_0\} = (\ \mathrm{dom}\, g) - \{x_0\}$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*;*

c) *per* $x \neq x_0$ *si ha* $g(x) \geq f(x)$ *.*

Allora, $\lim_{x\to +x_0} g(x) = +\infty$*.*

Dim. Le disequazioni da studiare per provare la tesi sono

$$g(x) > \epsilon\,, \tag{2.6}$$

una disequazione per ogni valore di ϵ. Essendo

$$g(x) \geq f(x)\,,$$

la (2.6) è certamente soddisfatta quando $\boxed{x \neq x_0}$ e

$$f(x) > \epsilon\,.$$

L'ipotesi fatta su $f(x)$ mostra che questa disequazione vale su in un opportuno intorno di x_0, escluso al più il punto x_0. ■

Inoltre:

Lemma 48 *Per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) + M) = +\infty\,.$$

Combinando questo Lemma col Teorema 47 si ha:

Teorema 49 *Se, a parte eventualmente il punto x_0, le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno il medesimo dominio e inoltre valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;
- *$g(x)$ è inferiormente limitata in un intorno di x_0;*

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Combinando questo teorema col teorema di permanenza del segno si ha anche:

Corollario 50 *Se, per $x \to x_0$, ambedue le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ divergono a $+\infty$, anche la funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$.*

Passiamo ora ad esaminare le relazioni tra le funzioni divergenti a $+\infty$ oppure $-\infty$ e l'operazione di prodotto.

Teorema 51 *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora:*

- *se $g(x) > M > 0$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x)f(x) = +\infty$;*
- *se $g(x) < M < 0$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x)f(x) = -\infty$.*

Osservazione 52 Le condizioni $g(x) > M > 0$ oppure $g(x) < M < 0$ **non** possono sostituirsi con le condizioni $g(x) > 0$ oppure $g(x) < 0$. Si diano opportuni esempi per mostrare ciò. ■

In particolare:

Corollario 53 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti (per $x \to x_0$) anche $f(x)g(x)$ lo è; precisamente, è un infinito positivo se $f(x)$ e $g(x)$ divergono ambedue a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Altrimenti è un infinito negativo.*

2.2.2 I limiti finiti

Definiamo ora:

Definizione 54 *Si dice che* la funzione $f(x)$ tende ad l per x tendente ad x_0, *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{2.7}$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ *con questa proprietà: se* x *verifica* $|x - x_0| < \delta$, *appartiene al dominio della funzione e inoltre* $\boxed{x \neq x_0}$ *allora si ha*

$$|f(x) - l| < \epsilon \,. \tag{2.8}$$

Se $l = 0$ *si dice che la funzione* $f(x)$ *è un* $\boxed{\text{infinitesimo}}$ *per* x *tendente ad* x_0.

Si ricordi l'osservazione fatta al paragrafo 2.1.2, sull'uso del termine "infinitesimo" e che la (2.8) è un modo compatto per scrivere le due disequazioni

$$-\epsilon < f(x) - l < \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \,. \tag{2.9}$$

Il punto x_0 può verificare o meno queste disequazioni. In modo più formale, la definizione di limite (2.7) si scrive:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \,, x \in \operatorname{dom} f \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon \,.}$$

Per i limiti finiti per $x \to x_0$ valgono tutte le proprietà elencate al paragrafo 2.1.2, con l'avvertenza che se $x_0 \in \operatorname{dom} f$ allora la conoscenza del limite **niente permette di dire del valore della funzione in** x_0**.** Per questo, limitiamoci ad enunciare i teoremi, lasciando le dimostrazioni per esercizio.

Teorema 55 (della permanenza del segno) *Sia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \,.$$

Esistono un numero $\beta > 0$ *ed un intorno* I *di* x_0 *tali che se* $x \in I$ $\boxed{\textit{ed inoltre } x \neq x_0}$ *si ha*

$$f(x) > \beta \,.$$

Teorema 56 (***della limitatezza locale***) *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora esistono numeri M e $\delta > 0$ tali che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x)| < M$; ossia, $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0.

Si faccia attenzione al fatto che in questo teorema non è necessario escludere il punto x_0: la definizione di limite dà la limitatezza in un intorno di x_0, escluso il punto x_0. Ma, come si è notato al Corollario 13, il valore che la funzione ha in un punto non altera la sua proprietà di essere limitata o meno.

Teorema 57 (***unicità del limite***) *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \,, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = m \,.$$

Allora, $l = m$.

Teorema 58 *Vale*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$$

ossia, se $(f(x) - l)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$.

Teorema 59 *Le funzioni che compaiono in questo teorema hanno il medesimo dominio. Valga*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \,, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} \,.$$

Allora vale:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$;
- $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm$;
- *se le disuguaglianze*

  $$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

  valgono in un intorno di x_0, escluso al più il punto x_0, e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = m$ allora si ha anche

  $$\lim_{x \to x_0} h(x) = m \,.$$

L'ultima affermazione si chiama ancora $\boxed{\textit{Teorema di confronto}}$

Teorema 60 *Sia ha:*

- *se* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$*;*
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e se $f(x)$ non è identicamente nulla in un intorno di x_0*, allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$*;*
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$*,* $l \neq 0$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$*;*
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$*,* $l \neq 0$ *e se* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m}{l}$.

Infine, enunciamo l'analogo del Teorema 42.

Teorema 61 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano lo stesso dominio. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

e $g(x)$ è limitata in un intorno di x_0, allora vale anche

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0\,.$$

Notiamo ancora che **questo teorema non richiede che $g(x)$ abbia limite finito, ma, grazie al teorema della limitatezza locale, vieta che abbia limite $+\infty$ oppure $-\infty$.**

Relazioni tra limiti finiti e infiniti Sia

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \to 0\,.$$

allora:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty\,, \qquad \frac{g(x)}{f(x)} \to 0\,.$$

Invece, niente può dirsi in generale del prodotto di un infinito e di in infinitesimo e del quoziente di due infinitesimi, come si vede esaminando $f(x)g(x)$ ed $f(x)/g(x)$ con

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1/x, \text{ oppure } = 1/x^2, \text{ oppure } = 1/\sqrt{x}.$$

2.2.3 Regole di calcolo e forme indeterminate

Abbiamo già visto le tabelle delle "regole di calcolo" che si usano quando nel calcolo di un limite compare il simbolo $\pm\infty$, e le "forme indeterminate", ossia quei casi nei quali nessun teorema fornisce risposte generali. Le abbiamo viste per casi particolari della definizione di limite, ma esse si applicano a ciascuna delle definizioni. Per questo le ripetiamo nuovamente, nella tabella 2.8, inserendo per memoria nelle colonne delle regole e delle forme indeterminate due casi che incontreremo al paragrafo 2.4 e che nascono nel calcolare limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$.

La tabella è la 2.8 alla fine di questo capitolo

Spieghiamo come vanno intese le regole e le forme indeterminate di tipo esponenziale. Le formule di tipo esponenziale si incontrano calcolando limiti di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$. La tabella dice che se ambedue le funzioni tendono a $+\infty$, anche $f(x)^{g(x)} \to +\infty$ mentre se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to +\infty$ niente può dirsi in generale: si ha una forma indeterminata. Le due regole

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty\,, \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

sono state scritte nella medesima casella perché in realtà sono la medesima regola. Infatti, la regola $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ va intesa come

$$\text{se} \qquad \begin{cases} f(x) \to +\infty \\ g(x) \to +\infty \end{cases} \qquad \text{allora} \qquad \lim f(x)^{g(x)} = +\infty\,.$$

Se $g(x) \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$ allora

$$f(x)^{g(x)} = \frac{1}{f(x)^{-g(x)}} \to 0\,.$$

Infatti, il denominatore tende a $+\infty$ e quindi la frazione è un infinitesimo. In modo analogo si tratta $0^{-\infty}$, che si ottiene da $f(x)^{g(x)}$ con $g(x) \to -\infty$ ed $f(x) \to 0$, con $f(x) > 0$ per poter definire la potenza. Per la stessa ragione, sono nella stessa casella le due forme indeterminate 0^0 ed ∞^0. Naturalmente, l'uso della tabella richiede qualche cautela: per esempio, non si può calcolare il limite di $1/f(x)$ se la funzione $f(x)$ è identicamente nulla; non si può calcolare $f(x)^{g(x)}$ se $f(x)$ è negativa. Ciò spiega perché nella tabella manca l'espressione formale $(-\infty)^0$.

2.2.4 Ancora sulle definizioni di limite

Abbiamo dato quattro distinte definizioni di limite. Mostriamo ora che in realtà si tratta di un'unica definizione. Prima di tutto osserviamo che la definizione di limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ non si applica realmente alla funzione $f(x)$ ma alla **restrizione** di $f(x)$ a $\operatorname{dom} f(x) - \{x_0\}$. Ovviamente, se $x_0 \notin \operatorname{dom} f(x)$ la funzione rimane invariata. Consideriamo ora

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

dove α e β possono essere numeri oppure i simboli $+\infty$ oppure $-\infty$. Ovviamente, $\pm\infty$ non è un numero e quindi $\operatorname{dom} f(x) - \{\pm\infty\} = \operatorname{dom} f(x)$. Per poter parlare di $\lim_{x\to\alpha}$, dobbiamo richiedere che $\operatorname{dom} f(x)$ intersechi **ogni** intorno di α, sia che α sia un numero, sia che $\alpha = \pm\infty$ (in quest'ultimo caso, "intorno di $\pm\infty$" indica una semiretta $x > a$ oppure $x < a$). Se questa condizione non vale, non si può parlare di $\lim_{x\to\alpha}$. Supponiamo quindi che questa condizione valga. Allora,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

vuol dire che **per ogni** intorno di $I(\beta)$ di β **esiste** un intorno $V(\alpha)$ di α con questa proprietà:

$$\forall x \in V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} f(x) - \{\alpha\}) \Rightarrow f(x) \in I(\beta)\,.$$

Ossia, le quattro definizioni di limite possono riformularsi in modo unificato. E ciò spiega la ragione per cui le dimostrazioni dei teoremi nei quattro casi seguono le medesime idee.

2.2.5 Limiti di restrizioni di funzioni e limiti direzionali

Con α si indichi un numero oppure uno dei simboli $+\infty$ oppure $-\infty$ e sia $f(x)$ una funzione il cui dominio interseca ogni intorno di α in punti diversi da α se questo è un numero. Sia $D \subseteq \operatorname{dom} f(x)$ un insieme che interseca ogni intorno di α in punti diversi da α se questo è un numero. Si può allora considerare la restrizione di $f(x)$ a D e se ne può considerare il limite per $x \to \alpha$. Per semplificare la notazione, poniamo

$$g(x) = f_{|_D}(x)\,.$$

E'chiaro che:

Lemma 62 *Se*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \quad \textit{con } \beta \in \mathbb{R} \textit{ oppure } \beta = +\infty,\ \beta = -\infty$$

allora $g(x)$ ha, per $x \to \alpha$, il medesimo limite β: $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

<u>Dim</u>. La dimostrazione è ovvia: per ipotesi, per ogni $I(\beta)$ (intorno di β) esiste $V(\alpha)$ (intorno di α) tale che se $x \in V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} f(x) \setminus \{\alpha\})$ si ha $f(x) \in I(\beta)$. In particolare, $x \in V(\alpha) \cap (D \setminus \{\alpha\}) = V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} g(x) \setminus \{\alpha\})$ implica $g(x) = f(x) = V(\beta)$. ■

Se però la funzione non ammette limite, certe sue restrizioni possono ammettere limite. Per esempio, sia $f(x) = \sin x$ e se ne consideri la restrizione all'insieme $D = \{k\pi \ |k \in \mathbb{N}\}$. Questa restrizione, chiamiamola $g(x)$, vale costantemente 0 e quindi *essa ha limite* 0 *per $x \to +\infty$, mentre $f(x) = \sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$.* Consideriamo ora la restrizione di $f(x) = \sin x$ all'insieme $D_1 = \{2k\pi + \pi/2 \ |k \in \mathbb{N}\}$. Questa seconda restrizione, chiamiamola $g_1(x)$, vale costantemente 1 e quindi il suo limite per $x \to +\infty$ è 1. Si deduce che la funzione $\sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$: lo avesse, per il Lemma 62, ambedue le restrizioni dovrebbero avere il medesimo limite, uguale a quello di $\sin x$. *Questo è uno dei modi più semplici per mostrare che una funzione è priva di limite: trovarne restrizioni a insiemi diversi e che ammettono limiti diversi* (si confronti con quanto si dirà al paragrafo 2.4.3). Supponiamo che una funzione sia definita nei due intervalli (a, x_0) ed (x_0, b). In x_0 la funzione potrà essere definita o meno. Allora, per rappresentare il grafico della funzione, potrà convenire studiare separatamente le due restrizioni di $f(x)$ a sinistra di x_0, ossia per $x \in (a, x_0)$, ed a destra di x_0, ossia per $x \in (x_0, b)$. I limiti per $x \to x_0$ di tali restrizioni si chiamano i $\boxed{\textit{limiti direzionali}}$ di $f(x)$ per $x \to x_0$, rispettivamente da sinistra e da destra. Ossia, "limite sinistro", rispettivamente "limite destro" di $f(x)$ per $x \to x_0$ sono i due limiti

$$\lim_{x\to x_0} f_{|(a,x_0)}(x)\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f_{|(x_0,b)}(x)\,.$$

Questi due limiti, se esistono, si indicano con simboli particolari:

$$\lim_{x\to x_0} f_{|(a,x_0)}(x) \qquad \text{si indica con uno dei due simboli seguenti}$$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_0^-)\,;$$

$$\lim_{x\to x_0} f_{|(x_0,b)}(x) \qquad \text{si indica con uno dei due simboli seguenti}$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_0^+)\,.$$

(a seconda degli autori, e delle esigenze di leggibilità, i segni $-$ e $+$ si mettono ad esponente di x_0 o semplicemente a destra di x_0. Ovviamente, non si possono mettere a sinistra di x_0). Scriviamo in modo esplicito la definizione di $f(x_0-)$ ricordando che questa è la definizione di limite di una funzione definita solamente per $x < x_0$. Considerando il caso del limite uguale ad $l \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \ \operatorname{dom} f(x) \, , x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Si noti:

Se $f(x)$ è definita solo a sinistra di x_0 allora le due definizioni di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e di $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ coincidono. Analoga osservazione se il dominio di $f(x)$ è contenuto in $(x_0, +\infty)$.

I due limiti direzionali possono esistere, finiti o meno, oppure può esisterne uno solo. Se ambedue esistono, possono concidere o meno. Però vale l'asserto seguente (la prima affermazione è un caso particolare del lemma 62. La semplice dimostrazione della seconda si lascia per esercizio).

Teorema 63 *Sia $x_0 \in (a, b)$ e $\operatorname{dom} f(x) \supseteq (a, b) \setminus \{x_0\}$. Se esiste, finito o meno,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

allora esistono i due limiti direzionali, ambedue uguali al limite. Se esistono ambedue i limiti direzionali, finiti o meno, e questi coincidono, allora esiste anche il limite di $f(x)$ e vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0-) = f(x_0+) \, .$$

Infine enunciamo:

Teorema 64 *Esista, finito o meno, $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \alpha$. Se la funzione è pari, esiste $\lim_{x \to -x_0+} f(x)$ e si ha*

$$\lim_{x \to -x_0+} f(x) = \alpha \, .$$

Se la funzione è dispari si ha

$$\lim_{x \to -x_0+} f(x) = -\alpha \, .$$

Se $x_0 = 0$ e se la funzione è pari,

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \alpha \textit{implica} \lim_{x \to 0-} f(x) = \alpha \textit{e quindi} \lim_{x \to 0} f(x) = \alpha \, .$$

2.2.6 Gli infinitesimi: ricapitolazione

Abbiamo già detto che si chiama $\boxed{\textit{infinitesimo}}$ (per $x \to \pm\infty$ oppure per $x \to x_0$) una funzione che ammette limite uguale a zero. Tali funzioni sono di importanza centrale nelle applicazioni della matematica e inoltre si usano spesso per calcolare limiti finiti. Infatti, per verificare che $f(x) \to l$ conviene spesso verificare che $f(x)-l \to 0$. Per questo conviene ricapitolare le proprietà degli infinitesimi. Scriveremo genericamente $x \to \alpha$ per intendere $x \to \pm\infty$ oppure $x \to x_0$. Ricordiamo che un intorno di $+\infty$ (rispettivamente, di $-\infty$) è una semiretta $(a, +\infty)$ (rispettivamente, $(-\infty, a)$). Una prima proprietà, ovvia, è la seguente. che si vede immediatamente perché la definizione di infinitesimo dipende dalle disequazioni

$$|f(x)| < \epsilon \ :$$

Lemma 65 *La funzione $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) se e solo se $|f(x)|$ lo è.*

Il risultato fondamentale è il seguente.

Teorema 66 *Le funzioni che figurano in questo teorema hanno tutte il medesimo dominio. Valgono le seguenti proprietà:*

- **a)** *se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi (per $x \to \alpha$) anche $f(x) + g(x)$ lo è;*
- **b)** *siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi (per $x \to \alpha$). Valga inoltre*

  $$f(x) \le h(x) \le g(x) \,.$$

  Allora anche $h(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).
- **c)** *Se $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) e $g(x)$ è limitata in un intorno di α allora anche $f(x)g(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$.*
- **d)** *Se $|f(x)|$ è un infinito (per $x \to \alpha$) allora $1/f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).*

Queste proprietà sono già state provate sia per $\alpha \in \mathbb{R}$ che per $\alpha = \pm\infty$. L'asserto **b)** si chiama $\boxed{\textit{teorema del confronto}}$ L'asserto **c)** combinato col teorema della limitatezza locale ha il corollario seguente:

Corollario 67 *Se $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) e inoltre $\lim_{x \to \alpha} g(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $f(x)g(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).*

Infine, ricordiamo che il teorema del confronto si usa spesso in questa forma: si sa che

$$0 \le |h(x)| \le g(x)\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0\,.$$

Allora vale anche

$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0\,.$$

Infatti, si scelga $f(x) \equiv 0$, che è un infinitesimo (per $x \to \alpha$). Il teorema del confronto dice che $|h(x)|$ è un infinitesimo e ciò equivale a dire che $h(x)$ è un infinitesimo.

2.2.7 Gli asintoti

Supponiamo che esista **almeno uno** dei due limiti direzionali $f(x_0-)$ oppure $f(x_0+)$ e che questo sia infinito. In tal caso la retta verticale $x = x_0$ si chiama $\boxed{\textit{asintoto verticale}}$ per la funzione $f(x)$. Notiamo che niente vieta che ambedue i limiti direzionali esistano, e che siano infiniti, magari di segno opposto; o che uno solo esista, o che uno sia infinito e l'altro finito. Se accade che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

allora la retta orizzontale $y = l$ si chiama $\boxed{\textit{asintoto orizzontale}}$ destro di $f(x)$. Si dice che $y = l$ è asintoto orizzontale sinistro se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l\,.$$

Nel caso che sia

$$l = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

si dice che la retta orizzontale $y = l$ è asintoto orizzontale bilatero. Consideriamo ora una retta

$$y = mx + n$$

e consideriamo lo scarto in verticale tra il punto del grafico e il corrispondente punto della retta; ossia consideriamo per ogni x la funzione

$$f(x) - (mx + n)\ .$$

Se accade che questa funzione tende a zero per $x \to +\infty$, la retta si chiama $\boxed{\textit{asintoto obliquo}}$ destro; se tende a zero per $x \to -\infty$ si parla di asintoto obliquo sinistro e un asintoto obliquo sia destro che sinistro si chiama asintoto obliquo bilatero. Un modo per trovare i coefficienti m ed n è il seguente, che illustriamo per gli asintoti obliqui destri: prima si calcola m, dato da

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

nel caso in cui il limite esista e sia finito. Altrimenti l'asintoto obliquo non c'è. Calcolato m si calcola

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \,,$$

ancora nel caso in cui il limite esista e sia finito. Altrimenti, non c'è asintoto obliquo. Calcolati m ed n, l'asintoto obliquo risulta identificato.

> Si noti che l'asintoto orizzontale è il caso particolare dell'asintoto obliquo, nel caso del coefficiente angolare nullo, $m = 0$, ed $n \neq \pm\infty$. Dunque, se si è trovato che esite l'asintoto orizzontale, l'asintoto obliquo (con $m \neq 0$) non esiste e non bisogna perdere tempo a ricercarlo.

E' appena il caso di notare che un asintoto obliquo (destro) può esistere solo se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,.$$

E quindi, **se c'è asintoto obliquo, non c'è asintoto orizzontale.** Si riadattino queste considerazioni al caso degli asintoti obliqui sinistri.

2.2.8 Alcuni errori concettuali importanti

Lo studio dei limiti inizia spesso nella Scuola Media Superiore, dove però l'accento è posto principalmente sulle funzioni razionali, ossia sui quozienti di polinomi, oltre che sulle funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmo. Tali funzioni hanno alcune proprietà particolari, e lo studente si abitua a dare per scontate alcuni fatti che **non valgono in casi più generali.** Tra questi, due errori vanno sottolineati in modo particolare.

Errore 1) Se una funzione è definita su un intervallo aperto (a, b) ma non nell'estremo a, allora la funzione ha un asintoto verticale $x = a$. Quest'affermazione è vera per le funzioni razionali ed anche per le funzioni $\log x$, $\tan x$, $\operatorname{cotan} x$ ma **non è vera in generale.** Ciò è mostrato all'esempio 68.

Errore 2) se $x = x_0$ è un asintoto verticale per una funzione $f(x)$, allora la funzione non è definita in x_0. Quest'affermazione è vera per le funzioni razionali ed anche per le funzioni $\log x$, $\tan x$, $\operatorname{cotan} x$ ma **non è vera in generale.** Ciò è mostrato all'esempio 69.

Esempio 68 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2^{-1/x^2} .$$

Questa funzione è definita su $\mathbb{R} - \{0\}$, però è limitata

$$0 \le 2^{-1/x^2} \le 1 .$$

Dunque **non è vero** che $\lim_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$ e quindi $x_0 = 0$ **non è asintoto verticale.** Si cerchi di provare per esercizio che vale

$$\lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2} = 0 .$$

Il grafico di questa funzione è in figura 2.2, a sinistra. Un altro esempio importante è quello delle funzioni

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} , \qquad g(x) = \left| \arctan \frac{1}{x} \right| .$$

Anche queste funzioni sono definite su $\mathbb{R} - \{0\}$ e verificano

$$-\frac{\pi}{2} \le f(x) < \frac{\pi}{2} , \qquad 0 \le g(x) \le \frac{\pi}{2} .$$

Quindi, **il loro limite per $x \to 0$ non può essere infinito; ossia $x = 0$ non è asintoto verticale di queste funzioni.** Il grafico della funzione $g(x)$ è in figura 2.2, a destra. ■

Esempio 69 Ricordiamo che la definizione di limite (per $x \to x_0$) non risente del valore della funzione in x_0; e quindi il limite non cambia ridefinendo in modo arbitrario la funzione in x_0. Per esempio, la funzione

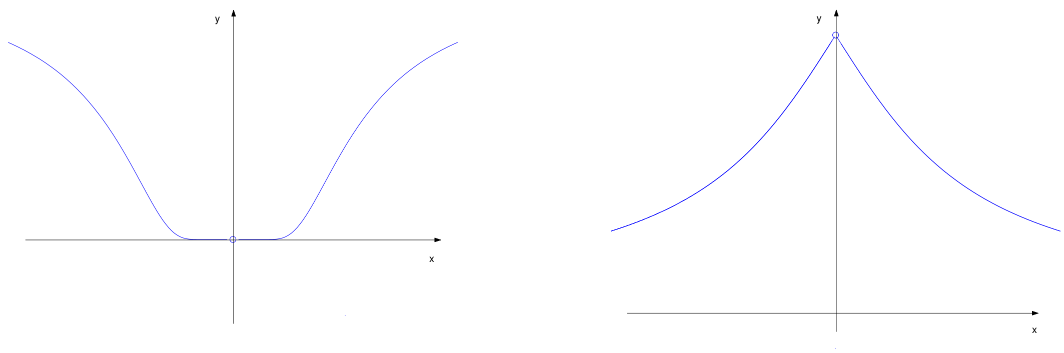
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad x \ne 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

ammette **asintoto verticale in $x = 0$, pur essendo definita in $x = 0$.** Un esempio più naturale è il seguente. Si ricordi che la funzione $\boxed{\textit{mantissa}}$ è la funzione

$$M(x) = x - [x] , \qquad \text{([$\cdot$] \textit{indica la parte intera}).}$$

Figura 2.2: Funzioni non definite in un punto, prive di asintoto verticale

(a) $f(x) = 2^{-1/x^2}$ (b) $f(x) = |\arctan(1/x)|$



sia $x_0 = 1$ *e sia*

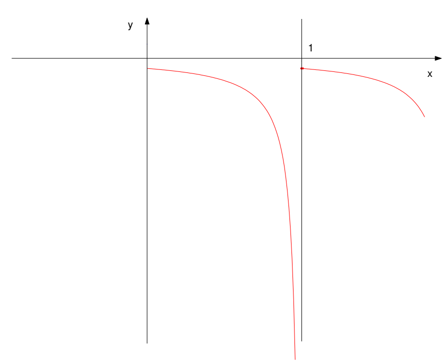
$$f(x) = M(x) - 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ x - 2 & \text{se} \quad 1 \le x < 2\,, \end{cases} \qquad \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se} \quad 1 \le x < 2\,. \end{cases}$$

Sia $g(x) = 1/f(x)$. Allora,

$$g(1) = -1\,, \qquad \lim_{x \to 1+} g(x) = -1\,, \qquad \lim_{x \to 1-} g(x) = -\infty\,.$$

Questa funzione è definita in $x_0 = 1$ e inoltre la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Il suo grafico è in figura 2.3. ■

Figura 2.3: grafico di $1/(M(x) - 1)$



2.2.9 Il numero e

E' importante sapere che la funzione

$$h(x) = (1+x)^{1/x}$$

ammette limite per $x \to 0$. Il limite è un **numero irrazionale** che si indica col simbolo e (iniziale di Eulero[1]) ed è circa 2,7:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e\,, \qquad 2,718 < e < 2,719\,.$$

Il numero e è quindi anche il limite della successione ottenuta segliendo $x = 1/n$:

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,.$$

Usando il teorema delle funzioni composte (che verrà trattato al paragrafo 2.4) si vede che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+x) = \log_a e\,.$$

In particolare, scegliendo $a = e$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_e (1+x) = 1\,.$$

E' per questa ragione che, se non altrimenti detto, i logaritmi che useremo sono sempre logaritmi in base e, e verranno indicati semplicemente col simbolo $\log x$, omettendo l'indicazione della base. Talvolta si usa il simbolo $\ln x$, dato che i logaritmi in base e si chiamano anche $\boxed{\textit{logaritmi naturali}}$ Analogamente, col termine $\boxed{\textit{funzione esponenziale}}$ si intende la funzione $x \mapsto e^x$. Usando il teorema delle funzioni composte (si veda il paragrafo 2.4) e la definizione del numero e, si può mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

2.2.10 Limiti da ricordare

Elenchiamo i limiti che vanno imparati subito a memoria. Si chiamano[2] "limiti notevoli" quelli della tabella 2.3.

I "limiti notevoli" hanno questo nome perché è da essi che si calcolano alcune delle derivate importanti. Ulteriori limiti da conoscere sono i seguenti.

Tabella 2.3: I "limiti notevoli"

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1; \\ 1 & \text{se } a = 1; \\ 0 & \text{se } 0 \le a < 1; \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0; \\ 1 & \text{se } a = 0; \\ 0 & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

2.3 La continuità

Abbiamo bisogno della definizione seguente:

Definizione 70 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è* $\boxed{\text{punto isolato}}$ *di A quando esiste in intorno $I(x_0)$ tale che $A \cap I(x_0) = \{x_0\}$.*

Dunque, *ogni punto isolato di A è un punto di A* e inoltre un punto non può essere contemporaneamente isolato e di accumulazione per A. Per esempio, 2 è punto isolato (e quindi non di accumulazione) di $A = [0,1] \cup \{2\}$. Veniamo ora alla definizione di continuità. Per poter parlare di continuità di una funzione in un punto x_0 è necessario che x_0 appartenga al dominio della funzione[3]. Sia quindi $f(x)$ una funzione *il cui dominio contiene un punto x_0.*

Definizione 71 *la funzione $f(x)$ è continua in x_0 quando si verifica uno dei due casi seguenti:*

1) *il punto x_0 è* **punto isolato** *di* $\operatorname{dom} f(x)$.

2) *il punto x_0 è punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f(x)$, *esiste* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *ed inoltre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

[1]Il numero e si chiama $\boxed{\textit{numero di Eulero}}$ o anche $\boxed{\textit{costante di Nepero}}$

[2]il primo si calcolerà al paragrafo 2.3.2 mentre gli altri non verranno provati.

[3]per contrasto, si ricordi che la definizione di limite **non richiede che la funzione sia definita in x_0.**

Tabella 2.4: Ulteriori limiti

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{[\log x - \log x_0]}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$	$\lim_{x\to x_0} \dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ (per ogni $\alpha > 0$)	$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \cdot \log x = 0$ (per ogni $\alpha > 0$)
$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ (per ogni α)	$\lim_{x\to -\infty} \|x\|^\alpha e^x = 0$ (per ogni α)
$\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (per ogni $a > 0$)	$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Si dice che $f(x)$ è $\boxed{\text{continua da destra}}$ *in x_0 quando è continua la funzione $f_{|[x_0,+\infty)}$. Analoga definizione per la* $\boxed{\text{continuità da sinistra}}$

Osservazione 72 La scelta di definire "continua" una funzione nei punti isolati del dominio può sembrare bizzarra. Ne vedremo tra poco l'utilità. Notiamo però subito una conseguenza: ogni successione è continua in ciascun punto del suo dominio. ■

La definizione di continuità può darsi in modo "unificato" come segue: $f(x)$ è continua in x_0 quando[4]

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ x \in \ \mathrm{dom}\, f(x) \end{cases} \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

[4] si riformuli la definizione col linguaggio degli intorni.

Questa **sembra** la definizione di limite, ma non è così: non abbiamo richiesto che x_0 sia punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f(x)$; e, se x_0 è punto isolato, l'unico punto di $\operatorname{dom} f(x)$ che verifica $|x - x_0| < \delta$ è, per δ abbastanza piccolo, il solo punto x_0. Notare che la definizione di limite richiede anche di imporre $x \neq x_0$, condizione che nel contesto della definizione di continuità si può omettere perché $0 = |f(x_0) - f(x_0)|$ è automaticamente minore di ϵ, che è positivo. Dunque, *se x_0 è punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f(x)$ allora $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Vale il teorema seguente:

Teorema 73 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in x_0. Le funzioni seguenti sono continue in x_0:*

- $f(x) + g(x)$
- $f(x)g(x)$

Se $g(x_0) \neq 0$, è continua in x_0 anche la funzione $f(x)/g(x)$.

<u>Dim</u>. Esaminiamo il caso della somma: se x_0 è punto isolato per il dominio di $f(x) + g(x)$ allora questa funzione è continua in x_0. Altrimenti, x_0 è punto di accumulazione per il dominio $f(x) + g(x)$ e per la restrizione a $\operatorname{dom}\,(f(x) + g(x))$ sia della prima funzione $f(x)$ che di $g(x)$. Dunque i teoremi sui limiti mostrano che

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) .$$

Osservazione 74 Si noti che può darsi che x_0 sia punto di accumulazione sia di $\operatorname{dom} f(x)$ che di $\operatorname{dom} g(x)$ **ma non del dominio della somma.** Si consideri l'esempio

$$f(x) = \sqrt{x} \, , \qquad g(z) = \sqrt{-x} \, .$$

Ambedue le funzioni sono continue in $x_0 = 0$, con 0 punto di accumulazione dei domini, ma la funzione somma

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

è definita nel solo punto 0. Se non si definisce "continua" una funzione nei punti isolati del dominio, non si può affermare che la somma di funzioni continue è continua. Questa è la ragione per cui abbiamo dato la definizione 71. ■

In modo analogo si provano anche i risultati seguenti:

Teorema 75 *Sia $x_0 \in (a,b) \subseteq \operatorname{dom} f(x)$. La funzione $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se è continua sia da destra che da sinistra in x_0.*

Teorema 76 (limitatezza locale e permanenza del segno) *Se $f(x)$ è continua in x_0 allora:*

- *esite un intorno I di x_0 su cui $f(x)$ è limitata;*
- *se $f(x_0) > 0$ allora esistono $\beta > 0$ ed un intorno I di x_0 tali che*
$$x \in I \Longrightarrow f(x) > \beta$$
(si dia l'enunciato analogo se $f(x_0) < 0$).

Dim. La funzione $f(x)$ è continua in x_0 quando **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tale che **ogni** $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$, **incluso il punto** x_0, si ha
$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon\,.$$
L'asserto relativo alla limitatezza locale segue scegliedo, per esempio, $\epsilon = 1$. L'asserto relativo alla permanenza del segno si ottiene (quando $f(x_0) > 0$) scegliendo per esempio $\epsilon = f(x_0)/2$. con questa scelta, si trova un intorno di x_0 su cui vale $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$: il numero β cercato è $\beta = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$. ■

Osservazione 77 Si noti la differenza di quest'enunciato da quello del teorema relativo ai limiti di funzioni, che potrebbero essere discontinue in x_0. Se $f(x)$ non è continua in x_0, la conoscenza del limite niente permette di concludere sul segno di $f(x_0)$. ■

Infine:

Definizione 78 *Una funzione continua in ciascun punto di un insieme A si dice "continua su A". Se $A = \operatorname{dom} f$, la funzione si dice "continua sul suo dominio" o anche semplicemente "continua". Per dire che $f(x)$ è continua su un insieme A si scrive $f(x) \in C(A)$ o talvolta $f(x) \in C^0(A)$.*

2.3.1 Classificazione delle discontinuità

Sia $f(x)$ definita in x_0, ma non continua. Il punto x_0 si dice:

- una $\boxed{\textit{discontinuità eliminabile}}$ di $f(x)$ se
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$
esiste **finito e diverso da** $f(x_0)$**.**

Il termine "discontinuità eliminabile" (o $\boxed{\textit{discontinuità rimuovibile}}$) si spiega da solo: cambiando la definizione della funzione **nel solo punto** x_0, e ridefinendo
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se} \quad x = x_0 \,, \end{cases}$$
si trova una funzione continua.

- Il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{salto}}$ di $f(x)$, o anche $\boxed{\textit{discontinuità di prima specie}}$ se esistono **finiti** ambedue i limiti direzionali
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \,, \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) \qquad \textbf{diversi tra loro.}$$

Non si esclude che uno dei due limiti possa coincidere col valore della funzione; ossia che la funzione sia continua o da destra o da sinistra.

- ogni altro caso di discontinuità si chiama $\boxed{\textit{discontinuità di seconda specie}}$

Infine, consideriamo una funzione $f(x)$ che **non è definita in** x_0**.** Supponiamo però che esista finito
$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \,.$$
In questo caso, la funzione
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases}$$
è continua: è l'unica $\boxed{\textit{estensione per continuità}}$ di $f(x)$ ad x_0.

Osservazione 79 Se $x_0 \notin \operatorname{dom} f(x)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f(x)$, l'estensione per continuità di $f(x)$ ad x_0 se esite è unica, ma possono esitere estensioni per continuità non uniche ad insiemi più grandi. Per esempio
$$\text{se} \quad f(x) = (\sin x)/\sqrt{x} \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \,.$$
La funzione $f(x)$ ammette infinite estensioni continue ad $\mathbb{R}$, ma tutte assumono il valore 0 in $x_0 = 0$. Se si vuole l'estensione continua a $[0, +\infty)$ questa è unica. ■

2.3.2 Continuità di alcune funzioni importanti

Sono continue le funzioni della lista seguente, ovviamente nei punti in cui sono definite:

- i polinomi[5];
- le potenze $x \to x^\gamma$ con γ reale qualsiasi;
- le funzioni razionali;
- la funzione $|x|$;
- le funzioni goniometriche[6]: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\operatorname{cotan} x$;
- la funzione logaritmo, $x \to \log_a x$, per ogni base a (positiva e diversa da 1);
- la funzione esponenziale $x \to a^x$ per ogni base $a \geq 0$.

Vediamo in particolare come si tratta il caso delle funzioni goniometriche.

Limiti e continuità di funzioni goniometriche

Ricordiamo che gli angoli si misurano in radianti, ossia che **la misura dell'angolo al centro di una circonferenza di raggio 1 è uguale alla lunghezza dell'arco che l'angolo identifica sulla circonferenza.** Proviamo che per $|x| < \pi/2$:

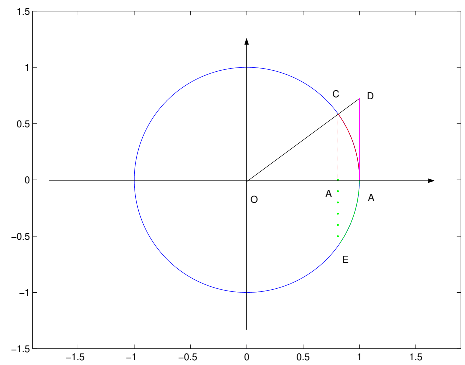
- si ha: $|\sin x| \leq |x|$;
- si ha: $|x| \leq |\tan x|$.

Le funzioni x, $\sin x$ e $\tan x$ sono dispari e quindi basta provare le disuguaglianze per $x \in [0, \pi/2)$. La figura 2.4 illustra la definizione di $\sin x$ e $\tan x$: la circonferenza ha raggio 1 e l'angolo al centro ha misura x, ossia x è la lunghezza dell'**arco** che congiunge i punti C ad A, disegnato rosso. In tal caso, $\sin x$ è la lunghezza del **segmento** $\overline{CA}$, disegnato rosso e $\tan x$ è la lunghezza del segmento $\overline{DA}$, disegnato fucsia.

[5] si ricordi che i polinomi sono somme di monomi. I monomi sono le funzioni ax^n con n **intero non negativo.** Quindi $f(x) = 2x^\pi + 3x^3$ **non** è un polinomio.

[6] la continuità delle funzioni goniometriche si proverà al paragrafo 2.3.2

Figura 2.4: Definizione di $\sin x$ e $\tan x$



Si sa che in una circonferenza un arco è più lungo del segmento che ne congiunge gli estremi: l'arco che congiunge C ed E è più lungo del segmento $\overline{CE}$, ossia dividendo per 2

$$0 \le x \le \pi/2 \implies \sin x \le x\,. \tag{2.10}$$

Il settore circolare ACO è contenuto nel triangolo rettangolo ADO e quindi ha area più piccola. Calcolando le aree si trova

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

ossia,

$$0 \le x < \pi/2 \implies x \le \tan x\,. \tag{2.11}$$

Conseguenza di queste disuguaglianze: **la funzione $\sin x$ è continua per $x \to 0$.** Infatti, il teorema del confronto applicato a

$$0 \le |\sin x| \le |x|$$

mostra che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0\,.$$

Combinando questo con le formule di prostaferesi

$$\sin x - \sin x_0 = \left[2\cos\frac{x+x_0}{2}\right] \sin\frac{x-x_0}{2}$$
$$\cos x - \cos x_0 = \left[2\sin\frac{x+x_0}{2}\right] \sin\frac{x-x_0}{2}$$

segue che **le funzioni** $\sin x$ **e** $\cos x$ **sono continue.** Infatti per sempio si ha

$$0 \leq |\cos x - \cos x_0| = \left| \left[2 \sin \frac{x + x_0}{2} \right] \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

e, per il teorema del confronto, $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$. In particolare,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \,. \tag{2.12}$$

Dunque **anche le funzioni** $\tan x$ **e** $\operatorname{cotan} x$ **sono continue.** Proviamo ora che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \,.$$

La funzione $\sin x / x$ è pari e quindi basta calcolarne il limite destro per x tendente a 0. Le disuguaglianze (2.10) e (2.11) implicano (ricordiamo che si lavora per $x \in (0, \pi/2)$)

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x \,.$$

Dividendo per $\sin x$ si trova

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \,.$$

Usando (2.12), il teorema di confronto implica che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \,.$$

2.4 Limiti di funzioni composte

Siano $f(y)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $\operatorname{dom} f(y) \supseteq \operatorname{im} g(x)$ cosìche si può calcolare la funzione composta $f(g(x))$. Supponiamo inoltre che sia

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = m \,. \tag{2.13}$$

Ci si può chiedere se sia vero che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = m \,. \tag{2.14}$$

La risposta è in generale **negativa.** E' positiva se si impongono ulteriori condizioni. Vale infatti:

Teorema 80 *Sia x_0 punto di accumulazione per il dominio della funzione composta $f \circ g$. Sia* $\operatorname{dom} f(y) \supseteq \operatorname{im} g(x)$ *e valga*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l\,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = m\,.$$

Supponiamo inoltre che valga una delle tre condizioni seguenti:

1. *$f(y)$ sia* **continua** *(e quindi definita) in l;*

2. *$g(x)$* **non** *prenda il valore l;*

3. *la funzione $f(y)$ non sia definita il l.*

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = m\,.$$

Osservazione 81 Il teorema precedente vale anche se $l \notin \operatorname{dom} f(x)$ e vale anche se uno o ambedue i limiti l e m sono $\pm\infty$. Se però $l \in \operatorname{dom} f(x)$ allora la condizione che $g(x)$ non prenda il valore l non può eliminarsi. Infatti, senza questa condizione può essere che il limite della funzione composta esista ma diverso da quello di $f(x)$ oppure che non esista, come provano i due esempi seguenti. In ambedue gli esempi,

$$f(y) = |\operatorname{sgn}(y)|\,, \qquad l = 0\,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = \lim_{y \to 0} f(y) = 1 = m\,.$$

Consideriamo ora i due esempi:

Esempio 1) *sia $x_0 = 0$. La funzione $g(x)$ è*

$$g(x) = 0 \qquad \textit{cosíche } \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Per ogni x si ha

$$f(g(x)) = 0 \qquad \textit{e quindi } \lim_{x \to 0} f(g(x)) = 0 \neq m = 1.$$

In quest'esempio, il limite della funzione composta esiste, diverso da quello di $f(y)$. ■

Esempio 2) E' ancora $x_0 = 0$ ma la funzione $g(x)$ è

$$g(x) = x \sin(1/x) \qquad \textit{cosìche } \lim_{x\to 0} g(x) = 0 = l.$$

La funzione $f(g(x)) = \text{ sgn } (x \sin(1/x))$ è priva di limite per $x \to 0$. Infatti, il limite non può essere nè positivo nè negativo per il teorema di permanenza del segno, dato che la funzione si annulla in ogni intorno di 0 (infatti si annulla quando $x_k = \frac{1}{2k\pi}$). E però il limite non può essere 0 perchè la funzione prende valore $+1$ in ogni intorno di 0. ■

Corollario importante del teorema 80 è:

Corollario 82 *Una funzione composta di funzioni continue è continua.*

Quando $f(y)$ è continua nel punto l,

$$l = \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)\,,$$

l'asserto del teorema 80, ossia

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(l)\,,$$

può scriversi

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))\,. \tag{2.15}$$

Ossia, **se $f(y)$ è continua in y_0, il simbolo di $\lim_{x\to x_0}$ si scambia col simbolo della funzione f.** L'esempio seguente mostra che **l'uguaglianza (2.15) è falsa se la funzione $f(y)$ non è continua in y_0.**

Esempio 3) Sia $f(y) = [y]$ (la parte intera di y) e sia $g(x) = 1 - x^2$. Si consideri il limite per $x \to 0$. In un intorno di 0 si ha che $y = g(x)$ prende valore tra 0 ed 1, ed il valore 1 viene assunto solamente per $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} g(x) = l = 1\ .$$

Dunque, per x in un intorno di 0, escluso 0,

$$[g(x)] = 0 \text{e quindi} \lim_{x\to 0}[g(x)] = 0\,.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{x\to 0}[g(x)] = 0 \neq 1 = \left[\lim_{x\to 0} g(x)\right]\ . \ ■$$

Illustriamo ora l'uso di questi risultati, che è sia "in positivo", per garantire la continuità e l'esistenza di limiti, che "in negativo", per verificare che certi limiti non esistono.

2.4.1 Le sottosuccessioni e i loro limiti

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $k \mapsto n(k)$ una successione **a valori nei numeri naturali.** In questo caso è possibile considerare la funzione composta $k \mapsto x_{n(k)}$, che è ancora una successione, di indice k. "Successioni composte" definite in modo cosígenerale hanno poco interesse. E' invece importante il caso in cui la successione

$$k \mapsto n(k) \quad \text{ossia la successione}\{n_k\} \text{ è } \textbf{strettamente crescente.}$$

In questo caso la successione composta si chiama $\boxed{\textit{sottosuccessione}}$ di $\{x_n\}$ (si dice anche che è una "successione estratta" da $\{x_n\}$) e si indica col simbolo

$$\{x_{n_k}\} \ .$$

Il teorema delle funzioni composte implica che:

Teorema 83 *Se* $L = \lim x_n$ *allora si ha anche* $L = \lim x_{n_k}$ *per ogni sottosuccessione di* $\{x_n\}$.

Osserviamo che si potrebbe anche far vedere che vale il viceversa: si ha $\lim x_n = L$ se e solo se $\lim x_{n_k} = L$ **per ogni** sottosuccessione di $\{x_n\}$.

2.4.2 Risultati "in positivo": calcolo di limiti per sostituzione

Come si è detto, la funzione composta di funzioni continue è continua. Quindi sono funzioni continue in ciascun punto del loro dominio per esempio le funzioni della tabella 2.5 (nella quale $p(x)$ e $q(x)$ indicano generici polinomi). Le

funzioni della tabella sono solo alcuni degli esempi di funzioni la cui continuità segue immediatamente usando il Corollario 82. La tabella va letta in questo modo. Consideriamo per esempio la prima funzione, $\sin(\log_a x)$. La funzione[7] $(\log_a x)$ è definita per $x > 0$ e prende valori nel dominio di $\sin y$. Dunque la funzione composta è definita per ogni $x > 0$. Sia $\log_a x$ che $\sin y$ sono funzioni continue, e quindi $\sin(\log_a x)$ è una funzione continua. Consideriamo la seconda funzione, $\log_a(\sin x)$. Appartengono al suo dominio le sole x per le quali $\sin x$ è **positivo.** Ambedue le funzioni $\sin x$ e $\log y$ sono continue; e quindi la funzione composta è continua. Guardiamo ancora la seconda funzione

[7] ovviamente con $a > 0$ e diverso da 1

Tabella 2.5: Esempi di funzioni composte

$\sin(\log_a x)$	$\log_a(\sin x)$	$\tan(\log_a x)$	$\log_a(\tan x)$	$\log \frac{p(x)}{q(x)}$
$\sin a^x$	$a^{\sin x}$	$\sqrt{\sin x}$	$\sin\sqrt{x}$	$\tan e^x$
$\sin\sqrt{x}$	$\sin x^2$	$e^{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\log x}$	$\log\lvert x\rvert$

della tabella, $\log_a(\sin x)$, ma questa volta per $x \to 0$. Il punto $y = 0$ **non appartiene** al dominio di $\log y$ ed è

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0e \qquad \lim_{y\to 0} \log y = -\infty.$$

Dunque, il Teorema 80 permette di affermare che

$$\lim_{x\to 0} \log_a(\sin x) = -\infty.$$

In certi casi, il teorema 80 permette di calcolare i $\boxed{\textit{limiti per sostituzione}}$ ossia sostituendo alla variabile y una funzione **invertibile** ossia **iniettiva e suriettiva** $y = g(x)$ che semplifichi la funzione da studiare, tale che la sua funzione inversa $g^{-1}(y)$ verifichi le ipotesi del teorema. Infatti, se

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = l\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = m$$

allora

$$m = \lim_{y\to l} f(g(g^{-1}(y))) = \lim_{y\to l} f(y).$$

Vediamo un esempio:

Esempio 84 Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(\log x)^{\log x}.$$

La sostituzione $\log x = t$ mostra che questo limite è uguale a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{e}\right)^t = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

2.4.3 Risultati "in negativo"

Il Teorema 80 si può applicare quando in particolare la funzione più interna ha dominio $\mathbb{N}$, ossia è una successione. In tal caso l'enunciato del teorema si riformula come segue:

Teorema 85 *Sia*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta$$

(con i limiti α e β finiti o meno) e sia $x_n \in \operatorname{dom} g(x)$ per ogni n. Nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{R}$ assumiamo che $g(x)$ sia continua in α oppure che α **non** *sia uno dei valori della successione. Allora,*

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \beta\,.$$

Questo teorema si usa più spesso "in negativo": se si trovano due successioni $\{x_n\}$ e $\{\xi_n\}$ ambedue convergenti ad α (che non prendono valore α) tali che

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} g(\xi_n)\,,$$

allora **non esiste** $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ (si confronti con quanto detto al paragrafo 2.2.5). Consideriamo ora la funzione

$$\sin\left(\log_a x\right)\,, \qquad a > 1\,.$$

Vogliamo provare che questa funzione **non** ammette limite per $x \to 0$. Per questo consideriamo le due successioni cosìdefinite:

$$\log_a x_n = -2n\pi\,, \quad \text{ossia } x_n = a^{-2n\pi}\,,$$
$$\log_a \xi_n = (-2n\pi + \pi/2)\,, \quad \text{ossia } \xi_n = a^{-2n\pi+\pi/2}.$$

Si noti che, essendo $a > 1$, si ha: $\lim x_n = 0$, $\lim \xi_n = 0$ e inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\log_a x_n\right) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\log_a \xi_n\right) = 1\,.$$

Dunque,

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\log_a x\right) \textbf{ non esiste.}$$

In modo analogo si tratta il caso $a \in (0,1)$. Queste osservazioni possono in particolare applicarsi per mostrare che non esiste il limite di certe successioni. Per esempio, il limite della successione $\{x_n\} = \{\sin n\pi/2\}$ non esiste. Infatti consideriamo le due sottosuccessioni

$$\{x_{2n}\}\,, \quad \{x_{2n+1}\}\,.$$

La prima converge a 0 mentre la seconda converge ad 1 e quindi la successione $\{x_n\}$ è priva di limite (si veda anche il Teorema 83).

Regole di calcolo e forme indeterminate di tipo esponenziale

Si voglia studiare il comportamento della funzione

$$f(x)^{g(x)}\,.$$

Il modo più semplice per farlo consiste nello scrivere la funzione come

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}\,;$$

studiare il comportamento dell'esponente ed usare il teorema della funzione composta. Per esempio, se

$$f(x) \to +\infty\,, \qquad g(x) \to +\infty$$

allora

$$g(x)\log f(x) \to +\infty \qquad \text{e quindi} \qquad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} = +\infty\,.$$

Se però

$$f(x) \to 1\,, \quad g(x) \to +\infty, \qquad g(x)\log f(x) \text{ è una forma indeterminata}$$

e cosìnasce la forma indeterminata $1^{+\infty}$. Analoga origine hanno le altre "regole" o "forme indeterminate" di tipo esponenziale.

2.5 Le funzioni iperboliche

Si chiamano $\boxed{\textit{funzioni iperboliche}}$ la funzioni

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

I grafici di queste funzioni sono riportati in figura 2.5, a sinistra.

Si definiscono quindi le funzioni

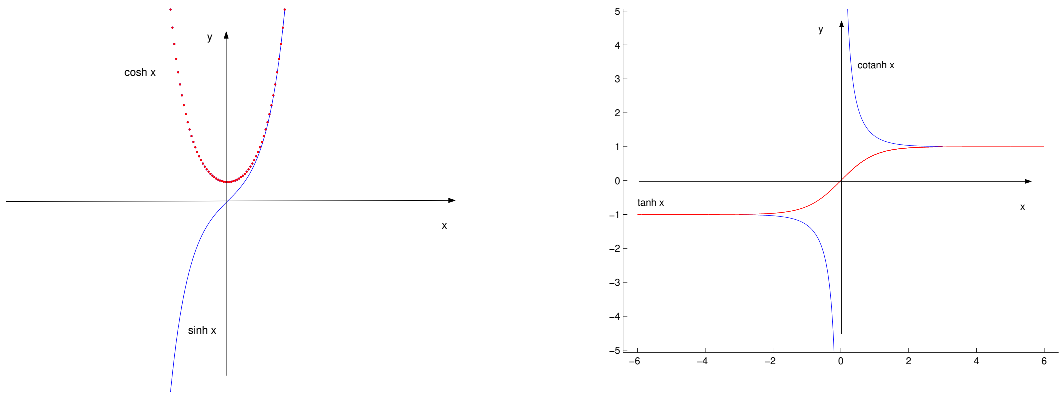
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,.$$

I grafici sono in figura 2.5, a destra. Spieghiamo la ragione del termine "funzioni iperboliche". Le "funzioni circolari" sono le usuali funzioni goniometriche $\sin x$ e $\cos x$. Si chiamano "funzioni circolari" perché **la coppia** $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ **verifica l'equazione della circonferenza**

$$x^2 + y^2 = 1\,;$$

Figura 2.5: Funzioni trigonometriche iperboliche

(a) $\sinh x$ e $\cosh x$ (b) $\tanh x$ e $\text{cotgh}\, x$



e, viceversa, ogni punto della circonferenza trigonometrica si rappresenta come $(\cos\theta, \sin\theta)$**.** Le funzioni iperboliche hanno questo nome perché **la coppia** $(x, y) = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ **verifica l'equazione dell'iperbole equilatera**

$$x^2 - y^2 = 1$$

e, viceversa, ogni punto di quest'iperbole ha coordinate $(\cosh x, \sinh x)$ **per un'opportuna scelta di** x**.** La verifica è immediata calcolando i quadrati di $\cosh\theta$ e $\sinh\theta$ e sottraendo.

Questa formula va ricordata:

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.}$$

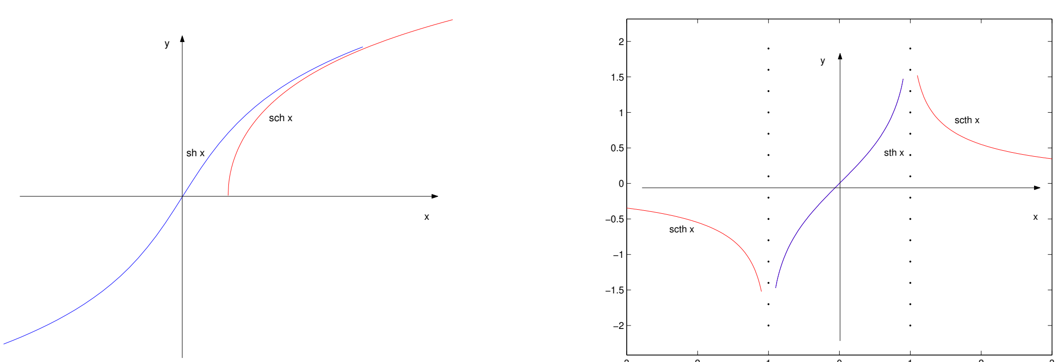
Dal punto di vista dei limiti, si ha:

$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to x_0 \neq 0$
$\sinh x \to +\infty$	$\sinh x \to -\infty$	$\sinh x \to 0$	$\sinh x \to \sinh x_0$
$\cosh x \to +\infty$	$\cosh x \to +\infty$	$\cosh x \to 1$	$\cosh x \to \cosh x_0$
$\tanh x \to 1$	$\tanh x \to -1$	$\tanh x \to 0$	$\tanh x \to \tanh x_0$
$\mathrm{cotgh}\, x \to 1$	$\mathrm{cotgh}\ \ x \to -1$	$\lvert \mathrm{cotgh}\, x\rvert \to +\infty$	$\mathrm{cotgh}\, x \to\ \mathrm{cotanh}\, x_0$

Dunque, **le funzioni iperboliche sono continue.** Le funzioni $\sinh x$ e $\tanh x$ sono **strettamente crescenti** e quindi invertibili. Ammettono funzioni inverse che si chiamano $\boxed{\textit{settore seno iperbolico}}$ e $\boxed{\textit{settore tangente iperbolica}}$ Le funzioni $\cosh x$ e cotangh$x$ sono **strettamente crescenti** su $[0, +\infty)$. Le funzioni inverse delle loro restrizioni a tale intervallo si chiamano $\boxed{\textit{settore coseno iperbolico}}$ e $\boxed{\textit{settore cotangente iperbolica}}$ Queste quattro funzioni si indicano con i simboli settsh x settch x sett th x e settcth x. I grafici delle quattro funzioni inverse sono in figura 2.6.

Figura 2.6: Le funzioni iperboliche inverse

(a) sh x e sc x (b) st x e sct x



2.6 Confronto di funzioni

In presenza di forme indeterminate, in particolare quando si debba calcolare il limite di un quoziente, si cerca di individuare, se esistono, i "termini dominanti", come nei due esempi seguenti:

Esempio 86 Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^3-x}\,.$$

E' chiaro che per x "prossimo a 0" sia x^2 che x^3 saranno via via meno importanti rispetto ad x. Quindi scriveremo, per $x \neq 0$

$$\frac{x^2-3x}{x^3-x} = \left(\frac{-3x}{-x}\right)\frac{1-x/3}{1-x^2} = 3\frac{1-x/3}{1-x^2}$$

e da qui si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^3-x} = 3\,.$$

D'altra parte, sia da calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^3-x}\,.$$

In questo caso dominano a numeratore l'addendo x^2 ed a denominatore l'addendo x^3. Quindi scriveremo

$$\frac{x^2-3x}{x^3-x} = \left(\frac{x^2}{x^3}\right)\frac{1-3/x}{1-1/x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1-3/x}{1-1/x^2}$$

e quindi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^3-x} = 0\,. \quad \blacksquare$$

Vogliamo introdurre delle definizioni che permettano di seguire quest'idea in casi più generali di quelli dell'esempio precedente. Per questo si considerano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ (con lo stesso dominio). Supponiamo inoltre $g(x)$ non zero. Si dice che f è $\boxed{\textit{o piccolo}}$ di g (per x tendente a α) se accade che

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Come notazione, si scrive

$$f = \mathrm{o}(g)$$

Si noti che la notazione "o" non fa comparire α. La definizione riguarda il limite per $x \to \alpha$, ma chi sia α va dedotto dal contesto. Ovviamente, in un breve esercizio ciò sarà impossibile e α andrà esplicitamente specificato.

In questa definizione, **non** si richede che f oppure g siano infiniti o infinitesimi. Per esempio, se $g(x) \equiv 1$, la notazione

$$f = \mathrm{o}(1) \qquad \text{significa} \quad \lim_{x\to\alpha} f(x) = 0\,.$$

Ossia, si scriverà

$$f = \mathrm{o}(1)$$

per scrivere che $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$. Però, a parte questo singolo caso, di regola l'uso del *simbolo di Landau* "o" si incontra quando le due funzioni sono infiniti o infinitesimi per $x \to \alpha$, ossia come si dice, sono infiniti o infinitesimi *contemporanei.* L'interpretazione del significato del simbolo di Landau varia a seconda che si lavori con infiniti oppure con infinitesimi. Infatti:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **infiniti** per $x \to \alpha$. Allora, la condizione

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

intuitivamente significa che $f(x)$ diverge più lentamente di $g(x)$. Per questo, quando $f = \mathrm{o}(g)$ ed $f(x)$ e $g(x)$ **sono infiniti** si dice che $f(x)$ è *infinito di ordine inferiore* a $g(x)$ o che $g(x)$ è *infinito di ordine superiore* ad $f(x)$ (sottinteso: per $x \to \alpha$).

Invece:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **infinitesimi** per $x \to \alpha$. Allora, la condizione

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

intuitivamente significa che $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$. Per questo, quando $f = \mathrm{o}(g)$ ed $f(x)$ e $g(x)$ **sono infinitesimi** si dice che $f(x)$ è *infinitesimo di ordine superiore* a $g(x)$ o che $g(x)$ è *infinitesimo di ordine inferiore* ad $f(x)$ (sottinteso: per $x \to \alpha$).

Per esercizio, passando ai reciproci, si riformulino le due proprietà appena esaminate supponendo che $|f(x)/g(x)| \to +\infty$. Se accade che

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}\,, \qquad l \neq 0 \tag{2.16}$$

si dice che i due infiniti (o infinitesimi) $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo $\boxed{\textit{stesso ordine}}$ di grandezza (brevemente, diremo che "hanno lo stesso ordine") per $x \to \alpha$ e scriveremo

$$f \asymp g \qquad \text{sottinteso, per } x \to \alpha.$$

Se il limite in (2.16) non esiste, si dice che i due infiniti o infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ $\boxed{\textit{non sono confrontabili}}$ per $x \to \alpha$. Se invece il limite esiste, finito o meno, si dice che essi sono $\boxed{\textit{confrontabili}}$ Siano ancora $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti oppure due infinitesimi (per $x \to \alpha$). Si dice che essi sono $\boxed{\textit{equivalenti}}$ se

$$f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g)\,.$$

In tal caso si scrive

$$f \sim g\,,$$

al solito sottintendendo "per $x \to \alpha$". Dividendo i due membri per $g(x)$ e passando al limite, si vede che

Teorema 87 *I due infiniti o infinitesimi contemporanei $f(x)$ e $g(x)$ sono* $\boxed{\text{equivalenti}}$ *(per $x \to \alpha$) se e solo se*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

D'altra parte,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = 1\,.$$

Dunque,

Corollario 88 *Vale $f \sim g$ se e solo se $g \sim f$ e ciò accade se e solo se*

$$g(x) = f(x) + \mathrm{o}(f)\,.$$

Infine, può accadere che esistano numeri reali c e γ con $c \neq 0$ e tali che

$$f(x) \sim c[g(x)]^\gamma\,.$$

In questo caso si dice che:

- $f(x)$ è un infinito oppure un infinitesimo di $\boxed{\textit{ordine}}$ γ rispetto a $g(x)$;
- la funzione $c[g(x)]^\gamma$ si chiama la $\boxed{\textit{parte principale}}$ di $f(x)$ rispetto a $g(x)$.

Osservazione 89 Va notato che due infinitesimi o infiniti possono essere confrontabili, senza che esista l'ordine dell'uno rispetto all'altro, ossia senza che esista la parte principale dell'uno rispetto all'altro. Per fare un esempio, consideriamo le due funzioni

$$f(x) = \log x\,, \qquad g(x) = x\,.$$

Si tratta di due infiniti per $x \to +\infty$ e usando i risultati nella tabella 2.4 si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Dunque i due infiniti sono confrontabili, e $g(x)$ è di ordine superiore rispetto ad $f(x)$. Però, ancora dalla tabella 2.4, si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g^\alpha(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Quindi, non esiste l'ordine di $\log x$ rispett a $g(x) = x$ e dunque nemmeno la parte principale. ■

Simboli di Landau

I simboli $\sim$, $\asymp$ ed o si chiamano $\boxed{\textit{simboli di Landau}}$ dal nome del matematico tedesco che li ha introdotti. Esistoni altri simboli di Landau. In particolare si dice che f è $\boxed{\textit{O grande}}$ di g (per $x \to \alpha$) se esiste M ed un intorno I di α tale che

$$x \in I \Longrightarrow |f(x)| < M|g(x)|\,.$$

Se ciò accade si scrive

$$f = \mathrm{O}(g)\,.$$

Si noti un caso particolare: se esiste finito

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

allora $f = \mathrm{O}(g)$ (in un opportuno intorno di α). Infine, un'osservazione sul significato del simbolo $\asymp$. Di questo abbiamo dato una definizione assai particolare. Specialmente in testi di fisica, si scrive $f \asymp g$ quando esistono $m > 0$ ed M tali che

$$m|g(x)| \leq |f(x)| \leq M|g(x)|$$

almeno in un intorno di un sottinteso α, senza richiedere l'esistenza del limite in (2.16).

2.6.1 Infiniti e infinitesimi di confronto fondamentali e formule da ricordare

Se non c'è ragione di fare diversamente, usa confrontare un infinito o un infinitesimo $f(x)$ con funzioni $g(x)$ particolari, dette gli infiniti o gli infinitesimi di confronto *fondamentali.* Questi sono riportati nella tabella 2.6.

Tabella 2.6: Infiniti e infinitesimi di confronto fondamentali

x tende a	infinito fondamentale	infinitesimo fondamentale
0	$\dfrac{1}{\|x\|}$	$\|x\|$
x_0	$\dfrac{1}{\|x - x_0\|}$	$\|x - x_0\|$
$+\infty$	x	$\dfrac{1}{x}$
$-\infty$	$\|x\|$	$\dfrac{1}{\|x\|}$

Alcuni dei limiti elencati al paragrafo 2.2.10 si possono riformulare come segue: **Ciascuno degli infiniti seguenti è di** ordine minore **del successivo:**

$$\{\log n\}\,,\quad \{n^b\}\,,\quad \{a^n\}\,,\quad (\{n!\}\,,\quad \{n^n\}$$

perché

$$\begin{cases} \lim \frac{\log n}{n^a} = 0 & \text{se } a > 0; \\ \lim \frac{n^b}{a^n} = 0 & \text{se } a > 1,\ b > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim \frac{a^n}{n!} = 0 & \text{se } a > 1; \\ \lim \frac{n!}{n^n} = 0\,. \end{cases}$$

Formule di MacLaurin Vanno ricordate subito le formule della tabella 2.7, che sono casi particolari della formula di MacLaurin che si studierà più avanti. Le ultime due righe della tabella si riferiscono a funzioni probabilmente note ad alcuni studenti, ma non a tutti. Esse verranno introdotte al paragrafo 2.5. Per interpretare le formule di MacLaurin, vanno conosciuti i simboli seguenti:

- il simbolo $n!$ che si legge $\boxed{n \text{ fattoriale}}$ **il numero n deve essere intero non negativo.**

Per definizione, $0! = 1$ ed $1! = 1$. Il simbolo $n!$ per $n > 1$ si definisce per ricorrenza:

$$n! = n(n-1)!\,;$$

e quindi,

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2\,,\quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\,,\quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\,,\quad \dots$$

- il simbolo $\binom{\gamma}{k}$, che si chiama $\boxed{\textit{coefficiente binomiale}}$ **il numero k deve essere intero non negativo mentre il numero γ può essere reale qualsiasi.**

Per definizione,

$$\binom{\gamma}{0} = 1\,,\qquad \binom{\gamma}{1} = \frac{(\gamma - 0)}{1!} = \frac{\gamma}{1}$$

Quindi si definisce

$$\binom{\gamma}{k} = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-(k-1))}{k!}\,.$$

Per esempio,

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(1/2)\left((1/2)-1\right)}{2!} = \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(1/2)\left((1/2)-1\right)\left((1/2)-2\right)}{3!} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{16}\,.$$

Si noti che se $\gamma = n$, intero positivo, allora

$$\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1\,, \qquad \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \forall k > n\,.$$

Ciò detto, le formule da ricordare sono nella tavola 2.7. La formula **e)** si chiama

formula del binomio o *formula di Newton* Nel caso particolare in cui γ sia **intero,** $\gamma = n$, allora

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \,\mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \,\mathrm{o}(x^{n+1})$$

perché si è visto che $\binom{n}{n+1} = 0$. In questo caso vale di più: si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,; \tag{2.17}$$

ossia, in questo caso l'errore $\mathrm{o}(x^n)$ è in realtà identicamente zero[8]. Anche la formula (2.17) si chiama *formula di Newton*

2.7 Appendice: ancora sulla formula del binomio di Newton

Consideriamo due casi particolari della formula binomiale:

[8]la dimostrazione è in appendice.

- Si sostituisca x con $-x$ e si prenda $a=-1$. In questo modo

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1} =& \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k}(-x)^k + \mathrm{o}(x^n) \\ =& 1+x+x^2+\cdots+x^n + \mathrm{o}(x^n)\,.\end{aligned}$$

  In questo caso si può trovare un'espressione esplicita per $\mathrm{o}(x)$. Per questo si consideri il prodotto notevole[9]

$$\begin{aligned}&(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1} \\ &\text{ossia}\quad 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = (1-x)^{-1} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\,.\end{aligned}$$

  Si ha dunque:

$$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

  e quindi

$$\mathrm{o}(x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x}\,.$$

- Si noti che se $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{se} k > n\,.$$

  Dunque, se $r > n$, si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r)\,. \tag{2.18}$$

  Vogliamo provare che in realtà $\mathrm{o}(x^r) = 0$, ossia che vale la formula del binomio di Newton. Notiamo che il membro sinistro di (2.18) è un polinomio di grado n:

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot + a_n x^n\,.$$

  Notiamo che il coefficiente di x^0 è 1 in ambedue i membri, ossia che $a_0 = 1$. Sottraendolo si ha

$$(1+x)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r)\,.$$

[9] ossia, la somma dei primi termini della progressione geometrica, si veda l'appendice 1.10.

La funzione $o(x^r)$ non è cambiata. Dividendo i due membri per x e calcolando il limite per $x \to 0$ si vede che x ha lo stesso coefficiente a_1 nei due membri[10]. Sottraendo $a_1 x$ dai due membri si trova

$$(1+x)^n - 1 - a_1 x = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k + o(x^r)\,.$$

La funzione $o(x^r)$ non è cambiata. Ora il procedimento si può ripetere, notando che x^2 ha lo stesso coefficiente a_2 nei due membri cosìche

$$(1+x)^n - 1 - a_1 x - a_2 x^2 = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} x^k + o(x^r)$$

e ciò non cambia la funzione $o(x^r)$. Ripetiamo il procedimento. Dopo aver sottratto anche $a_n x^n$ ai due membri si trova

$$o(x^r) = 0$$

Dunque, la (2.18) in realtà vale con $o(x^r) = 0$, ossia si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,.$$

Ciò giustifica la *formula di Newton* (2.17). Sostituendo x con b/a e moltiplicando i due membri per a^n si trova

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,.$$

Anche questa formula si chiama *formula di Newton*

2.8 Alcuni esercizi

1. Spiegare perché l'affermazione seguente è falsa: *se x_0 non è punto di accumulazione di A, allora è punto isolato di A.*

2. Usando opportuni esempi, provare che ambedue le affermazioni seguenti **sono sbagliate:** 1) la funzione $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$; 2) la funzione $f(x)$, definita in x_0, è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

[10] il valore di a_1 è n, ma non è necessario conoscerlo per applicare il procedimento che stiamo illustrando.

3. In ciascuna delle coppie di uguaglianze seguenti, una è corretta e l'altra sbagliata. Si spieghi il motivo.

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \log x^2 = \lim_{x\to-\infty} 2\log x \\ \lim_{x\to-\infty} \log x^2 = \lim_{x\to-\infty} 2\log |x| \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x} \\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{|x|}\,. \end{cases}$$

   Se invece il limite è per $x \to +\infty$?

4. Sia
$$p_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}\,.$$
   Mostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0\,.$$

5. Sia
$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n\,.$$
   Si studi $\lim_{n\to+\infty} s_n$, per ogni valore del parametro reale q (si ricordi la (1.6)).

6. Dire se esiste $f(x)$, definita su $\mathbb{R}$, positiva e con $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$. Giustificare la risposta.

7. Si consideri l'insieme $A = \cup_{n=2}^{+\infty}(1/n, 1/(n-1))$. Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$ e trovare due successioni, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, a valori in A e tali che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup A\,.$$

8. L'insieme A è ancora quello dell'esercizio 7. Si dica se si possono trovare successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ per cui vale
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup A$$
   ma che non prendono valori in A.

9. Sia A l'insieme dell'esercizio 7 e sia $B = \{-1\} \cup A$. Dire se esistono successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ a valori in A e tali che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf B\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup B\,.$$
   Spiegare come cambia la risposta se invece si chiede che le successioni abbiano valori in B.

10. (⋆) Dire se esiste una funzione positiva, priva di limite per $x \to 0$ e illimitata in ogni intorno di 0.

11. Tracciare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{[\sin^2 x]}$$

([·] indica la parte intera) e, se esiste, calcolarne il limite per $x \to +\infty$.

12. (⋆) Trovare una funzione pari ed una funzione dispari, limitate e prive di limite per $x \to 0$.

13. Mostrare che se $f(x)$ è pari e se $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$ allora si ha anche $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Cosa accade se la funzione è dispari?

14. Dire se esiste una funzione periodica dotata di limite per $x \to +\infty$.

15. Sia $f(x)$ una funzione periodica tale che $\lim_{x\to +\infty} |f(x)| = 1$. Dire se $f(x)$ è costante.

16. Sia $f(x)$ una funzione dispari che ha un salto per $x = 0$. Provare che $x = 0$ è discontinuità eliminabile di $|f(x)|$.

17. Si trovi una funzione $f(x)$ definita su $[-1, 1]$ e non costante, tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \text{per ogni } x_0 \in [-1, 1].$$

18. (⋆) Si trovi una funzione definita su $(0, 1]$, che ha infiniti punti di discontinuità e tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ per ogni $x_0 \in (0, 1]$.

19. (⋆) Dire se esiste una funzione illimitata su $(0, 1]$ e tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ per ogni $x_0 \in (0, 1]$.

20. (⋆) Dire se esiste una funzione definita su $\mathbb{R}$, illimitata e tale che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si abbia:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1\,.$$

21. (⋆) Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite su $[0, +\infty)$ e sia $f(x) > g(x) > 0$. Si tracci il grafico della funzione $\phi(x)$ tale che

$$\phi(2n) = g(2n)\,, \qquad \phi(2n + 1) = f(2n + 1)$$

e il cui grafico negli altri punti è ottenuto congiungendo successivamente $(2n, \phi(2n))$ e $(2n + 1, \phi(2n + 1))$ mediante segmenti di retta. Quindi:

(a) supponiamo che f sia un infinito di ordine superiore a g. Mostrare che non è vero che ϕ è un infinito di ordine superiore a g.

(b) **($\star$)** Si faccia un esempio per provare che le disuguaglianze seguenti possono non valere nemmeno se le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono strettamente crescenti:

$$g(x) \leq \phi(x) \leq f(x)\,; \tag{2.19}$$

(c) **($\star$)** si mostri che le disuguaglianze (2.19) valgono se le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse;

(d) si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$ (finito o meno) si ha anche $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \alpha$ (l'asserto vale sempre, ma si prova più facilmente se le funzioni sono strettamente convesse);

(e) si provi che se $f \sim g$ allora si ha anche $\phi \sim f$ e quindi $\phi \sim g$ (l'asserto vale sempre, ma si prova più facilmente se le funzioni sono strettamente convesse).

(f) **($\star$)** Sia $f(x) > g(x) > 0$ per $x > 0$. Le due funzioni siano strettamente crescenti ed illimitate e valga, per $x \to +\infty$,

$$f = \mathrm{o}(g)\,.$$

Sia $\phi(x) = \sqrt{f(x)g(x)}$. Dire se è vero o meno che $\phi = \mathrm{o}(f)$, $\phi = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{o}(\phi)$, $g = \mathrm{o}(\phi)$ (sempre per $x \to +\infty$).

22. Sia $f(x) \sim x^n$ (per $x \to +\infty$). Si chiede se esiste un numero c tale che, per $x \to +\infty$, sia $\log f(x) - c\log x = \mathrm{o}(1)$.

23. Trovare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $f(x) = \mathrm{o}(x)$ (per $x \to 0$) ma per cui NON vale né $\log f(x) = \mathrm{o}(\log x)$ né $\frac{1}{\log f(x)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\log x}\right)$ (suggerimento: si provi con le potenze).

24. Sia $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$ e sia

$$g(x) = \max\{f(s)\;|s \leq x\}\,.$$

Si scelga come $f(x)$ una delle funzioni $-x^2$, x^2, $\sin x$ e si tracci il grafico della corrispondente funzione $g(x)$.

25. Sia $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ e sia

$$g(x) = \max\{f(s)\;|s \leq x\}\,.$$

Si mostri che $g(x)$ è continua. Può essere che $g(x)$ sia continua anche se $f(x)$ non è continua? Si considerino i due casi $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ed $f(x) = -\operatorname{sgn}(x)$.

26. $(\star)$ Per ogni $n > 1$ si considerino le funzioni definite sull'intervallo $[0,1]$ come segue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ n & \text{se} \quad 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{se} \quad 2/n \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Fissato $x \in [0,1]$, si consideri la successione di numeri $\{f_n(x)\}$. Si provi che questa converge a 0 per ogni $x \in [0,1]$.

27. $(\star)$ Si trovi una funzione definita su $x > 0$, iniettiva e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e tale che inoltre non esista $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.

Tabella 2.7: Formule di MacLaurin da usare quando ($x \to 0$

a)	$\sin x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2k+2})$
b)	$\cos x$	$=$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2k+1})$
c)	$\tan x$	$=$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6)$
d)	$\arctan x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$
e)	$(1+x)^\gamma$	$=$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{\gamma}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)$
f)	$\log_e(1+x)$	$=$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$
g)	e^x	$=$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$
h)	$\sinh x$	$=$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2k+2})$
i)	$\cosh x$	$=$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2k+1})$

Tabella 2.8: Regole di calcolo e forme indeterminate

Regole	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
	$(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$	$(-\infty)(+\infty) = -\infty = (+\infty)(-\infty)$
	$\left\lvert \frac{\pm\infty}{0} \right\rvert = +\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$
	$l + (+\infty) = l + \infty = +\infty$ $l + (-\infty) = l - \infty = -\infty$	$l(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se l>0} \\ -\infty \text{ se l<0} \end{cases}$
	$0^{+\infty} = 0$ $0^{-\infty} = +\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ $(+\infty)^{-\infty} = 0$
Forme indeterminate	$+\infty - \infty$	$0 \cdot (\pm\infty)$
	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$
	$0^0 \qquad (+\infty)^0$	$1^{\pm\infty}$