Capitolo 1

Richiami e preliminari

Frase letta in un Museo Archeologico:

Sepoltura di individuo adulto di sesso femminile.

Un ingegnere, o un matematico, esprimerebbe lo stesso concetto, in modo ugualmente preciso, scrivendo "tomba di donna". Infatti, le scienze e l'ingegneria costruiscono linguaggi precisi e sintetici. Esempi importanti sono il linguaggio della matematica e il disegno tecnico.

In questo capitolo si richiamano brevemente alcuni elementi del linguaggio matematico ed alcune nozioni note dai corsi precedenti. Inoltre, si introducono alcune proprietà nuove almeno per alcuni studenti. In particolare, in questo capitolo introdurremo la **proprietà di Dedekind** che è la proprietà che differenzia in modo essenziale i numeri reali dai numeri razionali.

1.1 Notazioni insiemistiche e logiche

Di regola indicheremo un insieme con una lettera maiuscola, per esempio A, B. Un insieme si identifica specificandone gli elementi, o elencandoli esplicitamente oppure mediante la proprietà che li caratterizza. Per esempio scriveremo

$$A = \{x|\ x > 0\}$$

per indicare l'insieme i cui elementi sono i numeri positivi; oppure $A = \{1\,,2\,,3\}$ per indicare l'insieme i cui elementi sono i numeri 1, 2 e 3.

In questa notazione si noti:

- l'uso della parentesi graffa. La notazione $\{\}$ è una delle numerose notazioni matematiche che hanno più significati. In seguito vedremo altri usi della medesima notazione.
- Il simbolo "$|$" si legge "tale che" e può venir sostituito da due punti o anche da una virgola. Talvolta viene sottinteso.

Osservazione 1 E' importante sottolineare che quando un insieme si identifica specificando la proprietà dei suoi elementi, la proprietà non deve essere ambigua. Una definizione del tipo "l'insieme delle persone bionde" non è accettabile come definizione di insieme, perché non tutti giudicano nel medesimo modo la "biondezza" di un individuo. E' invece accettabile definire "l'insieme delle persone che oggi sono cittadini italiani". ■

Per indicare che un elemento a appartiene ad A si scrive $a \in A$ oppure $A \ni a$. Per dire che a *non* appartiene ad A si scrive $a \notin A$ oppure $A \not\ni a$.

Se ogni elemento di B appartiene ad A si dice che B è contenuto in A, o che B è un sottoinsieme di A, e si scrive $B \subseteq A$ oppure $A \supseteq B$.

E' importante notare che a ed $\{a\}$ sono oggetti diversi: il primo indica un elemento di un insieme e il secondo indica l'insieme il cui unico elemento è a. Quindi sono corrette le scritture $a \in A$, $a \in \{a\}$ ed $\{a\} \subseteq A$ mentre sono sbagliate le scritture $\{a\} \in A$ ed $a \subseteq A$.

Col simbolo $\emptyset$ si indica l'$\boxed{\textit{insieme vuoto}}$, ossia l'insieme privo di elementi.

Le operazioni tra insiemi sono:

- l'$\boxed{\textit{intersezione}}$ di insiemi: $A \cap B$ è l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli comuni ad A e B. Se A e B sono *disgiunti,* ossia privi di elementi comuni, l'intersezione dei due è l'insieme vuoto. Si noti che $A \cap B = B \cap A$.
- l'$\boxed{\textit{unione}}$ di insiemi: $A \cup B$ è l'insieme i cui elementi sono sia quelli di A che quelli di B. Si noti che $A \cup B = B \cup A$. L'unione di due insiemi è l'insieme vuoto se e solo se ambedue sono vuoti.
- la differenza di insiemi. Si indica con la notazione $A - B$ oppure $A \backslash B$: è l'insieme degli elementi di A che **non** appartengono a B. Dunque, $A - B \neq B - A$ e inoltre:

a) $A - B = A - (A \cap B) = A - (B \cap A)$.

b) se A e B sono disgiunti, $A - B = A$ e $B - A = B$; se $A = B$ allora $A - B = B - A = \emptyset$.

- il $\boxed{\textit{prodotto cartesiano}}$ di due insiemi A e B, presi in quest'ordine, prima A e poi B, è l'insieme i cui elementi sono le **coppie ordinate** (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$:
$$A \times B = \{(a\,, b) | a \in A\,, b \in B\}.$$
Dunque, $A \times B \neq B \times A$, salvo nel caso in cui $A = B$.

- Gli insiemi vengono sempre a coppie: nel momento stesso in cui si definisce A se ne definisce anche il $\boxed{\textit{complementare}}$, ossia l'insieme di tutti gli elementi che *non* appartengono ad A.

  Il complementare di A si indica con uno dei simboli A^C, $\mathcal{C}A$ oppure $\tilde{A}$.

  Ovviamente, $A \cap \tilde{A} = \emptyset$.

  Lavorando in un "insieme ambiente" R prefissato, e quindi solo con suoi sottoinsiemi, usa definire il complementare di A relativamente ad R
$$\mathcal{C}_R A = \{a \in R | a \notin A\}.$$
  Ovviamente,
$$A \cap \mathcal{C}_R A = \emptyset\,, \qquad A \cup \mathcal{C}_R A = R.$$
  Molto spesso si sottintende l'insieme R e, per indicare il complementare rispetto al (sottinteso) insieme R si usano i simboli A^C, $\mathcal{C}A$ oppure $\tilde{A}$.

1.2 Le implicazioni e i quantificatori ∃ e ∀

Per dire che una proprietà ne implica un'altra si usa il simbolo $\Rightarrow$. Per esempio
$$a \in A \Rightarrow a > 0 \tag{1.1}$$
si legge "se a è un elemento di A allora a è un numero positivo". Per esempio, ciò vale se gli elementi di A sono numeri pari positivi (ovviamente, non solo in questo caso); non vale se A contiene anche il numero -1.

La doppia freccia $\Leftrightarrow$ si usa per indicare che due proprietà sono equivalenti. Per esempio
$$a \in A \Leftrightarrow a > 0$$

si legge "a appartiene ad A se e solo se è un numero positivo" e significa che gli elementi di A sono tutti e soli i numeri positivi.

Il simbolo $\exists$ si legge "esiste". Per esempio,

$$\exists a \in A \,|a > 0$$

si legge "esiste a in A che è maggiore di zero" e vuol dire che l'insieme A contiene **almeno** un numero positivo. Niente si dice degli altri elementi di A, che potrebbero anche non essere numeri.

Il simbolo $\forall$ si legge "qualsiasi" o "per ogni". Per esempio,

$$\forall a \in A \Rightarrow a > 0$$

si legge "per ogni elemento a di A segue che a è un numero positivo" o, più semplicemente, "ogni elemento di A è un numero positivo" ed è una notazione più precisa di (1.1).

Osservazione 2 In questo paragrafo abbiamo usato il termine "proprietà" come termine facilmente comprensibile da tutti. Il termine più corretto da usare è il termine $\boxed{\textit{proposizione}}$ intendendo con ciò un'affermazione della quale si può decidere se è vera o se è falsa. Dunque, le proposizioni[1] vengono sempre a coppie: se $\mathcal{P}$ indica una proposizione, con $\neg\mathcal{P}$ si intende la $\boxed{\textit{negazione}}$ di $\mathcal{P}$: quella proposizione che è vera se e solo se $\mathcal{P}$ è falsa. E' importante esercitarsi a costruire la negazione di semplici proposizioni e rendersi conto di come la negazione opera sui quantificatori logici.

Nel linguaggio comune ci sono affermazioni che si possono controllare e si può decidere se sono vere oppure false ed affermazioni ambigue, che persone diverse possono ritenere vere oppure false. Per esempio "tutti gli studenti di quest'aula sono citadini italiani" può essere vera oppure falsa, ma non dipende dal giudizio di chi la verifica: per verificarla basta chiedere un documento a ciascuno. Invece l'affermazione "Paola è bionda" potrà essere giudicata vera da un meridionale e falsa da uno svedese. Una certa affermazione si chiama "proposizione" quando è possibile assegnare un metodo per verificare se è vera o meno, in modo non ambiguo. Si confronti quanto ora detto con l'Osservazione *1* ■

[1] come gli insiemi.

1.3 Le funzioni

Col termine $\boxed{\textit{funzione}}$ si intende una trasformazione tra due insiemi A e B che ad ogni punto di A associa **al più** un punto di B.[2]

Dunque, è possibile che un certo elemento di A non abbia corrispondente in B.

Le funzioni si indicano con una lettera minuscola: f, g, ϕ ....

Diciamo che A è l'insieme di partenza della funzione mentre B è l'insieme di arrivo.

Ripetiamo: è possibile che alcuni punti di A non abbiano corrispondente, o come si dice più comunemente, immagine, in B. L'insieme dei punti di A che ammettono corrispondente si chiama il $\boxed{\textit{dominio}}$ della funzione e si indica col simbolo $\operatorname{dom} f$ (se f indica la funzione).

Per dire che la funzione f trasforma a in b si scrive

$$a \xmapsto{f} b \quad \text{o, più comunemente,} \quad b = f(a)\,.$$

L'insieme

$$\{f(a)\,, a \in \operatorname{dom} f\} \subseteq B$$

si chiama l'$\boxed{\textit{immagine}}$ o il $\boxed{\textit{codominio}}$ della funzione f. L'immagine di f si indica col simbolo $\operatorname{im} f$.

Fare attenzione al termine codominio: in certi testi questo termine indica l'insieme di arrivo B.

Una funzione la cui immagine è l'insieme di arrivo B si dice $\boxed{\textit{suriettiva}}$

E' importante notare che la definizione di funzione è dissimmetrica: un elemento di A deve avere **al più** un corrispondente, ma un elemento di B può provenire anche da più elementi di A.

Si chiama $\boxed{\textit{controimmagine}}$ di $K \subseteq B$ l'insieme

$$f^{-1}(K) = \{a \in A \,|f(a) \in K\}$$

Ovviamente, $f^{-1}(B) = \operatorname{dom} f$ e $f^{-1}(K) = \emptyset$ se $K \cap (\operatorname{im} f) = \emptyset$.

Niente vieta che l'insieme K sia costituito da un solo punto b. Come si è detto, la controimmagine di $\{b\}$ è un sottoinsieme di A che può contenere più di un elemento. Esso andrebbe indicato col simbolo $f^{-1}(\{b\})$, ma usa scrivere più semplicemente $f^{-1}(b)$.

[2] più precisamente, una tale funzione si chiama $\boxed{\textit{funzione univoca}}$

Fare attenzione al simboli f^{-1}. Questo simbolo ha numerosi significati. Uno si è appena visto: $f^{-1}(K)$ indica un certo insieme. Più avanti vedremo che lo stesso simbolo indica una particolare funzione associata alla f, quando questa ha una proprietà particolare. Se f opera tra numeri, $f^{-1}(a)$ potrebbe anche indicare $1/f(a)$. Generalmente il significato va capito dal contesto.

Infine, si chiama $\boxed{\textit{grafico}}$ di f l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a))\ | a \in dom\, f\} \subseteq A \times B\,.$$

Osservazione 3 Notiamo una proprietà del grafico: se due coppie (a, b) e (a, c), con i medesimi primi elementi, appartengono al grafico, allora è anche $c = b$, **perché la funzione è univoca.** Inoltre, è chiaro che un s.insieme $\mathcal{G}$ di $A \times B$ con questa proprietà è grafico di funzione: la funzione il cui dominio è costituito dai primi elementi delle coppie di $\mathcal{G}$ e se $(a, b) \in \mathcal{G}$ allora ad a corrisponde b. Dunque, una funzione potrebbe essere assegnata specificandone il grafico. ■

Esempio 4 Sia $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{x, y, z\}$ e consideriamo la funzione

$$c \xmapsto{f} z$$
$$b \xmapsto{f} x$$
$$d \xmapsto{f} x$$
$$e \xmapsto{f} x\,.$$

E':

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\, f = \{b\,, c\,, d\,, e\} \subseteq A\,, \qquad \mathrm{im}\, f &= \{x\,, z\} \subseteq B \\ f^{-1}(x) = \{b\,, d\,, e\} \qquad f^{-1}(z) &= \{c\} \\ f^{-1}(\{x, z\}) = f^{-1}(B) = \ \mathrm{dom}\ f &\subseteq A \\ \mathcal{G}(f) = \{(c, z)\,, (b, x)\,, (d, x)\,, (e, x) &\}\,. \end{aligned}$$

Siano ora f e g due funzioni da A in B. Sia $H \subseteq A$. Diciamo che f è $\boxed{\textit{restrizione}}$ di g ad H se

$$\mathrm{dom}\, f = H \cap\ \mathrm{dom}\, g \text{e inoltre: se } x \in\ \mathrm{dom}\, f \text{ allora } f(x) = g(x)\,.$$

Ossia, f opera su ciascun punto di H esattamente come fa g.

La restrizione di g ad H si indica col simbolo

$$g_{|H}\,.$$

Sia ora $K \supseteq \operatorname{dom} f$. Diciamo che g è $\boxed{\textit{estensione}}$ di f a K

$$\text{se } \operatorname{dom} g = K \text{ e inoltre: se } x \in \operatorname{dom} f \text{ allora } g(x) = f(x)\,.$$

Ossia, g opera come f sui punti di $\operatorname{dom} f$, ed opera in un qualsiasi altro modo nei punti di K nei quali f non è definita.

Notare che la restrizione di una funzione ad un insieme è sempre unica, mentre l'estensione non è unica, salvo nel caso in cui l'insieme B consista di un solo elemento, $B = \{b\}$, perché in tal caso le funzioni a valori in B devono essere costanti.

1.3.1 Funzioni composte e funzioni inverse

Siano ora f e g due funzioni, con f da A in B e g da B in C:

$$A \overset{f}{\longmapsto} B\,, \qquad B \overset{g}{\longmapsto} C\,.$$

Se accade che

$$(\operatorname{im} f) \cap (\operatorname{dom} g) \neq \emptyset\,,$$

è possibile definire la $\boxed{\textit{funzione composta}}$ di g con f, che si indica con $g \circ f$, in questo modo

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))\,,$$

definita sugli elementi $a \in A$ tali che abbia senso calcolare $g(f(a))$; ossia:

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{a \,|f(a) \in \operatorname{dom} g\}\,.$$

Il simbolo che useremo più comunemente per la funzione composta è proprio $g(f(a))$, lasciando sottinteso il dominio.

Si è notato che nella definizione di funzione A e B non giuocano ruoli "simmetrici", nel senso che se (a, b) ed (a', b') sono elementi del grafico e $a = a'$ allora necessariamente $b = b'$. Invece, è ben possibile che sia $b = b'$ con $a \neq a'$. Si chiamano $\boxed{\textit{iniettive}}$ le funzioni con questa proprietà: **un elemento dell'immagine proviene da un solo elemento del dominio;** ossia tali che se (a, b) ed (a', b) sono nel grafico, allora $a = a'$.

Le funzioni (univoche ed) iniettive vengono sempre a coppie: se (a, b) è nel grafico di una funzione iniettiva, una prima funzione trasforma a in b; una seconda funzione (anch'essa univoca ed iniettiva) trasforma b in a. Queste due funzioni si dicono $\boxed{\textit{inverse}}$ l'una dell'altra.

In pratica, una delle due funzioni si intende data e l'altra deve determinarsi. In questo caso si assegna il simbolo f alla funzione data e la sua inversa si indica col simboli f^{-1}.

Si noti che in questo caso f^{-1} indica una funzione; e quindi $f^{-1}(b)$ si userà per indicare la funzione inversa di f, calcolata nel punto b.

Ricapitolando, f opera da A in B mentre f^{-1} opera da B in A con

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{im}\, f \qquad \mathrm{im}\, f^{-1} = \mathrm{dom}\, f$$

e inoltre,

$$a \in \mathrm{dom}\, f \implies f^{-1}(f(a)) = a\,; \qquad b \in \mathrm{dom}\, f^{-1} \implies f\left(f^{-1}(b)\right) = b\,.$$

Una funzione f dall'insieme di partenza A a valori in B il cui dominio è A stesso e che è sia iniettiva che suriettiva si dice $\boxed{\textit{biunivoca}}$

Controimmagine, funzione inversa ed equazioni

Sia f una funzione da H in K e si consideri l'equazione

$$f(x) = y\,. \tag{1.2}$$

Ossia, dato $y \in K$ si vogliono trovare le $x \in H$ che verificano l'uguaglianza. In questo contesto, y si chiama il "dato" del problema (notare, anche f è data) ed x si chiama l'"incognita". Le x che verificano l'equazione si chiamano le "soluzioni" dell'equazione.

E' possibile che non esistano soluzioni. Ciò avviene se e solo se $y \notin \mathrm{im}\, f$. Inoltre, le soluzioni, se esistono, appartengono a $\mathrm{dom}\, f$.

Può essere che ci sia più di una soluzione. L'insieme di tutte le soluzioni si è indicato col simbolo $f^{-1}(y)$.

Per certe funzioni f accade che l'equazione (1.2) ammette **al più una** soluzione **per ogni** dato y. Sono queste le funzioni iniettive, e per esse è possibile definire la funzione inversa

$$x = f^{-1}(y)\,.$$

La funzione inversa fa corrispondere al dato y l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$. Questa è l'interpretazione della funzione inversa dal punto di vista di chi deve risolvere equazioni.

1.4 Insiemi di numeri

La maggior parte del corso userà *insiemi di numeri reali.*[3] L'insieme dei numeri reali si indica col simbolo $\mathbb{R}$ e suoi sottoinsiemi notevoli sono:

- l'insieme dei numeri razionali relativi $\mathbb{Q}$.
- l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$.
- l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

L'uso di questi insiemi numerici è noto dai corsi precedenti. Notiamo però esplicitamente che come insieme $\mathbb{N}$, dei naturali, si intende l'insieme dei numeri che si usano per contare: 1, 2,... A seconda dell'opportunità introdurremo anche 0 in quest'insieme, oppure talvolta considereremo come "primo elemento" dei naturali un numero maggiore di uno. Molto spesso se 0 si considera o meno come elemento di $\mathbb{N}$ viene implicitamente dedotto dalle notazioni usate. Per esempio, se definiamo

$$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

implicitamente escluderemo 0 dall'insieme $\mathbb{N}$, **perché la divisione per 0 non può farsi.**

Si sa che i numeri reali si possono porre in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata ossia, come anche si dice, si rappresentano mediante i punti di una retta orientata. In questa rappresentazione, il numero più grande tra due corrisponde al un punto più a destra.[4]

Avendo identificato i numeri reali mediante punti di una retta, un numero reale verrà anche chiamato "punto" (di una retta precedentemente specificata, o sottintesa, spesso un punto dell'asse delle ascisse o delle ordinate).

E' utile vedere il significato geometrico delle operazioni algebriche.

1.5 Ordine tra i numeri reali

Si sa che i numeri reali sono un insieme ordinato; ossia, dati due numeri reali è sempre possibile stabilire che uno è maggiore o uguale all'altro:

$$r \geq s\,, \qquad \text{equivalentemente} \quad s \leq r\,.$$

[3] I numeri complessi verranno introdotti al Cap. 7 e usati al Capitolo 8.

[4] La corrispondenza si costruisce come segue: si fissa un punto O della retta, che si chiama origine, e un'unità di misura per le lunghezze. Ad un numero $a > 0$ corrisponde il numero che dista a dall'origine, a destra di essa; ad $a < 0$ si fa corrispondere il numero che dista $-a$ dall'origine, a sinistra di essa. Il numero 0 corrisponde all'origine delle coordinate.

La proprietà di ordine verifica:

- per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha $r \leq r$.

- se vale $r \leq s$ ed anche $s \leq r$ allora $r = s$.

- se $r \leq s$ ed anche $s \leq t$ allora $r \leq t$.

Scriveremeo $r > s$ quando si intende di escludere che possa aversi l'uguaglianza $r = s$. Chiameremo inoltre $\boxed{\textit{positivo}}$ oppure $\boxed{\textit{negativo}}$ un numero r per cui $r > 0$ oppure $r < 0$.

L'ordine tra i numeri reali permette di definire la $\boxed{\textit{funzione segno}}$ Questa funzione si indica col simbolo $\operatorname{sgn}(x)$ ed è definita come segue[5]:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Si dice che *due numeri a e b "hanno lo stesso segno", o che "hanno segno concorde"*, quando vale $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$.

Si può anche definire il concetto di $\boxed{\textit{intervallo}}$

[5]attenzione il dominio della funzione segno, come qui definita, è $\mathbb{R}$. Certi testi non definiscono $\operatorname{sgn}(x)$ per $x = 0$.

- L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|a < x < b\}$ si chiama $\boxed{\textit{intervallo aperto}}$ di estremi a e b e si indica col simbolo (a, b). Il numero a si chiama estremo sinistro dell'intervallo e il numero b si chiama estremo destro.

- L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x \leq b\}$ si chiama $\boxed{\textit{intervallo chiuso}}$ di estremi a e b e si indica col simbolo $[a, b]$. Il numero a si chiama estremo sinistro dell'intervallo e il numero b si chiama estremo destro.

- Si introducono anche gli $\boxed{\textit{intervalli semiaperti}}$ (a destra o a sinistra) $[a, b)$ e $(a, b]$, definiti da

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x < b\} , \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x \leq b\} .$$

- chiameremo *intervalli aperti* anche gli insiemi illimitati (superiormente il primo, inferiormente il secondo)

$$(a, +\infty) = \{x \,|x > a\} , \qquad (-\infty, b) = \{x \,|x < b\}$$

- chiameremo *intervalli chiusi* anche gli insiemi illimitati (superiormente il primo, inferiormente il secondo)

$$[a, +\infty) = \{x \,|x \geq a\} , \qquad (-\infty, b] = \{x \,|x \leq b\}$$

  Geometricamente, si tratta di semirette verso destra o verso sinistra, che includono o meno il loro estremo.

Osservazione 5 Si noti che nella notazione degli intervalli il simbolo $+\infty$ oppure $-\infty$ indica solamente che l'intervallo che si sta considerando è illimitato superiormente oppure inferiormente. Il simbolo "∞", che si legge "infinito", ha vari significati e comunque **non indica mai un numero.** ■

PROPRIETÀ CRUCIALE DEGLI INTERVALLI

La proprietà cruciale che distingue gli intervalli da altri insiemi di numeri è la seguente: se x ed y sono due elementi di un intervallo I e se z verifica $x < z < y$ allora anche z è un elemento di I. In simboli: *I è un intervallo se e solo se*

$$(\forall x \in I\,, \forall y \in I, \quad \forall z\,|x < z < y) \Rightarrow z \in I\,.$$

Sia I un **intervallo aperto** e sia $x_0 \in I$. Per dire brevemente che I è aperto e che $x_0 \in I$, si dice che I è un $\boxed{\textit{intorno}}$ di x_0.

Se accade che I ha forma $(x_0 - a, x_0 + a)$ allora l'intervallo aperto I si chiama $\boxed{\textit{intorno simmetrico}}$ di x_0.

Per esempio, l'intervallo $(2, 6)$ è intorno di 5 ed è è intorno simmetrico di 4.

Un intervallo aperto $(a, +\infty)$ si chiama anche $\boxed{\textit{intorno di } +\infty}$ Un intervallo aperto di forma $(-\infty, b)$ si chiama anche $\boxed{\textit{intorno di } -\infty}$

Infine, osserviamo le proprietà che legano l'ordine con le operazioni:

- se $a \geq b$ si ha $a + r \geq b + r$ per ogni r;
- vale la "regola dei segni": $ab \geq 0$ se e solo se i due numeri hanno segno concorde.

Si deduce da qui:

- se $a < b$ allora $-a > -b$: *cambiando segno, cambia il verso delle disuguaglianze;*
- i due numeri a e b **abbiano il medesimo segno.** Allora vale

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}\,. \tag{1.3}$$

1.5.1 Operazioni algebriche e punti della retta

Rappresentiamo i numeri reali mediante punti dell'asse delle ascisse (quindi, orizzontale) e indichiamo con P_r il punto che rappresenta il numero reale r (ricordiamo che il numero 0 corrisponde ad O, origine delle coordinate).

In questa rappresentazione, il numero più grande tra due corrisponde al un punto più a destra. In particolare, P_r è a destra di O se $r > 0$; è a sinistra se $r < 0$; P_{r+h} è ottenuto spostando P_r verso destra se $h > 0$, verso sinistra se $h < 0$.

Il punto P_{-r} è il simmetrico rispetto ad O del punto P_r.

1.5.2 L'ordine ed il valore assoluto

Per definizione, si chiama $\boxed{\textit{valore assoluto}}$ di r il numero $|r|$ cosìdefinito

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0 \\ -r & \text{se } r < 0\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Va osservato che:

- il numero r può essere sia positivo che negativo. Se $r < 0$ allora $-r > 0$. Per esempio, se $r = -5$ allora $|-5| = -(-5) = +5 > 0$.

- E' $|0| = 0$ e quindi il segno di uguale in (1.4) può mettersi nella riga di sopra, o in quella di sotto, o in ambedue senza cambiare la definizione.

- La notazione $|r + a|$ è una notazione abbreviata per $|(r + a)|$; ossia, per calcolare $r + a$ si segue questo schema:

$$r \longrightarrow (r + a) \longrightarrow |(r + a)|\,.$$

  In particolare, $|r + a| \neq |r| + a$ anche se $a > 0$. Per esempio, se $r = -5$ si ha

$$\begin{array}{l} |r + 2| = |(r + 2)| = |(-5 + 2)| = |-3| = 3 \\ |r| + 2 = 5 + 2 = 7 \neq |r + 2|\,. \end{array}$$

Le relazioni tra il valore assoluto e le operazioni sono le seguenti

$$\begin{array}{r} |r| \geq 0 \\ |r| = 0 \iff r = 0 \\ |r \cdot s| = |r| \cdot |s| \quad \text{in particolare} \quad |-r| = |r| \\ |r + s| \leq |r| + |s| \qquad \text{(disuguaglianza triangolare).} \end{array}$$

Usando la disuguaglianza triangolare, si può provare che vale anche:

$$\Big| |r| - |s| \Big| \leq |r - s|\,.$$

Osservazione importante Usando il segno di valore assoluto, si possono scrivere in modo breve delle coppie di disequazioni: la scrittura

$$|a| < b$$

equivale a dire che $b > 0$ e inoltre che

$$-b < a < b\,.$$

Invece, la scrittura

$$|a| > b > 0$$

equivale a scrivere che

$$a > b \qquad \text{oppure} \quad a < -b\,.$$

Si esamini il significato delle espressioni $|a| \leq b$ e $|a| \geq b$.

Valore assoluto e distanza

Sia P_a il numero che rappresenta a sull'asse delle ascisse. Il numero $|a|$ rappresenta la distanza di P_a dall'origine O. Se b è un secondo numero e P_b il punto dell'asse delle ascisse che gli corrisponde,

$$|a - b| = |b - a|$$

rappresenta la distanza dei due punti P_a e P_b.

Notiamo ora un modo "complicato" per dire che un numero a è nullo: basta dire che $|a| = 0$, ossia basta richiedere che P_a si sovrapponga all'origine O. Ciò può anche esprimersi richiedendo che $|a|$ sia più piccolo di ogni numero positivo; ossia

Lemma 6 *Vale $a = 0$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ si ha*

$$0 \leq |a| \leq \epsilon\,.$$

In simboli:

$$a = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \Rightarrow 0 \leq |a| \leq \epsilon)\ .$$

1.6 Insiemi limitati di numeri reali

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'insieme A si dice $\boxed{\textit{limitato superiormente}}$ se **esiste** un numero M tale che

$$a \in A \Rightarrow a \leq M\,.$$

Ossia, A è limitato superiormente se esiste un numero M maggiore o uguali a tutti gli elementi di A. Il numero M si chiama un $\boxed{\textit{maggiorante}}$ di A.

Ovviamente, se un maggiorante esiste ne esistono anche altri: se M è un maggiorante, $M+1$, $M+2$,... lo sono.

Può accadere che un maggiorante di A appartenga all'insieme A. Per esempio, se

$$A = \{1\,,2\}$$

allora sia 2 che $2,5$ che 3 ecc. sono maggioranti di A. Il numero 2 è l'unico maggiorante che appartiene ad A.

Invece, l'insieme

$$A = \{x\,|0 < x < 1\}$$

ammette maggioranti. Per esempio 1, $1+1/2$ ecc., ma nessuno gli appartiene.

Un insieme contiene al più uno dei suoi maggioranti.

Se esiste, il maggiorante di A che appartiene ad A si chiama il $\boxed{\textit{massimo}}$ di A.

Esistono insiemi che non sono limitati superirmente, ossia che non ammettono maggioranti.

> Un insieme A non ammette maggioranti quando **per ogni** $M \in \mathbb{R}$ **esiste** $a \in A$ tale che $a > M$. Un tale insieme si dice $\boxed{\textit{illimitato superiormente}}$
>
> In simboli, l'insieme A è superiormente illimitato quando
>
> $$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A\,|a > M\,.$$
>
> L'elemento a è un opportuno elemento di A che dipende da M. per sottolineare ciò spesso lo indichiamo col simbolo a_M.

Si chiama $\boxed{\textit{minorante}}$ di A un numero reale m tale che per ogni $a \in A$ si abbia

$$m \leq a\,.$$

Un insieme che ammette minoranti si chiama $\boxed{\textit{limitato inferiormente}}$ Se invece minoranti non esistono, l'insieme si chiama $\boxed{\textit{illimitato inferiormente}}$

Un insieme può contenere al più uno dei suoi minoranti, il quale, se esiste, si chiama il $\boxed{\textit{minimo}}$ dell'insieme.

Un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente si dice $\boxed{\textit{limitato}}$

La proprietà seguente è ovvia, ma va notata esplicitamente per l'uso che ne faremo in seguito:

Lemma 7 *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se ambedue sono superiormente limitati (oppure inferiormente limitati, oppure limitati) anche la loro unione è superiormente limitata (oppure inferiormente limitata, oppure limitata).*

Dim. Per ipotesi, esistono due numeri M_1 ed M_2 tali che:

$$a \in A \implies a \leq M_1 \, ; \qquad b \in B \implies b \leq M_2 \, .$$

Sia $M = \max\{M_1, M_2\}$; ossia M è il maggiore tra i due numeri M_1 ed M_2. Dunque si ha contemporaneamnete $M_1 \leq M$ ed $M_2 \leq M$.

Per definizione un elemento $c \in A \cup B$ appartiene ad A oppure a B (o ad ambedue). Se $c \in A$ allora $c \leq M_1 \leq M$; se $c \in B$ allora $c \leq M_2 \leq M$. In ogni caso vale $c \leq M$ e quindi $A \cup B$ è superiormente limitato. ■

Illimitatezza dell'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è limitato inferiormente ma non superiormente. Il fatto che sia superiormente illimitato si esprime come segue:

Per ogni numero reale r esiste un numero naturale $n = n_r$ tale che

$$n_r > r \, .$$

In simboli:

$$\forall r \in \mathbb{R} \; \exists n_r \in \mathbb{N} \; | n_r > r \, .$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{proprietà di Archimede}}$

Naturalmente, la proprietà di Archimede può riformularsi dicendo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n} < \epsilon \, .$$

Combinando quest'osservazione col Lemma 6 possiamo enunciare:

Lemma 8 *Vale $a = 0$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$0 \le |a| \le \frac{1}{n}\,.$$

1.7 Estremi superiori ed inferiori

Consideriamo un insieme A di numeri reali, che è superiormente limitato. Come si è detto, al più uno dei maggioranti di A può appartenere ad A e in tal caso tale maggiorante si chiama il $\boxed{\textit{massimo}}$ di A. Se A è superiormente limitato, è certamente non vuoto l'insieme dei maggioranti di A. La **proprietà cruciale che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$** è la seguente: **Proprietà di Dedekind o completezza di $\mathbb{R}$:** l'insieme dei maggioranti dell'insieme superiormente limitato A ammette minimo in $\mathbb{R}$. ■

Ciò giustifica la definizione seguente:

Definizione 9 Il minimo dei maggioranti di A si chiama $\boxed{\textit{estremo superiore}}$ di A e si indica col simbolo

$$\sup A\,. \quad \blacksquare$$

Dunque, si ha

$$L = \sup A$$

quando L è il **più piccolo dei maggioranti di** A e ciò può esprimersi richiedendo le due proprietà seguenti:

- L è **uno** dei maggioranti di A; ossia:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \le L\,;$$

- L è il **più piccolo** dei maggioranti di A; ossia, se $\epsilon > 0$ allora $L - \epsilon$ non è un maggiorante. Dobbiamo quindi richiedere che per ogni $\epsilon > 0$ esista un elemento $a = a_\epsilon$ di A tale che

$$L - \epsilon < a_\epsilon \le L\,.$$

In modo analogo si definisce $\boxed{\textit{estremo inferiore}}$ di A il *massimo dei minoranti di A.* L'esistenza dell'estremo inferiore è equivalente a quella dell'estremo superiore ossia alla proprietà di Dedekind. Introduciamo ora una notazione:

se l'insieme A **non** è limitato superiormente, esso non ammette maggioranti e quindi non ammette estremo superiore. Introduciamo allora la notazione

$$\sup A = +\infty\,,$$

che si legge "estremo superiore di A uguale a più infinito" come notazione breve per dire che A è illimitato superiormente. Analogamente, per dire che A è illimitato inferiormente scriveremo

$$\inf A = -\infty\,.$$

Osservazione 10 Sottolineiamo che $\sup A$ ed $\inf A$ in generale sono **numeri reali** anche se $A \subseteq \mathbb{Q}$; ossia, **la proprietà di Dedekind non vale in $\mathbb{Q}$.** Notiamo anche che la definizione di estremo, data per insiemi generici, è consistente con quella già introdotta nel caso particolare degli intervalli:

$$a = \inf(a,b)\,, \qquad\qquad b = \sup(a,b)\,,$$
$$a = \inf[a,b] = \min[a,b]\,, \quad b = \sup[a,b] = \max[a,b]\,. \quad \blacksquare$$

1.7.1 Conseguenze della proprietà di Dedekind

La proprietà di Dedekind è particolarmente importante perché permette di definire certi numeri che non esistono se non si lavora in $\mathbb{R}$. Per esempio, se $a > 0$:

$$b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

indica un numero $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Ma, chi garantisce l'esistenza di b? Per esempio, se si decide di lavorare solamente con numeri razionali, $b^2 = 2$ è un'equazione priva di soluzioni. E infatti, in $\mathbb{Q}$ la proprietà di Dedekind non vale. Invece, in $\mathbb{R}$ il numero b esiste e si definisce come

$$b = \sup\{x \mid x^n \leq a\}\,.$$

Senza entrare in dettagli ulteriori, diciamo che è grazie alla proprietà di Dedekind che in $\mathbb{R}$ si possono definire i numeri a^r (per qualsiasi esponente reale r, se $a > 0$) e (**per a positivo e diverso da 1** ed $r > 0$) si definisce il numero $\log_a r$. Per definizione,

$$\gamma = \log_a r$$

è il numero che risolve l'equazione

$$a^\gamma = r\,.$$

Ripetiamo, è grazie alla proprietà di Dedekind che questi numeri si possono definire.

Usando la definizione di logaritmo, si provi che (per $r > 0$ ed $a > 0$, $a \neq 1$) valgono le due uguaglianze seguenti:

$$\log_a r = -\log_{1/a} r\,, \qquad \log_a r = \frac{1}{\log_r a}\,.$$

1.8 Funzioni dall'insieme da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Le funzioni che si studiano nel corso di Analisi Matematica 1 operano dall'insieme dei numeri reali nell'insieme dei numeri reali, ossia sono funzioni da $\mathbb{R}$ in sé. Dato che $\mathbb{R}$ ha sottoinsiemi notevoli ed è dotato di operazioni e relazione di ordine, si introducono delle particolari definizioni atte ad identificare proprietà notevoli delle funzioni. Il grafico di una funzione reale di variabile reale si rappresenta usualmente rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse.

Osservazione sui domini

Il dominio di una funzione da $\mathbb{R}$ in sé può essere un insieme qualsiasi. Spesso il dominio è un intervallo o l'unione di più intervalli (si pensi alla funzione $\tan x$). Esistono funzioni importanti che non hanno tale proprietà. Tra queste, le "successioni", che introdurremo al paragrafo 1.8.1.

1.8.1 Le successioni

Un primo caso importante di funzione è quello in cui la funzione ha per dominio **i numeri naturali.** Una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ si chiama $\boxed{\textit{successione}}$ Dunque, una successione dovrebbe indicarsi col simbolo $f(n)$. Si usa invece scrivere (f_n) oppure $\{f_n\}$ per indicare una successione e la variabile n in questo contesto si chiama $\boxed{\textit{indice}}$

La notazione più usata per indicare le successioni è $\{f_n\}$ ma questa notazione è pericolosa perché la parentesi graffa indica anche un insieme; e infatti il simbolo $\{f_n\}$ indica sia la successione, ossia una **funzione,** che la sua **immagine,** ossia un **insieme.** Il significato del simbolo va capito dal contesto.

Sui numeri naturali ripetiamo la stessa osservazione fatta al paragrafo 1.4. Talvolta farà comodo partire dal primo elemento 0, talvolta dal primo elemento 1, talvolta magari scegliere di lavorare con i soli indici maggiori di un certo n_0.

1.8.2 Funzioni ed operazione di somma e prodotto

I numeri reali si sommano e la somma con un numero h fissato è una funzione: la funzione $x \longmapsto x+h$. Sia ora $f(x)$ una funzione che per semplicità pensiamo definita su $\mathbb{R}$. Si può quindi calcolare la funzione composta $x \mapsto f(x+h)$. Dal punto di vista del grafico, il grafico di $f(x+h)$ si ottiene traslando quello di $f(x)$ verso **destra se** $h < 0$**; verso sinistra se** $h > 0$**.** Può accadere che per un certo valore di $T \neq 0$ i grafici di $f(x)$ e di $f(x+T)$ siano indistinguibili; ossia potrebbe accadere che esista un numero $T > 0$ tale che

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom } f.$$

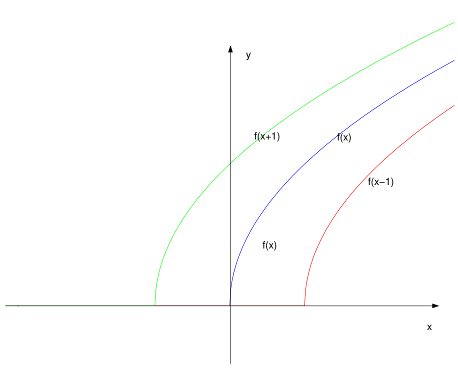
In questo caso la funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{periodica}}$ di $\boxed{\textit{periodo}}$ T. Si noti che:

- esistono funzioni periodiche il cui dominio non è $\mathbb{R}$, per esempio la funzione $\tan x$;

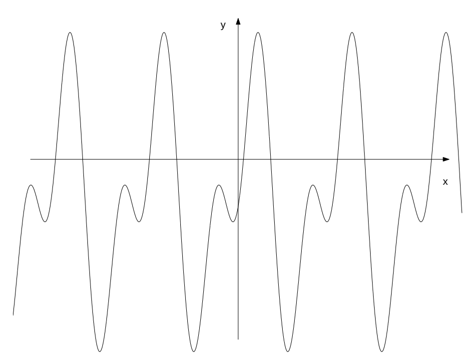
- se una funzione è periodica, essa ammette infiniti periodi: T, $-T$, $2T$, $-2T$ ecc. Se esiste un **minimo periodo positivo** questo si dice il periodo di $f(x)$. Per esempio, $\tan x$ ha periodo π mentre $\sin x$ ha periodo 2π.

Figura 1.1: Spiegazione funzioni periodiche

(a) $f(x)$ (blu), $f(x-1)$ (rosso), $f(x+1)$ (verde)



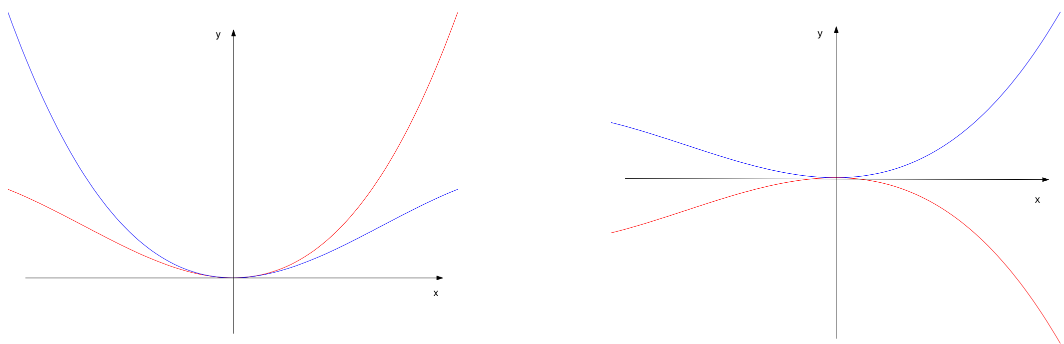
(b) funzione periodica



Tra i numeri reali si può fare anche il prodotto. Si può quindi considerare la trasformazione $x \mapsto ax$ che, se a è positivo corrisponde niente altro che a un cambiamento dell'unità di misura. Quindi il grafico della funzione $f(ax)$ si ottiene da quello di $f(x)$ "allargandolo" o "comprimendolo", in senso orizzontale. Più interessante è la moltiplicazione per numeri negativi, e basta considerare la moltiplicazione per -1. Il grafico di $f(-x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ facendone il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Figura 1.2: Simmetria funzioni rispetto agli assi

(a) $f(x)$ e $f(-x)$ (b) $f(x)$ e $-f(x)$



Può accadere che i due grafici, di $f(x)$ e di $f(-x)$, coincidano; ossia che valga

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom } f.$$

In questo caso la funzione si dice una $\boxed{\textit{funzione pari}}$ **Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.** Consideriamo invece $g(x) = -f(x)$. Il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ facendone il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Si accade che questo coincide col grafico di $f(-x)$ la funzione si chiama $\boxed{\textit{dispari}}$ Ossia, una funzione dispari è una funzione che verifica

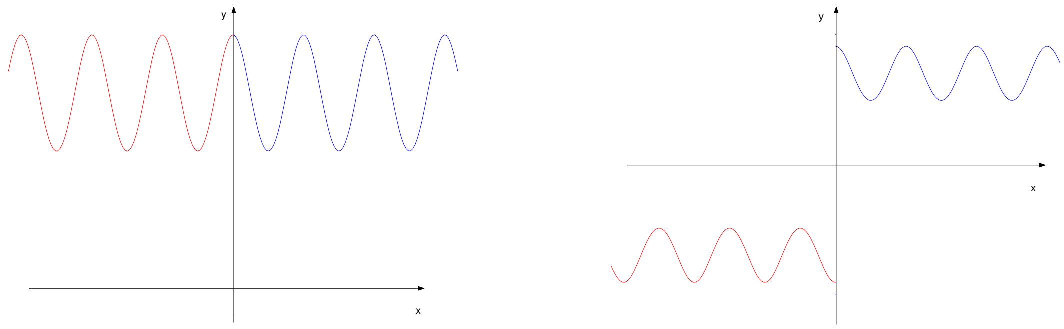
$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom } f.$$

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. I due casi sono illustrati nella figura 1.3. Ripetiamo che le funzioni che si considerano potrebbero non essere definite su $\mathbb{R}$; però:

- una funzione periodica ha dominio illimitato;
- una funzione pari oppure dispari ha dominio simmetrico rispetto ad O.

Figura 1.3: Funzioni pari e funzioni dispari

(a) funzione pari (b) funzione dispari



Estensioni pari, dispari e per periodicità

Sia $f(x)$ una funzione il cui dominio è contenuto in $[0,+\infty)$. La sua *estensione pari* è definita imponendo $f(x) = f(-x)$. La sua *estensione dispari* è definita imponendo $f(x) = -f(-x)$. Si possono trovare espressioni esplicite per queste estensioni: l'estensione pari è $f(|x|)$. Invece, l'estensione dispari ha un'espressione più complicata. Non è necessario conoscerla, ma trovarla è un utile esercizio (si vedano gli esercizi alla fine di questo capitolo). Analogamente, sia $f(x)$ definita su $[0,T]$. La sua *estensione per periodicità* si ottiene in questo modo: dato $x \notin [0,T]$ si calcola $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x-nT \in [0,T]$. Si pone quindi

$$f(x) = f(x - nT)\,.$$

1.8.3 Funzioni e relazione di ordine

L'uso della relazione di ordine conduce ai concetti importantissimi di funzione *limitata*, funzione *monotona* (crescente o decrescente) e funzione *convessa*

Le funzioni limitate

Una funzione $f(x)$ si dice *limitata superiormente* quando è limitata superiormente la sua immagine; ossia quando **esiste** un numero M tale che **per ogni** $x \in \operatorname{dom} f$ si ha

$$f(x) \le M\,.$$

Dunque, una funzione è limitata superiormente se e solo se i punti $(x, f(x))$ del suo grafico appartengono al semipiano

$$\{(x,y)\ |y \le M\}\,.$$

Analogamente, una funzione è $\boxed{\textit{limitata inferiormente}}$ se è limitata inferiormente la sua immagine; ossia se e siste m tale che $f(x) > m$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$; ed è $\boxed{\textit{limitata}}$ se limitata è la sua immagine, ossia se esistono m ed M tali che $m < f(x) < M$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Inoltre:

Lemma 11 *Una funzione è:*

limitata superiormente se e solo se il suo grafico è contenuto in un semipiano $\{(x, y) \,|y < M\}$*;*

limitata inferiormente se e solo se il suo grafico è contenuto in un semipiano $\{(x, y) \,|y > m\}$*;*

è limitata se e solo se il suo grafico è contenuto in una striscia orizzontale $\{(x, y) \,|m < y < M\}$*.*

Infine, notiamo questa proprietà, conseguenza del Lemma 7:

Lemma 12 *Siano* $f_1(x)$ *ed* $f_2(x)$ *due funzioni limitate e supponiamo che* $(\operatorname{dom} f_1) \cap (\operatorname{dom} f_2) = \emptyset$*. Sia*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in \operatorname{dom} f_1 \\ f_2(x) & \text{se} \quad x \in \operatorname{dom} f_2 \,. \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ *è limitata.*

<u>Dim</u>. Si noti che $\operatorname{im} \ f = (\operatorname{im} \ f_1) \cup (\operatorname{im} \ f_2)$, ambedue insiemi limitati, e si usi il Lemma 7. ■

Analogo enunciato vale se si considera la sola limitatezza da sopra o da sotto. In particolare:

Corollario 13 *Sia* $x_0 \in \operatorname{dom} f(x)$ *e sia* $g(x) = f(x)$ *per* $x \neq x_0$*. Se* $g(x)$ *è limitata, anche* $f(x)$ *lo è.*

Ossia: **il valore che la funzione prende in un solo punto non influisce sulla proprietà della funzione di essere o meno limitata.**

La monotonia

Una funzione si dice $\boxed{\textit{monotona crescente}}$ quando:

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \text{tali che } x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \,;$$

Si dice $\boxed{\textit{monotona decrescente}}$ quando:

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \text{tali che } x_1 > x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \,.$$

Si noti che le disuguaglianze tra i punti x_i sono strette, mentre a destra potrebbe valere anche l'uguaglianza. Si parla di funzioni $\boxed{\textit{strettamente monotone}}$ quando sono monotone ed inoltre $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Un modo apparentemente più complicato, ma più utile, di definire la monotonia è il seguente: una funzione è crescente se $(f(x_1) - f(x_2))$ ha lo stesso segno di $(x_1 - x_2)$; decrescente se i segni sono opposti. Usando la regola dei segni:

- Una funzione è crescente su I se
$$\forall x_1 \in I\,, \forall x_2 \in I \quad \text{tali che } x_1 \neq x_2 \text{ si ha} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\,;$$

- Una funzione è decrescente su I se
$$\forall x_1 \in I\,, \forall x_2 \in I \quad \text{tali che } x_1 \neq x_2 \text{ si ha} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\,.$$

In queste relazioni va richiesto $x_1 \neq x_2$ (non si può dividere per 0) ma l'ordine in cui si susseguono x_1 ed x_2 non interviene.

Osservazione 14 E' bene osservare quanto segue:

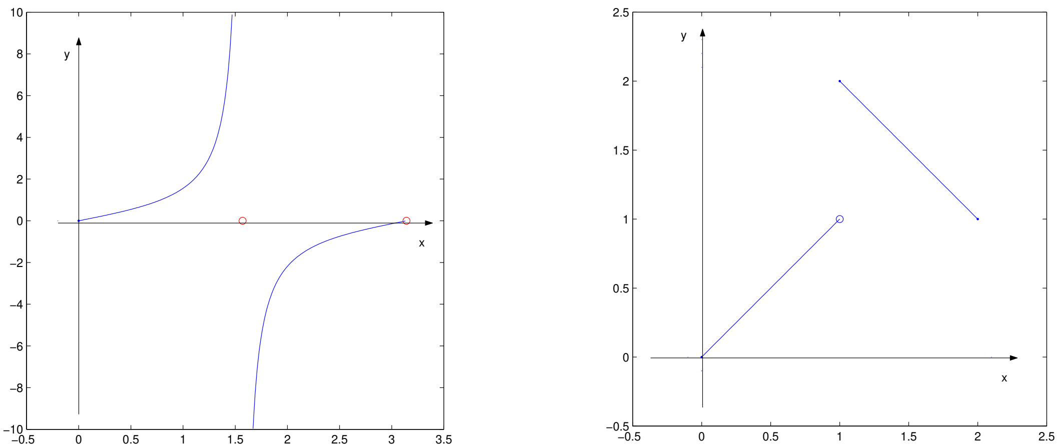
- la funzione $\tan x$ **non è monotona sul suo dominio.**

- Ogni funzione **strettamente** monotona è iniettiva e quindi invertibile.

- Esistono funzioni iniettive e non monotone. Un esempio è la funzione $f(x) = \tan x$ definita sull'insieme $[0, \pi) - \{\pi/2\}$. Questa funzione trasforma il suo dominio, che non è un intervallo, in modo biunivoco su $\mathbb{R}$. Si possono anche trovare funzioni iniettive e non monotone, che trasformano intervalli limitati in intervalli limitati, come per esempio la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$
I grafici sono in figura *1.4* ■

Figura 1.4: Funzioni iniettive ma non monotone

(a) Funzione tangente (b) Funzione definita a tratti



MONOTONIA E FUNZIONE INVERSA

Naturalmente, una funzione **strettamente monotona** è iniettiva e quindi ammette funzione inversa. **Una funzione strettamente crescente (decrescente) ha funzione inversa strettamente crescente (decrescente).** Infatti,

$$f(x_1) = y_1\,, \quad f(x_2) = y_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}$$

e quindi i due rapporti hanno il medesimo segno. Ripetiamo che gli esempi in figura 1.4 mostrano che **esistono funzioni non monotone ed invertibili.**

1.8.4 I punti di estremo

Se vale $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, il numero $f(x_0)$ è il massimo dell'immagine della funzione ed il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{punto di massimo}}$ per la funzione $f(x)$. Se vale $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, il numero $f(x_0)$ è il minimo dell'immagine della funzione ed il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{punto di minimo}}$ per la funzione $f(x)$. Supponiamo che esista un intorno I di x_0 e che x_0 sia punto di massimo oppure di minimo per la **restrizione** di $f(x)$ a tale intorno. Allora, il punto x_0 si dice rispettivamente $\boxed{\textit{punto di massimo relativo}}$ oppure $\boxed{\textit{punto di minimo relativo}}$ della funzione

$f(x)$. I punti di massimo oppure di minimo si chiamano $\boxed{\textit{punti di estremo}}$ della funzione. Invece che "estremo relativo" si dice anche $\boxed{\textit{estremo locale}}$ Per distinguere i punti di massimo o di minimo dai punti di massimo o di minimo relativo i primi si chiamano anche $\boxed{\textit{estremi assoluti}}$ o $\boxed{\textit{estremi globali}}$ della funzione: massimi o minimi assoluti, equivalentemente massimi o minimi globali. Infine, notiamo questa proprietà:

Lemma 15 *Sia $f(x)$ definita su un intervallo $[a,b]$ e sia $c \in (a,b)$. Supponiamo che la restrizione di $f(x)$ ad $[a,c]$ sia* crescente *e che la restrizione a $[c,b]$ sia* decrescente. *Allora, il punto c è punto di massimo per la funzione $f(x)$. Invece, il punto c è punto di minimo se $f(x)$* decresce *su $[a,c]$ e* cresce *su $[c,b]$.*

Facendo opportuni esempi, si mostri che niente può dirsi se $f(x)$ è crescente su $[a,c)$ e decrescente su $(c,b]$.

1.8.5 La convessità

A differenza delle definizioni di funzione limitata e di funzione monotona, la definizione di funzione convessa si applica solo a funzioni definite su intervalli. Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $[a,b]$. Per fissare le idea, richiediamo che l'intervallo sia chiuso e limitato, ma ciò non è importante. **Per la definizione di funzione convessa, è importante che il dominio sia un intervallo.** Siano x_1 ed x_2 due punti in $[a,b]$. Si chiama $\boxed{\textit{corda}}$ il segmento che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$. La funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{convessa}}$ se la proprietà seguente vale **per ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 in $[a,b]$: il grafico della restrizione di $f(x)$ ad $[x_1, x_2]$ è **sotto** la corda che unisce $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$. Non si esclude che il grafico possa almeno in parte coincidere con la corda stessa. Se $-f(x)$ è convessa, la funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{concava}}$ La figura 1.5 riporta il grafico di una funzione convessa e di una né concava né convessa.

Quando una funzione è convessa si dice anche che **il suo grafico ha la concavità rivolta verso l'alto.**

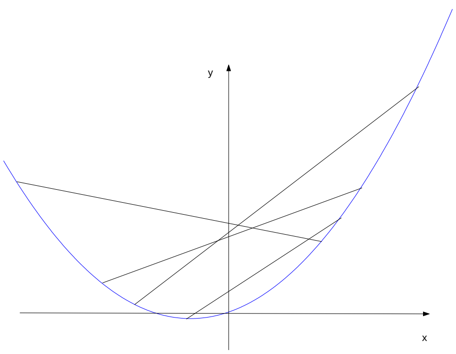
1.8.6 Grafici di funzioni elementari

Si riportano i grafici di alcune funzioni elementari, ossia:

- le funzioni $f(x) = x^2$ ed $f(x) = \sqrt{x}$ in figura 1.6, a sinistra e $f(x) = x^3$ ed $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in figura 1.6, a destra;

Figura 1.5: Concavitá delle funzioni

(a) Funzione convessa



(b) Funzione né concava né convessa

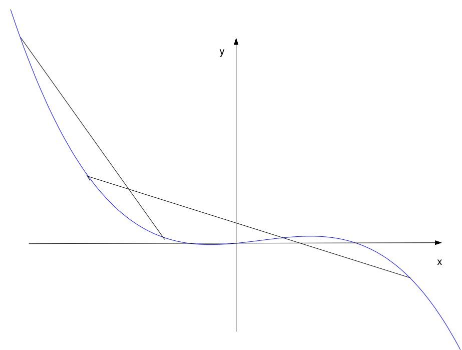
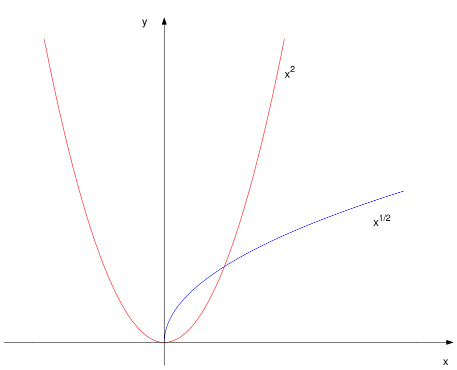
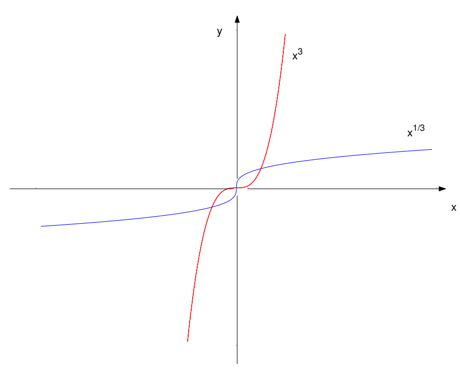


Figura 1.6: Funzioni elementari: potenze e radici

(a) Per $n = 2: \ f(x) = x^n$ ed $f(x) = \sqrt[n]{x}$



(b) Per $n = 3 \ f(x) = x^n$, ed $f(x) = \sqrt[n]{x}$



- la funzione $f(x) = |x|$ e la funzione $H(x)$

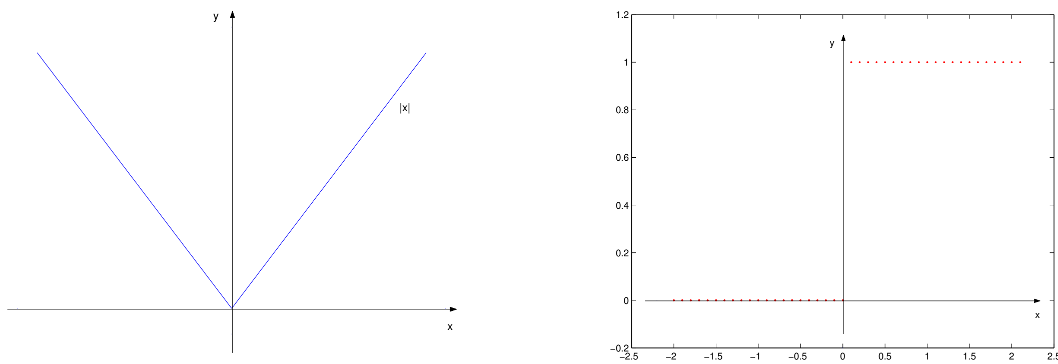
$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La funzione $H(x)$ si chiama funzione di $\boxed{\textit{Heaviside}}$ I grafici sono in figura 1.7.

Figura 1.7: Funzioni elementari: valore assoluto e Heaviside

(a) Valore assoluto

(b) Funzione di Heaviside (grafico punteggiato)



- ricordiamo che la $\boxed{\textit{funzione segno}}$ è la funzione

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il grafico è in figura 1.8, a sinistra. Per esercizio, si faccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

e si confronti con quello della funzione $\operatorname{sgn}(x)$.

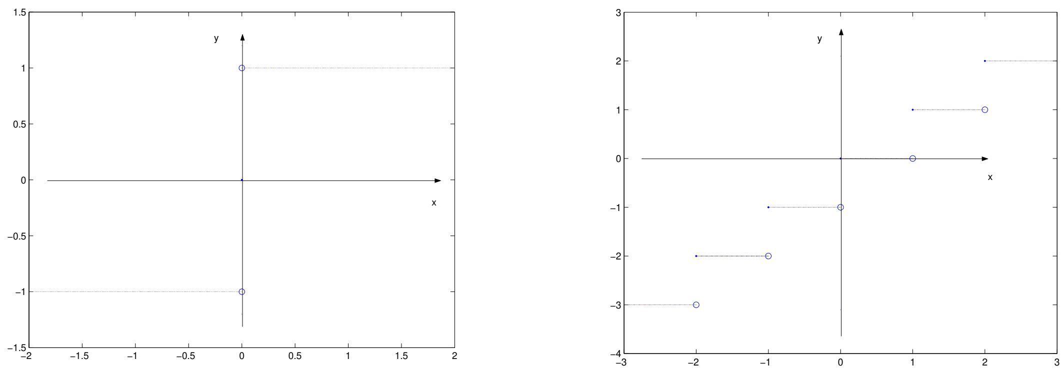
- la funzione $\boxed{\textit{parte intera}}$ Questa funzione si indica col simbolo $[x]$ e ad ogni x reale fa corrispondere il più grande intero minore od uguale ad x. Il grafico è in figura 1.8, a destra.

- la funzione $\boxed{\textit{mantissa}}$ Questa funzione si indica col simbolo $M(x)$ e per definizione è

$$M(x) = x - [x]$$

Figura 1.8: Funzioni elementari: segno e parte intera

(a) Funzione segno (b) Funzione parte intera



(ove $[\ldots]$ indica "parte intera"). Il grafico è in figura 1.9, a sinistra[6]

- la funzione $\boxed{\textit{seno cardinale}}$, abbreviata $\boxed{\textit{sinc}}$. Si tratta della funzione

$$\textit{sinc}\ x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

  Il grafico è in figura 1.9, a destra.

- le due $\boxed{\textit{funzioni di Fresnel}}$ Le funzioni di Fresnel sono le funzioni $\sin x^2$ e $\cos x^2$. I grafici sono in figura 1.10.

A partire da una data funzione $f(x)$ si definiscono inoltre le funzioni seguenti:

$$f_+(x) = \max\{f(x)\,,0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } \ f(x) \geq 0 \\ 0 & \quad \text{altrimenti,} \end{cases}$$
$$f_-(x) = \min\{f(x)\,,0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } \ f(x) \leq 0 \\ 0 & \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

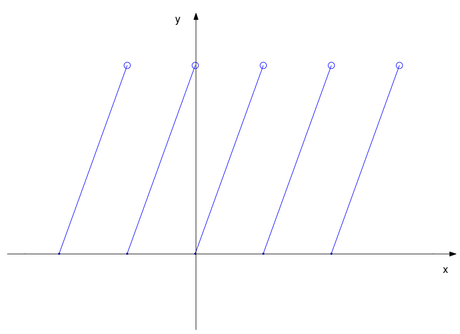
Si faciano alcuni esempi e si noti che:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f_+(x) - f_-(x).$$

[6]talvolta viene detto che $M(x)$ è la "parte decimale" del numero x. Ciò è corretto se x si rappresenta con la usuale notazione posizionale, come $x = x_0 \cdot 10^0 + \left[x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} \cdots\right]$ (i coefficienti x_0, x_1, … sono interi). In tal caso, $M(x) = \left[x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} \cdots\right]$. Però i numeri si possono rappresentare anche in altri modi. Per es. $1 = 0,9999\ldots$ ma questa non è la rappresentazione di 1 in notazione posizionale e la mantissa non è la "parte decimale" di questa rappresentazione.

Figura 1.9: Funzioni elementari: mantissa e seno cardinale

(a) Funzione mantissa



(b) Funzione seno cardinale

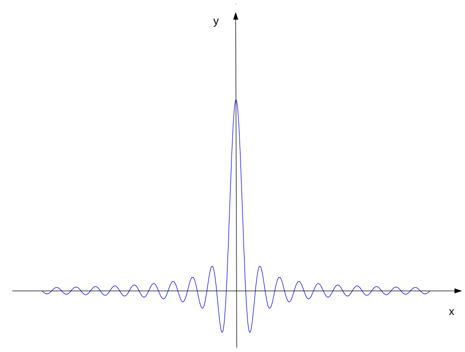
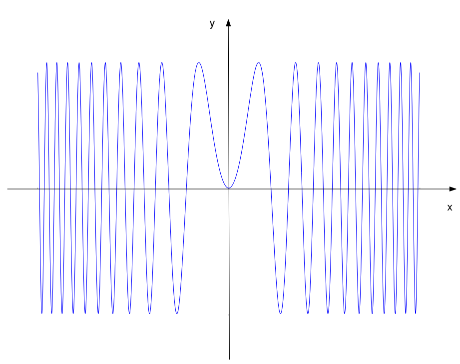
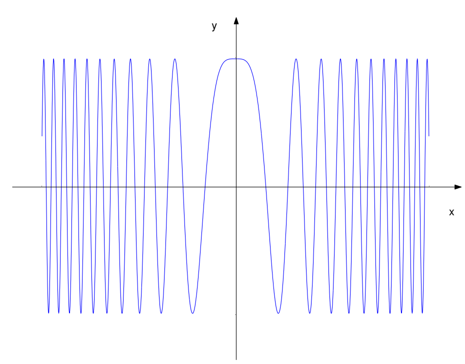


Figura 1.10: Funzioni di Fresnel

(a) $\sin x^2$



(b) $\cos x^2$

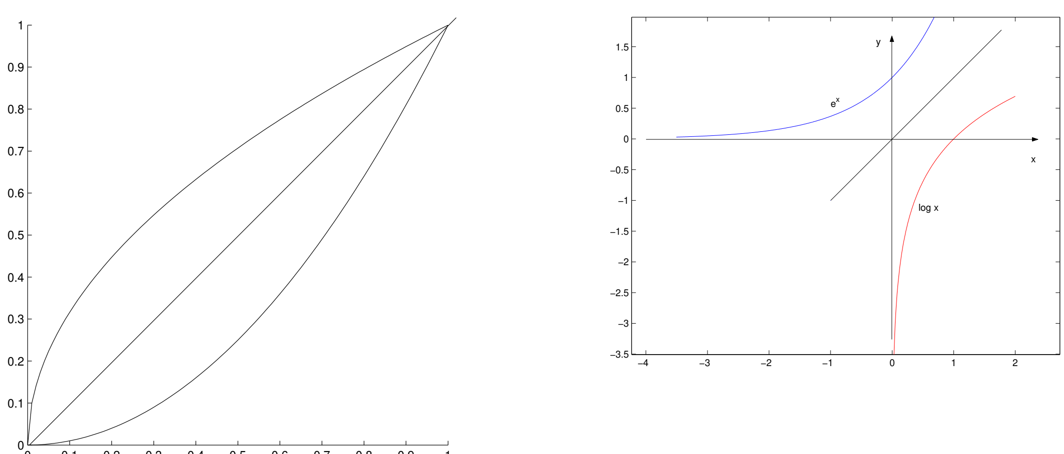


1.8.7 Grafici di funzioni inverse l'una dell'altra

Premettiamo un'osservazione: consideriamo il punto $P(a, b)$ del piano cartesiano e vogliamo disegnare il punto $Q(b, a)$. Questo coincide con P se $a = b$; altrimenti ne è il simmetrico[7] rispetto alla prima bisettrice. Ossia si ottiene considerando la retta per P ortogonale alla prima bisettrice; prendendo il punto Q su tale retta, dalla parte opposta di P e che ha la medesima distanza dalla bisettrice. Si studi in particolare come i punti $(t, 0)$, con $a \leq t \leq b$, si ottengono dai punti $(0, t)$; i punti $(t, 2t)$ dai punti $(2t, t)$. Siano f e $g = f^{-1}$ due funzioni inverse l'una dell'altra. Allora, se f opera dall'asse delle ascisse ed ha immagine sull'asse delle ordinate, la g opera dall'asse delle ordinate ed ha immagine sull'asse delle ascisse. Il punto y appartiene al dominio di g quando $y = f(x)$ (per una unica x) e in tal caso il corrispondente di $y = f(x)$ è proprio $g(y) = x$. Quindi, se abbiamo il grafico di f, abbiamo anche il grafico di g, ma con l'insieme di partenza rappresentato dall'asse delle ordinate. In pratica vogliamo rappresentare g nel modo usuale, ossia con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse. Per questo notiamo che il punto $(y, g(y))$ del grafico di g, disegnato con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse, ha coordinate $(f(x), x)$, punto simmetrico, rispetto alla prima bisettrice, di $(x, f(x))$. Ciò vale per tutti i punti del grafico e quindi **il grafico di g si ottiene a partire da quello di f, facendone il simmetrico rispetto alla prima bisettrice, come in figura 1.11.**

Figura 1.11: Funzioni inverse: radice, potenza, logaritmo ed esponeneziale

(a) $\sqrt{x}$ inversa di x^2 (b) $\log x$ inversa di e^x



[7]simmetria ortogonale

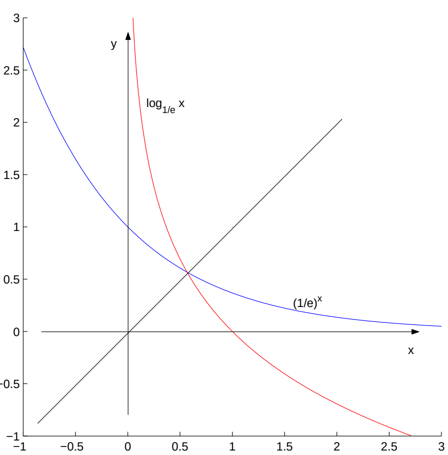
Particolari funzioni inverse sono la funzione esponenziale e la funzione logaritmo (con la medesima base $a > 0$ e diversa da 1). Infatti, la funzione $\log_a x$ si ottiene risolvendo rispetto ad y l'equazione

$$a^y = x\,.$$

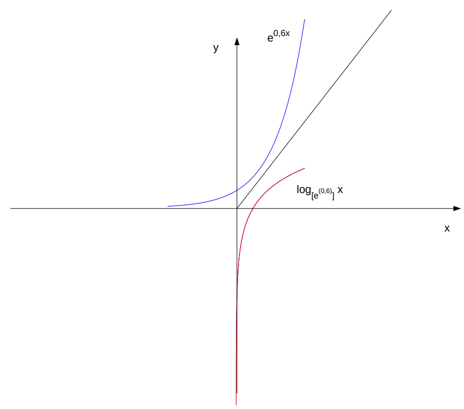
La funzione a^x ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(0, +\infty)$. Dunque, $\log_a x$ ha dominio $(0, +\infty)$ ed immagine $\mathbb{R}$. La figura 1.12 riporta i grafici delle funzioni logaritmo ed esponenziale nel caso $0 < a < 1$ (a sinistra) e nel caso $a > 1$ a destra.

Figura 1.12: Funzioni esponenziale e logaritmo con diverse basi

(a) Nel caso $0 < a < 1$ funzione esponenziale e funzione logaritmo



(b) Nel caso $a > 1$ funzione esponenziale e funzione logaritmo



Può accadere che certe funzioni non siano invertibili, ma che le loro restrizioni ad opportuni insiemi lo siano. In tal caso si potrà considerare la funzione inversa di tali restrizioni. Per esempio, la funzione $\sqrt{y}$, con $y \geq 0$, si ottiene risolvendo l'equazione

$$x^2 = y$$

e imponendo l'ulteriore condizione $x > 0$. La soluzione, con la condizione $x > 0$, è unica e quindi la restrizione ad $x > 0$ di $f(y) = x^2$ è invertibile. Per esercizio, si traccino i grafici di queste funzioni. Quindi si tracci il grafico della funzione $f(x) = x^2$ definita su $x \leq 0$, e il grafico della sua funzione inversa, che è $g(x) = -\sqrt{x}$.

1.8.8 Le inverse delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive e quindi nemmeno invertibili. E' però possibile trovare degli intervalli su cui le

restrizioni delle funzioni trigonometriche sono iniettive e quindi invertibili. Le funzioni che si ottengono mediante restrizioni **ad intervalli particolari** si incontrano spesso in pratica, ed hanno nomi particolari. I loro grafici sono in figura 1.13.

La funzione $\arctan x$ La restrizione della funzione $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è monotona strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(-\pi/2, \pi/2)$. La funzione inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si chiama “arcotangente” e si indica col simbolo $\arctan x$.

La funzione $\arcsin x$ La restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $[-\pi/2, \pi/2]$. La funzione inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ si chiama “arcoseno” e si indica col simbolo $\arcsin x$.

La funzione $\arccos x$ La restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $[0, \pi]$. La funzione inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ si chiama “arcoCOseno” e si indica col simbolo $\arccos x$.

La funzione $\mathrm{arccotg}\ x$ La restrizione funzione $\cot x$ all'intervallo $(0, \pi)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è monotona strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(0, \pi)$. La funzione inversa della restrizione di $\cot x$ all'intervallo $(0, \pi)$ si chiama “arcoCOtangente” e si indica col simbolo $\mathrm{arccotg}\, x$.

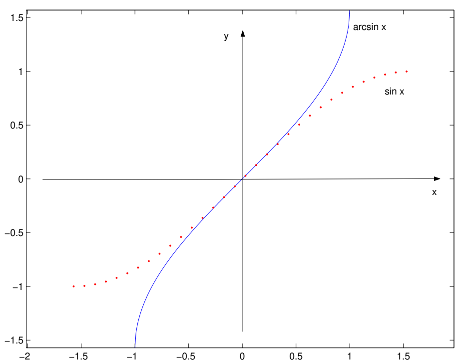
1.9 Funzioni ed “espressioni analitiche”

Per ragioni didattiche le funzioni che si studiano sono spesso assegnate mediante “espressioni analitiche”[8], ossia specificando certe operazioni da applicare ad una “variabile”: per esempio della variabile si calcolano le potenze, i logarirmi, il valore assoluto ecc., e queste operazioni si combinano insieme per “definire” una funzione. Di conseguenza si è portati a confondere

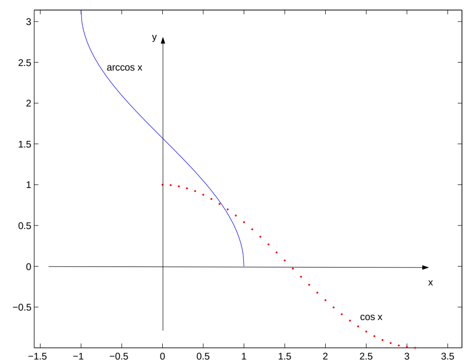
[8] notare che il concetto di “espressione analitica” è qualcosa di vago e molto elastico: $\sin x$, costruita con considerazioni meccaniche, è un'espressione analitica?

Figura 1.13: Le funzioni trigonometriche e le relative inverse

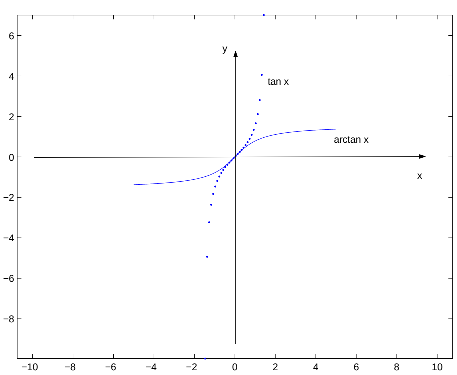
(a) $\sin x$ e la sua inversa $\arcsin x$



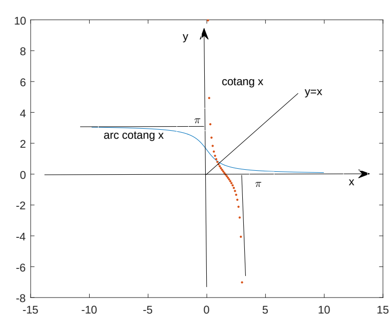
(b) $\cos x$ e la sua inversa $\arccos x$



(c) $\tan x$ e la sua inversa $\arctan x$



(d) $\cot x$ e la sua inversa arccotg x



tali operazioni analitiche col concetto stesso di funzione. E' importante sottolineare che ciò è sbagliato. Prima di tutto non è vero che ogni funzione si assegni mediante "espressioni analitiche". Si pensi per esempio alla mantissa o alla funzione che ad ogni numero assegna l'intero più vicino. Oppure, si pensi ad una funzione ottenuta mediante misure sperimentali, come quella che rappresenta la temperatura registrata da un termografo in un certo luogo e durante un certo intervallo di tempo. D'altra parte, una funzione è una trasformazione da un assegnato dominio; e il dominio deve essere dato nello stesso momento in cui si assegna la funzione. Consideriamo ora quest'esempio: sia

$$f(x) = \sqrt{2x} \qquad \text{definita per } x \in [0,1]$$
$$g(x) = x^2 \qquad \text{definita per } x \in \mathbb{R}\,.$$

La funzione composta

$$g(f(x)) = 2x$$

ha dominio $[0,1]$ ed è quindi ben diversa dall'"espressione analitica" $2x$, che può essere calcolata per ogni x. Se vogliamo considerare $2x$ come funzione su $\mathbb{R}$, questa non è $g(f(x))$: è una delle infinite estensioni ad $\mathbb{R}$ di $g(f(x))$. Ciò nonostante negli esercizi d'esame compaiono frequentemente testi del tipo "determinare il dominio della funzione". Convenzionalmente e al solo scopo di verificare la capacità di risolvere disequazioni, nei compiti d'esame si assume che una funzione sia definita sul più grande insieme sul quale **tutte** le operazioni che entrano nella sua definizione si possono fare. Considerando l'esempio delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ date sopra, diremo convenzionalmente che $f(x)$ è definita per $x \geq 0$ e quindi che

$$g(f(x)) = \left(\sqrt{2x}\right)^2$$

è anch'essa definita per $x \geq 0$. E' **sbagliato** dire che $g(f(x))$ è definita su $\mathbb{R}$.

1.10 Appendice: progressioni

Si chiamano $\boxed{\textit{progressioni}}$ certe successioni particolari. Tra queste le progressioni aritmetiche e le progressioni geometriche. le $\boxed{\textit{progressioni aritmetiche}}$ sono le successioni $\{x_n\}$ per cui

$$x_1 = a\,, x_2 = a + d\,, x_3 = a + 2d\,, x_{n-1} = a + (n-2)d\,,\ x_n = a + (n-1)d\ \ldots\ldots$$

Si noti che il primo indice della successione aritmetica è 1. Serve ricordare questa convenzione per interpretare correttamente le

formule. La proprietà essenziale delle progressioni aritmetiche è che

$$x_n + x_1 = 2a + (n-1)d = x_{n-1} + x_2 = x_{n-2} + x_3 \dots\dots$$

Vale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = n\frac{x_0 + x_n}{2} = n\frac{2a + (n-1)d}{2}\,.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} 2S_n &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1) \\ &= (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \dots (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) \\ &= n(x_1 + x_n) = n\left(2a + (n-1)d\right)\,. \end{aligned}$$

Nel caso particolare $a = 0$ e $d = 1$ si trova

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.5}$$

Invece, non esitono formule per il prodotto dei termini di una successione aritmetica. Si chiama $\boxed{\textit{progressione geometrica}}$ una successione $\{x_n\}$ tale che

$$x_0 = a = aq^0\,, \quad x_1 = aq\,, \quad x_2 = aq^2\,, \quad x_n = aq^n\,, \dots\dots$$

Il numero q si chiama $\boxed{\textit{ragione}}$ della progressione geometrica. **Si noti che il primo indice della successione geometrica è 0. Serve ricordare questa convenzione per interpretare correttamente le formule.** Un fatto importante delle successioni geometriche è che esistono formule sia per il prodotto che per la somma dei primi $n+1$ elementi (quelli di indice da 0 ad n). A noi interessa principalmente la formula per la somma. Indichiamo tale somma con S_n:

$$S_n = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right)\,.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} S_n + aq^{n+1} = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}\right) = \\ a\left(1 + q\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right)\right) = \\ a + qS_n \end{aligned}$$

da cui

$$S_n = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right) = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,. \tag{1.6}$$

Per completezza diamo anche la formula del prodotto

$$P_n = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1} \cdot x_n .$$

Ricordiamo che in questo prodotto ogni i fattori sono $x_k = aq^k$ con k **che prende anche il valore** 0**.** Dunque il fattora a compare $(n+1)$ volte (una volta quando l'indice è 0, una volta quando l'indice è 1 ecc.) e, ricordando la (1.5),

$$P_n = a^{n+1} \cdot q \cdot q^2 \cdot q^n = a^{n+1} q^{1+2+\cdot+n} = a^{n+1} q^{n(n+1)/2} .$$

1.11 Alcuni esercizi

1. Dire se è possibile che $A \cap B$ oppure $A - B$ siano limitati, con A e B ambedue insiemi illimitati di $\mathbb{R}$.

2. Sia B^C il complementare di B. Provare le uguaglianze

$$A \cap B = A \setminus B^C\,, \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C\,, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C\,.$$

3. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due qualsiasi funzioni a valori reali, definite su $\mathbb{R}$. Mostrare che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} &\{x\,|f(t) \le t\,, g(x) \le t\} = \{x\,|f(x) \le t\} \cap \{\,|g(x) \le t\} = \\ &= \{x\,|f(x) \le t\} \setminus \{x\,|g(x) > t\} = \{x\,|f(x) \le t\} \cap \{x\,|g(x) > t\}^{\mathcal{C}} . \end{aligned}$$

4. Siano a e b due numeri reali non nulli, con lo stesso segno, e tali che $a > b$. Mostrare che $1/a < 1/b$. Discutere cosa accade se a e b hanno segno opposto.

5. **(**$\star$**)** Rappresentare sul piano cartesiano ciascuno degli insiemi

$$\begin{aligned} &\left\{(x,y)\,|x^2 < y^2\right\}, \{(x,y)\,||x| < |y|\}\,, \quad \left\{(x,y)\,|x^3 < y^3\right\}\,, \\ &\left\{(x,y)\,|x^2 \le y^2\right\}, \{(x,y)\,||x| \le |y|\}\,, \quad \left\{(x,y)\,|x^3 \le y^3\right\}\,. \end{aligned}$$

6. Dire se esistono funzioni da $\mathbb{R}$ in sé che soddisfano ad una delle proprietà seguenti:

   - $\forall c \in \mathbb{R}\,, \forall x \in\ \mathrm{dom}\, f$ si ha $f(x) > c$;
   - $\forall c \in \mathbb{R} \exists x \in\ \mathrm{dom}\ f$ tale che $f(x) > c$.

Scrivere inoltre la negazione delle proposizioni precedenti, e dire se esistono funzioni che verificano le proposizioni ottenute.

7. Si dica se è possibile che $f(x)$ sia contemporaneamente pari e dispari.

8. Si dica se è possibile che valga $f(x) = |f(x)|$, $f(x) = f(|x|)$, $f(x) = f(|x|) = |f(x)|$.

9. Si dica se una funzione pari può essere iniettiva.

10. Si dica se una funzione pari può essere monotona oppure strettamente monotona.

11. Si dica se una funzione dispari può essere iniettiva oppure non iniettiva; monotona crescente oppure decrescente.

12. Il dominio di una funzione periodica deve essere "invariante per traslazioni"; ossia, se T è un periodo e se $x \in \operatorname{dom} f$, deve essere $x + T \in \operatorname{dom} f$. Mostrare che anche $x + rT \in \operatorname{dom} f$ per ogni intero r.

13. Si dica se una funzione periodica può essere monotona, strettamente o meno.

14. Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ e, a partire da esso, si disegnino i grafici di $f_+(x)$, $f_-(x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, $\operatorname{sgn}(f(x))$, $f(\operatorname{sgn}(x))$, $H(f(x))$ ed $f(H(x))$ ove $H(x)$ indica la funzione di Heaviside.

15. Mostrare che la somma ed il prodotto di funzioni limitate sono funzioni limitate.

16. Sia $f(x)$ definita su $(0,1)$ come segue: se x è irrazionale, $f(x) = 0$; se x è razionale, sia $x = p/q$ la sua unica rappresentazione come frazione ridotta ai minimi termini. Allora $f(x) = f(p/q) = 1/q$. Mostrare che la funzione è illimitata in ogni sottointervallo di $(0,1)$.

17. I domini di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono contenuti in $\mathbb{R}$ ed inoltre $f(x)$ estende $g(x)$. Cosa può dirsi degli estremi inferiori e superiori dei domini?

18. I domini di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono contenuti in $\mathbb{R}$. Si sa che

    $$\inf(\operatorname{dom} f(x)) = \inf(\operatorname{dom} g(x)), \qquad \sup(\operatorname{dom} f(x)) = \sup(\operatorname{dom} g(x)).$$

    Dire se è possibile che $f(x)$ estenda $g(x)$.

19. Due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli insiemi siano diversi.

20. Due intervalli hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

21. Due intervalli ambedue aperti hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

22. Due intervalli ambedue chiusi hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

23. ($\star$) Sia $f(x)$ una funzione limitata. Mostrare che $1/f(x)$ può non essere limitata.

24. ($\star$) Mostrare che $1/f(x)$ può essere limitata anche se $f(x)$ non è limitata.

25. ($\star$) Dare una condizione su $f(x)$ che implichi che $1/f(x)$ è limitata.

26. Dire se una funzione può avere più di un punto di minimo assoluto.

27. Dire se una funzione può avere estremi relativi ma non assoluti.

28. Dire se un punto può essere contemporaneamente di massimo relativo ed assoluto per una funzione.

29. Dire se una funzione monotona può avere massimi assoluti o relativi.

30. Dire se una funzione strettamente monotona può avere più di un punto di massimo, assoluto oppure relativo.

31. Sia $f(x) = x^n \sin^2(1/x)$ se $x \neq 0$, ed $f(0) = 0$. Dire per quali valori di n la funzione ha minimo in $x = 0$

32. Sia $f(x)$ definita su $(0, 2)$ ed ivi crescente. Dire se è possibile che la sua restrizione a $(0, 1)$ sia illimitata inferiormente oppure superiormente.

33. Disegnare i grafici richiesti:

    - Sia $f(x) = x$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$;
    - Sia $f(x) = x^2$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$;

- Sia $f(x) = 1/x$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$.

34. In questo esercizio, $[x]$ ed $M(x)$ denotano le funzioni *parte intera* e *mantissa.*
    - Si disegni il grafico delle funzioni $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}M(x))$ e $g(x) = [x] + \sin(\frac{\pi}{2}M(x))$;
    - Disegnare il grafico di un esempio di funzione con questa proprietà: $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 1$. Disegnare quindi il grafico di $[x] + f(M(x))$ (una espressione numerica per la funzione $f(x)$ non è richiesta. Ne basta il grafico);
    - provare che se $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 1$ allora $g(x) = [x] + f(M(x))$ è crescente;
    - Disegnare il grafico di un esempio di funzione con questa proprietà: $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 2$. Disegnare quindi il grafico di $[x] + f(M(x))$.

35. A partire dal grafico della funzione $\arccos x$, si disegni il grafico della funzione inversa della funzione $g(x) = -\cos x$ con $\operatorname{dom} g(x) = [0,\pi]$. Si faccia lo stesso per la funzione $h(x) = -\sin x$ (definita su $(-\pi,\pi)$), a partire dal grafico di $\arcsin x$.

36. Spiegare perché l'affermazione seguente è falsa: la funzione inversa di una funzione pari è pari oppure dispari.

37. **(⋆)** Mostrare che la funzione inversa di una funzione dispari (ed invertibile) è dispari.

38. **(⋆)** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni da $\mathbb{R}$ in sé, definite sul medesimo intervallo $[a,b]$. Supponiamo che siano strettamente crescenti e che su $[a,b]$ valga
$$f(x) > g(x)\,.$$
Mostrare che le loro funzioni inverse verificano
$$f^{-1}(x) < g^{-1}(x)\,.$$
Cambia qualcosa se le funzioni sono decrescenti?

39. **(⋆)** Sia $f(x)$ invertibile su un intervallo $[a,b]$. La funzione $g(x) = f(x+c)$ è definita su $[a-c, b-c]$. Mostrare che è invertibile e che la sua funzione inversa $g^{-1}(x)$ è $f^{-1}(y)-c$. Applicare quest'osservazione ai casi seguenti:

- La funzione $f(x) = \cos x$ (definita su $[0,\pi]$) e la funzione $g(x) = f(x+\pi)$;
- La funzione $f(x) = -\cos x$ (definita su $[0,\pi]$) e la funzione $h(x) = f(x+\pi/2)$.

40. Notando che $\sin(x-\pi/2) = -\cos x$, si trovi una relazione tra i grafici delle funzioni $\arcsin x$ ed $\arccos x$. Si disegnino quindi i grafici delle funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$ e $-\arccos x$.

41. Sia $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$ ed invertibile, e sia
$$g(x) = af(x) + b \tag{1.7}$$
con $a \neq 0$ e b qualsiasi. Mostrare che $g(x)$ è invertibile e che
$$g^{-1}(y) = f^{-1}\left((y-b)/a\right) .$$

42. ($\star$) Sia $f(x)$ una funzione definita per $x > 0$. Si mostri che la sua estensione dispari per $x > 0$ è $f(x)$ mentre per $x < 0$ è
$$(\operatorname{sgn}(x))\, f\left(x(\operatorname{sgn}(x))\right) .$$

43. ($\star$) Si trovino una funzione razionale $f(x)$ ed una funzione razionale $g(x)$ che verificano rispettivamente
$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) , \qquad g(x) = -\,g\left(-\frac{1}{x}\right)$$
(due esempi si trovano all'esercizio 6 del Cap. 3).

44. ($\star$) Una delle due uguaglianze seguenti è corretta e l'altra è sbagliata:
$$(\sqrt{x})^2 = x\,, \qquad \sqrt{x^2} = x\,.$$

45. ($\star$) Una delle due uguaglianze seguenti è corretta, mentre l'altra è sbagliate:
$$\tan(\arctan x) = x\,, \qquad \arctan(\tan x) = x\,.$$
Spiegare e fare esempi analoghi con le funzioni $\arcsin x$ ed $\arccos x$.

46. il calcolo seguente è **sbagliato.** Si considera la funzione $f(x) = (-x)^2$, definita per $x \geq 0$ e se ne vuol calcolare la funzione inversa. Dunque si deve risolvere $(-x)^2 = y$ con $y \in \operatorname{im} f(x)$, ossia $y \geq 0$. Dunque si ha $-x = \sqrt{y}$ e quindi $x = -\sqrt{y}$. Il risultato è sbagliato, come si vede facilmente ottenendo il grafico della funzione inversa come simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla prima bisettrice.

- trovare l'errore (si esamini il segno di x).
- la funzione $g(x) = -\sqrt{y}$ è comunque una funzione inversa. Dire di quale funzione.

47. **(⋆)** Tracciare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = |x|^{g(x)}, \qquad -1 < x < 1$$

con

$$g(x) = \frac{1}{2}\,(1 + 3[x])\,(2 + [x])$$

(la parentesi quadra indica la parte intera).