L. PANDOLFI

ANALISI MATEMATICA 1

L. Pandolfi: Dipartimento di Scienze Matematiche "Giuseppe Luigi Lagrange", Politecnico di Torino

La citazione seguente descrive perfettamente la differenza tra l'ingegnere e l'esteta:

Un tale numero di acquedotti ed una tal quantità di opere necessarie confronterai con le inutili piramidi e le costruzioni improduttive dei Greci, pur tanto lodate.

Sesto Giulio Frontino (*I* sec. D.C.) *Gli acquedotti della città di Roma.*

Però l'ingegniere serio non trascura l'estetica: sono

opera di ingegneri l'acquedotto di Segovia, il Pont du Gard e il Lingotto.

GNU Free Documentation License

Premessa

Il contenuto di questi appunti corrisponde al programma di Analisi Matematica 1 del Politecnico di Torino.

Un argomento trattati in molti corsi di Analisi Matematica 1 e che qui non viene presentato è quello delle successioni e serie di funzioni, che verrà visto nei corsi successivi. Inoltre, per risparmiare tempo, le successioni numeriche, che meriterebbero un intero capitolo, vengono presentate esclusivamente come casi particolari di funzioni da $\mathbb{R}$ in sé.

Ogni capitolo è seguito da esercizi che servono a testare la comprensione della teoria. Alcuni sono molto semplici e altri, indicati col segno $(\star)$, più complessi. Per imparare a risolvere problemi numerici è necessario usare un libro di esercizi.

Alfabeto greco

I testi tecnici di matematica, fisica, ingegneria ecc. usano correntemente le lettere dell'alfabeto greco. Chi non le conosce, deve impararle subito.

alfa	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	teta	iota	kappa	lambda
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ	λ
A	B	Γ	Δ	E	Z	E	Θ	I	K	Λ

mi	ni	csi	omicron	pi	ro	sigma	tau	ipsilon	fi	chi	psi	omega
μ	ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
M	N	Ξ	O	Π	R	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω

Indice

Capitolo 1

Richiami e preliminari

Frase letta in un Museo Archeologico:

Sepoltura di individuo adulto di sesso femminile.

Un ingegnere, o un matematico, esprimerebbe lo stesso concetto, in modo ugualmente preciso, scrivendo "tomba di donna". Infatti, le scienze e l'ingegneria costruiscono linguaggi precisi e sintetici. Esempi importanti sono il linguaggio della matematica e il disegno tecnico.

In questo capitolo si richiamano brevemente alcuni elementi del linguaggio matematico ed alcune nozioni note dai corsi precedenti. Inoltre, si introducono alcune proprietà nuove almeno per alcuni studenti. In particolare, in questo capitolo introdurremo la **proprietà di Dedekind** che è la proprietà che differenzia in modo essenziale i numeri reali dai numeri razionali.

1.1 Notazioni insiemistiche e logiche

Di regola indicheremo un insieme con una lettera maiuscola, per esempio A, B. Un insieme si identifica specificandone gli elementi, o elencandoli esplicitamente oppure mediante la proprietà che li caratterizza. Per esempio scriveremo

$$A = \{x \mid x > 0\}$$

per indicare l'insieme i cui elementi sono i numeri positivi; oppure $A = \{1\,,2\,,3\}$ per indicare l'insieme i cui elementi sono i numeri 1, 2 e 3.

In questa notazione si noti:

- l'uso della parentesi graffa. La notazione $\{\}$ è una delle numerose notazioni matematiche che hanno più significati. In seguito vedremo altri usi della medesima notazione.
- Il simbolo "$|$" si legge "tale che" e può venir sostituito da due punti o anche da una virgola. Talvolta viene sottinteso.

Osservazione 1 E' importante sottolineare che quando un insieme si identifica specificando la proprietà dei suoi elementi, la proprietà non deve essere ambigua. Una definizione del tipo "l'insieme delle persone bionde" non è accettabile come definizione di insieme, perché non tutti giudicano nel medesimo modo la "biondezza" di un individuo. E' invece accettabile definire "l'insieme delle persone che oggi sono cittadini italiani". $\blacksquare$

Per indicare che un elemento a appartiene ad A si scrive $a \in A$ oppure $A \ni a$. Per dire che a *non* appartiene ad A si scrive $a \notin A$ oppure $A \not\ni a$.

Se ogni elemento di B appartiene ad A si dice che B è contenuto in A, o che B è un sottoinsieme di A, e si scrive $B \subseteq A$ oppure $A \supseteq B$.

E' importante notare che a ed $\{a\}$ sono oggetti diversi: il primo indica un elemento di un insieme e il secondo indica l'insieme il cui unico elemento è a. Quindi sono corrette le scritture $a \in A$, $a \in \{a\}$ ed $\{a\} \subseteq A$ mentre sono sbagliate le scritture $\{a\} \in A$ ed $a \subseteq A$.

Col simbolo $\emptyset$ si indica l'$\boxed{\textit{insieme vuoto}}$, ossia l'insieme privo di elementi.

Le operazioni tra insiemi sono:

- l'$\boxed{\textit{intersezione}}$ di insiemi: $A \cap B$ è l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli comuni ad A e B. Se A e B sono *disgiunti,* ossia privi di elementi comuni, l'intersezione dei due è l'insieme vuoto. Si noti che $A \cap B = B \cap A$.
- l'$\boxed{\textit{unione}}$ di insiemi: $A \cup B$ è l'insieme i cui elementi sono sia quelli di A che quelli di B. Si noti che $A \cup B = B \cup A$. L'unione di due insiemi è l'insieme vuoto se e solo se ambedue sono vuoti.
- la differenza di insiemi. Si indica con la notazione $A - B$ oppure $A \backslash B$: è l'insieme degli elementi di A che **non** appartengono a B. Dunque, $A - B \neq B - A$ e inoltre:

a) $A - B = A - (A \cap B) = A - (B \cap A)$.

b) se A e B sono disgiunti, $A - B = A$ e $B - A = B$; se $A = B$ allora $A - B = B - A = \emptyset$.

- il $\boxed{\textit{prodotto cartesiano}}$ di due insiemi A e B, presi in quest'ordine, prima A e poi B, è l'insieme i cui elementi sono le **coppie ordinate** (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$:
$$A \times B = \{(a\,, b)|a \in A\,, b \in B\}.$$
Dunque, $A \times B \neq B \times A$, salvo nel caso in cui $A = B$.

- Gli insiemi vengono sempre a coppie: nel momento stesso in cui si definisce A se ne definisce anche il $\boxed{\textit{complementare}}$, ossia l'insieme di tutti gli elementi che *non* appartengono ad A.

  Il complementare di A si indica con uno dei simboli A^C, $\mathcal{C}A$ oppure $\tilde{A}$.

  Ovviamente, $A \cap \tilde{A} = \emptyset$.

  Lavorando in un "insieme ambiente" R prefissato, e quindi solo con suoi sottoinsiemi, usa definire il complementare di A relativamente ad R
$$\mathcal{C}_R A = \{a \in R | a \notin A\}.$$
  Ovviamente,
$$A \cap \mathcal{C}_R A = \emptyset\,, \qquad A \cup \mathcal{C}_R A = R.$$
  Molto spesso si sottintende l'insieme R e, per indicare il complementare rispetto al (sottinteso) insieme R si usano i simboli A^C, $\mathcal{C}A$ oppure $\tilde{A}$.

1.2 Le implicazioni e i quantificatori $\exists$ e $\forall$

Per dire che una proprietà ne implica un'altra si usa il simbolo $\Rightarrow$. Per esempio
$$a \in A \Rightarrow a > 0 \tag{1.1}$$
si legge "se a è un elemento di A allora a è un numero positivo". Per esempio, ciò vale se gli elementi di A sono numeri pari positivi (ovviamente, non solo in questo caso); non vale se A contiene anche il numero -1.

La doppia freccia $\Leftrightarrow$ si usa per indicare che due proprietà sono equivalenti. Per esempio
$$a \in A \Leftrightarrow a > 0$$

si legge "a appartiene ad A se e solo se è un numero positivo" e significa che gli elementi di A sono tutti e soli i numeri positivi.

Il simbolo $\exists$ si legge "esiste". Per esempio,

$$\exists a \in A \,|a > 0$$

si legge "esiste a in A che è maggiore di zero" e vuol dire che l'insieme A contiene **almeno** un numero positivo. Niente si dice degli altri elementi di A, che potrebbero anche non essere numeri.

Il simbolo $\forall$ si legge "qualsiasi" o "per ogni". Per esempio,

$$\forall a \in A \Rightarrow a > 0$$

si legge "per ogni elemento a di A segue che a è un numero positivo" o, più semplicemente, "ogni elemento di A è un numero positivo" ed è una notazione più precisa di (1.1).

Osservazione 2 In questo paragrafo abbiamo usato il termine "proprietà" come termine facilmente comprensibile da tutti. Il termine più corretto da usare è il termine $\boxed{\textit{proposizione}}$ intendendo con ciò un'affermazione della quale si può decidere se è vera o se è falsa. Dunque, le proposizioni[1] vengono sempre a coppie: se $\mathcal{P}$ indica una proposizione, con $\neg\mathcal{P}$ si intende la $\boxed{\textit{negazione}}$ di $\mathcal{P}$: quella proposizione che è vera se e solo se $\mathcal{P}$ è falsa. E' importante esercitarsi a costruire la negazione di semplici proposizioni e rendersi conto di come la negazione opera sui quantificatori logici.

Nel linguaggio comune ci sono affermazioni che si possono controllare e si può decidere se sono vere oppure false ed affermazioni ambigue, che persone diverse possono ritenere vere oppure false. Per esempio "tutti gli studenti di quest'aula sono citadini italiani" può essere vera oppure falsa, ma non dipende dal giudizio di chi la verifica: per verificarla basta chiedere un documento a ciascuno. Invece l'affermazione "Paola è bionda" potrà essere giudicata vera da un meridionale e falsa da uno svedese. Una certa affermazione si chiama "proposizione" quando è possibile assegnare un metodo per verificare se è vera o meno, in modo non ambiguo. Si confronti quanto ora detto con l'Osservazione *1* ■

[1] come gli insiemi.

1.3 Le funzioni

Col termine $\boxed{\textit{funzione}}$ si intende una trasformazione tra due insiemi A e B che ad ogni punto di A associa **al più** un punto di B.[2]

Dunque, è possibile che un certo elemento di A non abbia corrispondente in B.

Le funzioni si indicano con una lettera minuscola: f, g, ϕ ....

Diciamo che A è l'insieme di partenza della funzione mentre B è l'insieme di arrivo.

Ripetiamo: è possibile che alcuni punti di A non abbiano corrispondente, o come si dice più comunemente, immagine, in B. L'insieme dei punti di A che ammettono corrispondente si chiama il $\boxed{\textit{dominio}}$ della funzione e si indica col simbolo $\operatorname{dom} f$ (se f indica la funzione).

Per dire che la funzione f trasforma a in b si scrive

$$a \overset{f}{\longmapsto} b \quad \text{o, più comunemente,} \quad b = f(a)\,.$$

L'insieme

$$\{f(a)\,, a \in \operatorname{dom} f\} \subseteq B$$

si chiama l'$\boxed{\textit{immagine}}$ o il $\boxed{\textit{codominio}}$ della funzione f. L'immagine di f si indica col simbolo $\operatorname{im} f$.

Fare attenzione al termine codominio: in certi testi questo termine indica l'insieme di arrivo B.

Una funzione la cui immagine è l'insieme di arrivo B si dice $\boxed{\textit{suriettiva}}$

E' importante notare che la definizione di funzione è dissimmetrica: un elemento di A deve avere **al più** un corrispondente, ma un elemento di B può provenire anche da più elementi di A.

Si chiama $\boxed{\textit{controimmagine}}$ di $K \subseteq B$ l'insieme

$$f^{-1}(K) = \{a \in A \,|\, f(a) \in K\}$$

Ovviamente, $f^{-1}(B) = \operatorname{dom} f$ e $f^{-1}(K) = \emptyset$ se $K \cap (\operatorname{im} f) = \emptyset$.

Niente vieta che l'insieme K sia costituito da un solo punto b. Come si è detto, la controimmagine di $\{b\}$ è un sottoinsieme di A che può contenere più di un elemento. Esso andrebbe indicato col simbolo $f^{-1}(\{b\})$, ma usa scrivere più semplicemente $f^{-1}(b)$.

[2] più precisamente, una tale funzione si chiama $\boxed{\textit{funzione univoca}}$

Fare attenzione al simboli f^{-1}. Questo simbolo ha numerosi significati. Uno si è appena visto: $f^{-1}(K)$ indica un certo insieme. Più avanti vedremo che lo stesso simbolo indica una particolare funzione associata alla f, quando questa ha una proprietà particolare. Se f opera tra numeri, $f^{-1}(a)$ potrebbe anche indicare $1/f(a)$. Generalmente il significato va capito dal contesto.

Infine, si chiama $\boxed{\textit{grafico}}$ di f l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a)\,)\,|a \in \mathit{dom}\, f\} \subseteq A \times B\,.$$

Osservazione 3 Notiamo una proprietà del grafico: se due coppie (a, b) e (a, c), con i medesimi primi elementi, appartengono al grafico, allora è anche $c = b$, **perché la funzione è univoca.** Inoltre, è chiaro che un s.insieme $\mathcal{G}$ di $A \times B$ con questa proprietà è grafico di funzione: la funzione il cui dominio è costituito dai primi elementi delle coppie di $\mathcal{G}$ e se $(a, b) \in \mathcal{G}$ allora ad a corrisponde b. Dunque, una funzione potrebbe essere assegnata specificandone il grafico. ■

Esempio 4 Sia $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{x, y, z\}$ e consideriamo la funzione

$$c \xmapsto{f} z$$
$$b \xmapsto{f} x$$
$$d \xmapsto{f} x$$
$$e \xmapsto{f} x\,.$$

E':

$$\mathrm{dom}\, f = \{b\,, c\,, d\,, e\} \subseteq A\,, \qquad \mathrm{im}\, f = \{x\,, z\} \subseteq B$$
$$f^{-1}(x) = \{b\,, d\,, e\} \qquad f^{-1}(z) = \{c\}$$
$$f^{-1}(\{x, z\}) = f^{-1}(B) = \ \mathrm{dom}\ f \subseteq A$$
$$\mathcal{G}(f) = \{(c, z)\,, (b, x)\,, (d, x)\,, (e, x)\,\}\,.$$

Siano ora f e g due funzioni da A in B. Sia $H \subseteq A$. Diciamo che f è $\boxed{\textit{restrizione}}$ di g ad H se

$$\mathrm{dom}\, f = H \cap \ \mathrm{dom}\, g \text{e inoltre: se } x \in \ \mathrm{dom}\, f \text{ allora } f(x) = g(x)\,.$$

Ossia, f opera su ciascun punto di H esattamente come fa g.

La restrizione di g ad H si indica col simbolo

$$g_{|H}\,.$$

Sia ora $K \supseteq \operatorname{dom} f$. Diciamo che g è $\boxed{\textit{estensione}}$ di f a K

$$\text{se } \operatorname{dom} g = K \text{ e inoltre: se } x \in \operatorname{dom} f \text{ allora } g(x) = f(x)\,.$$

Ossia, g opera come f sui punti di $\operatorname{dom} f$, ed opera in un qualsiasi altro modo nei punti di K nei quali f non è definita.

Notare che la restrizione di una funzione ad un insieme è sempre unica, mentre l'estensione non è unica, salvo nel caso in cui l'insieme B consista di un solo elemento, $B = \{b\}$, perché in tal caso le funzioni a valori in B devono essere costanti.

1.3.1 Funzioni composte e funzioni inverse

Siano ora f e g due funzioni, con f da A in B e g da B in C:

$$A \xmapsto{f} B\,, \qquad B \xmapsto{g} C\,.$$

Se accade che

$$(\operatorname{im} f) \cap (\operatorname{dom} g) \neq \emptyset\,,$$

è possibile definire la $\boxed{\textit{funzione composta}}$ di g con f, che si indica con $g \circ f$, in questo modo

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))\,,$$

definita sugli elementi $a \in A$ tali che abbia senso calcolare $g(f(a))$; ossia:

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{a \mid f(a) \in \operatorname{dom} g\}\,.$$

Il simbolo che useremo più comunemente per la funzione composta è proprio $g(f(a))$, lasciando sottinteso il dominio.

Si è notato che nella definizione di funzione A e B non giuocano ruoli "simmetrici", nel senso che se (a, b) ed (a', b') sono elementi del grafico e $a = a'$ allora necessariamente $b = b'$. Invece, è ben possibile che sia $b = b'$ con $a \neq a'$. Si chiamano $\boxed{\textit{iniettive}}$ le funzioni con questa proprietà: **un elemento dell'immagine proviene da un solo elemento del dominio;** ossia tali che se (a, b) ed (a', b) sono nel grafico, allora $a = a'$.

Le funzioni (univoche ed) iniettive vengono sempre a coppie: se (a, b) è nel grafico di una funzione iniettiva, una prima funzione trasforma a in b; una seconda funzione (anch'essa univoca ed iniettiva) trasforma b in a. Queste due funzioni si dicono $\boxed{\textit{inverse}}$ l'una dell'altra.

In pratica, una delle due funzioni si intende data e l'altra deve determinarsi. In questo caso si assegna il simbolo f alla funzione data e la sua inversa si indica col simboli f^{-1}.

Si noti che in questo caso f^{-1} indica una funzione; e quindi $f^{-1}(b)$ si userà per indicare la funzione inversa di f, calcolata nel punto b.

Ricapitolando, f opera da A in B mentre f^{-1} opera da B in A con

$$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f \qquad \operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f$$

e inoltre,

$$a \in \operatorname{dom} f \implies f^{-1}(f(a)) = a\,; \qquad b \in \operatorname{dom} f^{-1} \implies f\left(f^{-1}(b)\right) = b\,.$$

Una funzione f dall'insieme di partenza A a valori in B il cui dominio è A stesso e che è sia iniettiva che suriettiva si dice $\boxed{\textit{biunivoca}}$

Controimmagine, funzione inversa ed equazioni

Sia f una funzione da H in K e si consideri l'equazione

$$f(x) = y\,. \tag{1.2}$$

Ossia, dato $y \in K$ si vogliono trovare le $x \in H$ che verificano l'uguaglianza. In questo contesto, y si chiama il "dato" del problema (notare, anche f è data) ed x si chiama l'"incognita". Le x che verificano l'equazione si chiamano le "soluzioni" dell'equazione.

E' possibile che non esistano soluzioni. Ciò avviene se e solo se $y \notin \operatorname{im} f$. Inoltre, le soluzioni, se esistono, appartengono a $\operatorname{dom} f$.

Può essere che ci sia più di una soluzione. L'insieme di tutte le soluzioni si è indicato col simbolo $f^{-1}(y)$.

Per certe funzioni f accade che l'equazione (1.2) ammette **al più una** soluzione **per ogni** dato y. Sono queste le funzioni iniettive, e per esse è possibile definire la funzione inversa

$$x = f^{-1}(y)\,.$$

La funzione inversa fa corrispondere al dato y l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$. Questa è l'interpretazione della funzione inversa dal punto di vista di chi deve risolvere equazioni.

1.4 Insiemi di numeri

La maggior parte del corso userà *insiemi di numeri reali.*[3] L'insieme dei numeri reali si indica col simbolo $\mathbb{R}$ e suoi sottoinsiemi notevoli sono:

- l'insieme dei numeri razionali relativi $\mathbb{Q}$.
- l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$.
- l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

L'uso di questi insiemi numerici è noto dai corsi precedenti. Notiamo però esplicitamente che come insieme $\mathbb{N}$, dei naturali, si intende l'insieme dei numeri che si usano per contare: 1, 2,... A seconda dell'opportunità introdurremo anche 0 in quest'insieme, oppure talvolta considereremo come "primo elemento" dei naturali un numero maggiore di uno. Molto spesso se 0 si considera o meno come elemento di $\mathbb{N}$ viene implicitamente dedotto dalle notazioni usate. Per esempio, se definiamo

$$A = \{1/n \,|n \in \mathbb{N}\}$$

implicitamente escluderemo 0 dall'insieme $\mathbb{N}$, **perché la divisione per 0 non può farsi.**

Si sa che i numeri reali si possono porre in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata ossia, come anche si dice, si rappresentano mediante i punti di una retta orientata. In questa rappresentazione, il numero più grande tra due corrisponde al un punto più a destra.[4]

Avendo identificato i numeri reali mediante punti di una retta, un numero reale verrà anche chiamato "punto" (di una retta precedentemente specificata, o sottintesa, spesso un punto dell'asse delle ascisse o delle ordinate).

E' utile vedere il significato geometrico delle operazioni algebriche.

1.5 Ordine tra i numeri reali

Si sa che i numeri reali sono un insieme ordinato; ossia, dati due numeri reali è sempre possibile stabilire che uno è maggiore o uguale all'altro:

$$r \geq s\,, \qquad \text{equivalentemente} \quad s \leq r\,.$$

[3] I numeri complessi verranno introdotti al Cap. 7 e usati al Capitolo 8.

[4] La corrispondenza si costruisce come segue: si fissa un punto O della retta, che si chiama origine, e un'unità di misura per le lunghezze. Ad un numero $a > 0$ corrisponde il numero che dista a dall'origine, a destra di essa; ad $a < 0$ si fa corrispondere il numero che dista $-a$ dall'origine, a sinistra di essa. Il numero 0 corrisponde all'origine delle coordinate.

La proprietà di ordine verifica:

- per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha $r \leq r$.

- se vale $r \leq s$ ed anche $s \leq r$ allora $r = s$.

- se $r \leq s$ ed anche $s \leq t$ allora $r \leq t$.

Scriveremeo $r > s$ quando si intende di escludere che possa aversi l'uguaglianza $r = s$. Chiameremo inoltre $\boxed{\textit{positivo}}$ oppure $\boxed{\textit{negativo}}$ un numero r per cui $r > 0$ oppure $r < 0$.

L'ordine tra i numeri reali permette di definire la $\boxed{\textit{funzione segno}}$ Questa funzione si indica col simbolo $\operatorname{sgn}(x)$ ed è definita come segue[5]:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Si dice che *due numeri a e b "hanno lo stesso segno", o che "hanno segno concorde"*, quando vale $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$.

Si può anche definire il concetto di $\boxed{\textit{intervallo}}$

[5] attenzione il dominio della funzione segno, come qui definita, è $\mathbb{R}$. Certi testi non definiscono $\operatorname{sgn}(x)$ per $x = 0$.

- L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|a < x < b\}$ si chiama $\boxed{\textit{intervallo aperto}}$ di estremi a e b e si indica col simbolo (a, b). Il numero a si chiama estremo sinistro dell'intervallo e il numero b si chiama estremo destro.
- L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x \leq b\}$ si chiama $\boxed{\textit{intervallo chiuso}}$ di estremi a e b e si indica col simbolo $[a, b]$. Il numero a si chiama estremo sinistro dell'intervallo e il numero b si chiama estremo destro.
- Si introducono anche gli $\boxed{\textit{intervalli semiaperti}}$ (a destra o a sinistra) $[a, b)$ e $(a, b]$, definiti da

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x < b\}\,, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x \leq b\}\,.$$

- chiameremo *intervalli aperti* anche gli insiemi illimitati (superiormente il primo, inferiormente il secondo)

$$(a, +\infty) = \{x \,|x > a\}\,, \qquad (-\infty, b) = \{x \,|x < b\}$$

- chiameremo *intervalli chiusi* anche gli insiemi illimitati (superiormente il primo, inferiormente il secondo)

$$[a, +\infty) = \{x \,|x \geq a\}\,, \qquad (-\infty, b] = \{x \,|x \leq b\}$$

  Geometricamente, si tratta di semirette verso destra o verso sinistra, che includono o meno il loro estremo.

Osservazione 5 Si noti che nella notazione degli intervalli il simbolo $+\infty$ oppure $-\infty$ indica solamente che l'intervallo che si sta considerando è illimitato superiormente oppure inferiormente. Il simbolo "∞", che si legge "infinito", ha vari significati e comunque **non indica mai un numero.** ■

PROPRIETÀ CRUCIALE DEGLI INTERVALLI

La proprietà cruciale che distingue gli intervalli da altri insiemi di numeri è la seguente: se x ed y sono due elementi di un intervallo I e se z verifica $x < z < y$ allora anche z è un elemento di I. In simboli: *I è un intervallo se e solo se*

$$(\forall x \in I\,, \forall y \in I, \quad \forall z \,|x < z < y) \Rightarrow z \in I\,.$$

Sia I un **intervallo aperto** e sia $x_0 \in I$. Per dire brevemente che I è aperto e che $x_0 \in I$, si dice che I è un $\boxed{\textit{intorno}}$ di x_0.

Se accade che I ha forma $(x_0 - a, x_0 + a)$ allora l'intervallo aperto I si chiama $\boxed{\textit{intorno simmetrico}}$ di x_0.

Per esempio, l'intervallo $(2, 6)$ è intorno di 5 ed è è intorno simmetrico di 4.

Un intervallo aperto $(a, +\infty)$ si chiama anche $\boxed{\textit{intorno di } +\infty}$ Un intervallo aperto di forma $(-\infty, b)$ si chiama anche $\boxed{\textit{intorno di } -\infty}$

Infine, osserviamo le proprietà che legano l'ordine con le operazioni:

- se $a \geq b$ si ha $a + r \geq b + r$ per ogni r;
- vale la "regola dei segni": $ab \geq 0$ se e solo se i due numeri hanno segno concorde.

Si deduce da qui:

- se $a < b$ allora $-a > -b$: *cambiando segno, cambia il verso delle disuguaglianze;*
- i due numeri a e b **abbiano il medesimo segno.** Allora vale

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}\,. \tag{1.3}$$

1.5.1 Operazioni algebriche e punti della retta

Rappresentiamo i numeri reali mediante punti dell'asse delle ascisse (quindi, orizzontale) e indichiamo con P_r il punto che rappresenta il numero reale r (ricordiamo che il numero 0 corrisponde ad O, origine delle coordinate).

In questa rappresentazione, il numero più grande tra due corrisponde al un punto più a destra. In particolare, P_r è a destra di O se $r > 0$; è a sinistra se $r < 0$; P_{r+h} è ottenuto spostando P_r verso destra se $h > 0$, verso sinistra se $h < 0$.

Il punto P_{-r} è il simmetrico rispetto ad O del punto P_r.

1.5.2 L'ordine ed il valore assoluto

Per definizione, si chiama $\boxed{\textit{valore assoluto}}$ di r il numero $|r|$ cosìdefinito

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se} \quad r \geq 0 \\ -r & \text{se} \quad r < 0\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Va osservato che:

- il numero r può essere sia positivo che negativo. Se $r < 0$ allora $-r > 0$. Per esempio, se $r = -5$ allora $|-5| = -(-5) = +5 > 0$.

- E' $|0| = 0$ e quindi il segno di uguale in (1.4) può mettersi nella riga di sopra, o in quella di sotto, o in ambedue senza cambiare la definizione.

- La notazione $|r + a|$ è una notazione abbreviata per $|(r + a)|$; ossia, per calcolare $r + a$ si segue questo schema:

  $$r \longrightarrow (r + a) \longrightarrow |(r + a)|\,.$$

  In particolare, $|r + a| \neq |r| + a$ anche se $a > 0$. Per esempio, se $r = -5$ si ha

  $$\begin{aligned} &|r + 2| = |(r + 2)| = |(-5 + 2)| = |-3| = 3 \\ &|r| + 2 = 5 + 2 = 7 \neq |r + 2|\,. \end{aligned}$$

Le relazioni tra il valore assoluto e le operazioni sono le seguenti

$$\begin{aligned} |r| \geq 0 \\ |r| = 0 \iff r = 0 \\ |r \cdot s| = |r| \cdot |s| \quad \text{in particolare} \quad |-r| = |r| \\ |r + s| \leq |r| + |s| \qquad \text{(disuguaglianza triangolare).} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza triangolare, si può provare che vale anche:

$$\Big|\, |r| - |s| \,\Big| \leq |r - s|\,.$$

Osservazione importante Usando il segno di valore assoluto, si possono scrivere in modo breve delle coppie di disequazioni: la scrittura

$$|a| < b$$

equivale a dire che $b > 0$ e inoltre che

$$-b < a < b\,.$$

Invece, la scrittura

$$|a| > b > 0$$

equivale a scrivere che

$$a > b \qquad \text{oppure} \quad a < -b\,.$$

Si esamini il significato delle espressioni $|a| \leq b$ e $|a| \geq b$.

Valore assoluto e distanza

Sia P_a il numero che rappresenta a sull'asse delle ascisse. Il numero $|a|$ rappresenta la distanza di P_a dall'origine O. Se b è un secondo numero e P_b il punto dell'asse delle ascisse che gli corrisponde,

$$|a - b| = |b - a|$$

rappresenta la distanza dei due punti P_a e P_b.

Notiamo ora un modo "complicato" per dire che un numero a è nullo: basta dire che $|a| = 0$, ossia basta richiedere che P_a si sovrapponga all'origine O. Ciò può anche esprimersi richiedendo che $|a|$ sia più piccolo di ogni numero positivo; ossia

Lemma 6 *Vale $a = 0$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ si ha*

$$0 \leq |a| \leq \epsilon\,.$$

In simboli:

$$a = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \Rightarrow 0 \leq |a| \leq \epsilon)\ .$$

1.6 Insiemi limitati di numeri reali

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'insieme A si dice $\boxed{\textit{limitato superiormente}}$ se **esiste** un numero M tale che

$$a \in A \Rightarrow a \le M\,.$$

Ossia, A è limitato superiormente se esiste un numero M maggiore o uguali a tutti gli elementi di A. Il numero M si chiama un $\boxed{\textit{maggiorante}}$ di A.

Ovviamente, se un maggiorante esiste ne esistono anche altri: se M è un maggiorante, $M+1$, $M+2$,... lo sono.

Può accadere che un maggiorante di A appartenga all'insieme A. Per esempio, se

$$A = \{1\,,2\}$$

allora sia 2 che $2,5$ che 3 ecc. sono maggioranti di A. Il numero 2 è l'unico maggiorante che appartiene ad A.

Invece, l'insieme

$$A = \{x\,|0 < x < 1\}$$

ammette maggioranti. Per esempio 1, $1+1/2$ ecc., ma nessuno gli appartiene.

Un insieme contiene al più uno dei suoi maggioranti.

Se esiste, il maggiorante di A che appartiene ad A si chiama il $\boxed{\textit{massimo}}$ di A.

Esistono insiemi che non sono limitati superirmente, ossia che non ammettono maggioranti.

Un insieme A non ammette maggioranti quando **per ogni** $M \in \mathbb{R}$ **esiste** $a \in A$ tale che $a > M$. Un tale insieme si dice $\boxed{\textit{illimitato superiormente}}$ In simboli, l'insieme A è superiormente illimitato quando $$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A\,|a > M\,.$$ L'elemento a è un opportuno elemento di A che dipende da M. per sottolineare ciò spesso lo indichiamo col simbolo a_M.

Si chiama $\boxed{\textit{minorante}}$ di A un numero reale m tale che per ogni $a \in A$ si abbia

$$m \le a\,.$$

Un insieme che ammette minoranti si chiama $\boxed{\textit{limitato inferiormente}}$ Se invece minoranti non esistono, l'insieme si chiama $\boxed{\textit{illimitato inferiormente}}$

Un insieme può contenere al più uno dei suoi minoranti, il quale, se esiste, si chiama il $\boxed{\textit{minimo}}$ dell'insieme.

Un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente si dice $\boxed{\textit{limitato}}$

La proprietà seguente è ovvia, ma va notata esplicitamente per l'uso che ne faremo in seguito:

Lemma 7 *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se ambedue sono superiormente limitati (oppure inferiormente limitati, oppure limitati) anche la loro unione è superiormente limitata (oppure inferiormente limitata, oppure limitata).*

Dim. Per ipotesi, esistono due numeri M_1 ed M_2 tali che:

$$a \in A \implies a \leq M_1 ; \qquad b \in B \implies b \leq M_2 .$$

Sia $M = \max\{M_1, M_2\}$; ossia M è il maggiore tra i due numeri M_1 ed M_2. Dunque si ha contemporaneamnete $M_1 \leq M$ ed $M_2 \leq M$.

Per definizione un elemento $c \in A \cup B$ appartiene ad A oppure a B (o ad ambedue). Se $c \in A$ allora $c \leq M_1 \leq M$; se $c \in B$ allora $c \leq M_2 \leq M$. In ogni caso vale $c \leq M$ e quindi $A \cup B$ è superiormente limitato. ■

Illimitatezza dell'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è limitato inferiormente ma non superiormente. Il fatto che sia superiormente illimitato si esprime come segue:

Per ogni numero reale r esiste un numero naturale $n = n_r$ tale che

$$n_r > r .$$

In simboli:

$$\forall r \in \mathbb{R} \ \exists n_r \in \mathbb{N} \ | n_r > r .$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{proprietà di Archimede}}$

Naturalmente, la proprietà di Archimede può riformularsi dicendo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n} < \epsilon .$$

Combinando quest'osservazione col Lemma 6 possiamo enunciare:

Lemma 8 *Vale $a = 0$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$0 \leq |a| \leq \frac{1}{n} .$$

1.7 Estremi superiori ed inferiori

Consideriamo un insieme A di numeri reali, che è superiormente limitato. Come si è detto, al più uno dei maggioranti di A può appartenere ad A e in tal caso tale maggiorante si chiama il $\boxed{\textit{massimo}}$ di A. Se A è superiormente limitato, è certamente non vuoto l'insieme dei maggioranti di A. La **proprietà cruciale che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$** è la seguente: **Proprietà di Dedekind o completezza di $\mathbb{R}$:** l'insieme dei maggioranti dell'insieme superiormente limitato A ammette minimo in $\mathbb{R}$. ■

Ciò giustifica la definizione seguente:

Definizione 9 Il minimo dei maggioranti di A si chiama $\boxed{\textit{estremo superiore}}$ di A e si indica col simbolo

$$\sup A . \quad ■$$

Dunque, si ha

$$L = \sup A$$

quando L è il **più piccolo dei maggioranti di** A e ciò può esprimersi richiedendo le due proprietà seguenti:

- L è **uno** dei maggioranti di A; ossia:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leq L ;$$

- L è il **più piccolo** dei maggioranti di A; ossia, se $\epsilon > 0$ allora $L - \epsilon$ non è un maggiorante. Dobbiamo quindi richiedere che per ogni $\epsilon > 0$ esista un elemento $a = a_\epsilon$ di A tale che

$$L - \epsilon < a_\epsilon \leq L .$$

In modo analogo si definisce $\boxed{\textit{estremo inferiore}}$ di A il *massimo dei minoranti di A.* L'esistenza dell'estremo inferiore è equivalente a quella dell'estremo superiore ossia alla proprietà di Dedekind. Introduciamo ora una notazione:

se l'insieme A **non** è limitato superiormente, esso non ammette maggioranti e quindi non ammette estremo superiore. Introduciamo allora la notazione

$$\sup A = +\infty \,,$$

che si legge "estremo superiore di A uguale a più infinito" come notazione breve per dire che A è illimitato superiormente. Analogamente, per dire che A è illimitato inferiormente scriveremo

$$\inf A = -\infty \,.$$

Osservazione 10 Sottolineiamo che $\sup A$ ed $\inf A$ in generale sono **numeri reali** anche se $A \subseteq \mathbb{Q}$; ossia, **la proprietà di Dedekind non vale in $\mathbb{Q}$.** Notiamo anche che la definizione di estremo, data per insiemi generici, è consistente con quella già introdotta nel caso particolare degli intervalli:

$$a = \inf(a, b) \,, \qquad b = \sup(a, b) \,,$$
$$a = \inf[a, b] = \min[a, b] \,, \quad b = \sup[a, b] = \max[a, b] \,. \quad \blacksquare$$

1.7.1 Conseguenze della proprietà di Dedekind

La proprietà di Dedekind è particolarmente importante perché permette di definire certi numeri che non esistono se non si lavora in $\mathbb{R}$. Per esempio, se $a > 0$:

$$b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

indica un numero $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Ma, chi garantisce l'esistenza di b? Per esempio, se si decide di lavorare solamente con numeri razionali, $b^2 = 2$ è un'equazione priva di soluzioni. E infatti, in $\mathbb{Q}$ la proprietà di Dedekind non vale. Invece, in $\mathbb{R}$ il numero b esiste e si definisce come

$$b = \sup\{x \mid x^n \leq a\} \,.$$

Senza entrare in dettagli ulteriori, diciamo che è grazie alla proprietà di Dedekind che in $\mathbb{R}$ si possono definire i numeri a^r (per qualsiasi esponente reale r, se $a > 0$) e (**per a positivo e diverso da 1** ed $r > 0$) si definisce il numero $\log_a r$. Per definizione,

$$\gamma = \log_a r$$

è il numero che risolve l'equazione

$$a^\gamma = r \,.$$

Ripetiamo, è grazie alla proprietà di Dedekind che questi numeri si possono definire.

Usando la definizione di logaritmo, si provi che (per $r > 0$ ed $a > 0$, $a \neq 1$) valgono le due uguaglianze seguenti:

$$\log_a r = -\log_{1/a} r\,, \qquad \log_a r = \frac{1}{\log_r a}\,.$$

1.8 Funzioni dall'insieme da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Le funzioni che si studiano nel corso di Analisi Matematica 1 operano dall'insieme dei numeri reali nell'insieme dei numeri reali, ossia sono funzioni da $\mathbb{R}$ in sé. Dato che $\mathbb{R}$ ha sottoinsiemi notevoli ed è dotato di operazioni e relazione di ordine, si introducono delle particolari definizioni atte ad identificare proprietà notevoli delle funzioni. Il grafico di una funzione reale di variabile reale si rappresenta usualmente rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse.

Osservazione sui domini

Il dominio di una funzione da $\mathbb{R}$ in sé può essere un insieme qualsiasi. Spesso il dominio è un intervallo o l'unione di più intervalli (si pensi alla funzione $\tan x$). Esistono funzioni importanti che non hanno tale proprietà. Tra queste, le "successioni", che introdurremo al paragrafo 1.8.1.

1.8.1 Le successioni

Un primo caso importante di funzione è quello in cui la funzione ha per dominio **i numeri naturali.** Una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ si chiama $\boxed{\textit{successione}}$ Dunque, una successione dovrebbe indicarsi col simbolo $f(n)$. Si usa invece scrivere (f_n) oppure $\{f_n\}$ per indicare una successione e la variabile n in questo contesto si chiama $\boxed{\textit{indice}}$

La notazione più usata per indicare le successioni è $\{f_n\}$ ma questa notazione è pericolosa perché la parentesi graffa indica anche un insieme; e infatti il simbolo $\{f_n\}$ indica sia la successione, ossia una **funzione,** che la sua **immagine,** ossia un **insieme.** Il significato del simbolo va capito dal contesto.

Sui numeri naturali ripetiamo la stessa osservazione fatta al paragrafo 1.4. Talvolta farà comodo partire dal primo elemento 0, talvolta dal primo elemento 1, talvolta magari scegliere di lavorare con i soli indici maggiori di un certo n_0.

1.8.2 Funzioni ed operazione di somma e prodotto

I numeri reali si sommano e la somma con un numero h fissato è una funzione: la funzione $x \longmapsto x+h$. Sia ora $f(x)$ una funzione che per semplicità pensiamo definita su $\mathbb{R}$. Si può quindi calcolare la funzione composta $x \mapsto f(x+h)$. Dal punto di vista del grafico, il grafico di $f(x+h)$ si ottiene traslando quello di $f(x)$ verso **destra se $h<0$; verso sinistra se $h>0$.** Può accadere che per un certo valore di $T \neq 0$ i grafici di $f(x)$ e di $f(x+T)$ siano indistinguibili; ossia potrebbe accadere che esista un numero $T>0$ tale che

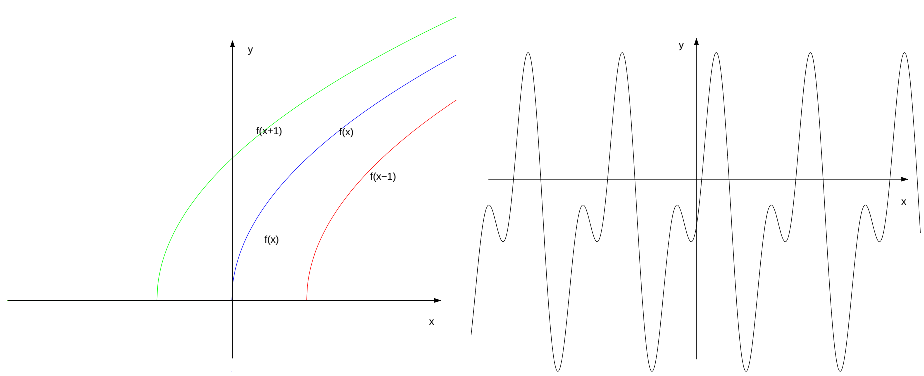
$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom } f\,.$$

In questo caso la funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{periodica}}$ di $\boxed{\textit{periodo}}$ T. Si noti che:

- esistono funzioni periodiche il cui dominio non è $\mathbb{R}$, per esempio la funzione $\tan x$;

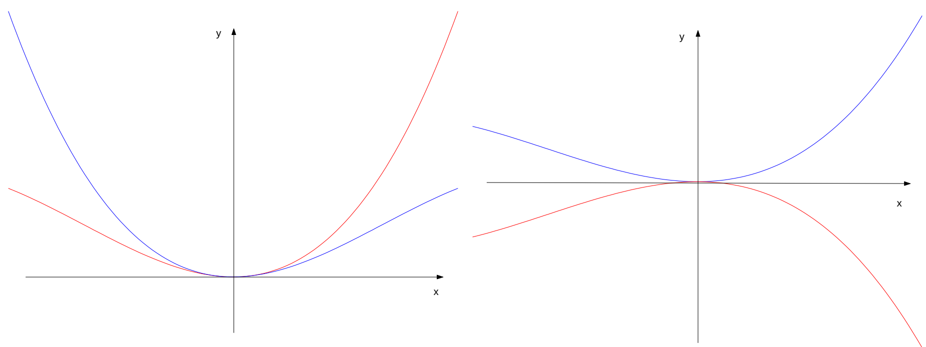
- se una funzione è periodica, essa ammette infiniti periodi: T, $-T$, $2T$, $-2T$ ecc. Se esiste un **minimo periodo positivo** questo si dice il periodo di $f(x)$. Per esempio, $\tan x$ ha periodo π mentre $\sin x$ ha periodo 2π.

Figura 1.1: Sinistra: $f(x)$ (blu), $f(x-1)$ (rosso), $f(x+1)$ (verde); destra: funzione periodica



Tra i numeri reali si può fare anche il prodotto. Si può quindi considerare la trasformazione $x \mapsto ax$ che, se a è positivo corrisponde niente altro che a un cambiamento dell'unità di misura. Quindi il grafico della funzione $f(ax)$ si ottiene da quello di $f(x)$ "allargandolo" o "comprimendolo", in senso orizzontale. Più interessante è la moltiplicazione per numeri negativi, e basta considerare la moltiplicazione per -1. Il grafico di $f(-x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ facendone il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Può accadere

Figura 1.2: sinistra: $f(x)$ e $f(-x)$; destra: $f(x)$ e $-f(x)$



che i due grafici, di $f(x)$ e di $f(-x)$, coincidano; ossia che valga

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom} f .$$

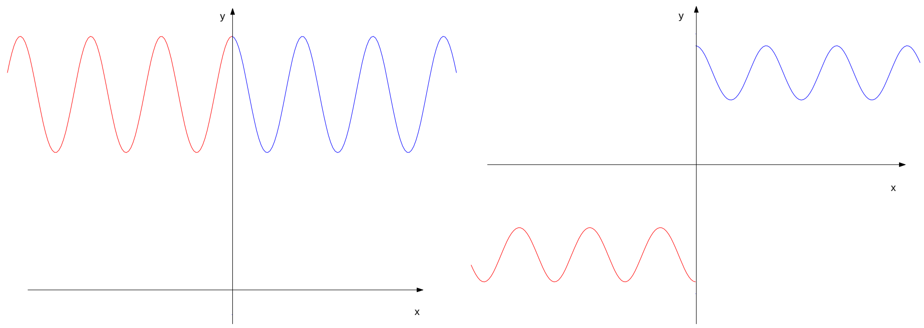
In questo caso la funzione si dice una $\boxed{\textit{funzione pari}}$ **Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.** Consideriamo invece $g(x) = -f(x)$. Il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ facendone il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Si accade che questo coincide col grafico di $f(-x)$ la funzione si chiama $\boxed{\textit{dispari}}$ Ossia, una funzione dispari è una funzione che verifica

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \text{ dom} f .$$

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. I due casi sono illustrati nella figura 1.3. Ripetiamo che le funzioni che si considerano potrebbero non essere definite su $\mathbb{R}$; però:

- una funzione periodica ha dominio illimitato;
- una funzione pari oppure dispari ha dominio simmetrico rispetto ad O.

Figura 1.3: sinistra: funzione pari; destra: funzione dispari



Estensioni pari, dispari e per periodicità

Sia $f(x)$ una funzione il cui dominio è contenuto in $[0, +\infty)$. La sua $\boxed{\textit{estensione pari}}$ è definita imponendo $f(x) = f(-x)$. La sua $\boxed{\textit{estensione dispari}}$ è definita imponendo $f(x) = -f(-x)$. Si possono trovare espressioni esplicite per queste estensioni: l'estensione pari è $f(|x|)$. Invece, l'estensione dispari ha un'espressione più complicata. Non è necessario conoscerla, ma trovarla è un utile esercizio (si vedano gli esercizi alla fine di questo capitolo). Analogamente, sia $f(x)$ definita su $[0, T]$. La sua $\boxed{\textit{estensione per periodicità}}$ si ottiene in questo modo: dato $x \notin [0, T]$ si calcola $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x - nT \in [0, T]$. Si pone quindi

$$f(x) = f(x - nT)\,.$$

1.8.3 Funzioni e relazione di ordine

L'uso della relazione di ordine conduce ai concetti importantissimi di funzione $\boxed{\textit{limitata}}$, funzione $\boxed{\textit{monotona}}$ (crescente o decrescente) e funzione $\boxed{\textit{convessa}}$

Le funzioni limitate

Una funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{limitata superiormente}}$ quando è limitata superiormente la sua immagine; ossia quando **esiste** un numero M tale che **per ogni** $x \in \operatorname{dom} f$ si ha

$$f(x) \leq M\,.$$

Dunque, una funzione è limitata superiormente se e solo se i punti $(x, f(x))$ del suo grafico appartengono al semipiano

$$\{(x, y) \mid y \leq M\}.$$

Analogamente, una funzione è $\boxed{\textit{limitata inferiormente}}$ se è limitata inferiormente la sua immagine; ossia se e siste m tale che $f(x) > m$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$; ed è $\boxed{\textit{limitata}}$ se limitata è la sua immagine, ossia se esistono m ed M tali che $m < f(x) < M$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Inoltre:

Lemma 11 *Una funzione è:*

limitata superiormente se e solo se il suo grafico è contenuto in un semipiano $\{(x, y) \mid y < M\}$*;*

limitata inferiormente se e solo se il suo grafico è contenuto in un semipiano $\{(x, y) \mid y > m\}$*;*

è limitata se e solo se il suo grafico è contenuto in una striscia orizzontale $\{(x, y) \mid m < y < M\}$*.*

Infine, notiamo questa proprietà, conseguenza del Lemma 7:

Lemma 12 *Siano* $f_1(x)$ *ed* $f_2(x)$ *due funzioni limitate e supponiamo che* $(\operatorname{dom} f_1) \cap (\operatorname{dom} f_2) = \emptyset$*. Sia*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in \operatorname{dom} f_1 \\ f_2(x) & \text{se} \quad x \in \operatorname{dom} f_2 . \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ *è limitata.*

Dim. Si noti che $\operatorname{im} f = (\operatorname{im} f_1) \cup (\operatorname{im} f_2)$, ambedue insiemi limitati, e si usi il Lemma 7. ■

Analogo enunciato vale se si considera la sola limitatezza da sopra o da sotto. In particolare:

Corollario 13 *Sia* $x_0 \in \operatorname{dom} f(x)$ *e sia* $g(x) = f(x)$ *per* $x \neq x_0$*. Se* $g(x)$ *è limitata, anche* $f(x)$ *lo è.*

Ossia: **il valore che la funzione prende in un solo punto non influisce sulla proprietà della funzione di essere o meno limitata.**

La monotonia

Una funzione si dice $\boxed{\textit{monotona crescente}}$ quando:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{ dom} f \text{tali che } x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)\,;$$

Si dice $\boxed{\textit{monotona decrescente}}$ quando:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{ dom} f \text{tali che } x_1 > x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$

Si noti che le disuguaglianze tra i punti x_i sono strette, mentre a destra potrebbe valere anche l'uguaglianza. Si parla di funzioni $\boxed{\textit{strettamente monotone}}$ quando sono monotone ed inoltre $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Un modo apparentemente più complicato, ma più utile, di definire la monotonia è il seguente: una funzione è crescente se $(f(x_1) - f(x_2))$ ha lo stesso segno di $(x_1 - x_2)$; decrescente se i segni sono opposti. Usando la regola dei segni:

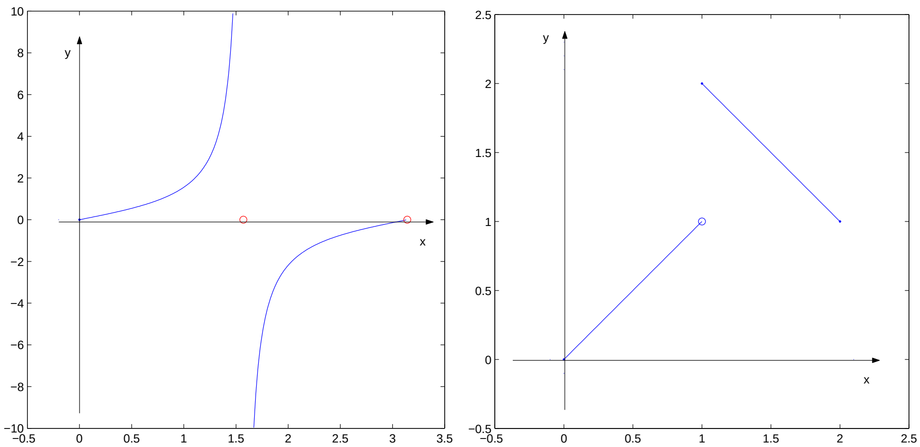
- Una funzione è crescente su I se
$$\forall x_1 \in I\,, \forall x_2 \in I \quad \text{tali che } x_1 \neq x_2 \text{ si ha} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\,;$$
- Una funzione è decrescente su I se
$$\forall x_1 \in I\,, \forall x_2 \in I \quad \text{tali che } x_1 \neq x_2 \text{ si ha} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\,.$$

In queste relazioni va richiesto $x_1 \neq x_2$ (non si può dividere per 0) ma l'ordine in cui si susseguono x_1 ed x_2 non interviene.

Osservazione 14 E' bene osservare quanto segue:

- la funzione $\tan x$ **non è monotona sul suo dominio.**
- Ogni funzione **strettamente** monotona è iniettiva e quindi invertibile.
- Esistono funzioni iniettive e non monotone. Un esempio è la funzione $f(x) = \tan x$ definita sull'insieme $[0, \pi) - \{\pi/2\}$. Questa funzione trasforma il suo dominio, che non è un intervallo, in modo biunivoco su $\mathbb{R}$. Si possono anche trovare funzioni iniettive e non monotone, che trasformano intervalli limitati in intervalli limitati, come per esempio la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{se } \ 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$
I grafici sono in figura *1.4* ■

Figura 1.4: Funzioni iniettive ma non monotone



MONOTONIA E FUNZIONE INVERSA
Naturalmente, una funzione **strettamente monotona** è iniettiva e quindi ammette funzione inversa. **Una funzione strettamente crescente (decrescente) ha funzione inversa strettamente crescente (decrescente).** Infatti, $$f(x_1) = y_1\,, \quad f(x_2) = y_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}$$ e quindi i due rapporti hanno il medesimo segno. Ripetiamo che gli esempi in figura 1.4 mostrano che **esistono funzioni non monotone ed invertibili.**

1.8.4 I punti di estremo

Se vale $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, il numero $f(x_0)$ è il massimo dell'immagine della funzione ed il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{punto di massimo}}$ per la funzione $f(x)$. Se vale $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, il numero $f(x_0)$ è il minimo dell'immagine della funzione ed il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{punto di minimo}}$ per la funzione $f(x)$. Supponiamo che esista un intorno I di x_0 e che x_0 sia punto di massimo oppure di minimo per la **restrizione** di $f(x)$ a tale intorno. Allora, il punto x_0 si dice rispettivamente $\boxed{\textit{punto di massimo relativo}}$ oppure $\boxed{\textit{punto di minimo relativo}}$ della funzione

$f(x)$. I punti di massimo oppure di minimo si chiamano $\boxed{\textit{punti di estremo}}$ della funzione. Invece che "estremo relativo" si dice anche $\boxed{\textit{estremo locale}}$ Per distinguere i punti di massimo o di minimo dai punti di massimo o di minimo relativo i primi si chiamano anche $\boxed{\textit{estremi assoluti}}$ o $\boxed{\textit{estremi globali}}$ della funzione: massimi o minimi assoluti, equivalentemente massimi o minimi globali. Infine, notiamo questa proprietà:

Lemma 15 *Sia $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$ e sia $c \in (a, b)$. Supponiamo che la restrizione di $f(x)$ ad $[a, c]$ sia* crescente *e che la restrizione a $[c, b]$ sia* decrescente. *Allora, il punto c è punto di massimo per la funzione $f(x)$. Invece, il punto c è punto di minimo se $f(x)$* decresce *su $[a, c]$ e* cresce *su $[c, b]$.*

Facendo opportuni esempi, si mostri che niente può dirsi se $f(x)$ è crescente su $[a, c)$ e decrescente su $(c, b]$.

1.8.5 La convessità

A differenza delle definizioni di funzione limitata e di funzione monotona, la definizione di funzione convessa si applica solo a funzioni definite su intervalli. Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $[a, b]$. Per fissare le idea, richiediamo che l'intervallo sia chiuso e limitato, ma ciò non è importante. **Per la definizione di funzione convessa, è importante che il dominio sia un intervallo.** Siano x_1 ed x_2 due punti in $[a, b]$. Si chiama $\boxed{\textit{corda}}$ il segmento che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$. La funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{convessa}}$ se la proprietà seguente vale **per ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 in $[a, b]$: il grafico della restrizione di $f(x)$ ad $[x_1, x_2]$ è **sotto** la corda che unisce $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$. Non si esclude che il grafico possa almeno in parte coincidere con la corda stessa. Se $-f(x)$ è convessa, la funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{concava}}$ La figura 1.5 riporta il grafico di una funzione convessa e di una né concava né convessa. Quando una funzione è convessa si dice anche che **il suo grafico ha la concavità rivolta verso l'alto.**

1.8.6 Grafici di funzioni elementari

Si riportano i grafici di alcune funzioni elementari, ossia:

- le funzioni $f(x) = x^2$ ed $f(x) = \sqrt{x}$ in figura 1.6, a sinistra e $f(x) = x^3$ ed $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in figura 1.6, a destra;

Figura 1.5: sinistra: funzione convessa; destra: né concava né convessa

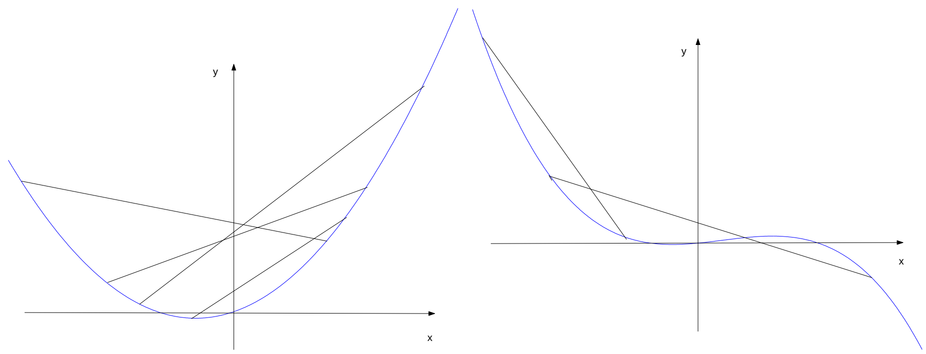
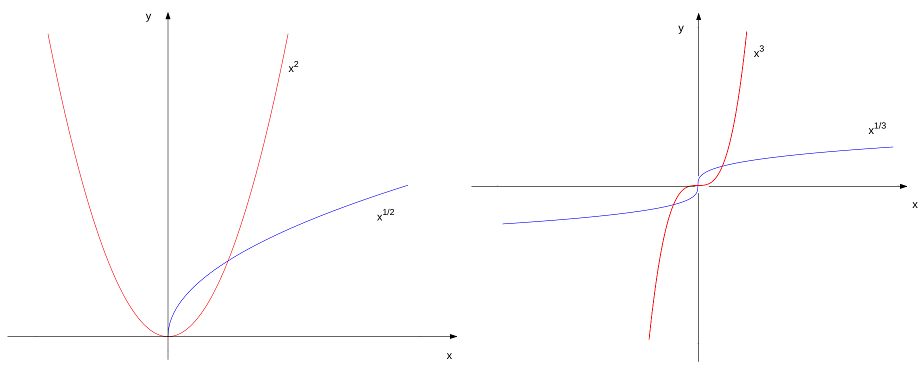


Figura 1.6:



- la funzione $f(x) = |x|$ e la funzione $H(x)$

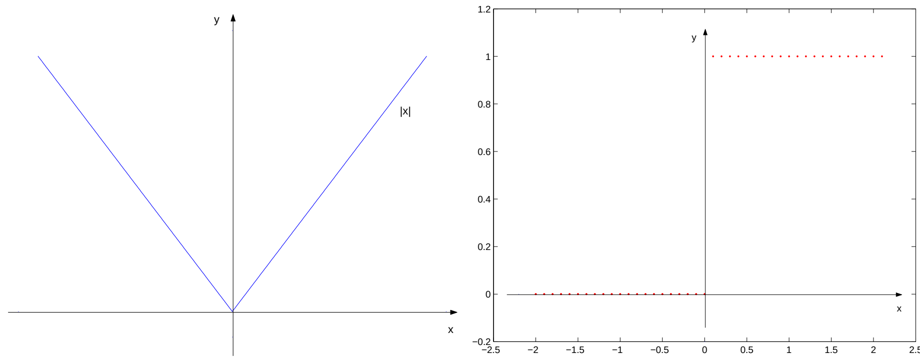
$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La funzione $H(x)$ si chiama funzione di $\boxed{\textit{Heaviside}}$ I grafici sono in figura 1.7.

- ricordiamo che la $\boxed{\textit{funzione segno}}$ è la funzione

$$\text{sgn}\,(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Figura 1.7: Valore assoluto, a sinistra, funzione di Heaviside (grafico punteggiato), a destra



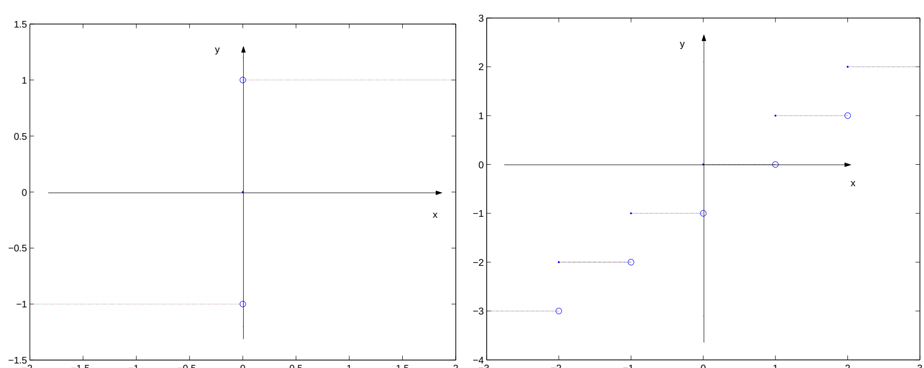
Il grafico è in figura 1.8, a sinistra. Per esercizio, si faccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

e si confronti con quello della funzione $\operatorname{sgn}(x)$.

- la funzione $\boxed{\textit{parte intera}}$ Questa funzione si indica col simbolo $[x]$ e ad ogni x reale fa corrispondere il più grande intero minore od uguale ad x. Il grafico è in figura 1.8, a destra.

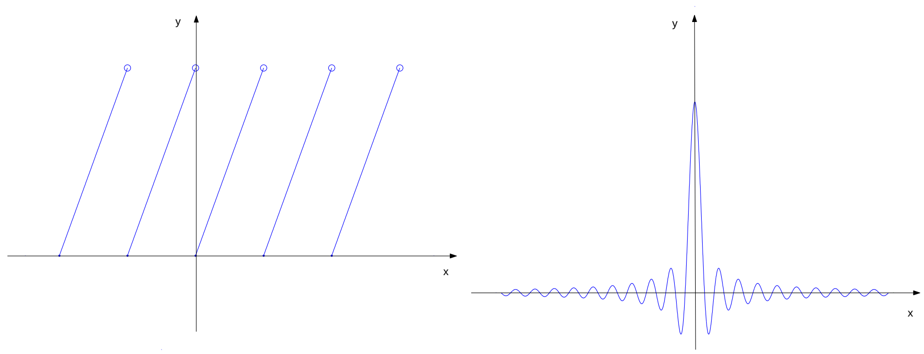
Figura 1.8:



- la funzione $\boxed{mantissa}$ Questa funzione si indica col simbolo $M(x)$ e per definizione è
$$M(x) = x - [x]$$
(ove $[\dots]$ indica "parte intera"). Il grafico è in figura 1.9, a sinistra[6]

- la funzione $\boxed{seno\ cardinale}$, abbreviata $\boxed{sinc}$. Si tratta della funzione
$$sinc\ x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$
Il grafico è in figura 1.9, a destra.

Figura 1.9: La funzione mantissa, a sinistra, e funzione seno cardinale, a destra

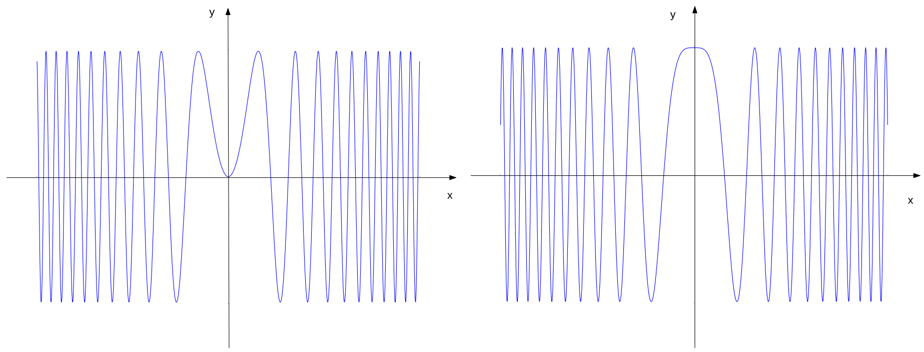


- le due $\boxed{funzioni\ di\ Fresnel}$ Le funzioni di Fresnel sono le funzioni $\sin x^2$ e $\cos x^2$. I grafici sono in figura 1.10.

A partire da una data funzione $f(x)$ si definiscono inoltre le funzioni seguenti:
$$f_+(x) = \max\{f(x)\,,0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \quad \text{altrimenti,} \end{cases}$$
$$f_-(x) = \min\{f(x)\,,0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \leq 0 \\ 0 & \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[6]talvolta viene detto che $M(x)$ è la "parte decimale" del numero x. Ciò è corretto se x si rappresenta con la usuale notazione posizionale, come $x = x_0 \cdot 10^0 + \left[x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} \cdots\right]$ (i coefficienti x_0, x_1, $\dots$ sono interi). In tal caso, $M(x) = \left[x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} \cdots\right]$. Però i numeri si possono rappresentare anche in altri modi. Per es. $1 = 0,9999\dots$ ma questa non è la rappresentazione di 1 in notazione posizionale e la mantissa non è la "parte decimale" di questa rappresentazione.

Figura 1.10:



Si faciano alcuni esempi e si noti che:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f_+(x) - f_-(x).$$

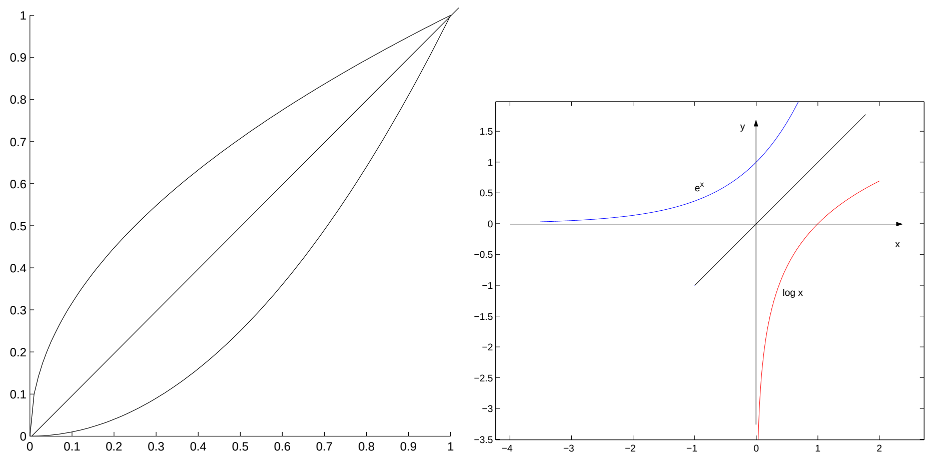
1.8.7 Grafici di funzioni inverse l'una dell'altra

Premettiamo un'osservazione: consideriamo il punto $P(a,b)$ del piano cartesiano e vogliamo disegnare il punto $Q(b,a)$. Questo coincide con P se $a = b$; altrimenti ne è il simmetrico[7] rispetto alla prima bisettrice. Ossia si ottiene considerando la retta per P ortogonale alla prima bisettrice; prendendo il punto Q su tale retta, dalla parte opposta di P e che ha la medesima distanza dalla bisettrice. Si studi in particolare come i punti $(t,0)$, con $a \le t \le b$, si ottengono dai punti $(0,t)$; i punti $(t,2t)$ dai punti $(2t,t)$. Siano f e $g = f^{-1}$ due funzioni inverse l'una dell'altra. Allora, se f opera dall'asse delle ascisse ed ha immagine sull'asse delle ordinate, la g opera dall'asse delle ordinate ed ha immagine sull'asse delle ascisse. Il punto y appartiene al dominio di g quando $y = f(x)$ (per una unica x) e in tal caso il corrispondente di $y = f(x)$ è proprio $g(y) = x$. Quindi, se abbiamo il grafico di f, abbiamo anche il grafico di g, ma con l'insieme di partenza rappresentato dall'asse delle ordinate. In pratica vogliamo rappresentare g nel modo usuale, ossia con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse. Per questo notiamo che il punto $(y, g(y))$ del grafico di g, disegnato con l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse, ha coordinate $(f(x), x)$, punto simmetrico, rispetto alla prima bisettrice, di $(x, f(x))$. Ciò vale per tutti i punti del grafico e quindi **il grafico di g si ottiene a partire da quello di f, facendone il simmetrico rispetto alla**

[7] simmetria ortogonale

prima bisettrice, come in figura 1.11. Particolari funzioni inverse sono

Figura 1.11: Grafici di funzioni l'una inversa dell'altra



la funzione esponenziale e la funzione logaritmo (con la medesima base $a > 0$ e diversa da 1). Infatti, la funzione $\log_a x$ si ottiene risolvendo rispetto ad y l'equazione

$$a^y = x\,.$$

La funzione a^x ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(0, +\infty)$. Dunque, $\log_a x$ ha dominio $(0, +\infty)$ ed immagine $\mathbb{R}$. La figura 1.12 riporta i grafici delle funzioni logaritmo ed esponenziale nel caso $0 < a < 1$ (a sinistra) e nel caso $a > 1$ a destra. Può accadere che certe funzioni non siano invertibili, ma che le loro restrizioni ad opportuni insiemi lo siano. In tal caso si potrà considerare la funzione inversa di tali restrizioni. Per esempio, la funzione $\sqrt{y}$, con $y \geq 0$, si ottiene risolvendo l'equazione

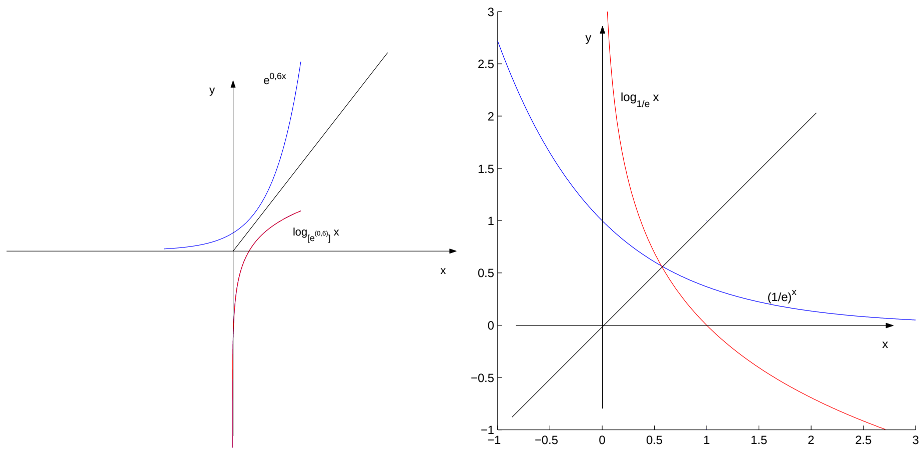
$$x^2 = y$$

e imponendo l'ulteriore condizione $x > 0$. La soluzione, con la condizione $x > 0$, è unica e quindi la restrizione ad $x > 0$ di $f(y) = x^2$ è invertibile. Per esercizio, si traccino i grafici di queste funzioni. Quindi si tracci il grafico della funzione $f(x) = x^2$ definita su $x \leq 0$, e il grafico della sua funzione inversa, che è $g(x) = -\sqrt{x}$.

1.8.8 Le inverse delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive e quindi nemmeno invertibili. E' però possibile trovare degli intervalli su cui le

Figura 1.12: Funzione esponenziale e logaritmo



restrizioni delle funzioni trigonometriche sono iniettive e quindi invertibili. Le funzioni che si ottengono mediante restrizioni **ad intervalli particolari** si incontrano spesso in pratica, ed hanno nomi particolari. I loro grafici sono in figura 1.13.

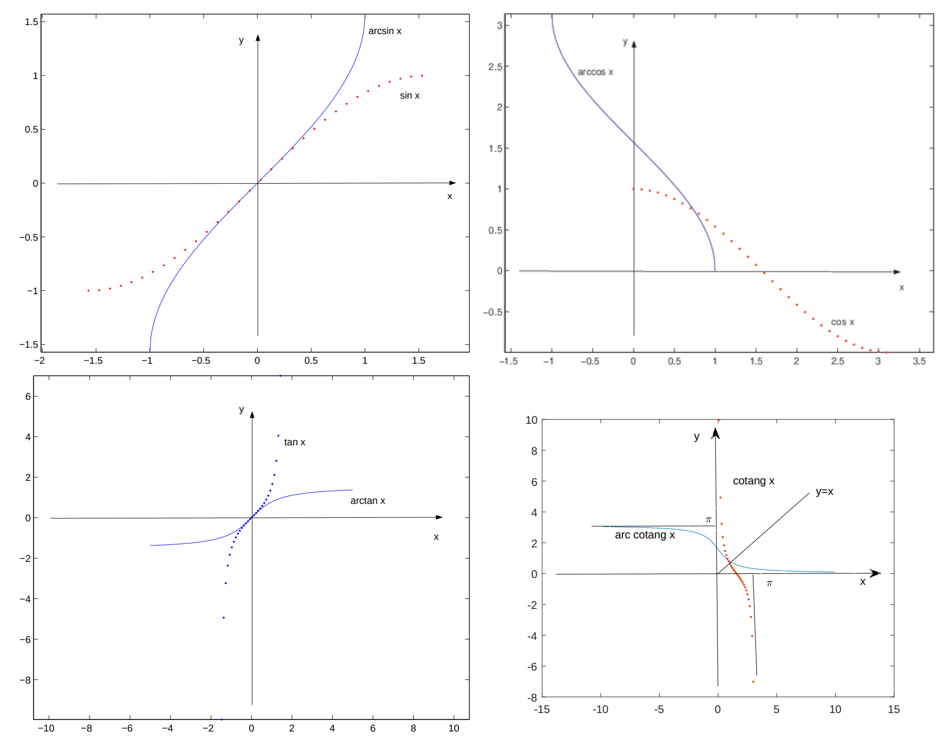
La funzione $\arctan x$ La restrizione della funzione $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è monotona strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(-\pi/2, \pi/2)$. La funzione inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si chiama "arcotangente" e si indica col simbolo $\arctan x$.

La funzione $\arcsin x$ La restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $[-\pi/2, \pi/2]$. La funzione inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ si chiama "arcoseno" e si indica col simbolo $\arcsin x$.

La funzione $\arccos x$ La restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ ha immagine $[-1, 1]$, è strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $[-1, 1]$ ed immagine $[0, \pi]$. La funzione inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ si chiama "arcoCOseno" e si indica col simbolo $\arccos x$.

La funzione arccotg x La restrizione funzione $\cot x$ all'intervallo $(0, \pi)$ ha immagine $\mathbb{R}$, è monotona strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua funzione inversa ha dominio $\mathbb{R}$ ed immagine $(0, \pi)$. La funzione inversa della restrizione di $\cot x$ all'intervallo $(0, \pi)$ si chiama “arcoCOtangente” e si indica col simbolo $\operatorname{arccotg} x$.

Figura 1.13: Le funzioni trigonometriche (punteggiate) e le relative inverse



1.9 Funzioni ed “espressioni analitiche”

Per ragioni didattiche le funzioni che si studiano sono spesso assegnate mediante “espressioni analitiche”[8], ossia specificando certe operazioni da applicare ad una “variabile”: per esempio della variabile si calcolano le potenze, i logarirmi, il valore assoluto ecc., e queste operazioni si combinano insieme per “definire” una funzione. Di conseguenza si è portati a confondere

[8]notare che il concetto di “espressione analitica” è qualcosa di vago e molto elastico: $\sin x$, costruita con considerazioni meccaniche, è un'espressione analitica?

tali operazioni analitiche col concetto stesso di funzione. E' importante sottolineare che ciò è sbagliato. Prima di tutto non è vero che ogni funzione si assegni mediante "espressioni analitiche". Si pensi per esempio alla mantissa o alla funzione che ad ogni numero assegna l'intero più vicino. Oppure, si pensi ad una funzione ottenuta mediante misure sperimentali, come quella che rappresenta la temperatura registrata da un termografo in un certo luogo e durante un certo intervallo di tempo. D'altra parte, una funzione è una trasformazione da un assegnato dominio; e il dominio deve essere dato nello stesso momento in cui si assegna la funzione. Consideriamo ora quest'esempio: sia

$$f(x) = \sqrt{2x} \qquad \text{definita per } x \in [0,1]$$
$$g(x) = x^2 \qquad \text{definita per } x \in \mathbb{R}\,.$$

La funzione composta

$$g(f(x)) = 2x$$

ha dominio $[0,1]$ ed è quindi ben diversa dall'"espressione analitica" $2x$, che può essere calcolata per ogni x. Se vogliamo considerare $2x$ come funzione su $\mathbb{R}$, questa non è $g(f(x))$: è una delle infinite estensioni ad $\mathbb{R}$ di $g(f(x))$. Ciò nonostante negli esercizi d'esame compaiono frequentemente testi del tipo "determinare il dominio della funzione". Convenzionalmente e al solo scopo di verificare la capacità di risolvere disequazioni, nei compiti d'esame si assume che una funzione sia definita sul più grande insieme sul quale **tutte** le operazioni che entrano nella sua definizione si possono fare. Considerando l'esempio delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ date sopra, diremo convenzionalmente che $f(x)$ è definita per $x \geq 0$ e quindi che

$$g(f(x)) = \left(\sqrt{2x}\right)^2$$

è anch'essa definita per $x \geq 0$. E' **sbagliato** dire che $g(f(x))$ è definita su $\mathbb{R}$.

1.10 Appendice: progressioni

Si chiamano $\boxed{\textit{progressioni}}$ certe successioni particolari. Tra queste le progressioni aritmetiche e le progressioni geometriche. le $\boxed{\textit{progressioni aritmetiche}}$ sono le successioni $\{x_n\}$ per cui

$$x_1 = a\,, x_2 = a + d\,, x_3 = a + 2d\,, x_{n-1} = a + (n-2)d\,,\ x_n = a + (n-1)d\ \ldots\ldots$$

Si noti che il primo indice della successione aritmetica è 1. Serve ricordare questa convenzione per interpretare correttamente le

formule. La proprietà essenziale delle progressioni aritmetiche è che

$$x_n + x_1 = 2a + (n-1)d = x_{n-1} + x_2 = x_{n-2} + x_3 \ldots\ldots$$

Vale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = n\frac{x_0 + x_n}{2} = n\frac{2a + (n-1)d}{2}\,.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} 2S_n &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1) \\ &= (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) \\ &= n(x_1 + x_n) = n\left(2a + (n-1)d\right)\,. \end{aligned}$$

Nel caso particolare $a = 0$ e $d = 1$ si trova

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.5}$$

Invece, non esitono formule per il prodotto dei termini di una successione aritmetica. Si chiama $\boxed{\textit{progressione geometrica}}$ una successione $\{x_n\}$ tale che

$$x_0 = a = aq^0\,, \quad x_1 = aq\,, \quad x_2 = aq^2\,, \quad x_n = aq^n\,, \ldots\ldots$$

Il numero q si chiama $\boxed{\textit{ragione}}$ della progressione geometrica. **Si noti che il primo indice della successione geometrica è** 0**. Serve ricordare questa convenzione per interpretare correttamente le formule.** Un fatto importante delle successioni geometriche è che esistono formule sia per il prodotto che per la somma dei primi $n+1$ elementi (quelli di indice da 0 ad n). A noi interessa principalmente la formula per la somma. Indichiamo tale somma con S_n:

$$S_n = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right)\,.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} S_n + aq^{n+1} = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}\right) = \\ a\left(1 + q\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right)\right) = \\ a + qS_n \end{aligned}$$

da cui

$$S_n = a\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right) = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,. \tag{1.6}$$

Per completezza diamo anche la formula del prodotto

$$P_n = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1} \cdot x_n .$$

Ricordiamo che in questo prodotto ogni i fattori sono $x_k = aq^k$ con k **che prende anche il valore** 0**.** Dunque il fattora a compare $(n+1)$ volte (una volta quando l'indice è 0, una volta quando l'indice è 1 ecc.) e, ricordando la (1.5),

$$P_n = a^{n+1} \cdot q \cdot q^2 \cdot q^n = a^{n+1} q^{1+2+\cdot +n} = a^{n+1} q^{n(n+1)/2} \,.$$

1.11 Alcuni esercizi

1. Dire se è possibile che $A \cap B$ oppure $A - B$ siano limitati, con A e B ambedue insiemi illimitati di $\mathbb{R}$.

2. Sia B^C il complementare di B. Provare le uguaglianze

$$A \cap B = A \setminus B^C \,, \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \,, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \,.$$

3. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due qualsiasi funzioni a valori reali, definite su $\mathbb{R}$. Mostrare che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} &\{x \,|f(t) \le t \,, g(x) \le t\} = \{x \,|f(x) \le t\} \cap \{ \,|g(x) \le t\} = \\ &= \{x \,|f(x) \le t\} \setminus \{x \,|g(x) > t\} = \{x \,|f(x) \le t\} \cap \{x \,|g(x) > t\}^{\mathcal{C}} \,. \end{aligned}$$

4. Siano a e b due numeri reali non nulli, con lo stesso segno, e tali che $a > b$. Mostrare che $1/a < 1/b$. Discutere cosa accade se a e b hanno segno opposto.

5. **($\star$)** Rappresentare sul piano cartesiano ciascuno degli insiemi

$$\begin{aligned} &\left\{(x,y) \,|x^2 < y^2\right\} , \{(x,y) \,||x| < |y|\} \,, \quad \left\{(x,y) \,|x^3 < y^3\right\} \,, \\ &\left\{(x,y) \,|x^2 \le y^2\right\} , \{(x,y) \,||x| \le |y|\} \,, \quad \left\{(x,y) \,|x^3 \le y^3\right\} \,. \end{aligned}$$

6. Dire se esistono funzioni da $\mathbb{R}$ in sé che soddisfano ad una delle proprietà seguenti:

   - $\forall c \in \mathbb{R} \,, \forall x \in$ dom f si ha $f(x) > c$;
   - $\forall c \in \mathbb{R} \exists x \in$ dom f tale che $f(x) > c$.

Scrivere inoltre la negazione delle proposizioni precedenti, e dire se esistono funzioni che verificano le proposizioni ottenute.

7. Si dica se è possibile che $f(x)$ sia contemporaneamente pari e dispari.

8. Si dica se è possibile che valga $f(x) = |f(x)|$, $f(x) = f(|x|)$, $f(x) = f(|x|) = |f(x)|$.

9. Si dica se una funzione pari può essere iniettiva.

10. Si dica se una funzione pari può essere monotona oppure strettamente monotona.

11. Si dica se una funzione dispari può essere iniettiva oppure non iniettiva; monotona crescente oppure decrescente.

12. Il dominio di una funzione periodica deve essere "invariante per traslazioni"; ossia, se T è un periodo e se $x \in \operatorname{dom} f$, deve essere $x + T \in \operatorname{dom} f$. Mostrare che anche $x + rT \in \operatorname{dom} f$ per ogni intero r.

13. Si dica se una funzione periodica può essere monotona, strettamente o meno.

14. Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ e, a partire da esso, si disegnino i grafici di $f_+(x)$, $f_-(x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, $\operatorname{sgn}(f(x))$, $f(\operatorname{sgn}(x))$, $H(f(x))$ ed $f(H(x))$ ove $H(x)$ indica la funzione di Heaviside.

15. Mostrare che la somma ed il prodotto di funzioni limitate sono funzioni limitate.

16. Sia $f(x)$ definita su $(0, 1)$ come segue: se x è irrazionale, $f(x) = 0$; se x è razionale, sia $x = p/q$ la sua unica rappresentazione come frazione ridotta ai minimi termini. Allora $f(x) = f(p/q) = 1/q$. Mostrare che la funzione è illimitata in ogni sottointervallo di $(0, 1)$.

17. I domini di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono contenuti in $\mathbb{R}$ ed inoltre $f(x)$ estende $g(x)$. Cosa può dirsi degli estremi inferiori e superiori dei domini?

18. I domini di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono contenuti in $\mathbb{R}$. Si sa che

$$\inf(\operatorname{dom} f(x)) = \inf(\operatorname{dom} g(x)) , \qquad \sup(\operatorname{dom} f(x)) = \sup(\operatorname{dom} g(x)) .$$

Dire se è possibile che $f(x)$ estenda $g(x)$.

19. Due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli insiemi siano diversi.

20. Due intervalli hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

21. Due intervalli ambedue aperti hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

22. Due intervalli ambedue chiusi hanno i medesimi estremi superiori ed inferiori. Dire se può essere che gli intervalli siano diversi.

23. **($\star$)** Sia $f(x)$ una funzione limitata. Mostrare che $1/f(x)$ può non essere limitata.

24. **($\star$)** Mostrare che $1/f(x)$ può essere limitata anche se $f(x)$ non è limitata.

25. **($\star$)** Dare una condizione su $f(x)$ che implichi che $1/f(x)$ è limitata.

26. Dire se una funzione può avere più di un punto di minimo assoluto.

27. Dire se una funzione può avere estremi relativi ma non assoluti.

28. Dire se un punto può essere contemporaneamente di massimo relativo ed assoluto per una funzione.

29. Dire se una funzione monotona può avere massimi assoluti o relativi.

30. Dire se una funzione strettamente monotona può avere più di un punto di massimo, assoluto oppure relativo.

31. Sia $f(x) = x^n \sin^2(1/x)$ se $x \neq 0$, ed $f(0) = 0$. Dire per quali valori di n la funzione ha minimo in $x = 0$

32. Sia $f(x)$ definita su $(0, 2)$ ed ivi crescente. Dire se è possibile che la sua restrizione a $(0, 1)$ sia illimitata inferiormente oppure superiormente.

33. Disegnare i grafici richiesti:

    - Sia $f(x) = x$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$;
    - Sia $f(x) = x^2$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$;

- Sia $f(x) = 1/x$. Disegnare i grafici delle funzioni $g(x) = f(f(x))$ e $h(x) = f^2(x)$.

34. In questo esercizio, $[x]$ ed $M(x)$ denotano le funzioni *parte intera* e *mantissa.*

    - Si disegni il grafico delle funzioni $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}M(x))$ e $g(x) = [x] + \sin(\frac{\pi}{2}M(x))$;
    - Disegnare il grafico di un esempio di funzione con questa proprietà: $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 1$. Disegnare quindi il grafico di $[x] + f(M(x))$ (una espressione numerica per la funzione $f(x)$ non è richiesta. Ne basta il grafico);
    - provare che se $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 1$ allora $g(x) = [x] + f(M(x))$ è crescente;
    - Disegnare il grafico di un esempio di funzione con questa proprietà: $f(x)$ è definita su $[0,1]$, crescente e tale che $f(1) = f(0) + 2$. Disegnare quindi il grafico di $[x] + f(M(x))$.

35. A partire dal grafico della funzione $\arccos x$, si disegni il grafico della funzione inversa della funzione $g(x) = -\cos x$ con $\operatorname{dom} g(x) = [0,\pi]$. Si faccia lo stesso per la funzione $h(x) = -\sin x$ (definita su $(-\pi,\pi)$), a partire dal grafico di $\arcsin x$.

36. Spiegare perché l'affermazione seguente è falsa: la funzione inversa di una funzione pari è pari oppure dispari.

37. **($\star$)** Mostrare che la funzione inversa di una funzione dispari (ed invertibile) è dispari.

38. **($\star$)** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni da $\mathbb{R}$ in sé, definite sul medesimo intervallo $[a,b]$. Supponiamo che siano strettamente crescenti e che su $[a,b]$ valga
$$f(x) > g(x)\,.$$
Mostrare che le loro funzioni inverse verificano
$$f^{-1}(x) < g^{-1}(x)\,.$$
Cambia qualcosa se le funzioni sono decrescenti?

39. **($\star$)** Sia $f(x)$ invertibile su un intervallo $[a,b]$. La funzione $g(x) = f(x+c)$ è definita su $[a-c, b-c]$. Mostrare che è invertibile e che la sua funzione inversa $g^{-1}(x)$ è $f^{-1}(y)-c$. Applicare quest'osservazione ai casi seguenti:

- La funzione $f(x) = \cos x$ (definita su $[0, \pi]$) e la funzione $g(x) = f(x + \pi)$;
- La funzione $f(x) = -\cos x$ (definita su $[0, \pi]$) e la funzione $h(x) = f(x + \pi/2)$.

40. Notando che $\sin(x - \pi/2) = -\cos x$, si trovi una relazione tra i grafici delle funzioni $\arcsin x$ ed $\arccos x$. Si disegnino quindi i grafici delle funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$ e $-\arccos x$.

41. Sia $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$ ed invertibile, e sia
$$g(x) = af(x) + b \tag{1.7}$$
con $a \neq 0$ e b qualsiasi. Mostrare che $g(x)$ è invertibile e che
$$g^{-1}(y) = f^{-1}\left((y - b)/a\right) .$$

42. **(⋆)** Sia $f(x)$ una funzione definita per $x > 0$. Si mostri che la sua estensione dispari per $x > 0$ è $f(x)$ mentre per $x < 0$ è
$$(\ \mathrm{sgn}\,(x))\, f\,(x\,(\ \mathrm{sgn}\,(x)))\ .$$

43. **(⋆)** Si trovino una funzione razionale $f(x)$ ed una funzione razionale $g(x)$ che verificano rispettivamente
$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)\,, \qquad g(x) = -\,g\left(-\frac{1}{x}\right)$$
(due esempi si trovano all'esercizio 6 del Cap. 3).

44. **(⋆)** Una delle due uguaglianze seguenti è corretta e l'altra è sbagliata:
$$(\sqrt{x})^2 = x\,, \qquad \sqrt{x^2} = x\,.$$

45. **(⋆)** Una delle due uguaglianze seguenti è corretta, mentre l'altra è sbagliate:
$$\tan(\arctan x) = x\,, \qquad \arctan(\tan x) = x\,.$$
Spiegare e fare esempi analoghi con le funzioni $\arcsin x$ ed $\arccos x$.

46. il calcolo seguente è **sbagliato.** Si considera la funzione $f(x) = (-x)^2$, definita per $x \geq 0$ e se ne vuol calcolare la funzione inversa. Dunque si deve risolvere $(-x)^2 = y$ con $y \in\ \mathrm{im}\, f(x)$, ossia $y \geq 0$. Dunque si ha $-x = \sqrt{y}$ e quindi $x = -\sqrt{y}$. Il risultato è sbagliato, come si vede facilmente ottenendo il grafico della funzione inversa come simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla prima bisettrice.

- trovare l'errore (si esamini il segno di x).
- la funzione $g(x) = -\sqrt{y}$ è comunque una funzione inversa. Dire di quale funzione.

47. **(⋆)** Tracciare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = |x|^{g(x)}\,, \qquad -1 < x < 1$$

con

$$g(x) = \frac{1}{2}\,(1 + 3[x])\,(2 + [x])$$

(la parentesi quadra indica la parte intera).

Capitolo 2

I limiti

Il moto vien definito dai Gassendisti[a] *una continua e non interrotta mutazione del luogo.* Giacomo Leopardi, *Dissertazione sopra il moto.* Nel periodo in cui Giacomo Leopardi scriveva le sue riflessioni sui principi della fisica (intorno al 1810) il concetto di "continua e non interrotta mutazione" non è ancora chiaro. Verrà chiarito una quindicina di anni dopo da Augustin-Louis Cauchy ed è l'oggetto di questo capitolo.

[a] Pierre Gassend, contemporaneo di Cartesio e propugnatore dell'empirismo nelle scienze.

In questo capitolo si studia il comportamento delle funzioni al variare della variabile x, per x che prende valori via via più grandi (diremo per x "tendente a $+\infty$") o negativi, via via più piccoli, (e diremo per x "tendente a $-\infty$"), oppure per x che approssima un numero x_0 (e diremo per x "tendente ad x_0"). Non è necessario che x_0 appartenga al dominio della funzione; anzi, se gli appartiene, non studiamo la funzione $f(x)$ ma la restrizione di $f(x)$ ad $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Ossia, **l'eventuale valore che $f(x)$ prende in x_0 non deve intervenire.** Per dire x "tendente a $+\infty$" useremo la notazione $x \to +\infty$; significato analogo hanno le notazioni $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0$. Ricordiamo il significato del termine $\boxed{\textit{intorno}}$, visto al paragrafo 1.5. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si chiama *intorno di* x_0 un qualsiasi intervallo aperto (a, b) contenente x_0. Dato che l'intervallo è aperto, il punto x_0 è *interno* all'intorno: l'intorno di x_0 interseca sia $(-\infty, x_0)$ che (x_0, ∞) e le intersezioni sono due intervalli. Un intorno di x_0 si dice *intorno simmetrico di* x_0 se ha forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r > 0$. Si chiama *intorno di* $+\infty$ un sottoinsieme $(a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$ mentre si chiama *intorno* *di* $-\infty$ un sottoinsieme $(-\infty, a)$ di $\mathbb{R}$. Le proprietà cruciali degli intorni sono le seguenti:

- l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0; l'intersezione di due intorni di $+\infty$, oppure di $-\infty$, è ancora un intorno di $+\infty$, oppure di $-\infty$.

- se $x_1 \neq x_2$ esistono intorni $I(x_1)$ ed $I(x_2)$ (rispettivamente di x_1 ed x_2) **che non si intersecano.** Per esempio, hanno questa proprietà i due intorni simmetrici $(x_1 - (\epsilon/2), x_1 + (\epsilon/2))$ ed $(x_2 - (\epsilon/2), x_2 + (\epsilon/2))$ se $\epsilon < |x_2 - x_1|$. Analoga proprietà vale se si considerano anche intorni di $\pm\infty$.

Richiederemo:

- il dominio di $f(x)$ deve essere **illimitato superiormente** se vogliamo studiare il caso $x \to +\infty$; il dominio di $f(x)$ deve essere **illimitato inferiormente** se vogliamo studiare il caso $x \to -\infty$;

- il dominio di $f(x)$ deve intersecare **ogni** intorno di x_0 **in punti diversi da** x_0 se vogliamo studiare il caso $x \to x_0$.

Queste condizioni saranno sempre sottintese e non più ripetute. Inoltre è inteso che quando scriveremo $f(x)$ dovrà essere $x \in \operatorname{dom} f$. Anche questa condizione verrà spesso sottintesa.

2.1 Limiti per prova $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Studieremo esplicitamente il caso $x \to +\infty$ lasciando come esercizio di adattare ciò che diremo al caso $x \to -\infty$. Vanno considerati due casi distinti.

2.1.1 I limiti infiniti

La definizione è la seguente:

Definizione 16

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quando accade che **per ogni** ϵ **esiste** N *tale che se* $x > N$ *si ha* $f(x) > \epsilon$. *In simboli* *si ha* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se*

$$\forall\epsilon \quad \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap (N, +\infty) \Longrightarrow f(x) > \epsilon\,.$$

In questa definizione il numero N dipende dal particolare ϵ scelto e usa indicare tale dipendenza scrivendo N_ϵ invece che semplicemente N. Come notazione, quando è sottinteso che si lavora per $x \to +\infty$, per dire che vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si scrive brevemente $f(x) \to +\infty$ e si dice che $f(x)$ *tende a* $+\infty$ o anche che *diverge a* $+\infty$. Per dire che una funzione tende a $+\infty$ si dice anche che la funzione è un $\boxed{\textit{infinito positivo}}$ Per dire che una funzione tende a $-\infty$ si dice anche che la funzione è un $\boxed{\textit{infinito negativo}}$ E' immediato dalla definizione:

Teorema 17 (di permanenza del segno per gli infiniti) *Sia*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Sia inoltre $a > 0$. Esiste una semiretta $(N, +\infty)$ su cui $f(x) > a$.

Come si è detto, il numero x deve appartenere al dominio della funzione e niente vieta che la funzione sia una successione. In questo caso la definizione precedente si trascrive come segue:

si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ se

$$\forall\epsilon \quad \exists N \,|n > N \Longrightarrow x_n > \epsilon\,.$$

Nel caso delle successioni i limiti per $n \to -\infty$ e per $n \to x_0$ (questi verranno introdotti più avanti) non possono studiarsi e quindi nel caso delle successioni si può anche scrivere $\lim x_n$ invece di $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Lasceremo come esercizio di adattare ciò che andiamo a dire al caso delle successioni. Ricapitolando, la verifica della proprietà

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{2.1}$$

si riduce a questo: si considerano **tutte** le disequazioni

$$f(x) > \epsilon\,, \tag{2.2}$$

una disequazione per ogni valore di ϵ. La (2.1) è verificata quando ciascuna di queste disequazioni è soddisfatta **per tutti** i punti del dominio della funzione che appartengono ad un **opportuno** intorno di $+\infty$ (ossia, ad una opportuna semiretta illimitata superiormente). Naturalmente, se (2.2) è verificata per un certo ϵ_0, essa è automaticamente soddisfatta per ogni $\epsilon < \epsilon_0$ e quindi ci si può limitare a studiare le disequazioni con $\epsilon > 0$ (o $\epsilon > 5$ oppure di qualsiasi altro numero fissato). Osserviamo le seguenti proprietà:

Teorema 18 *Sia* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Allora l'immagine della funzione* **non** *è superiormente limitata.*

Dim. Infatti, se $f(x) < M$ per ogni x, la (2.2) non ha soluzioni quando $\epsilon > M$. ■

Lemma 19 *Sia* $K \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$g(x) = f_{|_{[k,+\infty)}}(x)\,,$$

la restrizione di $f(x)$ *a* $[K, +\infty)$. *La (2.1) vale se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Dim. La condizione per avere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ è che per ogni ϵ la (2.2) sia soddifatta per $x > N$ (x nel dominio di f). L'analogo di (2.2) per $g(x)$ è che

$$\text{se } x > K \text{ allora} \qquad g(x) > \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad f(x) > \epsilon\,. \tag{2.3}$$

Quindi le due condizioni (2.2) e (2.3) si equivalgono. ■

Conseguenza: per lo studio dei limiti per $x \to +\infty$ possiamo limitarci a considerare la restrizione delle funzioni ad una semiretta verso destra. E' per questo che le proprietà di limite si chiamano "proprietà locali".

Teorema 20 (Teorema del confronto per gli infiniti) *Valga:*

a) *le funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *hanno il medesimo dominio;*

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*;*

c) $g(x) \geq f(x)\,.$

Allora, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

<u>Dim</u>. Le disequazioni da studiare per provare la tesi sono

$$g(x) > \epsilon \tag{2.4}$$

Essendo

$$g(x) > f(x)\,,$$

la (2.4) è certamente soddisfatta quando vale

$$f(x) > \epsilon\,.$$

L'ipotesi fatta su $f(x)$ mostra che questa disequazione, e quindi la (2.4), vale su un'opportuna semiretta $(N_\epsilon, +\infty)$. ■

Osservazione 21 Va notato che la (2.4) potrebbe essere soddisfatta anche su un insieme più grande di $(N_\epsilon, +\infty)$, ma a noi ciò non interessa. A noi basta trovare **una** semiretta (verso destra) su cui vale (2.4). **Non è richiesto di individuare l'insieme di tutte le sue soluzioni.** ■

Lemma 22 *Per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) + M) = +\infty\,.$$

<u>Dim</u>. Per provare che

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + M) = +\infty$$

vanno studiate le disequazioni

$$f(x) + M > \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad f(x) > \sigma = \epsilon - M\,.$$

Essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, esiste un intorno di $+\infty$ su cui vale $f(x) > \sigma$. ■

Combinando questo lemma col Teorema 20 si ha:

Teorema 23 *Se $f(x)$ e $g(x)$ hanno il medesimo dominio e inoltre valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*;*
- *$g(x)$ è inferiormente limitata su una semiretta $[a, +\infty)$*

allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Dim. Infatti, su $[a, +\infty)$ si ha $g(x) > M$, per un opportuno valore di M; e quindi

$$f(x) + g(x) > f(x) + M \to +\infty \,. \quad \blacksquare$$

Combinando questo teorema con quello di permanenza del segno si ha anche:

Corollario 24 *Se, per $x \to +\infty$, ambedue le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ divergono a $+\infty$, anche la funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$.*

Conseguenza del Corollario 24: se calcolando formalmente si trova un'espressione

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty + \infty$$

allora vale

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \,.$$

Ossia, come **regola mnemonica,** si può scrivere

$$+\infty + \infty = +\infty \,.$$

Esempio 25 E' immediato verificare che

$$a > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} ax = +\infty \,; \qquad a < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} ax = -\infty \,.$$

Dunque, dal teorema del confronto, se $a > 0$ oppure se $a < 0$ si ha rispettivamente

$$\lim_{x\to+\infty} (ax + \sin x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty} (ax + \sin x) = -\infty \,.$$

Si noti che che la funzione $f(x) = \sin x$, che è limitata, **non** diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$. Infatti, la disequazione $|\sin x| > \epsilon = 2$ non ha soluzione. $\blacksquare$

L'osservazione seguente è importantissima. Essa richiede di sapere che

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \,.$$

Si lascia per esercizio la verifica di questo limite.

Osservazione 26 Consideriamo le due funzioni divergenti a $+\infty$, $f(x) = x$ e $g(x) = x$. La funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$, mentre la funzione $f(x) + (-g(x)\,)$ **non è un infinito.** Quindi la condizione di limitatezza inferiore nel Teorema 23 non si può eliminare. Consideriamo ora $f(x) = x$ e $g(x) = -\sqrt{x}$. Essendo

$$f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

(l'ultima disuguaglianza vale per esempio se $x > 10$) per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x}\right] = +\infty\,.$$

Invece

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} - x\right] = -\infty\,.$$

Dunque, se si trova un'espressione del tipo

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty + (-\infty)\,,$$

che scriveremo semplicemente come

$$+\infty - \infty\,,$$

niente può dirsi del comportamento della somma $f(x) + g(x)$: **non si può attribuire un significato all'espressione formale**

$$+\infty - \infty\,.$$

E' questo il primo esempio in cui i teoremi sui limiti non permettono di dedurre niente sul comportamento di una funzione, il cui limite va studiato con metodi particolari. Per questo quando si incontra l'espressione $+\infty - \infty$ si dice che si incontra una $\boxed{\textit{forma indeterminata}}$ Consideriamo ora il quoziente delle funzioni $f(x)$ e $|g(x)|$. E':

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{|g(x)|} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

mentre invece $g(x)/f(x) = 1/\sqrt{x}$, essendo limitata su $[1, +\infty)$, **non è un infinito.** Dunque, anche se si incontra formalmente l'espressione

$$\frac{\infty}{\infty}$$

niente può dirsi in generale del limite del quoziente delle funzioni e il limite va studiato con tecniche particolari. Quindi, ∞/∞ è un secondo esempio di **forma indeterminata.** Altri esempi vedremo in seguito. ■

Passiamo ora ad esaminare le relazioni tra le funzioni divergenti a $+\infty$ oppure $-\infty$ e l'operazione di prodotto. Chiaramente, la funzione $0 \cdot f(x)$ non è un infinito, mentre:

Lemma 27 *Se $f(x)$ è un infinito positivo ed $a > 0$ allora $af(x)$ è un infinito positivo; se $f(x)$ è un infinito positivo ed $a < 0$ allora $af(x)$ è un infinito negativo.*

Combinando quest'affermazione col teorema di permanenza del segno e col teorema di confronto si ha:

Teorema 28 *Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Vale:*

- *se $g(x) > M > 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} g(x)f(x) = +\infty$;*
- *se $g(x) < M < 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} g(x)f(x) = -\infty$.*

In particolare:

Corollario 29 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti (per $x \to +\infty$) anche $f(x)g(x)$ lo è; precisamente, è un infinito positivo se $f(x)$ e $g(x)$ divergono ambedue a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Altrimenti è un infinito negativo.*

Le condizioni $g(x) > M > 0$ oppure $g(x) < M < 0$ **non** possono sostituirsi con le condizioni $g(x) > 0$ oppure $g(x) < 0$. Infatti, $f(x) = x$ è un infinito positivo e $g(x) = 1/x$ è positiva per ogni valore di x; ma $f(x)g(x) \equiv 1$ **non** è un infinito. Invece,

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = +\infty\,.$$

Ossia,

la sola condizione $\|g(x)\| > 0$, invece di $\|g(x)\| > M > 0$, non permette di dire niente del prodotto $f(x)g(x)$, quando $f(x)$ è un infinito.

La tabella 2.1 ricapitolale regole e le forme indeterminate che abbiamo trovato:

Tabella 2.1: "Regole" di calcolo, a sinistra, forme indeterminate a destra

regole	forme indeterminate
$+\infty + \infty = +\infty$	$+\infty - \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2.1.2 I limiti finiti

La definizione è:

Definizione 30

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,, \tag{2.5}$$

e si dice che $f(x)$ **tende ad l per x tendente a $+\infty$,** *quando accade che per* **ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** N *con questa proprietà: ogni x (appartenente al dominio di $f(x)$) e tale che $x > N$ verifica $|f(x) - l| < \epsilon$. In simboli:*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap \{x \,|x > N\} \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.}$$

Il numero N dipende da ϵ e per sottolineare ciò si scrive anche $N = N_\epsilon$. Ripetiamo che questa definizione può darsi solo se il dominio della funzione è superiormente illimitato e naturalmente, niente vieta che la funzione che si considera sia una successione. Inoltre, la definizione si adatta facilmente per definire

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\,.$$

La definizione è

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \,|x \in (\text{ dom} f) \cap \{x \,|x < N\} \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Si esprima questa definizione a parole.

Esempio 31 Sia $f(x)$ costante, $f(x) \equiv l$. Si provi che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l\,. \quad \blacksquare$$

Le funzioni che ammettono limite uguale a 0 sono particolarmente importanti nelle applicazioni, ed hanno un nome particolare:

Definizione 32 *Una funzione $f(x)$ tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

si dice un $\boxed{\text{infinitesimo}}$ *(per $x \to +\infty$).* ■

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Molto spesso e solo in apparenza, nelle applicazioni fisiche sembra che il termine "infinitesimo" sia usato come sinonimo di "quantità piccola". Per esempio, si sente dire una frase del tipo "prendiamo un quadrato di area *infinitesima.* Allora la pressione è…" Il significato da attribuire a questa frase è il seguente: facendo misure concrete, si trova che il valore della pressione è diverso da quello proposto, ma "non troppo" e che l'approssimazione è "via via migliore al tendere dell'area a zero"; ossia, la pressione dipende dalla variabile "area del quadrato" ed è difficile da calcolare. Il valore proposto si ottiene come limite quando la variabile "area del quadrato" tende a zero.

Per verificare se vale (2.5) vanno studiate le infinite disequazioni

$$|f(x) - l| < \epsilon\,,$$

una disequazione per ciascun valore di ϵ, e va provato che ciascuna di esse vale in tutti i punti del dominio di $f(x)$ che appartengono anche ad un intorno di $+\infty$, ossia ad un'opportuna semiretta $(N, +\infty)$. Queste disequazioni coincidono con quelle da studiare se vogliamo provare che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \text{ove} \qquad g(x) = f(x) - l\,.$$

Dunque:

Teorema 33 *Vale*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0\,;$$

ossia se e solo se $(f(x) - l)$ è un infinitesimo. In particolare, $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to +\infty$) se e solo se $|f(x)|$ lo è.

Studiamo ora i risultati principali concernenti i limiti finiti, quando la variabile x tende a $+\infty$. I risultati analoghi per $x \to -\infty$ si lasciano per esercizio. Prima di tutto mostriamo la proprietà seguente, da contrastare con quella enunciata nel Teorema 18:

Teorema 34 (***della limitatezza locale***) *Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora esistono numeri M ed N tali che se $x > N$ allora $|f(x)| < M$; ossia, $f(x)$ è limitata sulla semiretta $[N, +\infty)$.

Dim. Si scelga $\epsilon = 1$ (per esempio) nella definizione di limite e sia N il numero tale che se $x > N$ valga

$$|f(x) - l| < 1\,.$$

Per $x > N$ si ha:

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$$

ossia, il risultato vale con $M = 1 + l$. ■

Una funzione può essere o meno dotata di limite, finito o infinito. Però, se il limite esiste esso è unico:

Teorema 35 (***unicità del limite***) *Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = m\,.$$

Allora, $l = m$.

Dim. Non si può avere $l \in \mathbb{R}$ ed $m = +\infty$ perché se $m = +\infty$ la funzione è illimitata su ogni semiretta $(N, +\infty)$, mentre se $l \in \mathbb{R}$ deve esistere una di tali semirette su cui $f(x)$ è limitata. Consideriamo il caso in cui l ed m sono ambedue numeri. Se per assurdo fosse $l \neq m$ potremmo scegliere due intorni $I(l)$ ed $I(m)$ (rispettivamente di l e di m) **privi di punti comuni.** Notiamo che:

- essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, esiste un intorno $V(+\infty)$ tale che

$$x \in V(+\infty) \cap (\,\mathrm{dom}\, f(x)) \implies f(x) \in I(l)\,;$$

- essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = m$, esiste un intorno $W(+\infty)$ tale che

$$x \in W(+\infty) \cap (\,\mathrm{dom}\, f(x)) \implies f(x) \in I(m)\,.$$

Abbiamo notato che $V(+\infty) \cap W(+\infty)$ è un intorno di $+\infty$ e quindi **contiene almeno un punto** $x_0 \in \operatorname{dom} f(x)$**.** Tale punto deve verificare $f(x_0) = I(l) \cap I(m)$ e ciò **contrasta** con la condizione $I(l) \cap I(m) = \emptyset$. Dunque deve essere $l = m$. ■

Osservazione 36 Si noti che in questa dimostrazione abbiamo usato ambedue le proprietà cruciali degli intorni. ■

Proviamo

Teorema 37 (di confronto) *Siano $f(x)$, $g(x)$ ed $h(x)$ definite sul medesimo insieme e sia*

- $f(x) \le h(x) \le g(x)$,
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = m$.

Allora si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = m\,.$$

Dim. Sottraendo m ai tre membri della disuguaglianza si ha

$$f(x) - m \le h(x) - m \le g(x) - m\,.$$

L'ipotesi è che esistano due numeri r_1 ed r_2 tali che

$$\begin{array}{lll} x > r_1 \Longrightarrow |f(x) - m| < \epsilon & \text{ossia} & m - \epsilon < f(x) < m + \epsilon \\ x > r_2 \Longrightarrow |g(x) - m| < \epsilon & \text{ossia} & m - \epsilon < g(x) < m + \epsilon\,. \end{array}$$

Dunque, ambedue le disequazioni valgono per $x > R$ con R il maggiore dei numeri r_1 ed r_2. Per $x > R$ si ha quindi anche

$$-\epsilon < f(x) - m \le h(x) - m \le g(x) - m < \epsilon$$

e quindi l'asserto. ■

Proviamo ora:

Teorema 38 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano il medesimo dominio e valga*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = m \in \mathbb{R}\,.$$

Allora vale:

- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = l + m$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = lm$.

Dim. Si sa che $f(x) - l$ e $g(x) - m$ sono infinitesimi (per $x \to +\infty$) e quindi, per ogni $\epsilon > 0$ esitono due numeri r_1 ed r_2 tali che:

$$x > r_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon/2\,, \qquad x > r_2 \Longrightarrow |g(x) - m| < \epsilon/2\,.$$

Dunque, ambedue le disequazioni valgono per $x > R$ con R il maggiore dei numeri r_1 ed r_2. La prima affermazione del teorema segue perché per $x > R$ si ha

$$\begin{aligned} 0 \le |(f(x) + g(x)) - (l + m)| &= |(f(x) - l) + (g(x) - m)| \\ &\le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \epsilon\,. \end{aligned}$$

La seconda affermazione si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - (f(x)m - f(x)m) - lm| \\ &\le |f(x)|\,|g(x) - m| + |m|\,|f(x) - l|\;. \end{aligned}$$

Ill teorema della limitatezza locale afferma che $f(x)$ è limitata su un'opportuna retta $(a, +\infty)$:

$$x > a \Longrightarrow |f(x)| < M\,.$$

Dunque, se x è più grande sia di a che di R vale

$$|f(x)g(x) - lm| < \frac{M + |m|}{2}\epsilon\,.$$

Questo è un numero tanto arbitrario quanto ϵ e ciò prova l'asserto. ■

Le relazioni con le operazioni di quoziente sono più complicate. Per studiarle, dobbiamo premettere un risultato importante:

Teorema 39 (**_della permanenza del segno_**) *Sia* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$ *(disuguaglianza stretta). Esiste* $\beta > 0$ *(disuguaglianza stretta) ed esiste una semiretta* $(r, +\infty)$ *su cui vale la disuguaglianza*

$$f(x) > \beta > 0\,.$$

Sia invece $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l < 0$ *(disuguaglianza stretta). Esiste* $\beta < 0$ *(disuguaglianza stretta) ed esiste una semiretta* $(r, +\infty)$ *su cui vale la disuguaglianza*

$$f(x) < \beta < 0\,.$$

Dim. Consideriamo il caso $l > 0$. Si scelga nella definizione di limite come valore di ϵ il numero $l/2$. Allora, esiste una semiretta $(R, +\infty)$ su cui vale

$$|f(x) - l| < \epsilon = \frac{l}{2} \qquad \text{ossia} \qquad -\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2}\,.$$

Sommando l ai tre membri si trova

$$\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2}l\,.$$

La disuguaglianza richiesta è quella di sinistra. ■

Osservazione 40 Si noti che la disuguaglianza di destra dà nuovamente la dimostrazione del Teorema di limitatezza locale. ■

Possiamo ora enunciare:

Teorema 41 *Si ha:*

1. *se* $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$*;*
2. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e se $f(x)$ non è identicamente nulla su nessuna semiretta $(R, +\infty)$*, allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$*;*
3. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$*,* $l \neq 0$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$*;*
4. *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$*,* $l \neq 0$ *e se* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = m$ *allora* $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m}{l}$.

Dim. Proviamo la proprietà 3, lasciando le altre per esercizio. Per ipotesi, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una semiretta $(r, +\infty)$ su cui vale

$$|f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Su questa semiretta vale (il numero $\beta \neq 0$ è quello del teorema di permanenza del segno)

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|l - f(x)|}{|lf(x)|} < \frac{|l - f(x)|}{|l\beta|} < \frac{\epsilon}{l\beta}\,.$$

L'asserto segue perché $\epsilon/(l\beta)$, al variare di $\epsilon > 0$, è un arbitrario numero positivo. ■

Infine, mostriamo che la regola sul limite del prodotto può rendersi più precisa quando una delle due funzioni è un infinitesimo.

Teorema 42 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano lo stesso dominio. Se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

e $g(x)$ è limitata su una semiretta $(r, +\infty)$ allora vale anche

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0 \, .$$

Dim. La condizione su $g(x)$ mostra che per un opportuno numero M e per $x > r$ si ha $|g(x)| < M$. Dunque, per $x > r$ vale

$$0 \leq |f(x)g(x)| < M|f(x)|$$

Sia $\epsilon > 0$. Vale $M|f(x)| < \epsilon$ se $|f(x)| < \epsilon/M$ e ciò avviene su una semiretta $(L, +\infty)$, perché $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Allora, se $x > L$ ed anche $x > r$ si ha

$$0 \leq |f(x)g(x)| < M|f(x)| < \epsilon \, ;$$

Ossia, la funzione $f(x)g(x)$ tende a zero per $x \to +\infty$. ■

Si noti che **questo teorema non richiede che $g(x)$ abbia limite finito, ma, grazie al teorema della limitatezza locale, vieta che abbia limite $+\infty$ oppure $-\infty$.**

Relazioni tra limiti finiti e infiniti Combinando i risultati dei Teoremi 38 e 41 si trova in particolare: se $|f(x)| \to +\infty$ e $g(x) \to 0$ allora:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \to +\infty \, , \qquad \frac{g(x)}{f(x)} \to 0 \, .$$

Invece, niente può dirsi in generale del prodotto di un infinito e di un infinitesimo e del quoziente di due infinitesimi, come si vede esaminando $f(x)g(x)$ con

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1/x, \text{ oppure } = 1/x^2, \text{ oppure } = 1/\sqrt{x}.$$

Si hanno quindi quattro ulteriori "regole di calcolo" e due ulteriori forme indeterminate, riassunte nella tabella 2.2.

Tabella 2.2: Ulteriori regole e forme indeterminate

regole	forme indeterminate
$\left\lvert\frac{\pm\infty}{0}\right\rvert = +\infty$	$0 \cdot (\pm\infty)$
$0/(\pm\infty) = 0$	$0/0$
$\begin{cases} l + (+\infty) = l + \infty = +\infty \\ l + (-\infty) = l - \infty = -\infty \end{cases}$	
$l(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se } l > 0 \\ -\infty \text{ se } l < 0 \end{cases}$	

2.2 I limiti per x tendente ad x_0

Anche in questo caso, conviene dividere lo studio in due sottocasi, il caso degli infiniti ed il caso dei limiti finiti. Ricordiamo prima di tutto:

> il fatto cruciale è che il concetto di limite vuol rappresentare il comportamento della funzione, quando x "si avvicina" ad x_0. L'eventuale valore della funzione in x_0 non deve essere considerato.

2.2.1 I limiti infiniti

Una funzione si chiama un *infinito positivo* per $x \to x_0$ se accade quanto segue:

Definizione 43 *Per* **ogni** ϵ **esiste** *un numero* $\delta > 0$ *con questa proprietà: per* **ogni** x *(appartenente al dominio della funzione) tale che*

$$x \neq x_0 \quad \text{e inoltre tale che} \quad |x - x_0| < \delta$$

vale

$$f(x) > \epsilon\,.$$

Ossia,

$$\boxed{\forall\epsilon\exists\delta > 0 \,|x \neq x_0, x \in \text{ dom} f\,, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon\,.}$$

Quando ciò accade si dice anche che “la funzione tende a $+\infty$ per x tendente a x_0” e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

Il numero δ che compare in questa definizione dipende dalla scelta di ϵ. Per sottolineare ciò talvolta si scrive semplicemente δ_ϵ invece che semplicemente δ. La definizione di *infinito negativo* (per $x \to x_0$) è analoga: si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** ϵ **esiste** un numero $\delta > 0$ con questa proprietà: per **ogni** x (appartenente al dominio della funzione) tale che

$$x \neq x_0 \quad \text{e inoltre tale che} \quad |x - x_0| < \delta$$

vale

$$f(x) < \epsilon\,.$$

La cosa importante da notare in queste definizioni è la seguente:

non si richiede che la funzione sia definita in x_0 e anzi se essa in x_0 è definita si impone esplicitamente di non considerare il valore di $f(x)$ nel punto x_0; ossia, in queste definizioni non si lavora con la funzione $f(x)$ ma con la restrizione di $f(x)$ a $(\text{ dom} f(x)) - \{x_0\}$. Ribadiamo però che è necessario, per poter dare questa definizione, che **ogni** intorno di x_0 contenga punti del dominio di $f(x)$ **diversi da** x_0 **stesso.**

Per definizione, un punto x_0 si dice *punto di accumulazione* per un insieme A se **ogni** suo intorno contiene punti di A **diversi** da x_0. Dunque, per verificare se una funzione è un infinito positivo si devono studiare le disequazioni

$$f(x) > \epsilon\,,$$

una disequazione per ogni valore di ϵ, e verificare se ciascuna di esse risulta soddisfatta in un opportuno intorno di x_0, **escluso al più** il valore x_0. **Non è richiesto né di determinare tutte le soluzioni della disequazione, né di determinare il più grande intorno di x_0 sul quale ogni singola disequazione è soddisfatte.**

Come notazione, quando è sottinteso che si lavora per $x \to x_0$, per dire che vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si scrive brevemente $f(x) \to +\infty$ e si dice che $f(x)$ *diverge a* $+\infty$.

La novità importante della definizione di infinito per $x \to x_0$ è l'aver escluso dalle nostre considerazioni il punto x_0, se esso appartiene al dominio della funzione. Un problema analogo non si incontrava lavorando per $x \to +\infty$ perché $+\infty$ non è un numero e quindi automaticamente non appartiene al dominio della funzione. A parte questa **importante differenza,** le due definizioni possono esprimersi in modo unificato. Per questo basta ricordare che con $\boxed{\textit{intorno di } +\infty}$ si intende una semiretta $(r, +\infty)$ e $\boxed{\textit{intorno di } -\infty}$ è una semiretta $(-\infty, r)$. Avremo quindi, con α che può essere x_0 oppure $-\infty$ oppure $+\infty$,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$$

se per ogni ϵ esiste un intorno di α tale che

$$x \in I \cap (\operatorname{dom} f) - \{\alpha\} \Longrightarrow f(x) > \epsilon\,.$$

Ovviamente, $(\operatorname{dom} f) - \{\alpha\} = \operatorname{dom} f$ se $\alpha \notin \operatorname{dom} f$; in particolare se α indica il simbolo $+\infty$ oppure $-\infty$. Notato ciò è facile verificare che **tutti** i risultati che abbiamo provato al paragrafo 2.1.1 valgono anche per $x \to x_0$, e con la medesima dimostrazione, **purché non si faccia intervenire il valore di $f(x)$ nel punto x_0.** Per esempio si ha il seguente risultato, da confrontare col Teorema 17:

Teorema 44 (di permanenza del segno per gli infiniti) *Sia*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

Sia inoltre $a > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ $\boxed{\textit{e inoltre } x \neq x_0}$ si ha $f(x) > a$.

Dim. Si scelga come numero ϵ nella definizione di infinito positivo il numero a. ■

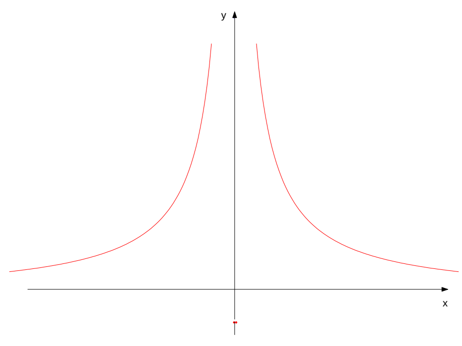
Osservazione 45 Dobbiamo sottolineare nuovamente che il teorema precedente non dà informazioni sul valore della funzione in x_0, se essa è ivi definita. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\{\,|\operatorname{sgn}(x)| + |x|\,\} - 1}$$

verifica

$$f(0) = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

Figura 2.1: grafico di $f(x) = 1/\{(|\mathrm{sgn}(x)| + |x|\,) - 1\}$



Vale anche il risultato seguente, da confrontare col Teorema 18:

Teorema 46 *Se* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ *la funzione* $f(x)$ *è illimitata in ogni intorno di* x_0 *.*

Si noti che in quest'enunciato non importa escludere il punto x_0 perché la proprietà che una funzione sia o meno limitata non dipende dal valore che essa assume in un solo punto. Il teorema di confronto e le sue conseguenze si riformulano come segue:

Teorema 47 (del confronto per gli infiniti) *Se:*

- **a)** $(\,\mathrm{dom}\, f) - \{x_0\} = (\,\mathrm{dom}\, g) - \{x_0\}$
- **b)** $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*;*
- **c)** *per* $x \neq x_0$ *si ha* $g(x) \geq f(x)$ *.*

Allora, $\lim_{x\to +x_0} g(x) = +\infty$*.*

Dim. Le disequazioni da studiare per provare la tesi sono

$$g(x) > \epsilon\,, \tag{2.6}$$

una disequazione per ogni valore di ϵ. Essendo

$$g(x) \geq f(x)\,,$$

la (2.6) è certamente soddisfatta quando $\boxed{x \neq x_0}$ e

$$f(x) > \epsilon\,.$$

L'ipotesi fatta su $f(x)$ mostra che questa disequazione vale su in un opportuno intorno di x_0, escluso al più il punto x_0. ■

Inoltre:

Lemma 48 *Per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) + M) = +\infty\,.$$

Combinando questo Lemma col Teorema 47 si ha:

Teorema 49 *Se, a parte eventualmente il punto x_0, le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno il medesimo dominio e inoltre valgono ambedue le condizioni*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*;*
- *$g(x)$ è inferiormente limitata in un intorno di x_0;*

allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Combinando questo teorema col teorema di permanenza del segno si ha anche:

Corollario 50 *Se, per $x \to x_0$, ambedue le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ divergono a $+\infty$, anche la funzione $f(x) + g(x)$ diverge a $+\infty$.*

Passiamo ora ad esaminare le relazioni tra le funzioni divergenti a $+\infty$ oppure $-\infty$ e l'operazione di prodotto.

Teorema 51 *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora:*

- *se $g(x) > M > 0$ allora* $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = +\infty$*;*
- *se $g(x) < M < 0$ allora* $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = -\infty$*.*

Osservazione 52 Le condizioni $g(x) > M > 0$ oppure $g(x) < M < 0$ **non** possono sostituirsi con le condizioni $g(x) > 0$ oppure $g(x) < 0$. Si diano opportuni esempi per mostrare ciò. ■

In particolare:

Corollario 53 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti (per $x \to x_0$) anche $f(x)g(x)$ lo è; precisamente, è un infinito positivo se $f(x)$ e $g(x)$ divergono ambedue a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Altrimenti è un infinito negativo.*

2.2.2 I limiti finiti

Definiamo ora:

Definizione 54 *Si dice che* la funzione $f(x)$ tende ad l per x tendente ad x_0, *e si scrive*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{2.7}$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ *con questa proprietà: se* x *verifica* $|x-x_0| < \delta$, *appartiene al dominio della funzione e inoltre* $\boxed{x \neq x_0}$ *allora si ha*

$$|f(x) - l| < \epsilon\,. \tag{2.8}$$

Se $l = 0$ *si dice che la funzione* $f(x)$ *è un* $\boxed{\text{infinitesimo}}$ *per* x *tendente ad* x_0.

Si ricordi l'osservazione fatta al paragrafo 2.1.2, sull'uso del termine "infinitesimo" e che la (2.8) è un modo compatto per scrivere le due disequazioni

$$-\epsilon < f(x) - l < \epsilon \qquad \text{ossia} \qquad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon\,. \tag{2.9}$$

Il punto x_0 può verificare o meno queste disequazioni. In modo più formale, la definizione di limite (2.7) si scrive:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta\,, x \in \operatorname{dom} f \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.}$$

Per i limiti finiti per $x \to x_0$ valgono tutte le proprietà elencate al paragrafo 2.1.2, con l'avvertenza che se $x_0 \in \operatorname{dom} f$ allora la conoscenza del limite **niente permette di dire del valore della funzione in x_0.** Per questo, limitiamoci ad enunciare i teoremi, lasciando le dimostrazioni per esercizio.

Teorema 55 (della permanenza del segno) *Sia*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0\,.$$

Esistono un numero $\beta > 0$ *ed un intorno* I *di* x_0 *tali che se* $x \in I$ $\boxed{\textit{ed inoltre } x \neq x_0}$ *si ha*

$$f(x) > \beta\,.$$

Teorema 56 ($\boxed{\textbf{\textit{della limitatezza locale}}}$ **)** *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora esistono numeri M e $\delta > 0$ tali che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x)| < M$; ossia, $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0.

Si faccia attenzione al fatto che in questo teorema non è necessario escludere il punto x_0: la definizione di limite dà la limitatezza in un intorno di x_0, escluso il punto x_0. Ma, come si è notato al Corollario 13, il valore che la funzione ha in un punto non altera la sua proprietà di essere limitata o meno.

Teorema 57 ($\boxed{\textbf{\textit{unicità del limite}}}$ **)** *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = m\,.$$

Allora, $l = m$.

Teorema 58 *Vale*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$$

ossia, se $(f(x) - l)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$.

Teorema 59 *Le funzioni che compaiono in questo teorema hanno il medesimo dominio. Valga*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}\,.$$

Allora vale:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$;
- $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm$;
- *se le disuguaglianze*

  $$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

  valgono in un intorno di x_0, escluso al più il punto x_0, e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = m$ allora si ha anche

  $$\lim_{x \to x_0} h(x) = m\,.$$

L'ultima affermazione si chiama ancora $\boxed{\textit{Teorema di confronto}}$

Teorema 60 *Sia ha:*

- *se* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$;
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e se $f(x)$ non è identicamente nulla in un intorno di x_0, *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$;
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$;
- *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ *e se* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ *allora* $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m}{l}$.

Infine, enunciamo l'analogo del Teorema 42.

Teorema 61 *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano lo stesso dominio. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

e $g(x)$ è limitata in un intorno di x_0, allora vale anche

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0\,.$$

Notiamo ancora che **questo teorema non richiede che $g(x)$ abbia limite finito, ma, grazie al teorema della limitatezza locale, vieta che abbia limite $+\infty$ oppure $-\infty$.**

Relazioni tra limiti finiti e infiniti Sia

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \to 0\,.$$

allora:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty\,, \qquad \frac{g(x)}{f(x)} \to 0\,.$$

Invece, niente può dirsi in generale del prodotto di un infinito e di in infinitesimo e del quoziente di due infinitesimi, come si vede esaminando $f(x)g(x)$ ed $f(x)/g(x)$ con

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1/x, \text{ oppure } = 1/x^2, \text{ oppure } = 1/\sqrt{x}.$$

2.2.3 Regole di calcolo e forme indeterminate

Abbiamo già visto le tabelle delle "regole di calcolo" che si usano quando nel calcolo di un limite compare il simbolo $\pm\infty$, e le "forme indeterminate", ossia quei casi nei quali nessun teorema fornisce risposte generali. Le abbiamo viste per casi particolari della definizione di limite, ma esse si applicano a ciascuna delle definizioni. Per questo le ripetiamo nuovamente, nella tabella 2.8, inserendo per memoria nelle colonne delle regole e delle forme indeterminate due casi che incontreremo al paragrafo 2.4 e che nascono nel calcolare limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$.

La tabella è la 2.8 alla fine di questo capitolo

Spieghiamo come vanno intese le regole e le forme indeterminate di tipo esponenziale. Le formule di tipo esponenziale si incontrano calcolando limiti di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$. La tabella dice che se ambedue le funzioni tendono a $+\infty$, anche $f(x)^{g(x)} \to +\infty$ mentre se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to +\infty$ niente può dirsi in generale: si ha una forma indeterminata. Le due regole

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty\,, \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

sono state scritte nella medesima casella perché in realtà sono la medesima regola. Infatti, la regola $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ va intesa come

$$\text{se} \qquad \begin{cases} f(x) \to +\infty \\ g(x) \to +\infty \end{cases} \qquad \text{allora} \qquad \lim f(x)^{g(x)} = +\infty\,.$$

Se $g(x) \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$ allora

$$f(x)^{g(x)} = \frac{1}{f(x)^{-g(x)}} \to 0\,.$$

Infatti, il denominatore tende a $+\infty$ e quindi la frazione è un infinitesimo. In modo analogo si tratta $0^{-\infty}$, che si ottiene da $f(x)^{g(x)}$ con $g(x) \to -\infty$ ed $f(x) \to 0$, con $f(x) > 0$ per poter definire la potenza. Per la stessa ragione, sono nella stessa casella le due forme indeterminate 0^0 ed ∞^0. Naturalmente, l'uso della tabella richiede qualche cautela: per esempio, non si può calcolare il limite di $1/f(x)$ se la funzione $f(x)$ è identicamente nulla; non si può calcolare $f(x)^{g(x)}$ se $f(x)$ è negativa. Ciò spiega perché nella tabella manca l'espressione formale $(-\infty)^0$.

2.2.4 Ancora sulle definizioni di limite

Abbiamo dato quattro distinte definizioni di limite. Mostriamo ora che in realtà si tratta di un'unica definizione. Prima di tutto osserviamo che la definizione di limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ non si applica realmente alla funzione $f(x)$ ma alla **restrizione** di $f(x)$ a $\operatorname{dom} f(x) - \{x_0\}$. Ovviamente, se $x_0 \notin \operatorname{dom} f(x)$ la funzione rimane invariata. Consideriamo ora

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

dove α e β possono essere numeri oppure i simboli $+\infty$ oppure $-\infty$. Ovviamente, $\pm\infty$ non è un numero e quindi $\operatorname{dom} f(x) - \{\pm\infty\} = \operatorname{dom} f(x)$. Per poter parlare di $\lim_{x\to\alpha}$, dobbiamo richiedere che $\operatorname{dom} f(x)$ intersechi **ogni** intorno di α, sia che α sia un numero, sia che $\alpha = \pm\infty$ (in quest'ultimo caso, "intorno di $\pm\infty$" indica una semiretta $x > a$ oppure $x < a$). Se questa condizione non vale, non si può parlare di $\lim_{x\to\alpha}$. Supponiamo quindi che questa condizione valga. Allora,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

vuol dire che **per ogni** intorno di $I(\beta)$ di β **esiste** un intorno $V(\alpha)$ di α con questa proprietà:

$$\forall x \in V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} f(x) - \{\alpha\}) \Rightarrow f(x) \in I(\beta)\,.$$

Ossia, le quattro definizioni di limite possono riformularsi in modo unificato. E ciò spiega la ragione per cui le dimostrazioni dei teoremi nei quattro casi seguono le medesime idee.

2.2.5 Limiti di restrizioni di funzioni e limiti direzionali

Con α si indichi un numero oppure uno dei simboli $+\infty$ oppure $-\infty$ e sia $f(x)$ una funzione il cui dominio interseca ogni intorno di α in punti diversi da α se questo è un numero. Sia $D \subseteq \operatorname{dom} f(x)$ un insieme che interseca ogni intorno di α in punti diversi da α se questo è un numero. Si può allora considerare la restrizione di $f(x)$ a D e se ne può considerare il limite per $x \to \alpha$. Per semplificare la notazione, poniamo

$$g(x) = f_{|_D}(x)\,.$$

E'chiaro che:

Lemma 62 *Se*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \quad \textit{con } \beta \in \mathbb{R} \textit{ oppure } \beta = +\infty,\ \beta = -\infty$$

allora $g(x)$ *ha, per* $x \to \alpha$*, il medesimo limite* β*:* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

Dim. La dimostrazione è ovvia: per ipotesi, per ogni $I(\beta)$ (intorno di β) esiste $V(\alpha)$ (intorno di α) tale che se $x \in V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} f(x) \setminus \{\alpha\})$ si ha $f(x) \in I(\beta)$. In particolare, $x \in V(\alpha) \cap (D \setminus \{\alpha\}) = V(\alpha) \cap (\operatorname{dom} g(x) \setminus \{\alpha\})$ implica $g(x) = f(x) = V(\beta)$. ■

Se però la funzione non ammette limite, certe sue restrizioni possono ammettere limite. Per esempio, sia $f(x) = \sin x$ e se ne consideri la restrizione all'insieme $D = \{k\pi \ |k \in \mathbb{N}\}$. Questa restrizione, chiamiamola $g(x)$, vale costantemente 0 e quindi *essa ha limite* 0 *per* $x \to +\infty$*, mentre* $f(x) = \sin x$ *non ha limite per* $x \to +\infty$. Consideriamo ora la restrizione di $f(x) = \sin x$ all'insieme $D_1 = \{2k\pi + \pi/2 \ |k \in \mathbb{N}\}$. Questa seconda restrizione, chiamiamola $g_1(x)$, vale costantemente 1 e quindi il suo limite per $x \to +\infty$ è 1. Si deduce che la funzione $\sin x$ non ha limite per $x \to +\infty$: lo avesse, per il Lemma 62, ambedue le restrizioni dovrebbero avere il medesimo limite, uguale a quello di $\sin x$. *Questo è uno dei modi più semplici per mostrare che una funzione è priva di limite: trovarne restrizioni a insiemi diversi e che ammettono limiti diversi* (si confronti con quanto si dirà al paragrafo 2.4.3). Supponiamo che una funzione sia definita nei due intervalli (a, x_0) ed (x_0, b). In x_0 la funzione potrà essere definita o meno. Allora, per rappresentare il grafico della funzione, potrà convenire studiare separatamente le due restrizioni di $f(x)$ a sinistra di x_0, ossia per $x \in (a, x_0)$, ed a destra di x_0, ossia per $x \in (x_0, b)$. I limiti per $x \to x_0$ di tali restrizioni si chiamano i $\boxed{\textit{limiti direzionali}}$ di $f(x)$ per $x \to x_0$, rispettivamente da sinistra e da destra. Ossia, "limite sinistro", rispettivamente "limite destro" di $f(x)$ per $x \to x_0$ sono i due limiti

$$\lim_{x\to x_0} f_{|_{(a,x_0)}}(x)\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f_{|_{(x_0,b)}}(x)\,.$$

Questi due limiti, se esistono, si indicano con simboli particolari:

$\lim_{x\to x_0} f_{|_{(a,x_0)}}(x)$ si indica con uno dei due simboli seguenti

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_0^-)\,;$$

$\lim_{x\to x_0} f_{|_{(x_0,b)}}(x)$ si indica con uno dei due simboli seguenti

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_0^+)\,.$$

(a seconda degli autori, e delle esigenze di leggibilità, i segni $-$ e $+$ si mettono ad esponente di x_0 o semplicemente a destra di x_0. Ovviamente, non si possono mettere a sinistra di x_0). Scriviamo in modo esplicito la definizione di $f(x_0-)$ ricordando che questa è la definizione di limite di una funzione definita solamente per $x < x_0$. Considerando il caso del limite uguale ad $l \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \ \mathrm{dom}\, f(x)\,, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Si noti:

> Se $f(x)$ è definita solo a sinistra di x_0 allora le due definizioni di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e di $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ coincidono. Analoga osservazione se il dominio di $f(x)$ è contenuto in $(x_0, +\infty)$.

I due limiti direzionali possono esistere, finiti o meno, oppure può esisterne uno solo. Se ambedue esistono, possono concidere o meno. Però vale l'asserto seguente (la prima affermazione è un caso particolare del lemma 62. La semplice dimostrazione della seconda si lascia per esercizio).

Teorema 63 *Sia $x_0 \in (a, b)$ e $\mathrm{dom}\, f(x) \supseteq (a, b) \setminus \{x_0\}$. Se esiste, finito o meno,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

allora esistono i due limiti direzionali, ambedue uguali al limite. Se esistono ambedue i limiti direzionali, finiti o meno, e questi coincidono, allora esiste anche il limite di $f(x)$ e vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0-) = f(x_0+)\,.$$

Infine enunciamo:

Teorema 64 *Esista, finito o meno, $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \alpha$. Se la funzione è pari, esiste $\lim_{x \to -x_0 +} f(x)$ e si ha*

$$\lim_{x \to -x_0 +} f(x) = \alpha\,.$$

Se la funzione è dispari si ha

$$\lim_{x \to -x_0 +} f(x) = -\alpha\,.$$

Se $x_0 = 0$ e se la funzione è pari,

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \alpha \textit{implica} \lim_{x \to 0-} f(x) = \alpha \textit{e quindi} \lim_{x \to 0} f(x) = \alpha\,.$$

2.2.6 Gli infinitesimi: ricapitolazione

Abbiamo già detto che si chiama *infinitesimo* (per $x \to \pm\infty$ oppure per $x \to x_0$) una funzione che ammette limite uguale a zero. Tali funzioni sono di importanza centrale nelle applicazioni della matematica e inoltre si usano spesso per calcolare limiti finiti. Infatti, per verificare che $f(x) \to l$ conviene spesso verificare che $f(x)-l \to 0$. Per questo conviene ricapitolare le proprietà degli infinitesimi. Scriveremo genericamente $x \to \alpha$ per intendere $x \to \pm\infty$ oppure $x \to x_0$. Ricordiamo che un intorno di $+\infty$ (rispettivamente, di $-\infty$) è una semiretta $(a, +\infty)$ (rispettivamente, $(-\infty, a)$). Una prima proprietà, ovvia, è la seguente. che si vede immediatamente perché la definizione di infinitesimo dipende dalle disequazioni

$$|f(x)| < \epsilon \ :$$

Lemma 65 *La funzione $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) se e solo se $|f(x)|$ lo è.*

Il risultato fondamentale è il seguente.

Teorema 66 *Le funzioni che figurano in questo teorema hanno tutte il medesimo dominio. Valgono le seguenti proprietà:*

a) *se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi (per $x \to \alpha$) anche $f(x) + g(x)$ lo è;*

b) *siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi (per $x \to \alpha$). Valga inoltre*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \, .$$

Allora anche $h(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).

c) *Se $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) e $g(x)$ è limitata in un intorno di α allora anche $f(x)g(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$.*

d) *Se $|f(x)|$ è un infinito (per $x \to \alpha$) allora $1/f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).*

Queste proprietà sono già state provate sia per $\alpha \in \mathbb{R}$ che per $\alpha = \pm\infty$. L'asserto **b)** si chiama *teorema del confronto* L'asserto **c)** combinato col teorema della limitatezza locale ha il corollario seguente:

Corollario 67 *Se $f(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$) e inoltre $\lim_{x \to \alpha} g(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $f(x)g(x)$ è un infinitesimo (per $x \to \alpha$).*

Infine, ricordiamo che il teorema del confronto si usa spesso in questa forma: si sa che

$$0 \le |h(x)| \le g(x)\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0\,.$$

Allora vale anche

$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0\,.$$

Infatti, si scelga $f(x) \equiv 0$, che è un infinitesimo (per $x \to \alpha$). Il teorema del confronto dice che $|h(x)|$ è un infinitesimo e ciò equivale a dire che $h(x)$ è un infinitesimo.

2.2.7 Gli asintoti

Supponiamo che esista **almeno uno** dei due limiti direzionali $f(x_0-)$ oppure $f(x_0+)$ e che questo sia infinito. In tal caso la retta verticale $x = x_0$ si chiama $\boxed{\textit{asintoto verticale}}$ per la funzione $f(x)$. Notiamo che niente vieta che ambedue i limiti direzionali esistano, e che siano infiniti, magari di segno opposto; o che uno solo esista, o che uno sia infinito e l'altro finito. Se accade che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

allora la retta orizzontale $y = l$ si chiama $\boxed{\textit{asintoto orizzontale}}$ destro di $f(x)$. Si dice che $y = l$ è asintoto orizzontale sinistro se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l\,.$$

Nel caso che sia

$$l = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

si dice che la retta orizzontale $y = l$ è asintoto orizzontale bilatero. Consideriamo ora una retta

$$y = mx + n$$

e consideriamo lo scarto in verticale tra il punto del grafico e il corrispondente punto della retta; ossia consideriamo per ogni x la funzione

$$f(x) - (mx + n)\ .$$

Se accade che questa funzione tende a zero per $x \to +\infty$, la retta si chiama $\boxed{\textit{asintoto obliquo}}$ destro; se tende a zero per $x \to -\infty$ si parla di asintoto obliquo sinistro e un asintoto obliquo sia destro che sinistro si chiama asintoto obliquo bilatero. Un modo per trovare i coefficienti m ed n è il seguente, che illustriamo per gli asintoti obliqui destri: prima si calcola m, dato da

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

nel caso in cui il limite esista e sia finito. Altrimenti l'asintoto obliquo non c'è. Calcolato m si calcola

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) ,$$

ancora nel caso in cui il limite esista e sia finito. Altrimenti, non c'è asintoto obliquo. Calcolati m ed n, l'asintoto obliquo risulta identificato.

Si noti che l'asintoto orizzontale è il caso particolare dell'asintoto obliquo, nel caso del coefficiente angolare nullo, $m = 0$, ed $n \neq \pm\infty$. Dunque, se si è trovato che esite l'asintoto orizzontale, l'asintoto obliquo (con $m \neq 0$) non esiste e non bisogna perdere tempo a ricercarlo.

E' appena il caso di notare che un asintoto obliquo (destro) può esistere solo se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

E quindi, **se c'è asintoto obliquo, non c'è asintoto orizzontale.** Si riadattino queste considerazioni al caso degli asintoti obliqui sinistri.

2.2.8 Alcuni errori concettuali importanti

Lo studio dei limiti inizia spesso nella Scuola Media Superiore, dove però l'accento è posto principalmente sulle funzioni razionali, ossia sui quozienti di polinomi, oltre che sulle funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmo. Tali funzioni hanno alcune proprietà particolari, e lo studente si abitua a dare per scontate alcuni fatti che **non valgono in casi più generali.** Tra questi, due errori vanno sottolineati in modo particolare.

Errore 1) Se una funzione è definita su un intervallo aperto (a, b) ma non nell'estremo a, allora la funzione ha un asintoto verticale $x = a$. Quest'affermazione è vera per le funzioni razionali ed anche per le funzioni $\log x$, $\tan x$, $\operatorname{cotan} x$ ma **non è vera in generale.** Ciò è mostrato all'esempio 68.

Errore 2) se $x = x_0$ è un asintoto verticale per una funzione $f(x)$, allora la funzione non è definita in x_0. Quest'affermazione è vera per le funzioni razionali ed anche per le funzioni $\log x$, $\tan x$, $\operatorname{cotan} x$ ma **non è vera in generale.** Ciò è mostrato all'esempio 69.

Esempio 68 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2^{-1/x^2} .$$

Questa funzione è definita su $\mathbb{R} - \{0\}$, però è limitata

$$0 \le 2^{-1/x^2} \le 1 .$$

Dunque **non è vero** che $\lim_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$ e quindi $x_0 = 0$ **non è asintoto verticale.** Si cerchi di provare per esercizio che vale

$$\lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2} = 0 .$$

Il grafico di questa funzione è in figura 2.2, a sinistra. Un altro esempio importante è quello delle funzioni

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} , \qquad g(x) = \left| \arctan \frac{1}{x} \right| .$$

Anche queste funzioni sono definite su $\mathbb{R} - \{0\}$ e verificano

$$-\frac{\pi}{2} \le f(x) < \frac{\pi}{2} , \qquad 0 \le g(x) \le \frac{\pi}{2} .$$

Quindi, **il loro limite per $x \to 0$ non può essere infinito; ossia $x = 0$ non è asintoto verticale di queste funzioni.** Il grafico della funzione $g(x)$ è in figura 2.2, a destra. ■

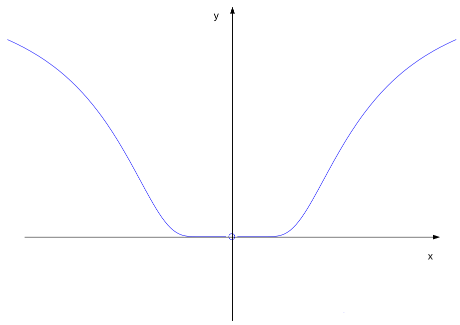
Esempio 69 Ricordiamo che la definizione di limite (per $x \to x_0$) non risente del valore della funzione in x_0; e quindi il limite non cambia ridefinendo in modo arbitrario la funzione in x_0. Per esempio, la funzione

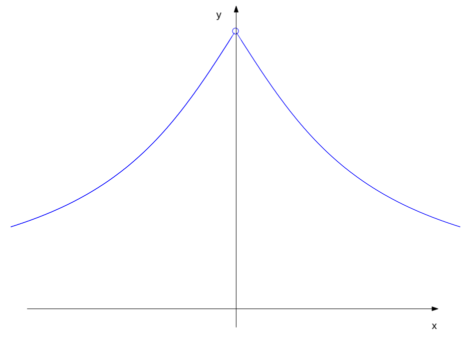
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad x \ne 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

ammette **asintoto verticale in $x = 0$, pur essendo definita in $x = 0$.** Un esempio più naturale è il seguente. Si ricordi che la funzione $\boxed{\textit{mantissa}}$ è la funzione

$$M(x) = x - [x] , \qquad ([\cdot] \textit{ indica la parte intera).}$$

Figura 2.2: Funzioni non definite in un punto, prive di asintoto verticale. Sinistra: $f(x) = 2^{-1/x^2}$; destra $f(x) = |\arctan(1/x)|$





sia $x_0 = 1$ *e sia*

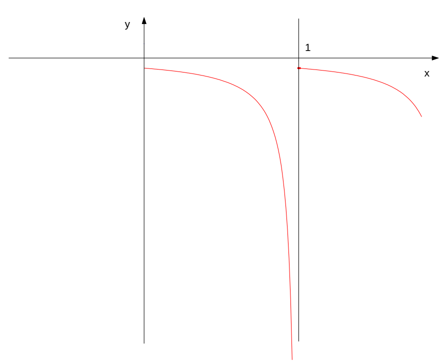
$$f(x) = M(x) - 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{se } \ 0 \le x < 1 \\ x - 2 & \text{se } \ 1 \le x < 2\,, \end{cases} \qquad \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } \ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } \ 1 \le x < 2\,. \end{cases}$$

Sia $g(x) = 1/f(x)$. Allora,

$$g(1) = -1\,, \qquad \lim_{x \to 1+} g(x) = -1\,, \qquad \lim_{x \to 1-} g(x) = -\infty\,.$$

Questa funzione è definita in $x_0 = 1$ e inoltre la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Il suo grafico è in figura 2.3. ■

Figura 2.3: grafico di $1/(M(x) - 1)$



2.2.9 Il numero e

E' importante sapere che la funzione

$$h(x) = (1+x)^{1/x}$$

ammette limite per $x \to 0$. Il limite è un **numero irrazionale** che si indica col simbolo e (iniziale di Eulero[1]) ed è circa 2,7:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e\,, \qquad 2,718 < e < 2,719\,.$$

Il numero e è quindi anche il limite della successione ottenuta segliendo $x = 1/n$:

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,.$$

Usando il teorema delle funzioni composte (che verrà trattato al paragrafo 2.4) si vede che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a e\,.$$

In particolare, scegliendo $a = e$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+x) = 1\,.$$

E' per questa ragione che, se non altrimenti detto, i logaritmi che useremo sono sempre logaritmi in base e, e verranno indicati semplicemente col simbolo $\log x$, omettendo l'indicazione della base. Talvolta si usa il simbolo $\ln x$, dato che i logaritmi in base e si chiamano anche $\boxed{\textit{logaritmi naturali}}$ Analogamente, col termine $\boxed{\textit{funzione esponenziale}}$ si intende la funzione $x \mapsto e^x$. Usando il teorema delle funzioni composte (si veda il paragrafo 2.4) e la definizione del numero e, si può mostrare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,.$$

2.2.10 Limiti da ricordare

Elenchiamo i limiti che vanno imparati subito a memoria. Si chiamano[2] "limiti notevoli" quelli della tabella 2.3.

I "limiti notevoli" hanno questo nome perché è da essi che si calcolano alcune delle derivate importanti. Ulteriori limiti da conoscere sono i seguenti.

Tabella 2.3: I "limiti notevoli"

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1; \\ 1 & \text{se } a = 1; \\ 0 & \text{se } 0 \le a < 1; \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0; \\ 1 & \text{se } a = 0; \\ 0 & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

2.3 La continuità

Abbiamo bisogno della definizione seguente:

Definizione 70 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è* $\boxed{\text{punto isolato}}$ *di A quando esiste in intorno $I(x_0)$ tale che $A \cap I(x_0) = \{x_0\}$.*

Dunque, *ogni punto isolato di A è un punto di A* e inoltre un punto non può essere contemporaneamente isolato e di accumulazione per A. Per esempio, 2 è punto isolato (e quindi non di accumulazione) di $A = [0,1] \cup \{2\}$. Veniamo ora alla definizione di continuità. Per poter parlare di continuità di una funzione in un punto x_0 è necessario che x_0 appartenga al dominio della funzione[3]. Sia quindi $f(x)$ una funzione *il cui dominio contiene un punto x_0.*

Definizione 71 *la funzione $f(x)$ è continua in x_0 quando si verifica uno dei due casi seguenti:*

1) *il punto x_0 è* **punto isolato** *di* $\operatorname{dom} f(x)$.

2) *il punto x_0 è punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f(x)$, *esiste* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *ed inoltre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

[1]Il numero e si chiama $\boxed{\textit{numero di Eulero}}$ o anche $\boxed{\textit{costante di Nepero}}$

[2]il primo si calcolerà al paragrafo 2.3.2 mentre gli altri non verranno provati.

[3]per contrasto, si ricordi che la definizione di limite **non richiede che la funzione sia definita in x_0.**

Tabella 2.4: Ulteriori limiti

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{[\log x - \log x_0]}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$	$\lim_{x\to x_0} \dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ (per ogni $\alpha > 0$)	$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \cdot \log x = 0$ (per ogni $\alpha > 0$)
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ (per ogni α)	$\lim_{x\to-\infty} \|x\|^\alpha e^x = 0$ (per ogni α)
$\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (per ogni $a > 0$)	$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Si dice che $f(x)$ è $\boxed{\text{continua da destra}}$ *in x_0 quando è continua la funzione $f_{|[x_0,+\infty)}$. Analoga definizione per la* $\boxed{\text{continuità da sinistra}}$

Osservazione 72 La scelta di definire "continua" una funzione nei punti isolati del dominio può sembrare bizzarra. Ne vedremo tra poco l'utilità. Notiamo però subito una conseguenza: ogni successione è continua in ciascun punto del suo dominio. ■

La definizione di continuità può darsi in modo "unificato" come segue: $f(x)$ è continua in x_0 quando[4]

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ x \in \ \mathrm{dom}\, f(x) \end{cases} \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

[4]si riformuli la definizione col linguaggio degli intorni.

Questa **sembra** la definizione di limite, ma non è così: non abbiamo richiesto che x_0 sia punto di accumulazione di $\mathrm{dom}\, f(x)$; e, se x_0 è punto isolato, l'unico punto di $\mathrm{dom}\, f(x)$ che verifica $|x - x_0| < \delta$ è, per δ abbastanza piccolo, il solo punto x_0. Notare che la definizione di limite richiede anche di imporre $x \neq x_0$, condizione che nel contesto della definizione di continuità si può omettere perché $0 = |f(x_0) - f(x_0)|$ è automaticamente minore di ϵ, che è positivo. Dunque, *se x_0 è punto di accumulazione di $\mathrm{dom}\, f(x)$ allora $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Vale il teorema seguente:

Teorema 73 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in x_0. Le funzioni seguenti sono continue in x_0:*

- $f(x) + g(x)$
- $f(x)g(x)$

Se $g(x_0) \neq 0$, è continua in x_0 anche la funzione $f(x)/g(x)$.

Dim. Esaminiamo il caso della somma: se x_0 è punto isolato per il dominio di $f(x) + g(x)$ allora questa funzione è continua in x_0. Altrimenti, x_0 è punto di accumulazione per il dominio $f(x) + g(x)$ e per la restrizione a $\mathrm{dom}\, (f(x) + g(x))$ sia della prima funzione $f(x)$ che di $g(x)$. Dunque i teoremi sui limiti mostrano che

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)\,.$$

Osservazione 74 Si noti che può darsi che x_0 sia punto di accumulazione sia di $\mathrm{dom}\, f(x)$ che di $\mathrm{dom}\, g(x)$ **ma non del dominio della somma.** Si consideri l'esempio

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad g(z) = \sqrt{-x}\,.$$

Ambedue le funzioni sono continue in $x_0 = 0$, con 0 punto di accumulazione dei domini, ma la funzione somma

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

è definita nel solo punto 0. Se non si definisce "continua" una funzione nei punti isolati del dominio, non si può affermare che la somma di funzioni continue è continua. Questa è la ragione per cui abbiamo dato la definizione 71. ■

In modo analogo si provano anche i risultati seguenti:

Teorema 75 *Sia $x_0 \in (a,b) \subseteq \operatorname{dom} f(x)$. La funzione $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se è continua sia da destra che da sinistra in x_0.*

Teorema 76 (limitatezza locale e permanenza del segno) *Se $f(x)$ è continua in x_0 allora:*

- *esite un intorno I di x_0 su cui $f(x)$ è limitata;*
- *se $f(x_0) > 0$ allora esistono $\beta > 0$ ed un intorno I di x_0 tali che*

$$x \in I \Longrightarrow f(x) > \beta$$

(si dia l'enunciato analogo se $f(x_0) < 0$).

Dim. La funzione $f(x)$ è continua in x_0 quando **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tale che **ogni** $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$, **incluso il punto** x_0, si ha

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon\,.$$

L'asserto relativo alla limitatezza locale segue scegliedo, per esempio, $\epsilon = 1$. L'asserto relativo alla permanenza del segno si ottiene (quando $f(x_0) > 0$) scegliendo per esempio $\epsilon = f(x_0)/2$. con questa scelta, si trova un intorno di x_0 su cui vale $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$: il numero β cercato è $\beta = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. ■

Osservazione 77 Si noti la differenza di quest'enunciato da quello del teorema relativo ai limiti di funzioni, che potrebbero essere discontinue in x_0. Se $f(x)$ non è continua in x_0, la conoscenza del limite niente permette di concludere sul segno di $f(x_0)$. ■

Infine:

Definizione 78 *Una funzione continua in ciascun punto di un insieme A si dice "continua su A". Se $A = \operatorname{dom} f$, la funzione si dice "continua sul suo dominio" o anche semplicemente "continua". Per dire che $f(x)$ è continua su un insieme A si scrive $f(x) \in C(A)$ o talvolta $f(x) \in C^0(A)$.*

2.3.1 Classificazione delle discontinuità

Sia $f(x)$ definita in x_0, ma non continua. Il punto x_0 si dice:

- una $\boxed{\textit{discontinuità eliminabile}}$ di $f(x)$ se
$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$
esiste **finito e diverso da** $f(x_0)$**.**

Il termine "discontinuità eliminabile" (o $\boxed{\textit{discontinuità rimuovibile}}$) si spiega da solo: cambiando la definizione della funzione **nel solo punto** x_0, e ridefinendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x) & \text{se} \quad x = x_0\,, \end{cases}$$

si trova una funzione continua.

- Il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{salto}}$ di $f(x)$, o anche $\boxed{\textit{discontinuità di prima specie}}$ se esistono **finiti** ambedue i limiti direzionali
$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) \qquad \textbf{diversi tra loro.}$$

Non si esclude che uno dei due limiti possa coincidere col valore della funzione; ossia che la funzione sia continua o da destra o da sinistra.

- ogni altro caso di discontinuità si chiama $\boxed{\textit{discontinuità di seconda specie}}$

Infine, consideriamo una funzione $f(x)$ che **non è definita in** x_0**.** Supponiamo però che esista finito
$$l = \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$
In questo caso, la funzione
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases}$$
è continua: è l'unica $\boxed{\textit{estensione per continuità}}$ di $f(x)$ ad x_0.

Osservazione 79 Se $x_0 \notin \operatorname{dom} f(x)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f(x)$, l'estensione per continuità di $f(x)$ ad x_0 se esite è unica, ma possono esitere estensioni per continuità non uniche ad insiemi più grandi. Per esempio
$$\text{se} \quad f(x) = (\sin x)/\sqrt{x} \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$
La funzione $f(x)$ ammette infinite estensioni continue ad $\mathbb{R}$, ma tutte assumono il valore 0 in $x_0 = 0$. Se si vuole l'estensione continua a $[0, +\infty)$ questa è unica. ■

2.3.2 Continuità di alcune funzioni importanti

Sono continue le funzioni della lista seguente, ovviamente nei punti in cui sono definite:

- i polinomi[5];
- le potenze $x \to x^\gamma$ con γ reale qualsiasi;
- le funzioni razionali;
- la funzione $|x|$;
- le funzioni goniometriche[6]: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\operatorname{cotan} x$;
- la funzione logaritmo, $x \to \log_a x$, per ogni base a (positiva e diversa da 1);
- la funzione esponenziale $x \to a^x$ per ogni base $a \geq 0$.

Vediamo in particolare come si tratta il caso delle funzioni goniometriche.

Limiti e continuità di funzioni goniometriche

Ricordiamo che gli angoli si misurano in radianti, ossia che **la misura dell'angolo al centro di una circonferenza di raggio 1 è uguale alla lunghezza dell'arco che l'angolo identifica sulla circonferenza.** Proviamo che per $|x| < \pi/2$:

- si ha: $|\sin x| \leq |x|$;
- si ha: $|x| \leq |\tan x|$.

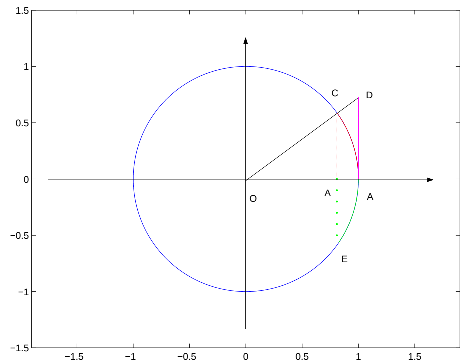
Le funzioni x, $\sin x$ e $\tan x$ sono dispari e quindi basta provare le disuguaglianze per $x \in [0, \pi/2)$. La figura 2.4 illustra la definizione di $\sin x$ e $\tan x$: la circonferenza ha raggio 1 e l'angolo al centro ha misura x, ossia x è la lunghezza dell'**arco** che congiunge i punti C ad A, disegnato rosso. In tal caso, $\sin x$ è la lunghezza del **segmento** $\overline{CA}$, disegnato rosso e $\tan x$ è la lunghezza del segmento $\overline{DA}$, disegnato fucsia.

---

[5] si ricordi che i polinomi sono somme di monomi. I monomi sono le funzioni ax^n con n **intero non negativo.** Quindi $f(x) = 2x^\pi + 3x^3$ **non** è un polinomio.

[6] la continuità delle funzioni goniometriche si proverà al paragrafo 2.3.2

Figura 2.4: Definizione di $\sin x$ e $\tan x$



Si sa che in una circonferenza un arco è più lungo del segmento che ne congiunge gli estremi: l'arco che congiunge C ed E è più lungo del segmento $\overline{CE}$, ossia dividendo per 2

$$0 \le x \le \pi/2 \implies \sin x \le x\,. \tag{2.10}$$

Il settore circolare ACO è contenuto nel triangolo rettangolo ADO e quindi ha area più piccola. Calcolando le aree si trova

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

ossia,

$$0 \le x < \pi/2 \implies x \le \tan x\,. \tag{2.11}$$

Conseguenza di queste disuguaglianze: **la funzione $\sin x$ è continua per $x \to 0$.** Infatti, il teorema del confronto applicato a

$$0 \le |\sin x| \le |x|$$

mostra che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0\,.$$

Combinando questo con le formule di prostaferesi

$$\sin x - \sin x_0 = \left[2\cos\frac{x+x_0}{2}\right]\sin\frac{x-x_0}{2}$$
$$\cos x - \cos x_0 = \left[2\sin\frac{x+x_0}{2}\right]\sin\frac{x-x_0}{2}$$

segue che **le funzioni** $\sin x$ **e** $\cos x$ **sono continue.** Infatti per sempio si ha

$$0 \leq |\cos x - \cos x_0| = \left| \left[2 \sin \frac{x + x_0}{2} \right] \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

e, per il teorema del confronto, $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$. In particolare,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1\,. \tag{2.12}$$

Dunque **anche le funzioni** $\tan x$ **e** $\operatorname{cotan} x$ **sono continue.** Proviamo ora che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

La funzione $\sin x / x$ è pari e quindi basta calcolarne il limite destro per x tendente a 0. Le disuguaglianze (2.10) e (2.11) implicano (ricordiamo che si lavora per $x \in (0, \pi/2)$)

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x\,.$$

Dividendo per $\sin x$ si trova

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}\,.$$

Usando (2.12), il teorema di confronto implica che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

2.4 Limiti di funzioni composte

Siano $f(y)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $\operatorname{dom} f(y) \supseteq \operatorname{im} g(x)$ cosìche si può calcolare la funzione composta $f(g(x))$. Supponiamo inoltre che sia

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l\,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = m\,. \tag{2.13}$$

Ci si può chiedere se sia vero che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = m\,. \tag{2.14}$$

La risposta è in generale **negativa.** E' positiva se si impongono ulteriori condizioni. Vale infatti:

Teorema 80 *Sia x_0 punto di accumulazione per il dominio della funzione composta $f \circ g$. Sia* $\operatorname{dom} f(y) \supseteq \operatorname{im} g(x)$ *e valga*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l\,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = m\,.$$

Supponiamo inoltre che valga una delle tre condizioni seguenti:

1. *$f(y)$ sia* **continua** *(e quindi definita) in l;*
2. *$g(x)$* **non** *prenda il valore l;*
3. *la funzione $f(y)$ non sia definita il l.*

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = m\,.$$

Osservazione 81 Il teorema precedente vale anche se $l \notin \operatorname{dom} f(x)$ e vale anche se uno o ambedue i limiti l e m sono $\pm\infty$. Se però $l \in \operatorname{dom} f(x)$ allora la condizione che $g(x)$ non prenda il valore l non può eliminarsi. Infatti, senza questa condizione può essere che il limite della funzione composta esista ma diverso da quello di $f(x)$ oppure che non esista, come provano i due esempi seguenti. In ambedue gli esempi,

$$f(y) = |\operatorname{sgn}(y)|\,, \qquad l = 0\,, \qquad \lim_{y \to l} f(y) = \lim_{y \to 0} f(y) = 1 = m\,.$$

Consideriamo ora i due esempi:

Esempio 1) *sia $x_0 = 0$. La funzione $g(x)$ è*

$$g(x) = 0 \qquad \textit{cosíche } \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Per ogni x si ha

$$f(g(x)) = 0 \qquad \textit{e quindi } \lim_{x \to 0} f(g(x)) = 0 \neq m = 1.$$

In quest'esempio, il limite della funzione composta esiste, diverso da quello di $f(y)$. ■

Esempio 2) E' ancora $x_0 = 0$ ma la funzione $g(x)$ è

$$g(x) = x\sin(1/x) \qquad \textit{cosìche } \lim_{x\to 0} g(x) = 0 = l.$$

La funzione $f(g(x)) = \operatorname{sgn}(x\sin(1/x))$ è priva di limite per $x \to 0$. Infatti, il limite non può essere nè positivo nè negativo per il teorema di permanenza del segno, dato che la funzione si annulla in ogni intorno di 0 (infatti si annulla quando $x_k = \frac{1}{2k\pi}$). E però il limite non può essere 0 perchè la funzione prende valore $+1$ in ogni intorno di 0. ■

Corollario importante del teorema 80 è:

Corollario 82 *Una funzione composta di funzioni continue è continua.*

Quando $f(y)$ è continua nel punto l,

$$l = \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)\,,$$

l'asserto del teorema 80, ossia

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(l)\,,$$

può scriversi

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))\,. \tag{2.15}$$

Ossia, **se $f(y)$ è continua in y_0, il simbolo di $\lim_{x\to x_0}$ si scambia col simbolo della funzione f.** L'esempio seguente mostra che **l'uguaglianza (2.15) è falsa se la funzione $f(y)$ non è continua in y_0.**

Esempio 3) Sia $f(y) = [y]$ (la parte intera di y) e sia $g(x) = 1 - x^2$. Si consideri il limite per $x \to 0$. In un intorno di 0 si ha che $y = g(x)$ prende valore tra 0 ed 1, ed il valore 1 viene assunto solamente per $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} g(x) = l = 1\ .$$

Dunque, per x in un intorno di 0, escluso 0,

$$[g(x)] = 0 \text{e quindi} \lim_{x\to 0}[g(x)] = 0\,.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{x\to 0}[g(x)] = 0 \neq 1 = \left[\lim_{x\to 0} g(x)\right]\ . \quad ■$$

Illustriamo ora l'uso di questi risultati, che è sia "in positivo", per garantire la continuità e l'esistenza di limiti, che "in negativo", per verificare che certi limiti non esistono.

2.4.1 Le sottosuccessioni e i loro limiti

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $k \mapsto n(k)$ una successione **a valori nei numeri naturali.** In questo caso è possibile considerare la funzione composta $k \mapsto x_{n(k)}$, che è ancora una successione, di indice k. "Successioni composte" definite in modo cosígenerale hanno poco interesse. E' invece importante il caso in cui la successione

$k \mapsto n(k)$ ossia la successione$\{n_k\}$ è **strettamente crescente.**

In questo caso la successione composta si chiama $\boxed{\textit{sottosuccessione}}$ di $\{x_n\}$ (si dice anche che è una "successione estratta" da $\{x_n\}$) e si indica col simbolo

$$\{x_{n_k}\} .$$

Il teorema delle funzioni composte implica che:

Teorema 83 *Se* $L = \lim x_n$ *allora si ha anche* $L = \lim x_{n_k}$ *per ogni sottosuccessione di* $\{x_n\}$.

Osserviamo che si potrebbe anche far vedere che vale il viceversa: si ha $\lim x_n = L$ se e solo se $\lim x_{n_k} = L$ **per ogni** sottosuccessione di $\{x_n\}$.

2.4.2 Risultati "in positivo": calcolo di limiti per sostituzione

Come si è detto, la funzione composta di funzioni continue è continua. Quindi sono funzioni continue in ciascun punto del loro dominio per esempio le funzioni della tabella 2.5 (nella quale $p(x)$ e $q(x)$ indicano generici polinomi). Le

funzioni della tabella sono solo alcuni degli esempi di funzioni la cui continuità segue immediatamente usando il Corollario 82. La tabella va letta in questo modo. Consideriamo per esempio la prima funzione, $\sin(\log_a x)$. La funzione[7] $(\log_a x)$ è definita per $x > 0$ e prende valori nel dominio di $\sin y$. Dunque la funzione composta è definita per ogni $x > 0$. Sia $\log_a x$ che $\sin y$ sono funzioni continue, e quindi $\sin(\log_a x)$ è una funzione continua. Consideriamo la seconda funzione, $\log_a(\sin x)$. Appartengono al suo dominio le sole x per le quali $\sin x$ è **positivo.** Ambedue le funzioni $\sin x$ e $\log y$ sono continue; e quindi la funzione composta è continua. Guardiamo ancora la seconda funzione

[7] ovviamente con $a > 0$ e diverso da 1

Tabella 2.5: Esempi di funzioni composte

$\sin(\log_a x)$	$\log_a(\sin x)$	$\tan(\log_a x)$	$\log_a(\tan x)$	$\log \frac{p(x)}{q(x)}$
$\sin a^x$	$a^{\sin x}$	$\sqrt{\sin x}$	$\sin\sqrt{x}$	$\tan e^x$
$\sin\sqrt{x}$	$\sin x^2$	$e^{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\log x}$	$\log\lvert x\rvert$

della tabella, $\log_a(\sin x)$, ma questa volta per $x \to 0$. Il punto $y = 0$ **non appartiene** al dominio di $\log y$ ed è

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0e \qquad \lim_{y\to 0} \log y = -\infty.$$

Dunque, il Teorema 80 permette di affermare che

$$\lim_{x\to 0} \log_a(\sin x) = -\infty.$$

In certi casi, il teorema 80 permette di calcolare i $\boxed{\textit{limiti per sostituzione}}$ ossia sostituendo alla variabile y una funzione **invertibile** ossia **iniettiva e suriettiva** $y = g(x)$ che semplifichi la funzione da studiare, tale che la sua funzione inversa $g^{-1}(y)$ verifichi le ipotesi del teorema. Infatti, se

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = l\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = m$$

allora

$$m = \lim_{y\to l} f(g(g^{-1}(y))) = \lim_{y\to l} f(y).$$

Vediamo un esempio:

Esempio 84 Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(\log x)^{\log x}.$$

La sostituzione $\log x = t$ mostra che questo limite è uguale a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{e}\right)^t = +\infty\,. \quad \blacksquare$$

2.4.3 Risultati "in negativo"

Il Teorema 80 si può applicare quando in particolare la funzione più interna ha dominio $\mathbb{N}$, ossia è una successione. In tal caso l'enunciato del teorema si riformula come segue:

Teorema 85 *Sia*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha\,, \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta$$

(con i limiti α e β finiti o meno) e sia $x_n \in \operatorname{dom} g(x)$ per ogni n. Nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{R}$ assumiamo che $g(x)$ sia continua in α oppure che α **non** *sia uno dei valori della successione. Allora,*

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \beta\,.$$

Questo teorema si usa più spesso "in negativo": se si trovano due successioni $\{x_n\}$ e $\{\xi_n\}$ ambedue convergenti ad α (che non prendono valore α) tali che

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} g(\xi_n)\,,$$

allora **non esiste** $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ (si confronti con quanto detto al paragrafo 2.2.5). Consideriamo ora la funzione

$$\sin\left(\log_a x\right)\,, \qquad a > 1\,.$$

Vogliamo provare che questa funzione **non** ammette limite per $x \to 0$. Per questo consideriamo le due successioni cosìdefinite:

$$\log_a x_n = -2n\pi\,, \quad \text{ossia } x_n = a^{-2n\pi}\,,$$
$$\log_a \xi_n = (-2n\pi + \pi/2)\,, \quad \text{ossia } \xi_n = a^{-2n\pi+\pi/2}.$$

Si noti che, essendo $a > 1$, si ha: $\lim x_n = 0$, $\lim \xi_n = 0$ e inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\log_a x_n\right) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\log_a \xi_n\right) = 1\,.$$

Dunque,

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\log_a x\right) \textbf{ non esiste.}$$

In modo analogo si tratta il caso $a \in (0,1)$. Queste osservazioni possono in particolare applicarsi per mostrare che non esiste il limite di certe successioni. Per esempio, il limite della successione $\{x_n\} = \{\sin n\pi/2\}$ non esiste. Infatti consideriamo le due sottosuccessioni

$$\{x_{2n}\}\,, \quad \{x_{2n+1}\}\,.$$

La prima converge a 0 mentre la seconda converge ad 1 e quindi la successione $\{x_n\}$ è priva di limite (si veda anche il Teorema 83).

Regole di calcolo e forme indeterminate di tipo esponenziale

Si voglia studiare il comportamento della funzione

$$f(x)^{g(x)}\,.$$

Il modo più semplice per farlo consiste nello scrivere la funzione come

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}\,;$$

studiare il comportamento dell'esponente ed usare il teorema della funzione composta. Per esempio, se

$$f(x) \to +\infty\,, \qquad g(x) \to +\infty$$

allora

$$g(x)\log f(x) \to +\infty \qquad \text{e quindi} \qquad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} = +\infty\,.$$

Se però

$$f(x) \to 1\,, \quad g(x) \to +\infty, \qquad g(x)\log f(x) \text{ è una forma indeterminata}$$

e cosìnasce la forma indeterminata $1^{+\infty}$. Analoga origine hanno le altre "regole" o "forme indeterminate" di tipo esponenziale.

2.5 Le funzioni iperboliche

Si chiamano *funzioni iperboliche* la funzioni

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

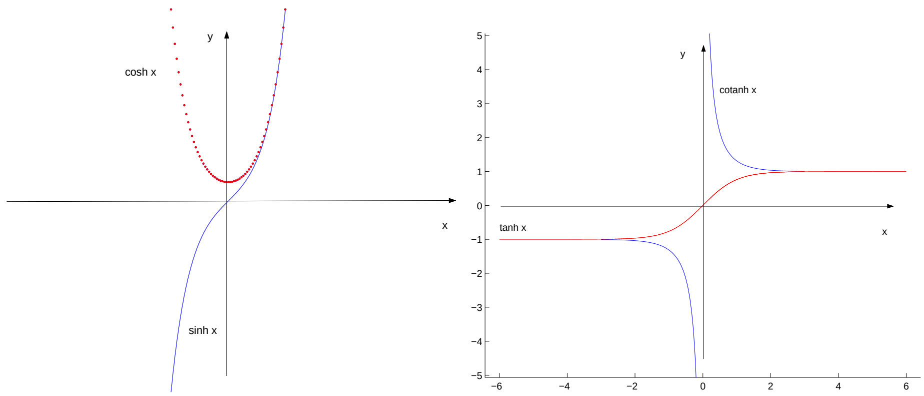
I grafici di queste funzioni sono riportati in figura 2.5, a sinistra. Si definiscono quindi le funzioni

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \mathrm{cotgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,.$$

I grafici sono in figura 2.5, a destra. Spieghiamo la ragione del termine "funzioni iperboliche". Le "funzioni circolari" sono le usuali funzioni goniometriche $\sin x$ e $\cos x$. Si chiamano "funzioni circolari" perché **la coppia** $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ **verifica l'equazione della circonferenza**

$$x^2 + y^2 = 1\,;$$

Figura 2.5: I grafici delle funzioni iperboliche. Sinistra: le funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$; destra: le funzioni $\tanh x$ e $\operatorname{cotgh} x$



e, viceversa, ogni punto della circonferenza trigonometrica si rappresenta come $(\cos\theta, \sin\theta)$**.** Le funzioni iperboliche hanno questo nome perché **la coppia** $(x, y) = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ **verifica l'equazione dell'iperbole equilatera**

$$x^2 - y^2 = 1$$

e, viceversa, ogni punto di quest'iperbole ha coordinate $(\cosh x, \sinh x)$ **per un'opportuna scelta di** x**.** La verifica è immediata calcolando i quadrati di $\cosh\theta$ e $\sinh\theta$ e sottraendo.

Questa formula va ricordata:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Dal punto di vista dei limiti, si ha:

$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to x_0 \neq 0$
$\sinh x \to +\infty$	$\sinh x \to -\infty$	$\sinh x \to 0$	$\sinh x \to \sinh x_0$
$\cosh x \to +\infty$	$\cosh x \to +\infty$	$\cosh x \to 1$	$\cosh x \to \cosh x_0$
$\tanh x \to 1$	$\tanh x \to -1$	$\tanh x \to 0$	$\tanh x \to \tanh x_0$
$\operatorname{cotgh} x \to 1$	$\operatorname{cotgh}\ x \to -1$	$\lvert \operatorname{cotgh} x \rvert \to +\infty$	$\operatorname{cotgh} x \to\ \operatorname{cotanh} x_0$

Dunque, **le funzioni iperboliche sono continue.** Le funzioni $\sinh x$ e $\tanh x$ sono **strettamente crescenti** e quindi invertibili. Ammettono funzioni inverse che si chiamano $\boxed{\textit{settore seno iperbolico}}$ e $\boxed{\textit{settore tangente iperbolica}}$
Le funzioni $\cosh x$ e cotangh$x$ sono **strettamente crescenti** su $[0, +\infty)$. Le funzioni inverse delle loro restrizioni a tale intervallo si chiamano $\boxed{\textit{settore coseno iperbolico}}$ e $\boxed{\textit{settore cotangente iperbolica}}$ Queste quattro funzioni si indicano con i simboli $\operatorname{settsh} x$ $\operatorname{settch}\ x$ $\operatorname{sett\,th} x$ e $\operatorname{settcth} x$. I grafici delle quattro funzioni inverse sono in figura 2.6.

2.6 Confronto di funzioni

In presenza di forme indeterminate, in particolare quando si debba calcolare il limite di un quoziente, si cerca di individuare, se esistono, i "termini dominanti", come nei due esempi seguenti:

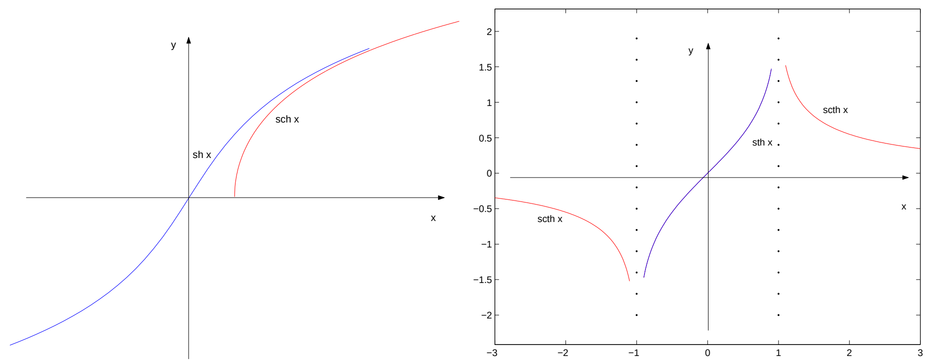
Esempio 86 Si voglia calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - x}\,.$$

E' chiaro che per x "prossimo a 0" sia x^2 che x^3 saranno via via meno importanti rispetto ad x. Quindi scriveremo, per $x \neq 0$

$$\frac{x^2 - 3x}{x^3 - x} = \left(\frac{-3x}{-x}\right)\frac{1 - x/3}{1 - x^2} = 3\frac{1 - x/3}{1 - x^2}$$

Figura 2.6: Le funzioni iperboliche inverse. sinistra: le funzioni $\mathrm{sh}\, x$ e $\mathrm{sc}\, x$ destra: le funzioni $\mathrm{st}\, x$ e $\mathrm{sct}\, x$



e da qui si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^3-x} = 3\,.$$

D'altra parte, sia da calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^3-x}\,.$$

In questo caso dominano a numeratore l'addendo x^2 ed a denominatore l'addendo x^3. Quindi scriveremo

$$\frac{x^2-3x}{x^3-x} = \left(\frac{x^2}{x^3}\right)\frac{1-3/x}{1-1/x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1-3/x}{1-1/x^2}$$

e quindi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^3-x} = 0\,. \quad \blacksquare$$

Vogliamo introdurre delle definizioni che permettano di seguire quest'idea in casi più generali di quelli dell'esempio precedente. Per questo si considerano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ (con lo stesso dominio). Supponiamo inoltre $g(x)$ non zero. Si dice che f è $\boxed{\textit{ o piccolo}}$ di g (per x tendente a α) se accade che

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Come notazione, si scrive

$$f = \mathrm{o}(g)$$

Si noti che la notazione "o" non fa comparire α. La definizione riguarda il limite per $x \to \alpha$, ma chi sia α va dedotto dal contesto. Ovviamente, in un breve esercizio ciò sarà impossibile e α andrà esplicitamente specificato.

In questa definizione, **non** si richede che f oppure g siano infiniti o infinitesimi. Per esempio, se $g(x) \equiv 1$, la notazione

$$f = \mathrm{o}(1) \qquad \text{significa} \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = 0\,.$$

Ossia, si scriverà

$$f = \mathrm{o}(1)$$

per scrivere che $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$. Però, a parte questo singolo caso, di regola l'uso del *simbolo di Landau* "o" si incontra quando le due funzioni sono infiniti o infinitesimi per $x \to \alpha$, ossia come si dice, sono infiniti o infinitesimi *contemporanei.* L'interpretazione del significato del simbolo di Landau varia a seconda che si lavori con infiniti oppure con infinitesimi. Infatti:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **infiniti** per $x \to \alpha$. Allora, la condizione

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

intuitivamente significa che $f(x)$ diverge più lentamente di $g(x)$. Per questo, quando $f = \mathrm{o}(g)$ ed $f(x)$ e $g(x)$ **sono infiniti** si dice che $f(x)$ è *infinito di ordine inferiore* a $g(x)$ o che $g(x)$ è *infinito di ordine superiore* ad $f(x)$ (sottinteso: per $x \to \alpha$).

Invece:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **infinitesimi** per $x \to \alpha$. Allora, la condizione

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

intuitivamente significa che $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$. Per questo, quando $f = \mathrm{o}(g)$ ed $f(x)$ e $g(x)$ **sono infinitesimi** si dice che $f(x)$ è *infinitesimo di ordine superiore* a $g(x)$ o che $g(x)$ è *infinitesimo di ordine inferiore* ad $f(x)$ (sottinteso: per $x \to \alpha$).

Per esercizio, passando ai reciproci, si riformulino le due proprietà appena esaminate supponendo che $|f(x)/g(x)| \to +\infty$. Se accade che

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}\,, \qquad l \neq 0 \tag{2.16}$$

si dice che i due infiniti (o infinitesimi) $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo $\boxed{\textit{stesso ordine}}$ di grandezza (brevemente, diremo che "hanno lo stesso ordine") per $x \to \alpha$ e scriveremo

$$f \asymp g \qquad \text{sottinteso, per } x \to \alpha.$$

Se il limite in (2.16) non esiste, si dice che i due infiniti o infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ $\boxed{\textit{non sono confrontabili}}$ per $x \to \alpha$. Se invece il limite esiste, finito o meno, si dice che essi sono $\boxed{\textit{confrontabili}}$ Siano ancora $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti oppure due infinitesimi (per $x \to \alpha$). Si dice che essi sono $\boxed{\textit{equivalenti}}$ se

$$f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g)\,.$$

In tal caso si scrive

$$f \sim g\,,$$

al solito sottintendendo "per $x \to \alpha$". Dividendo i due membri per $g(x)$ e passando al limite, si vede che

Teorema 87 *I due infiniti o infinitesimi contemporanei $f(x)$ e $g(x)$ sono* $\boxed{\text{equivalenti}}$ *(per $x \to \alpha$) se e solo se*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

D'altra parte,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = 1\,.$$

Dunque,

Corollario 88 *Vale $f \sim g$ se e solo se $g \sim f$ e ciò accade se e solo se*

$$g(x) = f(x) + \mathrm{o}(f)\,.$$

Infine, può accadere che esistano numeri reali c e γ con $c \neq 0$ e tali che

$$f(x) \sim c[g(x)]^\gamma\,.$$

In questo caso si dice che:

- $f(x)$ è un infinito oppure un infinitesimo di $\boxed{\textit{ordine}}$ γ rispetto a $g(x)$;
- la funzione $c[g(x)]^\gamma$ si chiama la $\boxed{\textit{parte principale}}$ di $f(x)$ rispetto a $g(x)$.

Osservazione 89 Va notato che due infinitesimi o infiniti possono essere confrontabili, senza che esista l'ordine dell'uno rispetto all'altro, ossia senza che esista la parte principale dell'uno rispetto all'altro. Per fare un esempio, consideriamo le due funzioni

$$f(x) = \log x\,, \qquad g(x) = x\,.$$

Si tratta di due infiniti per $x \to +\infty$ e usando i risultati nella tabella 2.4 si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Dunque i due infiniti sono confrontabili, e $g(x)$ è di ordine superiore rispetto ad $f(x)$. Però, ancora dalla tabella 2.4, si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g^\alpha(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha \geq 0 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Quindi, non esiste l'ordine di $\log x$ rispett a $g(x) = x$ e dunque nemmeno la parte principale. ■

Simboli di Landau

I simboli $\sim$, $\asymp$ ed o si chiamano $\boxed{\textit{simboli di Landau}}$ dal nome del matematico tedesco che li ha introdotti. Esistoni altri simboli di Landau. In particolare si dice che f è $\boxed{\textit{O grande}}$ di g (per $x \to \alpha$) se esiste M ed un intorno I di α tale che

$$x \in I \Longrightarrow |f(x)| < M|g(x)|\,.$$

Se ciò accade si scrive

$$f = \mathrm{O}(g)\,.$$

Si noti un caso particolare: se esiste finito

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

allora $f = \mathrm{O}(g)$ (in un opportuno intorno di α). Infine, un'osservazione sul significato del simbolo $\asymp$. Di questo abbiamo dato una definizione assai particolare. Specialmente in testi di fisica, si scrive $f \asymp g$ quando esistono $m > 0$ ed M tali che

$$m|g(x)| \le |f(x)| \le M|g(x)|$$

almeno in un intorno di un sottinteso α, senza richiedere l'esistenza del limite in (2.16).

2.6.1 Infiniti e infinitesimi di confronto fondamentali e formule da ricordare

Se non c'è ragione di fare diversamente, usa confrontare un infinito o un infinitesimo $f(x)$ con funzioni $g(x)$ particolari, dette gli infiniti o gli infinitesimi di confronto *fondamentali.* Questi sono riportati nella tabella 2.6.

Tabella 2.6: Infiniti e infinitesimi di confronto fondamentali

x tende a	infinito fondamentale	infinitesimo fondamentale
0	$\dfrac{1}{\|x\|}$	$\|x\|$
x_0	$\dfrac{1}{\|x - x_0\|}$	$\|x - x_0\|$
$+\infty$	x	$\dfrac{1}{x}$
$-\infty$	$\|x\|$	$\dfrac{1}{\|x\|}$

Alcuni dei limiti elencati al paragrafo 2.2.10 si possono riformulare come segue: **Ciascuno degli infiniti seguenti è di** ordine minore **del successivo:**

$$\{\log n\}\,, \quad \{n^b\}\,, \quad \{a^n\}\,, \quad (\{n!\}\,, \quad \{n^n\}$$

perché

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim \frac{\log n}{n^a} = 0 & \text{se } a > 0; \\ \lim \frac{n^b}{a^n} = 0 & \text{se } a > 1,\ b > 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \lim \frac{a^n}{n!} = 0 & \text{se } a > 1; \\ \lim \frac{n!}{n^n} = 0\,. & \end{array}\right.$$

Formule di MacLaurin Vanno ricordate subito le formule della tabella 2.7, che sono casi particolari della formula di MacLaurin che si studierà più avanti. Le ultime due righe della tabella si riferiscono a funzioni probabilmente note ad alcuni studenti, ma non a tutti. Esse verranno introdotte al paragrafo 2.5. Per interpretare le formule di MacLaurin, vanno conosciuti i simboli seguenti:

- il simbolo $n!$ che si legge $\boxed{n \textit{ fattoriale}}$ **il numero n deve essere intero non negativo.**

Per definizione, $0! = 1$ ed $1! = 1$. Il simbolo $n!$ per $n > 1$ si definisce per ricorrenza:

$$n! = n(n-1)!\,;$$

e quindi,

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2\,, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\,, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\,, \quad \dots$$

- il simbolo $\left(\begin{array}{c} \gamma \\ k \end{array}\right)$, che si chiama $\boxed{\textit{coefficiente binomiale}}$ **il numero k deve essere intero non negativo mentre il numero γ può essere reale qualsiasi.**

Per definizione,

$$\left(\begin{array}{c} \gamma \\ 0 \end{array}\right) = 1\,, \qquad \left(\begin{array}{c} \gamma \\ 1 \end{array}\right) = \frac{(\gamma - 0)}{1!} = \frac{\gamma}{1}$$

Quindi si definisce

$$\left(\begin{array}{c} \gamma \\ k \end{array}\right) = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-(k-1))}{k!}\,.$$

Per esempio,

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(1/2)\,((1/2)-1)}{2!} = \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(1/2)\,((1/2)-1)\,((1/2)-2)}{3!} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{16}\,.$$

Si noti che se $\gamma = n$, intero positivo, allora

$$\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1\,, \qquad \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \forall k > n\,.$$

Ciò detto, le formule da ricordare sono nella tavola 2.7. La formula **e)** si chiama

$\boxed{\textit{formula del binomio}}$ o $\boxed{\textit{formula di Newton}}$ Nel caso particolare in cui γ sia **intero,** $\gamma = n$, allora

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \ \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \ \mathrm{o}(x^{n+1})$$

perché si è visto che $\binom{n}{n+1} = 0$. In questo caso vale di più: si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,; \tag{2.17}$$

ossia, in questo caso l'errore $\mathrm{o}(x^n)$ è in realtà identicamente zero[8]. Anche la formula (2.17) si chiama $\boxed{\textit{formula di Newton}}$

2.7 Appendice: ancora sulla formula del binomio di Newton

Consideriamo due casi particolari della formula binomiale:

[8]la dimostrazione è in appendice.

- Si sostituisca x con $-x$ e si prenda $a = -1$. In questo modo

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1} =& \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} (-x)^k + \mathrm{o}(x^n) \\ =& 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \,.\end{aligned}$$

In questo caso si può trovare un'espressione esplicita per $\mathrm{o}(x)$. Per questo si consideri il prodotto notevole[9]

$$\begin{aligned}&(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1} \\ &\text{ossia} \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = (1-x)^{-1} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \,.\end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

e quindi

$$\mathrm{o}(x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \,.$$

- Si noti che se $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{se} k > n \,.$$

Dunque, se $r > n$, si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r) \,. \tag{2.18}$$

Vogliamo provare che in realtà $\mathrm{o}(x^r) = 0$, ossia che vale la formula del binomio di Newton. Notiamo che il membro sinistro di (2.18) è un polinomio di grado n:

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot + a_n x^n \,.$$

Notiamo che il coefficiente di x^0 è 1 in ambedue i membri, ossia che $a_0 = 1$. Sottraendolo si ha

$$(1+x)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \mathrm{o}(x^r) \,.$$

[9] ossia, la somma dei primi termini della progressione geometrica, si veda l'appendice 1.10.

La funzione $o(x^r)$ non è cambiata. Dividendo i due membri per x e calcolando il limite per $x \to 0$ si vede che x ha lo stesso coefficiente a_1 nei due membri[10]. Sottraendo $a_1 x$ dai due membri si trova

$$(1+x)^n - 1 - a_1 x = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k + o(x^r)\,.$$

La funzione $o(x^r)$ non è cambiata. Ora il procedimento si può ripetere, notando che x^2 ha lo stesso coefficiente a_2 nei due membri cosìche

$$(1+x)^n - 1 - a_1 x - a_2 x^2 = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} x^k + o(x^r)$$

e ciò non cambia la funzione $o(x^r)$. Ripetiamo il procedimento. Dopo aver sottratto anche $a_n x^n$ ai due membri si trova

$$o(x^r) = 0$$

Dunque, la (2.18) in realtà vale con $o(x^r) = 0$, ossia si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,.$$

Ciò giustifica la *formula di Newton* (2.17). Sostituendo x con b/a e moltiplicando i due membri per a^n si trova

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,.$$

Anche questa formula si chiama *formula di Newton*

2.8 Alcuni esercizi

1. Spiegare perché l'affermazione seguente è falsa: *se x_0 non è punto di accumulazione di A, allora è punto isolato di A.*

2. Usando opportuni esempi, provare che ambedue le affermazioni seguenti **sono sbagliate:** 1) la funzione $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$; 2) la funzione $f(x)$, definita in x_0, è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

[10]il valore di a_1 è n, ma non è necessario conoscerlo per applicare il procedimento che stiamo illustrando.

3. In ciascuna delle coppie di uguaglianze seguenti, una è corretta e l'altra sbagliata. Si spieghi il motivo.

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \log x^2 = \lim_{x\to-\infty} 2\log x \\ \lim_{x\to-\infty} \log x^2 = \lim_{x\to-\infty} 2\log |x| \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x} \\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{|x|}\,. \end{cases}$$

   Se invece il limite è per $x \to +\infty$?

4. Sia
$$p_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}\,.$$
   Mostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0\,.$$

5. Sia
$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n\,.$$
   Si studi $\lim_{n\to+\infty} s_n$, per ogni valore del parametro reale q (si ricordi la (1.6)).

6. Dire se esiste $f(x)$, definita su $\mathbb{R}$, positiva e con $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$. Giustificare la risposta.

7. Si consideri l'insieme $A = \cup_{n=2}^{+\infty}(1/n, 1/(n-1))$. Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$ e trovare due successioni, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, a valori in A e tali che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup A\,.$$

8. L'insieme A è ancora quello dell'esercizio 7. Si dica se si possono trovare successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ per cui vale
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup A$$
   ma che non prendono valori in A.

9. Sia A l'insieme dell'esercizio 7 e sia $B = \{-1\} \cup A$. Dire se esistono successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ a valori in A e tali che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf B\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup B\,.$$
   Spiegare come cambia la risposta se invece si chiede che le successioni abbiano valori in B.

10. ($\star$) Dire se esiste una funzione positiva, priva di limite per $x \to 0$ e illimitata in ogni intorno di 0.

11. Tracciare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{[\sin^2 x]}$$

([$\cdot$] indica la parte intera) e, se esiste, calcolarne il limite per $x \to +\infty$.

12. ($\star$) Trovare una funzione pari ed una funzione dispari, limitate e prive di limite per $x \to 0$.

13. Mostrare che se $f(x)$ è pari e se $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$ allora si ha anche $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Cosa accade se la funzione è dispari?

14. Dire se esiste una funzione periodica dotata di limite per $x \to +\infty$.

15. Sia $f(x)$ una funzione periodica tale che $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 1$. Dire se $f(x)$ è costante.

16. Sia $f(x)$ una funzione dispari che ha un salto per $x = 0$. Provare che $x = 0$ è discontinuità eliminabile di $|f(x)|$.

17. Si trovi una funzione $f(x)$ definita su $[-1, 1]$ e non costante, tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \text{per ogni } x_0 \in [-1, 1].$$

18. ($\star$) Si trovi una funzione definita su $(0, 1]$, che ha infiniti punti di discontinuità e tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ per ogni $x_0 \in (0, 1]$.

19. ($\star$) Dire se esiste una funzione illimitata su $(0, 1]$ e tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ per ogni $x_0 \in (0, 1]$.

20. ($\star$) Dire se esiste una funzione definita su $\mathbb{R}$, illimitata e tale che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si abbia:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1\,.$$

21. ($\star$) Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite su $[0, +\infty)$ e sia $f(x) > g(x) > 0$. Si tracci il grafico della funzione $\phi(x)$ tale che

$$\phi(2n) = g(2n)\,, \qquad \phi(2n + 1) = f(2n + 1)$$

e il cui grafico negli altri punti è ottenuto congiungendo successivamente $(2n, \phi(2n))$ e $(2n + 1, \phi(2n + 1))$ mediante segmenti di retta. Quindi:

(a) supponiamo che f sia un infinito di ordine superiore a g. Mostrare che non è vero che ϕ è un infinito di ordine superiore a g.

(b) **($\star$)** Si faccia un esempio per provare che le disuguaglianze seguenti possono non valere nemmeno se le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono strettamente crescenti:

$$g(x) \leq \phi(x) \leq f(x)\,; \tag{2.19}$$

(c) **($\star$)** si mostri che le disuguaglianze (2.19) valgono se le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse;

(d) si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$ (finito o meno) si ha anche $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \alpha$ (l'asserto vale sempre, ma si prova più facilmente se le funzioni sono strettamente convesse);

(e) si provi che se $f \sim g$ allora si ha anche $\phi \sim f$ e quindi $\phi \sim g$ (l'asserto vale sempre, ma si prova più facilmente se le funzioni sono strettamente convesse).

(f) **($\star$)** Sia $f(x) > g(x) > 0$ per $x > 0$. Le due funzioni siano strettamente crescenti ed illimitate e valga, per $x \to +\infty$,

$$f = \mathrm{o}(g)\,.$$

Sia $\phi(x) = \sqrt{f(x)g(x)}$. Dire se è vero o meno che $\phi = \mathrm{o}(f)$, $\phi = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{o}(\phi)$, $g = \mathrm{o}(\phi)$ (sempre per $x \to +\infty$).

22. Sia $f(x) \sim x^n$ (per $x \to +\infty$). Si chiede se esiste un numero c tale che, per $x \to +\infty$, sia $\log f(x) - c\log x = \mathrm{o}(1)$.

23. Trovare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $f(x) = \mathrm{o}(x)$ (per $x \to 0$) ma per cui NON vale né $\log f(x) = \mathrm{o}\,(\log x)$ né $\frac{1}{\log f(x)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\log x}\right)$ (suggerimento: si provi con le potenze).

24. Sia $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$ e sia

$$g(x) = \max\{f(s)\ |s \leq x\}\,.$$

Si scelga come $f(x)$ una delle funzioni $-x^2$, x^2, $\sin x$ e si tracci il grafico della corrispondente funzione $g(x)$.

25. Sia $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ e sia

$$g(x) = \max\{f(s)\ |s \leq x\}\,.$$

Si mostri che $g(x)$ è continua. Può essere che $g(x)$ sia continua anche se $f(x)$ non è continua? Si considerino i due casi $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ed $f(x) = -\operatorname{sgn}(x)$.

26. ($\star$) Per ogni $n > 1$ si considerino le funzioni definite sull'intervallo $[0, 1]$ come segue:
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ n & \text{se} \quad 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{se} \quad 2/n \le x \le 1\,. \end{cases}$$
Fissato $x \in [0, 1]$, si consideri la successione di numeri $\{f_n(x)\}$. Si provi che questa converge a 0 per ogni $x \in [0, 1]$.

27. ($\star$) Si trovi una funzione definita su $x > 0$, iniettiva e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e tale che inoltre non esista $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.

Tabella 2.7: Formule di MacLaurin da usare quando $(x \to 0$

a)	$\sin x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2k+2})$
b)	$\cos x$	$=$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2k+1})$
c)	$\tan x$	$=$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6)$
d)	$\arctan x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$
e)	$(1+x)^\gamma$	$=$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{\gamma}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)$
f)	$\log_e(1+x)$	$=$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$
g)	e^x	$=$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$
h)	$\sinh x$	$=$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2k+2})$
i)	$\cosh x$	$=$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2k+1})$

Tabella 2.8: Regole di calcolo e forme indeterminate

Regole	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
	$(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$	$(-\infty)(+\infty) = -\infty = (+\infty)(-\infty)$
	$\left\lvert \frac{\pm\infty}{0} \right\rvert = +\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$
	$l + (+\infty) = l + \infty = +\infty$ $l + (-\infty) = l - \infty = -\infty$	$l(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se l>0} \\ -\infty \text{ se l<0} \end{cases}$
	$0^{+\infty} = 0$ $0^{-\infty} = +\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ $(+\infty)^{-\infty} = 0$
Forme indeterminate	$+\infty - \infty$	$0 \cdot (\pm\infty)$
	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$
	0^0 $(+\infty)^0$	$1^{\pm\infty}$

Capitolo 3

Velocità, tangenti e derivate

Tutte le leggi sono dettate dall'esperienza, ma per enunciarle ci vuole un linguaggio speciale; il linguaggio ordinario è troppo povero e vago per esprimere dei rapporti cosìdelicati, ricchi e precisi.

Ecco quindi una ragione perchè il fisico non possa ignorare la matematica. Henri Poincaré *Il valore della scienza*

In questo capitolo proseguiamo nello studio delle proprietà locali delle funzioni, studiandone la proprietà di derivabilità, suggerita dalla meccanica per il calcolo della velocità istantanea e dell'accelerazione istantanea, e dalla geometria per la definizione della retta tangente al grafico di una funzione.

3.1 La derivata

Supponiamo che un punto si muova lungo l'asse delle ascisse, e che all'istante t la sua posizione sia $x(t)$. Abbiamo cioè una funzione $t \mapsto x(t)$ che rappresenta il moto del punto. Fissiamo un intervallo di tempo di estremi t_0 e t_0+h (a destra o a sinistra di t_0). Si chiama $\boxed{\textit{velocità media}}$ del punto su quest'intervallo il numero

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\,.$$

Può accadere che esista finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\,.$$

In fisica, questo numero si chiama “velocità istantanea” del punto all'istante t_0 e si indica col simbolo $v(t_0)$ oppure con uno dei simboli[1] $x'(t_0)$ oppure $\dot{x}(t_0)$. Va detto subito che la velocità media esiste sempre, mentre la velocità istantanea può esistere o meno. Per esempio non esiste negli istanti nei quali si verificano degli urti. Se la velocità istantanea esiste per ogni valore di t, allora si può definire l'“accelerazione media” sull'intervallo di estremi t_0 e $t_0 + h$ come

$$\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}\,.$$

Se il limite seguente esiste, questo si chiama l'“accelerazione istantanea” all'istante t_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}\,.$$

In ambedue i casi, si incontra quindi un rapporto con al numeratore l'incremento del valore di una funzione al passare del suo argomento da t_0, fissato, a $t_0 + h$ e al denominatore l'incremento h della variabile indipendente. **L'incremento h può essere positivo oppure negativo.** Questo rapporto si chiama $\boxed{\textit{rapporto incrementale}}$ della funzione che si sta considerando; e del rapporto incrementale si deve fare il limite per $h \to 0$. Un problema analogo si incontra in geometria, quando si cerca di definire la tangente al grafico di una funzione $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Si vuol definire la tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Per questo consideriamo la secante che congiunge i due punti $(x_0, f(x_0))$, considerato fisso, e il punto $(x_0+h, f(x_0+h))$, variabile sul grafico. Il coefficiente angolare della secante è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e quindi la secante è la retta

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)\,.$$

Se esiste il limite per $h \to 0$ di questi coefficienti angolari,

$$m_0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

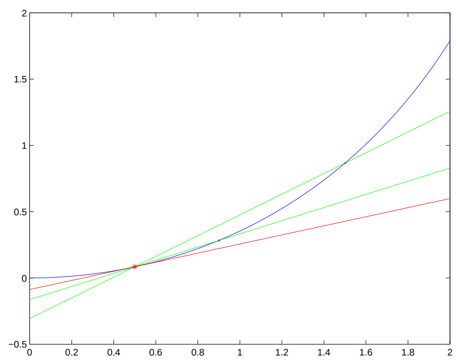
la retta

$$y = f(x_0) + m_0(x-x_0)$$

si chiama $\boxed{\textit{retta tangente}}$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Si veda la figura 3.1. Si vede da qui che il limite del rapporto incrementale compare in

[1] altre notazioni si vedranno in seguito. Notiamo che l'ultima, col punto sovrapposto, si usa quasi solamente in problemi di meccanica ed è la notazione introdotta da Newton.

Figura 3.1: Secanti e tangente (rossa) ad un grafico



applicazioni diverse, e ce ne sono ancora molte altre. Quindi, questo limite va studiato in generale.

Definizione 90 *Sia $f(x)$ definita su un intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Se* **esiste finito** *il numero*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

questo si chiama la $\boxed{\text{derivata}}$ *della funzione $f(x)$ in x_0 e si indica con uno dei simboli*

$$f'(x_0)\,,\quad \dot{f}(x_0)\,,\qquad D_{x_0}f\,,\qquad Df(x_0)\,,\qquad \frac{d}{dx}f(x_0)\,.$$

Un'altra notazione si vedrà più avanti. Il simbolo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0)$ è dovuto a Leibniz e ricorda che la derivata è il **limite** di un quoziente. NON è un quoziente e quindi il simbolo non indica una frazione. La notazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, di proposito evidenziata in colore, va letta come simbolo unico. Si osservi che la derivata **deve essere un numero.** Non può essere $+\infty$ oppure $-\infty$. Infatti, molte delle proprietà delle funzioni derivabili che vedremo **NON** valgono quando il limite del rapporto incrementale esiste, ma non è finito. Per esempio:

Teorema 91 *Se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0 essa è continua in x_0.*

Dim. Infatti,

$$f(x_0+h)-f(x_0) = h\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Per ipotesi, il limite del rapporto incrementale esiste **finito** e quindi

$$0 = \lim_{h \to 0} h \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] = \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \;;$$

ossia, posto $x = x_0 + h$ ed usando il teorema dei limiti delle funzioni composte,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \,. \quad \blacksquare$$

Esempio 92 Il risultato precedente **non vale** se il limite del rapporto incrementale è $+\infty$. Per vederlo, si consideri la funzione $\operatorname{sgn} x$ in $x_0 = 0$. Essa è discontinua. Il limite del rapporto incrementale esiste, ma non è un numero:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = +\infty \,. \quad \blacksquare$$

Un'altro punto a cui fare attenzione è questo: la derivata si definisce solo nei punti interni al dominio della funzione. Se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ si possono studiare i due limiti

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \,, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{h \to 0-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \,.$$

Se uno dei limiti esiste[2], **finito o meno,** esso si chiama la $\boxed{\textit{derivata direzionale}}$ in a oppure in b. La derivata direzionale si può talvolta definire anche in punti x_0 di non derivabilità. Se esiste, **finito o meno,** uno dei due limiti

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

questo si chiama la $\boxed{\textit{derivata direzionale},}$ rispettivamente destra oppure sinistra, di $f(x)$ in x_0. La derivata direzionale destra o sinistra si indica con uno dei simboli

$$D_+ f(x_0) \,, \qquad f'_+(x_0) \,, \qquad D_- f(x_0) \,, \qquad f'_-(x_0) \,.$$

Sottolineiamo che, a differenza della derivata, la derivata direzionale non è necessariamente finita.

[2] attenzione al fatto che la maggior parte degli autori intende che anche le derivate direzionali, come le derivate, debbano essere finite e non dà nome al limite direzionale del rapporto incrementale, quando questo non è finito.

Una dimostrazione del tutto analoga a quella del Teorema 91 mostra che:

Teorema 93 *Se in* $x_0 \in [a,b]$ *esiste* finita *la derivata destra (o sinistra) di* $f(x)$*, allora la funzione* $f(x)$ *è continua da destra (rispettivamente, da sinistra) in* x_0.

Concludiamo con una definizione il cui interesse apparirà principalmente nei corsi successivi. Si chiama $\boxed{\textit{differenziale}}$ della funzione $f(x)$ in x_0 la funzione

$$h \mapsto f'(x_0)h\,.$$

Questa trasformazione si indica spesso col simbolo $\mathrm{d}f$. Il significato geometrico del differenziale è illustrato al paragrafo 3.2.

Esempio 94 Calcoliamo la derivata di alcune potenze. Se $f(x) \equiv c$, costante, allora $f(x_0+h) - f(x_0) = 0$ per ogni h. Il rapporto incrementale è nullo e tale è il suo limite: *la derivata di una funzione costante è nulla.* Sia $f(x) = x$. Allora,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

Sia $f(x) = x^2$. Allora, $f(x) - f(x_0) = x - x_0^2 = (x-x_0)(x+x_0)$. Dunque,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} [x+x_0] = 2x_0\,.$$

In generale, si ricordi la formula per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{x-1}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} &= \frac{x_0^n}{x_0} \frac{1-(x/x_0)^n}{1-(x/x_0)} \\ &= x_0^{n-1}\left(1 + (x/x_0) + (x/x_0)^2 + \cdots + (x/x_0)^{n-1}\right)\,. \end{aligned}$$

Gli addendi in parentesi sono in numero di n e ciascuno di essi tende ad 1 per $x \to x_0$. Dunque,

$$D_{x_0} x^n = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = n x_0^{n-1}\,.$$

Sia ora

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Il rapporto incrementale in x_0 è

$$\frac{(1/x)-(1/x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{xx_0}\frac{x_0-x}{x-x_0}=-\frac{1}{xx_0}$$

e quindi

$$D_{x_0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to x_0}\frac{(1/x)-(1/x_0)}{x-x_0}=-\frac{1}{x_0^2}\,. \quad \blacksquare$$

3.1.1 La funzione derivata e le derivate successive

Ricordiamo che la derivata è un numero che si associa ad un punto x_0: $f'(x_0)$. Può essere però che tale numero esista per ogni $x \in (a,b)$ o per ogni $x \in (a,c) \subseteq (a,b)$. In tal caso si costruisce una funzione

$$x \mapsto f'(x)$$

che si chiama la $\boxed{\textit{funzione derivata}}$ di $f(x)$. Può accadere che la funzione derivata sia ulteriormente derivabile (come deve essere per definire l'accelerazione). In questo caso, si può calcolare il numero

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

che si chiama la $\boxed{\textit{derivata seconda}}$ di $f(x)$ in x_0. In questo contesto, la "derivata" si chiama anche $\boxed{\textit{derivata prima}}$ La derivata seconda si indica con uno dei simboli

$$f''(x_0)\,,\qquad D^2_{x_0}f\,,\qquad D^2f(x_0)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x_0)\,.$$

In meccanica, si usa anche il simbolo di Newton $\ddot{f}\,(x_0)$. Ovviamente:

Teorema 95 *Se la funzione $f(x)$ ammette derivata seconda in* ogni *punto di (a,b) allora sia $f(x)$ che $f'(x)$ sono continue su (a,b).*

Quanto detto si può ora ripetere: se la derivata seconda esiste in ogni punto si può cercare di derivarla, definendo, se esiste, la derivata terza, quarta, n-ma ecc. Le derivate successive si indicano con i simboli

$$D^n_{x_0}f\,,\qquad D^nf(x_0)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x_0)\,.$$

Ovviamente, le notazioni con gli apostrofi o i punti non sono pratiche oltre al terzo ordine. In certe formule, conviene indicare la derivata n-ma in x_0 col simbolo

$$f^{(n)}(x_0)$$

e in questo contesto si definisce

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)\,.$$

Sottolineiamo che **se esiste la derivata n-ma in** *ogni* **punto di (a, b), esistono le derivate precedenti, e sono continue in** *ogni* **punto**[3] **di (a, b).** Invece l'esistenza di $f^{(n)}(x)$ nel solo punto x_0 implica l' esistenza della derivata $f^{(n-1)}(x)$ in un intorno di I di x_0 e quindi le derivate precedenti a quella di ordine $n-1$ sono continue su I mentre la $f^{(n-1)}(x)$ è continua in x_0 ma potrebbe essere discontinua in ogni altro punto. Una funzione che ammette le derivate fino all'ordine n incluso su (a, b), **continue** si dice $\boxed{\textit{di classe } C^n}$ e si scrive[4]

$$f \in C^n(a, b)\,.$$

Scrivendo

$$f \in C^0(a, b) \quad \text{o anche } f \in C(a, b)$$

si intende dire che $f(x)$ è continua su $[a, b]$. Scrivendo $f(x) \in C^\infty(a, b)$ (leggi $f(x)$ di $\boxed{\textit{classe } C^\infty}$ su (a, b)) si intende che la funzione ammette derivate di ogni ordine in ciascun punto di (a, b).

3.2 La prima formula degli incrementi finiti

La sostituzione $h = x - x_0$ mostra che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ossia, **essendo $f'(x_0)$ un numero,**

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} = 0\,.$$

[3]invece l'esistenza di $f^{(n)}(x)$ nel solo punto x_0 implica l' esistenza della derivata $f^{(n-1)}(x)$ in un intorno di I di x_0 e quindi le derivate precedenti a quella di ordine $n-1$ sono continue su I mentre la $f^{(n-1)}(x)$ è continua in x_0 ma potrebbe essere discontinua in ogni altro punto.

[4]Come si è notato, l'esistenza della derivata n-ma su (a, b) implica la continuità delle derivate degli ordini inferiori, e anche di $f(x)$. Dunque $f \in C^n(a, b)$ quandi ammette le derivate fino a quella di ordine n in ogni punto di (a, b) e tale derivata è continua.

Dunque, usando il simbolo di Landau,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\ \mathrm{o}(1)\,.$$

Ma,

$$(x - x_0)\ \mathrm{o}(1) = \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Dunque,

la derivata $f'(x_0)$, se esiste, è quel numero m tale che

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Dunque, $f'(x_0)$ verifica

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0)\,.$$

Questa formula si chiama *prima formula degli incrementi finiti*
Viceversa, se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0) \tag{3.1}$$

allora

$$m = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\mathrm{o}(x - x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)\,.$$

Quindi, la prima formula degli incrementi finiti è anche una equivalente definizione di derivata: la derivata è quel **numero** m per il quale è verificata l'uguaglianza (3.1). Ciò ha una conseguenza utile per il calcolo di certe derivate:

Teorema 96 *Sia $f(x)$ definita in un intorno di x_0. Se per $x \to x_0$ vale*

$$f(x) - f(x_0) = \ \mathrm{o}(x - x_0) \tag{3.2}$$

allora $f'(x_0)$ esiste e

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Dim. Infatti, la (3.2) coincide con la prima formula degli incrementi finiti (3.1) scritta con $m = 0$. ■

Nella prima formula degli incrementi finiti compare la funzione

$$(x - x_0) \to f'(x_0)(x - x_0)$$

che abbiamo chiamato il $\boxed{\textit{differenziale}}$ della funzione $f(x)$ in x_0. La prima formula degli incrementi finiti combinata con l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$, ossia

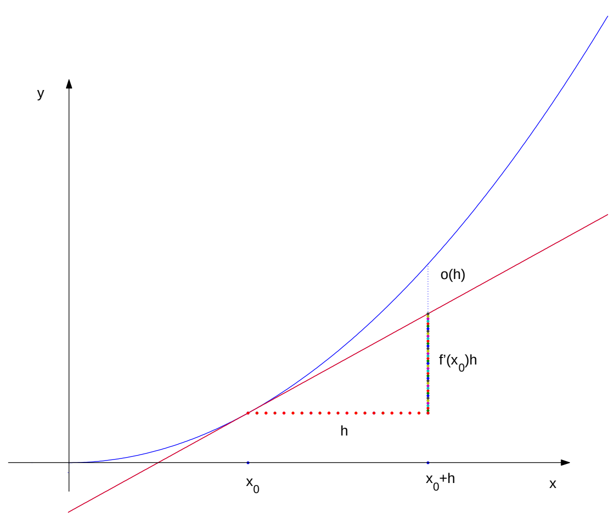
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

mostra il significato geometrico del differenziale: $f(x) - f(x_0)$ è l'incremento della quota del **punto del grafico della funzione**, quando si passa da x_0 ad x. Invece,

$$f'(x_0)(x - x_0) = \{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\} - f(x_0)\,.$$

Dunque, il differenziale indica l'**incremento dell'ordinata del punto della tangente** quando ci si sposta da x_0 ad x e questo incremento differisce dal corrispondente incremento di ordinata sul grafico della funzione per infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto ad $h = (x - x_0)$, ossia rispetto all'incremento h dato all'ascissa. Ciò è illustrato in figura 3.2.

Figura 3.2: Significato geometrico del differenziale



3.3 Regole di calcolo per le derivate prime

Ci sono quattro regole per il calcolo delle derivate: la derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa. Inoltre, esiste una formula per la derivata di un quoziente, che si ottiene dalle precedenti.

Derivata di una somma Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti (quando ambedue esistono **finiti**). Dunque, se f e g sono derivabili in x_0 vale

$$\boxed{D_{x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x_0)+g'(x_0)\,.}$$

Derivata del prodotto La formula per la derivata del prodotto si chiama $\boxed{\textit{formula di Leibniz}}$ e si vede meglio partendo dalla prima formula degli incrementi finiti. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in x_0 vale[5]

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ \mathrm{o}_1(x-x_0)\,,\\ g(x) &= g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\ \mathrm{o}_2(x-x_0)\,. \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro si ha

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left[f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\right](x-x_0)\\ +\left\{\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right]\ \mathrm{o}_2(x-x_0)\right.\\ +\left[g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)\right]\ \mathrm{o}_1(x-x_0)\\ \left.+f'(x_0)g'(x_0)(x-x_0)^2+\ \mathrm{o}_1(x-x_0)\ \mathrm{o}_2(x-x_0)\right\}\ . \end{aligned}$$

La parentesi graffa è $\mathrm{o}(x-x_0)$ e quindi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{(x-x_0)}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\,.$$

Vale quindi la $\boxed{\textit{formula di Leibniz}}$

$$\boxed{D_{x_0}\left(f(x)g(x)\right)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\,.}$$

[5] la notazione $\mathrm{o}_1(x-x_0)$, $\mathrm{o}_1(x-x_0)$ è sovrabbondante. Non ha alcun interesse distinguere gli " o" l'uno dall'altro. Ma in questo caso aiuta a seguire i calcoli.

Supponiamo che $g(x) \equiv c$ sia costante. Allora,

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

Dunque,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(cf(x_0)\right) = cf'(x_0)\,.$$

Combinando quest'osservazione con la regola di derivazione della somma, si trova:

quando a e b sono numeri

$$\boxed{D_{x_0}\left(af(x)+bg(x)\right) = af'(x_0)+bg'(x_0)\,.}$$

Questa regola si chiama $\boxed{\textit{linearità}}$ della derivata.

Derivata della funzione composta Siano ora $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e supponiamo che la funzione composta $f(g(x))$ sia definita su un intervallo (a,b). Sia $x_0 \in (a,b)$ e supponiamo che $g(x)$ sia derivabile in x_0 mentre $f(x)$ sia derivabile in $y_0 = g(x_0)$. Allora vale

$$\boxed{D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)\,.}$$

I colori sono stati usati per evidenziare il fatto che la derivata della funzione composta si calcola iniziando col derivare la funzione più esterna. La dimostrazione è semplice: per ipotesi valgono le due formule degli incrementi finiti

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0)$$
$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + \mathrm{o}(y-y_0)$$

e inoltre

$$y_0 = g(x_0)$$

Si tenga conto di ciò e si sostituisca y con $g(x)$. Si trova

$$\begin{aligned} f(g(x)) = f(g(x_0)) &+ f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0) \\ &+ \{f'(y_0)\,\mathrm{o}(x-x_0) + \mathrm{o}(y-y_0)\}\,. \end{aligned}$$

E'
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{o}(y-y_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{o}(y-y_0)}{y-y_0}\frac{y-y_0}{x-x_0} = 0\,.$$
Dunque, la parentesi graffa è $\mathrm{o}(x-x_0)$ e la prima formula degli incrementi finiti vale in x_0 per $f(g(x))$, con coefficiente
$$f'(g(x_0))g'(x_0)\,,$$
che è quindi la derivata della funzione composta:

$$\boxed{D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)\,.}$$

Esempio 97 Ricordiamo che
$$D_{x_0}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0^2}\,.$$
Consideriamo ora $h(x) = 1/x$ e una generica funzione $g(x)$ derivabile e non nulla in x_0. Sia $\phi(x) = h(g(x)) = 1/g(x)$. La formula di derivazione della funzione composta dà:
$$D_{x_0}\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)\,. \quad \blacksquare$$

Combinando il caso visto nell'Esempio 97 con la formula di derivazione del prodotto si trova:

$$\boxed{D_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.}$$

Si usi questa formula per provare che
$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
e si calcoli la formula analoga per $\cot x$ e per le corrispondenti funzioni iperboliche.

Esempio 98 Si sa, dalla tabella 2.4, che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| = \frac{1}{x}$$

(ovviamente se $x \neq 0$). Dunque, se $f(x)$ è derivabile e non nulla,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Applicando questa formula alla funzione $f(x) = \tan x$ si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|\tan(x/2)| = \frac{1}{\sin x}\,.$$

Ovviamente questa formula vale se $x \neq k\pi + \pi/2$, perchè in questi punti $\tan x$ non è definita, e se $x \neq k\pi$ perché in tali punti si annulla la derivata. Ricordando che

$$\cos x = \sin(x + \pi)$$

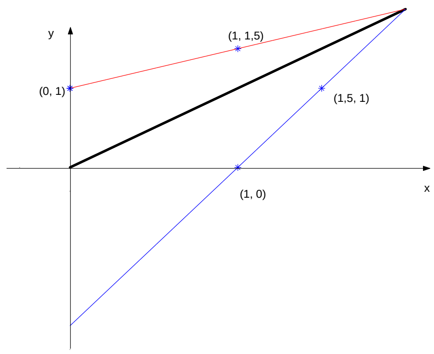
si trovi una funzione la cui derivata è $1/\cos x$. Queste formule sono utili nel calcolo delle primitive. ■

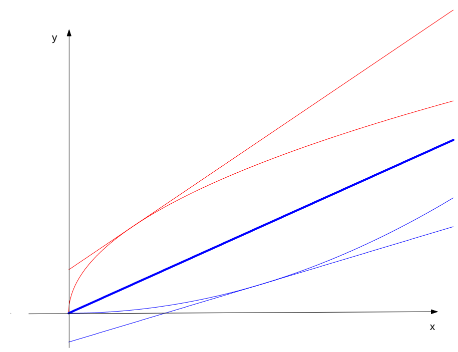
Derivata della funzione inversa La regola per il calcolo della derivata della funzione inversa è più complicata e richiede un'ipotesi in più: si deve avere una funzione $f(x)$ iniettiva e **continua su un intervallo** (a, b)**. Inoltre, la funzione deve essere derivabile in** $x_0 \in (a, b)$ **e deve essere** $f'(x_0) \neq 0$**.** Sia $f^{-1}(y)$ la funzione inversa di $f(x)$ e sia $y_0 = f(x_0)$. Sotto queste condizioni vale la formula:

$$\boxed{D_{y_0} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x_0)}\,, \qquad y_0 = f(x_0) \quad \text{ossia} \quad x_0 = f^{-1}(y_0)\,.}$$

Limitiamoci ad illustrare geometricamente questa formula. Ricordiamo che il grafico di una funzione e della sua funzione inversa devono partire ambedue dall'asse delle ascisse e che l'uno è il simmetrico dell'altro rispetto alla prima bisettrice. Le tangenti, quindi, sono simmetriche rispetto alla prima bisettrice. Sia $y = y_0 + m(x - x_0)$ una retta passante per (x_0, y_0). La sua simmetrica rispetto alla prima bisettrice ha coefficiente angolare $1/m$. E ora ricordiamo che il coefficiente angolare della tangente, quando essa non è verticale, è la derivata della funzione nel punto che stiamo considerando.

Figura 3.3: Derivata della funzione inversa





Questi argomenti sono illustrati in figure 3.3. Vediamo come si usa questa regola per calcolare la derivata della funzione $\arctan x$, funzione inversa della restrizione a $(-\pi/2, \pi/2)$ della funzione $\tan x$. E':

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x\,.$$

Se $y_0 = \tan x_0$, la derivata di $\arctan x$ in y_0 è

$$\frac{1}{D_{x_0} \tan x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}\,.$$

La tabella 3.1 riassume le regole di derivazione ed elenca le derivate principali che vanno ricordate. Le regole di calcolo sono state appena dimostrate mentre le formule delle derivate fondamentali si deducono dai limiti notevoli, combinati con le regole di calcolo. Notiamo che la tabella non riporta una formula per la derivata di $f(x)^{g(x)}$, perché invece di ricordare questa formula conviene notare che

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}\,.$$

La derivata dell'espressione a destra si calcola semplicemente usando la regola di derivazione delle funzioni composte e quella del prodotto.

3.4 Notazioni usate nei corsi di fisica

Nei corsi di fisica, e in generale nei corsi a carattere più applicativo, sembra a prima vista che le notazioni sulle derivate vengano usate in modo alquanto

Tabella 3.1: Derivate fondamentali e regole di calcolo

funzione	derivata
$D_{x_0}(hf(x)+kg(x))$	$hf'(x_0)+kg'(x_0)$
$D_{x_0}f(x)g(x)$	$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
$D_{x_0}f(g(x))$	$f'(g(x_0))g'(x_0)$
$D_{y_0}f^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
$D_{x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
$D_{x_0}\log\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

funzione	derivata
x^a	ax^{a-1}
$D_{x_0}\lvert x\rvert$	$\dfrac{x_0}{\lvert x_0\rvert}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

funzione	derivata
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotan} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$\log\lvert x\rvert$	$1/x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$
$\mathrm{sett\,sh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{sett\,ch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{sett\,th} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{sett\,cth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

"libero". Per esempio, si trova che

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g \qquad \text{viene scritto} \qquad \mathrm{d}f = g\,\mathrm{d}x\,.$$

In realtà non si tratta di abusi, ma questi procedimenti tengono nascosti alcuni passaggi che è bene chiarire. Prima di tutto va detto che il simbolo d in questo contesto viene usato per indicare la derivata, al posto del simbolo D (cosa che noi faremo al Cap. 4, nel contesto della ricerca delle primitive). Nelle applicazioni, si sottintende il fatto che la x è a sua volta funzione di una ulteriore variabile, diciamo t, che non viene indicata. Allora,

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = f'(x(t))x'(t) = g(t)x'(t)$$

che, con la notazione d per indicare la derivata e sottintendendo[6] la variabile t, si scrive appunto

$$\mathrm{d}f = g\,\mathrm{d}x\,.$$

Un (apparente) abuso di notazioni analogo si incontra anche nell'uso del differenziale. Ricordiamo che il differenziale di $f(x)$ in x_0 è la trasformazione

$$h \mapsto f'(x_0)h\,.$$

Questa *trasformazione* si indica anche col simbolo $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f(x_0)h = f'(x_0)h\,.$$

Nel caso particolare della funzione $g(x) = x$ la sua *trasformazione* differenziale è

$$\mathrm{d}x = h$$

e ciò suggerisce di scrivere la *trasformazione* differenziale di f come

$$\mathrm{d}f\ \mathrm{d}x$$

(ossia, $\mathrm{d}f(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)h$, ma usualmente x_0 si sottintende). L'utilità di questa notazione dipende ancora dal fatto che in fisica x è funzione di una sottintesa variabile t e quindi

$$\mathrm{d}f\ \mathrm{d}x = f'(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

è un modo veloce di scrivere il differenziale della funzione composta. Ulteriori apparenti abusi di notazione[7], analoghi ai precedenti, si incontrano quando si devono usare funzioni di più variabili, e verranno spiegati al paragrafo 8.4 e nel corso di Analisi Matematica 2.

[6] come usa fare, e come noi faremo al Cap. 8.

[7] Notiamo anche questo fatto: il simbolo d viene manipolato come appena descritto, e quindi viene considerato la *trasformazione* $h \mapsto \mathrm{d}fh = f'(x_0)h$; però poi compaiono anche

3.5 Derivate ed ordine dei numeri reali

Sia $f(x)$ una funzione derivabile su (a, b). La relazione di ordine dei numeri reali conduce alla definizione di funzione monotona e, per mezzo della regola dei segni del prodotto, alla definizione di funzioni pari e dispari[8]. Ricordiamo che $f(x)$ è $\boxed{\textit{crescente}}$ su (a, b) quando

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x,\ x_0 \in (a, b) x \neq x_0 \ .$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si trova che $f'(x_0) \geq 0$ e ciò vale per ogni $x_0 \in (a, b)$. Trattando in modo analogo le funzioni decrescenti si trova:

Teorema 99 *Se $f(x)$ è derivabile e crescente (non necessariamente in senso stretto) su (a, b) allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; Se $f(x)$ è derivabile e decrescente (non necessariamente in senso stretto) su (a, b) allora $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.*

Osservazione 100 E' opportuno notare gli esempi seguenti:

- la derivata può annullarsi in un punto anche se la funzione è strettamente monotona: la funzione $f(x) = x^3$ è derivabile e **strettamente crescente** su $\mathbb{R}$ *ma* $f'(0) = 0$.

- la derivata può essere positiva in un punto senza che la funzione sia monotona in nessun intorno del punto. Un esempio si può costruire in questo modo: Sia $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$ e $g(0) = 0$. Notando che $g(x) - g(0) = \mathrm{o}(x)$ si vede che $g'(0) = 0$. Se $f(x) = (1/2)x + g(x)$ allora $f'(0) = 1/2 > 0$. La funzione $f(x)$ non è crescente su nessun intervallo $(-\epsilon, \epsilon)$. Infatti, se fosse crescente la sua derivata dovrebbe essere non negativa su tale intervallo. Invece, per $x \neq 0$ si ha

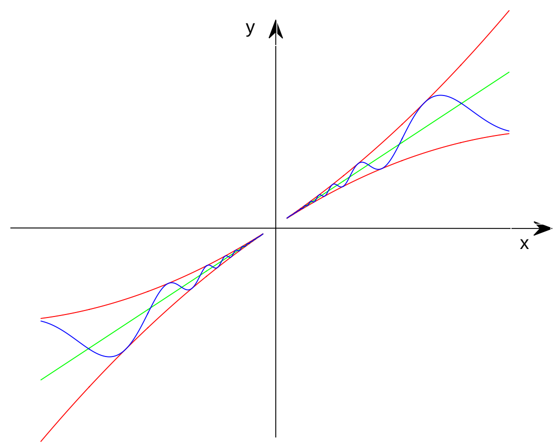
  $$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{e quindi } f'(x) = -1/2 \text{ se } x = 1/2k\pi.$$

  La figura 3.4 riporta il grafico di questa funzione. ■

espressioni del tipo "il differenzaile è *piccolo*". In questo caso si intende che $\mathrm{d}fh = f'(x_0)h$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad altre funzioni i h che si stanno considerando, che per esempio possono tendere a zero come $\sqrt{h}$. Ma l'espressione usata fa pensare che si stia confondendo la *trasformazione* differenziale con i suoi valori.

[8] conduce anche alla definizione di convessità, che qui non consideriamo.

Figura 3.4: Il grafico della funzione $f(x) = (1/2)x + x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$



Il problema della relazione tra derivata e monotonia verrà ripreso al Cap. 4. Consideriamo ora la relazione tra parità e derivata. Sia $f(x)$ derivabile si $(-a, a)$. Vale:

$$\text{la funzione è } \textbf{pari} \text{ se } f(x) = f(-x);$$
$$\text{la funzione è } \textbf{dispari} \text{ se } f(x) = -f(-x).$$

Derivando i due membri mediante il teorema della funzione composta si trova

$$\text{se la funzione è } \textbf{pari:} \ f'(x) = -f'(-x);$$
$$\text{se la funzione è } \textbf{dispari:} \ f'(x) = f'(-x).$$

Dunque si ha:

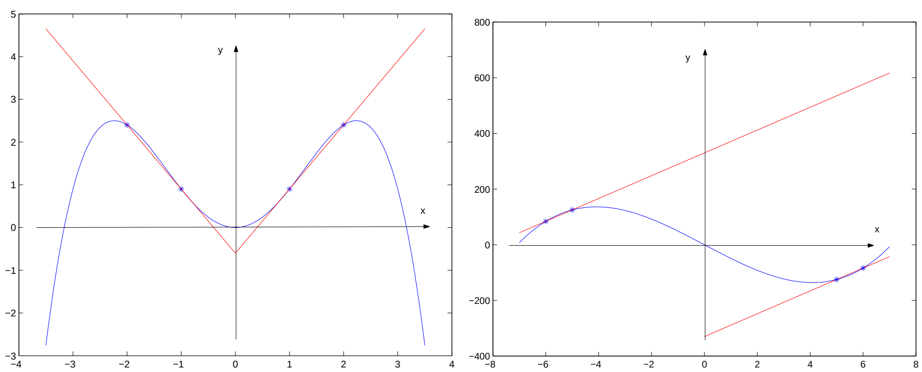
Teorema 101 *Sia $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se $f(x)$ è pari oppure dispari, le sue derivate di ordine* pari *hanno la stessa parità di $f(x)$, quelle di ordine* dispari *hanno parità opposta.*

Una funzione dispari deve annullarsi in $x_0 = 0$. Vale quindi:

Teorema 102 *La derivata in $x_0 = 0$ di una funzione pari è nulla e quindi se $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ è* pari *tutte le sue derivate* di ordine dispari *sono nulle in $x_0 = 0$; se $f(x)$ è* dispari *tutte le sue derivate* di ordine pari *sono nulle in x_0.*

E' interessante vedere l'interpretazione geometrica del Teorema 101 notando che le secanti in punti corrispondenti del grafico sono parallele, e quindi hanno la stessa pendenza, nel caso di funzioni dispari; hanno pendenza opposta nel caso di funzioni pari, come illustrato nella figura 3.5. Tale relazione si conserva passando al limite dei rapporti incrementali, ossia si conserva per le derivate.

Figura 3.5: Grafici e secanti di funzioni pari e dispari



3.5.1 Il teorema di Fermat ed i punti di estremo

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita su un intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. **punto importante da sottolineare: x_0 è interno all'intervallo. NON è uno degli estremi.** Vale il teorema seguente:

Teorema 103 (di Fermat) *Se:*

- $f(x)$ *è definita in* (a,b)*;*
- $x_0 \in (a,b)$ *è punto di massimo oppure di minimo locale di* $f(x)$
- *la funzione* $f(x)$ *è derivabile in* x_0*,*

allora $f'(x_0) = 0$*.*

Dim. Per assurdo, sia

$$f'(x_0) > 0\,, \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Il teorema di permanenza del segno asserisce che esiste $\delta > 0$ tale che

$$-\delta < h < \delta \Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0\,,$$

ossia,

$$f(x_0+h)-f(x_0) \text{ ed } h \text{ hanno segno concorde.}$$

Dunque, se $h > 0$ vale $f(x_0+h) > f(x_0)$ mentre se $h < 0$ vale $f(x_0+h) < f(x_0)$ e quindi $f(x_0)$ non è né punto di massimo né punto di minimo di $f(x)$. Il caso $f'(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. ■

L'interpretazione geometrica di questo teorema: ricordiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza della tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dunque, **se esiste la tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ ed x_0 è un punto di massimo o di minimo INTERNO AL DOMINIO DELLA FUNZIONE, la tangente è orizzontale.**

Osservazione 104 Il teorema di Fermat NON si applica alle derivate direzionali. La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, definita su $[-1, 1]$, ha minimo nei punti -1 e $+1$. Le derivate direzionali in tali punti non sono nulle; anzi sono $+\infty$ e $-\infty$. La funzione $f(x) = x$ definita su $[0, 1]$ ha minimo in $x = 0$ e massimo in $x = 1$. Le derivate direzionali in ambedue questi punti valgono 1. ■

Il teorema di Fermat ha questa conseguenza importante:

i punti di massimo e di minimo relativo di una funzione vanno cercati tra i punti nei quali la derivata prima non esiste; i punti nei quali la derivata prima si annulla e, se ivi definita, gli estremi del dominio della funzione.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 105 Sia $f(x) = |x|$, definita su $[-1, 1]$. La funzione non è derivabile in $x = 0$ e, dove derivabile, ha derivata

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Dunque, $f'(x)$ non si annulla mai. Quindi, i punti di massimo e di minimo vanno ricercati tra i punti -1, 0, $+1$. Sia invece $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, definita su $\mathbb{R}$. La derivata si annulla nel solo punto $x = 0$ e quindi la funzione ha al più un solo punto o di massimo o di minimo, nel punto $x = 0$. Nel caso specifico $x = 0$ è punto di minimo ma **questo non si deduce dall'annularsi della derivata prima.** Infatti:

- la funzione $f(x) = -x^2$ ha nulla la derivata nel solo punto $x = 0$ che però ora è un punto di massimo;

- Non è detto che la condizione $f'(x_0) = 0$ implichi che x_0 è punto di massimo o di minimo. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, definita su $\mathbb{R}$, ha derivata $f'(x) = 3x^2$, nulla per $x = 0$. Il punto $x = 0$ **non** è né punto di massimo né punto di minimo di $f(x)$ perché $x^3 < 0$ per $x < 0$ mentre $x^3 > 0$ per $x > 0$. ■

I punti nei quali si annulla la derivata prima si chiamano $\boxed{\textit{punti estremali}}$ oppure $\boxed{\textit{punti stazionari}}$ oppure $\boxed{\textit{punti critici}}$ della funzione. Il teorema di Fermat asserisce che i punti di massimo o di minimo (assoluto o relativo) di una funzione sono punti estremali quando: 1) sono punti interni al dominio; 2) la funzione è derivabile in tali punti.

3.6 Osservazione finale ed importante

Si è insistito sul fatto che la derivata si definisce **nei punti interni.** Quindi, quando si afferma l'esistenza di $f'(x_0)$ implicitamente si afferma anche che la funzione $f(x)$ è definita in un intorno di x_0 ed inoltre, dal teorema 91, la funzione $f(x)$ è continua in x_0. Potrebbe essere discontinua in ogni altro punto. Vediamo la conseguenza di queste osservazioni sulle derivate successive. Affermando che esiste $f''(x_0)$ implicitamente si afferma che esiste $f'(x)$ e quindi anche $f(x)$ **in un intorno di** x_0**.** La funzione $f'(x)$ deve essere continua in x_0 per il teorema 91. L'esistenza di $f'(x)$ in ogni punto di un intorno di x_0 implica che $f(x)$ è continua in tale intorno. Queste osservazioni si ripetono per le derivate successive: se esiste $f^{(n)}(x_0)$ allora $f^{(n-1)}(x_0)$ è definita in un intorno di x_0 (ed è continua in x_0); tutte le derivate precedenti sono **definite e continue** in tale intorno.

3.7 Alcuni esercizi

1. (a) Un punto materiale si muove con velocità costante di $0,1$ m/ sec. Calcolarne la velocità in centimetri al secondo.

   (b) Un punto materiale si muove con accelerazione costante di $0,01$ m/ sec^2. Calcolarne l'accelerazione in centimetri al secondo per secondo.

(c) la legge del moto del punto suddetto è $x(t)$ quando le lunghezze si misurano in metri e $\xi(t)$ quando si misurano in centimetri. E' quindi $\xi(t) = 100x(t)$. Ritrovare i risultati precedenti sulla velocità e accelerazione usando linearità della derivata.

2. (a) Un punto materiale si muove con velocità costante di $0,1$ m/ sec. Calcolarne la velocità in metri al minuto.

   (b) Un punto materiale si muove con accelerazione costante di $0,01$ m/ sec^2. Calcolarne l'accelerazione in metri al minuto per minuto.

   (c) la legge del moto del punto suddetto è $x(t)$ quando il tempo si misura in secondi e $\xi(\tau)$ quando il tempo si misura in minuti. E' quindi $\xi(\tau) = x(60\tau)$. Ritrovare i risultati precedenti sulla velocità e accelerazione usando la regola di derivazione della funzione composta.

3. Le regole di derivazione mostrano che per ogni numero reale a vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin ax = a\cos ax\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ax} = ae^{ax}$$

e simili. Invece,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log ax = \frac{1}{x}$$

(si ha qui $a > 0$ ed $x > 0$). Dunque, in questo caso il fattore moltiplicativo a "non ha effetto" sul calcolo della derivata. Spiegare il motivo usando le regole di calcolo dei logaritmi.

4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Dare condizioni per la derivabilità di $|f(x)|$ in x_0, sia quando $f(x_0) \neq 0$ che quando $f(x_0) = 0$. Ha qualche interesse sapere se x_0 è nullo?

5. Si è visto che che se $f(x)$ è pari e derivabile allora $f'(x)$ è dispari; se $f(x)$ è dispari e derivabile allora $f'(x)$ è pari. Si illustri il significato di questa proprietà tracciando i grafici di due funzioni, una pari e una dispari, e disegnando alcune tangenti. Ossia, si considerino le figure 3.5 in alcuni casi concreti.

6. **($\star$)** Si mostri che se $f(x)$ è una funzione derivabile per cui $f(x) = f(1/x)$ allora $f'(x)$ verifica

$$x^2 f'(x) = -\, f'\left(\frac{1}{x}\right)\;; \tag{3.3}$$

se $g(x)$ è una funzione derivabile per cui $g(x) = -g(-1/x)$ allora $g'(x)$ verifica

$$x^2 g'(x) = -\, g'\left(-\frac{1}{x}\right) . \tag{3.4}$$

Si verifichi che le funzioni

$$f(x) = (1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) = (1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

hanno le proprietà richieste e si verifichi che le loro derivate effettivamente soddisfano le (3.3) e (3.4).

7. ($\star$) Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

8. ($\star$) Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

9. ($\star$) Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dire se esitono punti in cui la funzione è continua e punti in cui è derivabile.

10. ($\star$) Costruire una funzione $f(x)$ con queste proprietà:
    - è continua in $x_0 = 0$
    - per $x \to 0$ vale $f = \mathrm{o}(x^5)$
    - la funzione non ha derivata seconda in $x_0 = 0$.

11. ($\star$) Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin 1/x & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$
Si mostri che $f(x)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$ e che per $x \to 0$ si ha $f = \mathrm{o}(x^2)$. Dire se è vero che $f'(x) = \mathrm{o}(x)$ (per $x \to 0$).

12. Sia
$$f(x) = x + x^2 \sin(1/x) \quad \text{se} x \neq 0\,, \quad f(0) = 0\,.$$
Mostrare che $f'(0) = 1$ ma che non esistono intorni di 0 su cui $f(x)$ è crescente. Si studi la derivabilità della funzione anche per $x \neq 0$.

13. Sia
$$f(x) = x \ \text{se} x \in \mathbb{Q}\,, \quad f(x) = \sin x \quad \text{se} x \notin \mathbb{Q}\,.$$
Mostrare che $f'(0) = 1$ ma che non esistono intorni di 0 su cui $f(x)$ è crescente. Si studi la derivabilità della funzione anche per $x \neq 0$.

14. **($\star$)** si costruisca una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ con queste proprietà:
    (a) la funzione è dispari ed $f(x) \leq 0$ per $x < 0$ (e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$ ed $f(0) = 0$);
    (b) la tangente a grafico nel punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ è orizzontale;
    (c) il punto $x_0 = 0$ non è punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione $f(x)$.

15. Si consideri la parabola $y = x^2$. Se ne calcoli la tangente nel punto di coordinate (x_0, x_0^2) e si mostri che tale retta tangente biseca il segmento congiungente il vertice della parabola col punto $(x_0, 0)$.

16. Si consideri l'iperbole $y = 1/x$ e per ogni $x_0 > 0$ se ne calcoli la tangente nel punto $(x_0, 1/x_0)$. Si calcoli l'area del triangolo che ha per vertici l'origine e le intersezioni di tale tangente con gli assi coordinati. Si mostri che l'area del triangolo non dipende da x_0.

17. Sia $f(x) = x^2$. Si considerino i due punti del grafico di $f(x)$, (x_0, x_0^2) ed (x_1, x_1^2). Si calcolino le tangenti al grafico in tali punti e si calcoli l'ascissa del loro punto comune. Si noti che tale ascissa è la $\boxed{\textit{media aritmetica}}$ $(x_0 + x_1)/2$ dei due numeri x_0 ed x_1.

18. Sia $f(x) = \sqrt{x}$. Si considerino i due punti del grafico di $f(x)$, $(x_0, \sqrt{x_0})$ ed $(x_1, \sqrt{x_1})$. Si calcolino le tangenti al grafico in tali punti e si calcoli l'ascissa del loro punto comune. Si noti che tale ascissa è la $\boxed{\textit{media geometrica}}$ $\sqrt{x_0 x_1}$ dei due numeri x_0 ed x_1.

19. Elevando al quadrato ambedue i membri membri, si provi che vale la disuguaglianza
$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ossia, *la media geometrica è minore della media aritmetica.* Si usino le osservazioni agli esercizi 17 e 18. Si traccino i grafici delle due funzioni $f(x) = x^2$ ed $f(x) = \sqrt{x}$ e si interpreti la disuguaglianza precedente mediante le ascisse dei punti di intersezione delle tangenti ai due grafici.

Capitolo 4

Funzioni: proprietà globali

Niente la soddisfa mai, eccetto le dimostrazioni; le teorie non dimostrate non fanno per lei, non le accetta. E' questo lo spirito giusto, lo ammetto: mi attrae, ne sento l'influenza; se stessi di più con lei, penso che l'adotterei anch'io. Diario di Adamo, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

Fino ad ora abbiamo studiato le proprietà "locali" delle funzioni, che dipendono solamente dal comportamento della funzione in un intorno del punto x_0. Ora invece studiamo le proprietà delle funzioni in relazione a tutto il loro dominio, che frequentemente (ma non sempre) sarà un intervallo.

4.1 Teorema delle funzioni monotone

La definizione di limite permette solamente di **verificare** che il limite è effettivamente ciò che l'intuizione ci ha suggerito. In particolare, non asserisce che un limite debba esistere o meno. Un teorema che asserisce l'esistenza del limite, e ne indica il valore, è il seguente, che si chiama *teorema delle funzioni monotone* Lo enunciamo nel caso delle funzioni crescenti, lasciando per esercizio di adattare l'asserto al caso delle funzioni decrescenti.

Teorema 106 *Sia $f(x)$ una funzione crescente (anche non strettamente). Si ha:*

- *se*[1] *x_0 è punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f_{|(-\infty,x_0)}$ *allora esiste il limite $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ e inoltre*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x)\ |x<x_0\}\,.$$

[1] non si esclude che x_0 indichi $+\infty$.

- *Se*[2] x_0 *è punto di accumulazione per* $\mathrm{dom}\, f_{|(x_0,+\infty)}$ *allora esiste* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *e vale*
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf\{f(x)\ |x>x_0\}\,.$$

Notiamo che il segno di disuguaglianza è stato scritto in colore, per sottolineare che le disuguaglianze sono **strette.** Anche se la funzione è definita in x_0, il valore che essa prende in x_0 non compare nell'enunciato del teorema.

Prima di provare il teorema, vediamone alcune conseguenze.

- Se $f(x)$ è crescente in (a,b) e se $x_0 \in [a,b]$ allora si ha
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x)\,.$$

- niente vieta che $\lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$. In questo caso la funzione, se deve essere crescente, non può essere definita a destra di x_0 e quindi $x_0 = b$. Analogamente, se $\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$, la funzione, se crescente, non può essere definita a sinistra di x_0 e quindi $x_0 = a$. In particolare: se la funzione (crescente) è definita in x_0, i limiti direzionali **esistono e sono finiti.** Ossia: **i punti di discontinuità di funzioni monotone sono tutti salti.**

- di conseguenza, l'**immagine di una funzione monotona su un intervallo e discontinua NON è un intervallo.** Quest'affermazione è importante perché permette di provare la continuità di certe funzioni senza fare calcoli. Per esempio:
  - la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua. Infatti è la funzione inversa della restrizione a $[0,+\infty)$ di $g(x) = x^2$. E' monotona e la sua immagine è $[0,+\infty)$, un intervallo; e pertanto è continua;
  - la funzione $\arctan x$ è la funzione inversa della restrizione a $(-\pi/2, \pi/2)$ di $\tan x$, che è monotona. Dunque anche $\arctan x$ è monotona e la sua immagine è l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Quindi non ha salti e pertanto è continua.

[2] non si esclude che x_0 indichi $-\infty$.

La dimostrazione del teorema delle funzioni monotone

Proviamo il teorema per i limiti sinistri di funzioni crescenti. Inoltre, studiamo il caso $x_0 < +\infty$ lasciando per esercizio il caso in cui $x_0 = +\infty$. Conviene distinguere due casi:

Caso 1: $\sup\{f(x) \ |x < x_0\} = +\infty$ **, ossia** $f(x)$ **superiormente illimitata** Come si è notato, in questo caso x_0 è l'estremo destro del dominio della funzione e bisogna provare

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty \,.$$

Dunque vanno considerate le disequazioni

$$f(x) > \epsilon$$

e va provato che ciascuna di esse è soddisfatta in un intervallo (c, x_0), con $c = c_\epsilon < x_0$. Essendo la funzione superiormente illimitata, **esiste** un particolare x_ϵ tale che

$$f(x_\epsilon) > \epsilon \,.$$

La funzione è **crescente** e quindi per $x \in (x_\epsilon, x_0)$ si ha

$$f(x) \geq f(x_\epsilon) > \epsilon \,.$$

Dunque, si può scegliere $c_\epsilon = x_\epsilon$.

Caso 2: $\sup\{f(x) \ |x < x_0\} = l < +\infty$ In questo caso va provato

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l$$

e quindi vanno considerate le disequazioni

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \,.$$

Va mostrato che ciascuna di esse è soddisfatta in un intervallo (c_ϵ, x_0). La definizione di estremo superiore mostra che **esiste** x_ϵ per cui

$$l - \epsilon < f(x_\epsilon) \,.$$

La funzione è **crescente** e quindi

$$x \in (x_\epsilon, x_0) \Longrightarrow f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq l \,.$$

L'ultima disuguaglianza discende dalla definizione di l. L'asserto segue scegliendo $c_\epsilon = x_\epsilon$. ■

Ripetiamo che il teorema delle funzioni monotone non richiede che il dominio sia un intervallo. Esso vale per funzioni definite su un **qualsiasi** insieme, purché i limiti da destra e/o da sinistra possano studiarsi. In particolare, **vale per le successioni.** Nel caso delle successioni, il teorema delle funzioni monotone può enunciarsi come segue:

Teorema 107 *Se* $\{x_n\}$ *è una successione monotona, essa ammette limite per* $n \to +\infty$*, finito o meno, e vale:*

- *se la successione è crescente allora* $\lim x_n = \sup\{x_n\,, n \in \mathbb{N}\}$*;*
- *se la successione è decrescente allora* $\lim x_n = \inf\{x_n\,, n \in \mathbb{N}\}$.

Prendiamo l'occasione offerta dal Teorema 107 per introdurre un nuovo termine: una successione che ammette limite per $n \to +\infty$, finito oppure $+\infty$ oppure $-\infty$, si chiama *successione regolare* Se il limite è finito la successione è una *successione convergente*

Si noti che la dimostrazione del Teorema delle funzioni monotone usa la completezza dei numeri reali, ossia la proprietà di Dedekind.

4.2 Il Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ricordiamo che si chiama *successione convergente* una successione che ammette limite finito. Il teorema seguente è importante in moltissime applicazioni:

Teorema 108 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata ammette sottosuccessioni convergenti, ossia dotate di limite finito.*

Dim. Indichiamo con m l'estremo inferiore dell'immagine $\{x_n\}$ della successione,

$$m = \inf\{x_n\} \ .$$

Ora procediamo in modo iterativo:

Passo 1: Sia $S_1 = \{x_n\}$, l'immagine della successione e sia

$$c_1 = \sup S_1 \, .$$

Ovviamente, $c_1 \geq m$. Scegliamo un qualsiasi x_{n_1} tale che

$$c_1 - 1 < x_{n_1} \leq c_1 \, .$$

L'indice n_1 esiste per la definizione di estremo superiore.

Passo 2: Definiamo

$$S_2 = \{x_n \, , \ |n > n_1\} \, , \qquad c_2 = \sup S_2 \, .$$

Ovviamente, $S_2 \subseteq S_1$ e quindi $m \leq c_2 \leq c_1$. Scegliamo x_{n_2} tale che

$$c_2 - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq c_2 \ .$$

E':

$$n_2 > n_1 \, .$$

Passo 3: Definiamo

$$S_3 = \{x_n \, , \ |n > n_2\} \, , \qquad c_3 = \sup S_3 \, .$$

Ovviamente, $S_3 \subseteq S_2$ e quindi $m \leq c_3 \leq c_2$. Scegliamo x_{n_3} tale che

$$c_3 - \frac{1}{3} < x_{n_3} \leq c_3 \ .$$

E':

$$n_3 > n_2 \, .$$

Passo k: Definiamo

$$S_k = \{x_n \, , \ |n > n_{k-1}\} \, , \qquad c_k = \sup S_k \, .$$

Ovviamente, $S_k \subseteq S_{k-1}$ e quindi $m \leq c_k \leq c_{k-1}$. Scegliamo x_{n_k} tale che

$$c_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq c_k \tag{4.1}$$

e si ha

$$n_k > n_{k-1} \, . \tag{4.2}$$

In questo modo abbiamo costruito due successioni:

- la successione $\{c_k\}$ *decrescente* ed inferiormente limitata, e quindi dotata di limite finito l:

$$\lim c_k = l \in \mathbb{R} \, .$$

- la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ della successione $\{x_n\}$. Si noti che $\{x_{n_k}\}$ è effettivamente una sottosuccessione, perché $\{n_k\}$ è *crescente,* si veda la (4.2).

La (4.1) mostra che $\{x_{n_k}\}$ ammette limite, uguale a quello di $\{c_k\}$, e quindi finito. Ciò è quanto volevamo provare. ■

Si noti che la dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass usa il Teorema delle funzioni monotone e quindi usa la completezza dei numeri reali

.

4.3 Il teorema di Weierstrass

Notiamo che esistono funzioni continue prive di punti di massimo e di minimo. Sono esempi le funzioni $\arctan x$, definita su $\mathbb{R}$, la funzione $f(x) = 1/x$ definita su $(0, +\infty)$ ma anche la funzione $f(x) = 1/x$ definita su $(0, 1]$, che ammette punto di minimo ($x = 1$) ma non punto di massimo. In questi esempi le funzioni sono continue su intervalli che non sono chiusi oppure non sono limitati. Invece:

Teorema 109 (di Weierstrass) *Sia $f(x)$ definita su un intervallo* **limitato e chiuso** $[a, b]$. *Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia* **continua** *su* $[a, b]$. *L'immagine della funzione ammette sia massimo che minimo e quindi esistono x_0 ed x_1 in $[a, b]$ tali che:*

$$x_0 \text{ è } \boxed{\text{punto di massimo}} \textit{ ossia } f(x_0) = \max\{f(x)\,, x \in [a, b]\};$$

$$x_1 \text{ è } \boxed{\text{punto di minimo}} \textit{ ossia } f(x_1) = \min\{f(x)\,, x \in [a, b]\}.$$

Il teorema non afferma l'unicità dei punti di massimo o di minimo. E' importante notare che questo teorema si può riadattare per dimostrare l'esistenza di punti di massimo e/o di minimo anche in casi in cui le ipotesi non sono soddisfatte. Consideriamo l'esempio seguente:

Esempio 110 Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$ e verifichi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = c\,. \tag{4.3}$$

Esista un punto x_0 tale che $d = f(x_0) > c$. Allora, la funzione ammette punto di massimo. Infatti, sia $\epsilon = (d-c)/2$. Per definizione di limite, esiste $R > 0$ tale che

$$|x| > R \Longrightarrow f(x) < c + \frac{d-c}{2} = \frac{d+c}{2} < d\,.$$

Dunque, se $|x| > R$ vale $f(x) < d = f(x_0)$. Aumentando il valore di R, si può anche avere $|x_0| < R$. La funzione $f(x)$ è continua in particolare su $[-R, R]$, intervallo limitato e chiuso, e quindi ammette ivi un punto di massimo x_1:

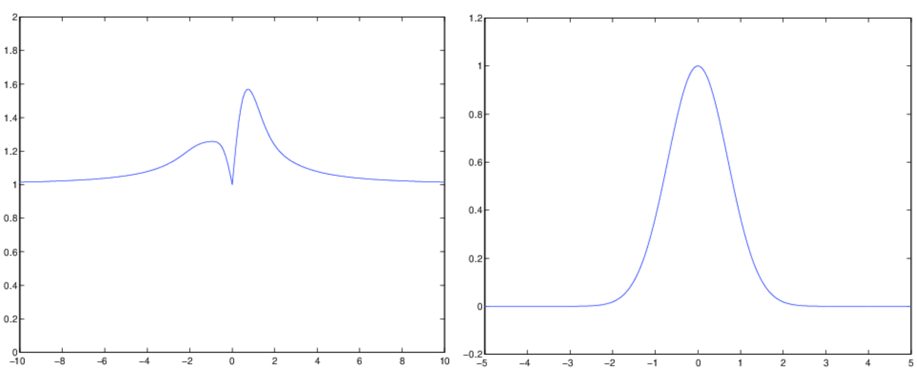
$$f(x_1) \geq f(x) \qquad \forall x \in [-R, R]\,.$$

In tale punto si ha

$$f(x_1) \geq f(x_0) = d$$

più grande di $f(x)$ sia se $|x| > R$ che se $|x| \leq R$. Questo caso è illustrato nei grafici della figura 4.1. Si noti che il grafico a sinistra mostra anche l'esistenza di un punto di minimo, che però non è conseguenza della proprietà (4.3). Infatti, la funzione a destra non ha punti di minimo. In modo analogo si provi

Figura 4.1: sinistra; destra



che se $f(x)$ è definita su (a, b) e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

allora la funzione ammette punti di minimo (assoluti). ■

4.3.1 La dimostrazione del Teorema di Weierstrass

Premessa: nella dimostrazione useremo il Teorema di Bolzano Weierstrass e le proprietà seguenti:

A) se $\{x_n\}$ è una successione a valori in $[a, b]$, ossia se $a \leq x_n \leq b$, e se esiste $\lim x_n = x_0$, allora[3] si ha anche $a \leq x_0 \leq b$.

B) se $f(x)$ è continua in x_0 e se $x_n \to x_0$ allora[4] $f(x_n) \to f(x_0)$ (naturalmente si suppone $x_n \in \operatorname{dom} f(x)$).

C) se una successione converge, ogni sua sottosuccessione converge, ed ha il medesimo limite, finito o meno (Teorema 83). Applicheremo questo teorema ad una successione $\{f(x_n)\}$. Non sapremo che $\{x_n\}$ converge, ma sapremo che $f(x_n) \to L$. Se $\{x_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$ allora $\{f(x_{n_k})\}$ è sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$ e quindi $f(x_{n_k}) \to L$.

Proviamo ora il teorema di Weierstrass. Proviamo l'esistenza dei punti di massimo (la dimostrazione dell'esistenza di punti di minimo è analoga). La dimostrazione è in tre passi:

Passo 1: la costruzione di una successione massimizzante Si chiama *successione massimizzante* per una funzione $f(x)$ definita su un insieme D una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in \operatorname{dom} f(x)$ per ogni n, e tale che inoltre

$$\lim f(x_n) = \sup\{f(x)\,, x \in D\}\,.$$

L'estremo superiore può essere finito o meno, e la successione $\{x_n\}$ generalmente non è regolare. **Una successione massimizzante esiste sempre, senza alcuna condizione né sulla funzione $f(x)$ né sul suo dominio.** Infatti, sia

$$L = \sup A\,, \quad A = \operatorname{im} f(x) = \{f(x)\,, x \in D\}\,.$$

Sia nel caso $L = +\infty$ che nel caso $L \in \mathbb{R}$, esiste una successione $\{y_n\}$ di punti di A che converge ad L. I punti di A sono valori della funzione $f(x)$ e quindi esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $f(x_n) = y_n$. Dunque[5],

$$\lim f(x_n) = L\,.$$

[3]per il **teorema di permanenza del segno.**
[4]per il **teorema sui limiti delle funzioni composte**.
[5]proprietà **B)**

Passo 2: se *textnormaldom* $f(x) = [a, b]$ **allora esiste una *successione massimizzante* per** $f(x)$ **che è anche *convergente.*** Sia $\{x_n\}$ la successione massimizzante costruita al passo 1. Si ha:

$$a \leq x_n \leq b\,.$$

E quindi la successione $\{x_n\}$ è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, essa ammette almeno una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente:

$$\lim x_{n_k} = x_0\,.$$

Per la proprietà **A),** il punto x_0 appartiene all'intervallo **chiuso** $[a, b]$. Inoltre, $\{f(x_{n_k})\}$ è sottosuccessione della successione convergente $\{f(x_n)\}$ e quindi[6] ha lo stesso limite L:

$$\lim f(x_{n_k}) = L\,.$$

Paso 3: se $f(x)$ **è continua, il punto** x_0 **è punto di massimo per** $f(x)$ Sia $x_0 = \lim x_{n_k}$ il numero costruito al Passo 2. Si è notato[7] che $x_0 \in [a, b]$ e quindi è un punto del dominio della **funzione continua** $f(x)$. Dunque[8] si ha:

$$f(x_0) = \lim f(x_{n_k}) = L = \sup\{f(x)\,, x \in [a, b]\}\,.$$

Ossia, l'immagine della funzione ammette massimo ed x_0 è punto di massimo. Ciò completa la dimostrazione

Il teorema di Weierstrass dipende dal teorema di Bolzano-Weierstrass e quindi usa la proprietà di completezza dei numeri reali.

4.4 Teorema dei valori intermedi

Questo teorema afferma che, sotto certe ipotesi, esistono soluzioni dell'equazione

$$f(x) = c\,.$$

Essenzialmente, le ipotesi sono che **1)** $f(x)$ sia continua e **2)** che il grafico di $f(x)$ "tagli quota c". Dunque, il contenuto di questi teoremi sembra intuitivo, ma non è per niente così. Infatti, si consideri l'equazione

$$x^3 = 2\,.$$

[6] proprietà **C)**
[7] proprietà **A)**
[8] proprietà **C).**

Per provare l'esistenza di soluzioni, si può ragionare così: la funzione $f(x) = x^3$ vale -8 per $x = -2$ e vale $+8$ per $x = +2$. Inoltre è continua. Quindi, il suo grafico "non fa salti" e da qualche parte deve tagliare la retta $y = 2$; ossia l'equazione ammette almeno una soluzione. Questo discorso, dall'apparenza convincente, è sostanzialmente falso: pensiamo di lavorare con valori di x **solamente razionali.** Le condizioni su $f(x)$ dette sopra valgono in $\mathbb{Q}$, ma nessun numero razionale verifica $x^3 = 2$. Dunque, il ragionamento è sbagliato. Proviamo però che l'asserto **vale se si lavora in** $\mathbb{R}$**.** Ricordiamo la differenza essenziale tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$: in $\mathbb{R}$ vale la **proprietà di Dedekind:** ogni insieme superiormente limitato ammette estremo superiore; ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore. E' grazie alla proprietà di Dedekind che si può provare il risultato seguente:

Teorema 111 *Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$. Si consideri l'equazione*

$$f(x) = c\,, \qquad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{4.4}$$

Quest'equazione ammette almeno una soluzione se c è compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Il teorema non asserisce l'unicità della soluzione. Prima di provare il teorema, premettiamo vari commenti. Ricordiamo ora che, Il Teorema di Weierstrass asserisce l'esistenza di punti di massimo e di minimo della funzione $f(x)$ in $[a, b]$ **se essa è continua sull'intervallo** $[a, b]$**.** Esistono cioè x_0 ed x_1 in $[a, b]$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,, \qquad f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Il Teorema 111 vale anche sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1 e quindi si può enunciare:

Teorema 112 *Una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso prende tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.*

L'asserto dei due teoremi 111 e 112 si chiama teorema dei $\boxed{\textit{valori intermedi}}$ La versione del teorema che si ottiene quando $f(a)f(b) < 0$ e si sceglie $c = 0$ si chiama *teorema di* $\boxed{\textit{esistenza degli zeri}}$

Teorema 113 (di esistenza degli zeri) *Una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ e che ivi prende sia valori positivi che valori negativi, si annulla almeno in un punto di $[a, b]$.*

Il teorema dei valori intermedi dipende dalla proprietà di completezza dei numeri reali, e richiede in modo essenziale che il dominio della funzione sia un intervallo.

Dimostrato il teorema dei valori intermedi, possiamo anche estendere in vari modi le considerazioni da cui siamo partiti. Per esempio:

Corollario 114 *Se $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ ed inoltre i due limiti (finiti o meno)*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

hanno segni opposti, la funzione ammette almeno uno zero. In particolare, tutti i polinomi di grado dispari hanno uno zero in $\mathbb{R}$.

Dim. Infatti, il teorema di permanenza del segno garantisce l'esistenza di R tale che

$$f(-R) \text{ ed } f(R) \text{ hanno segno opposto.}$$

Si applica quindi il teorema 112 all'intervallo $[-R, R]$. Questo risultati si applica in particolare ai polinomi di grado dispari perché essi sono infiniti di segno opposto per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. ■

Il Teorema dei valori intermedi mostra che *le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli.* Più precisamente si ha, usando il Teorema 112:

Corollario 115 *Sia J un intervallo (limitato o meno, chiuso o meno). Se $f(x)$ è definita e continua su J allora $f(J)$ è un intervallo. Se inoltre J è un intervallo limitato e chiuso, $J = [a, b]$, allora $f(J)$ è un intervallo limitato e chiuso contentente l'intervallo $[f(a), f(b)]$.*

Si faccia un esempio per mostrare che in generale $f(J)$ **contiene propriamente** l'intervallo $[f(a), f(b)]$. Interpretiamo ora questi risultati dal punto di vista del grafico di due funzioni:

Corollario 116 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue su $[a, b]$ e supponiamo che*

$$f(a) < g(a)\,, \qquad f(b) > g(b)$$

(o viceversa). I grafici delle due funzioni hanno almeno un punto comune.

Dim. I grafici hanno un punto comune quando esiste una soluzione $x \in [a, b]$ dell'equazione

$$f(x) = g(x) \qquad \text{ossia di} \qquad f(x) - g(x) = 0\,.$$

L'esistenza di (almeno) una soluzione di quest'equazione segue dal Teorema 112, notando che

$$f(a) - g(a) < 0\,, \qquad f(b) - g(b) > 0\,. \ ■$$

4.4.1 La dimostrazione del teorema dei valori intermedi

Nella dimostrazione useremo la proprietà seguente, conseguenza del **teorema di permanenza del segno per le funzioni continue:** **Osservazione:** supponiamo che la funzione $f(x)$ sia continua su $[a,b]$ e sia $m \in (a,b)$. Allora si ha:

A) se $f(x) < c$ per $x < m$ allora $f(m) = \lim_{x\to m-} f(x) \le c$ (si noti che si è usato la continuità di $f(x)$ nel punto m).

B) sia $\{x_n\}$ una successione per cui $x_n > m$, $\lim x_n = m$ ed $f(x_n) \ge c$. Sempre usando la continuità di $f(x)$ nel punto m si ha $f(m) = \lim f(x_n) \ge c$.

Proviamo ora il teorema. Per fissare le idee facciamo la dimostrazione nel caso $f(a) < f(b)$ e quindi $f(a) \le c \le f(b)$. Naturalmente, se $c = f(a)$ oppure $c = f(b)$ l'asserto è provato e quindi consideriamo il caso in cui le disuguaglianze sono strette:

$$f(a) < c < f(b)\,. \tag{4.5}$$

Consideriamo l'insieme

$$S_c = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \ge c\}\ .$$

L'insieme S_c è limitato e quindi esiste

$$m = \inf S_c\,, \quad m \in [a,b]\ .$$

Osserviamo che:

- La funzione $f(x)$ è continua e quindi, per (4.5) e per il teorema di permanenza del segno, esiste $\epsilon > 0$ tale che

  $$f(x) < c \quad \forall x \in [a, a+\epsilon]\,, \qquad f(x) > c \quad x \in [b-\epsilon, b]\,. \tag{4.6}$$

  E quindi

  $$S_c \subseteq [a+\epsilon, b]\,, \quad \text{ed } m < b-\epsilon, \text{ ossia } a+\epsilon \le m \le b-\epsilon.$$

  Il punto da sottolineare è che m è *interno* al dominio della funzione.

- Inoltre si ha:

  $$\text{se } x < m \text{ allora } f(x) < c\,. \tag{4.7}$$

La proprietà **A)** dell'**Osservazione** mostra che

$$f(m) \leq c\,. \tag{4.8}$$

Proviamo ora che $f(m) = c$, e quindi che m è una soluzione (in generale non l'unica) dell'equazione $f(x) = c$. La dimostrazione consistere nel provare che si ha anche $f(m) \geq c$, cosìche dovrà essere $f(m) = c$. Notiamo che m è il **massimo dei minoranti** di S_c. Dunque, per ogni n esiste $x_n \in S_c$ tale che

$$m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n}\,.$$

Per il teorema del confornto sui limiti, $x_n \to m$. Inoltre, essendo $x_n \in S_c$, si ha anche $f(x_n) \geq c$. La proprietà **B)** dell'**Osservazione** mostra che

$$f(m) \geq c\,. \tag{4.9}$$

Confrontando (4.8) and (4.9) si conclude che si ha

$$f(m) = c\,.$$

Ciò prova l'asserto.

4.4.2 Una conseguenza sulle funzioni iniettive

Una funzione **strettamente** monotona è iniettiva e quindi invertibile. Il contrario non vale. Si sono visti esempi di funzioni invertibili ma non monotone. Però gli esempi che abbiamo visto sono

- esempi di funzioni continue ma non definite su un intervallo;
- esempi di funzioni definite su un intervallo ma non continue.

Il teorema seguente mostra la ragione:

Teorema 117 *Sia $f(x)$ una funzione* continua su un intervallo $[a, b]$. *Se essa è iniettiva, allora è strettamente monotona.*

Dim. L'iniettività implica che $f(a) \neq f(b)$. Consideriamo il caso

$$f(a) < f(b)\,.$$

Proviamo che ciò implica che la funzione è **strettamente crescente,** ossia che **per ogni** x_1 ed x_2 di $[a, b]$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$f(x_1) < f(x_2)$$

(l'uguaglianza non può aversi perché la funzione è iniettiva). Consideriamo prima di tutto i tre punti a, x_1 e b e proviamo che $f(a) < f(x_1) < f(b)$. Sia per assurdo

$$f(x_1) < f(a) < f(b)\,.$$

Il teorema dei valori intermedi applicato a $[x_1, b]$ implica che esiste $d \in (x_1, b)$ tale che $f(d) = f(a)$. Ciò non può darsi perché la funzione è iniettiva. Dunque,

$$f(a) < f(x_1)$$

e procedendo in modo analogo si vede anche che

$$f(x_1) < f(b)\,.$$

Sia ora $x_2 \in (x_1, b]$. Sull'intervallo $[x_1, b]$ si può lavorare come si è fatto prima sull'intervallo $[a, b]$ e si trova

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b)\,.$$

In definitiva, **qualsiasi** coppia di punti x_1, x_2 di $[a, b]$ tali che $x_1 < x_2$ verifica anche $f(x_1) < f(x_2)$. E quindi la funzione è **crescente** su $[a, b]$. Il caso $f(a) > f(b)$ si tratta in modo analogo. ■

4.5 Funzioni derivabili su intervalli

I due teoremi principali che riguardano le funzioni derivabili in tutti i punti di un intervallo sono il $\boxed{\textit{Teorema di Rolle}}$ e il $\boxed{\textit{Teorema di Lagrange}}$

Teorema 118 (Teorema di Rolle) *Sia $f(x)$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *il suo dominio è un intervallo $[a, b]$* limitato e chiuso*;*
- *è continua nei punti dell'intervallo* chiuso *$[a, b]$;*
- *è derivabile nei punti dell'intervallo* aperto *(a, b);*
- *vale $f(a) = f(b)$.*

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim. Se la funzione è costante, la sua derivata è nulla in ogni punto e quindi un qualsiasi punto di (a, b) può scegliersi come punto c. Sia $f(x)$ non costante. La funzione è continua su $[a, b]$, limitato e chiuso, e quindi per il Teorema di Weierstrass ammette un punto di minimo x_0 e un punto di massimo x_1 e vale

$$f(x_0) \neq f(x_1)\,,$$

perché la funzione non è costante. Dunque non può essere che x_0 ed x_1 siano gli estremi a e b dell'intervallo, perché in tali punti la funzione prende lo stesso valore. Quindi almeno uno dei due punti x_0 oppure x_1 è interno all'intervallo: si tratta di un punto c di estremo, interno all'intervallo, e in cui la funzione è derivabile. In tale punto la derivata è nulla per il Teorema di Fermat. ■

Esempio 119 Osserviamo che le ipotesi del Teorema di Rolle non possono essere eliminate, come provano gli esempi seguenti:

- sia $f(x)$ definita su $[0, 1] \cup [2, 3]$, e sia $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ ed $f(x) = 3 - x$ per $x \in [2, 3]$ (si faccia il grafico di questa funzione). La funzione è continua sul suo dominio e derivabile nei punti interni al suo dominio. Inoltre prende lo stesso valore nell'estremo sinistro e nell'estremo destro del dominio, *che non è un intervallo*. La derivata di $f(x)$ non si annulla.
- la funzione
$$f(x) = x \text{ per } 0 \leq x < 1,\ f(1) = 0$$
non è continua su $[0, 1]$ ma verifica le altre ipotesi del Teorema di Rolle. La sua derivata non si annulla.
- la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile su $(-1, 1)$ ma verifica le altre ipotesi del Teorema di Rolle su $[-1, 1]$. In nessuno dei punti in cui esiste, la derivata prima si annulla.
- la funzione $f(x) = x$, definita su $[-1, 1]$, verifica le prime due ipotesi del Teorema di Rolle, ma non la terza. La sua derivata prima non si annulla. ■

Se si rimuove l'ultima ipotesi del Teorema di Rolle si trova:

Teorema 120 (Teorema di Lagrange) *La funzione $f(x)$ verifichi le seguenti ipotesi:*

- *è definita su un intervallo* limitato e chiuso $[a, b]$*;*

- *è continua nei punti di* $[a, b]$*;*
- *è derivabile nei punti di* (a, b)*.*

Allora, esiste $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Dim. Si noti che

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

è l'equazione della corda che congiunge i punti del grafico

$$(a, f(a))\,, \qquad (b, f(b))\,.$$

Dunque, la funzione

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right\}$$

verifica le tre ipotesi del Teorema di Rolle. Dunque, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$g'(c) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \quad \blacksquare$$

Ricordando che $f'(c)$ è la pendenza della tangente al grafico della funzione in $(c, f(c))$ si vede il significato geometrico del Teorema di Lagrange: **esiste un punto del grafico in cui la tangente al grafico stesso è parallela alla corda congiungente i suoi estremi.** Il punto c che figura nel Teorema di Lagrange si chiama $\boxed{\textit{punto di Lagrange}}$ per $f(x)$ su (a, b). Il teorema asserisce l'esistenza, sotto le opportune ipotesi, del punto di Lagrange ma non l'unicità: potrebbero esistere infiniti punti di Lagrange per $f(x)$ sull'intervallo (a, b).

Osservazione 121 Va osservato che:

- il teorema di Rolle implica il Teorema di Lagrange che, a sua volta, si riduce al Teorema di Rolle se vale $f(a) = f(b)$. Ossia, i due teoremi sono equivalenti. Usa tenerli distinti solo per chiarezza di esposizione;
- come nel caso del Teorema di Rolle, nessuna delle ipotesi del Teorema di Lagrange si può rimuovere.

- se la funzione è derivabile su (a,b), allora le ipotesi del Teorema di Lagrange valgono su ogni sottointervallo $[x_1,x_2]$ di (a,b), e anzi vale di più: le ipotesi valgono in $[x_1,x_2]$ se $f(x)$ è derivabile su (a,b), anche se non è continua negli estremi. Quindi: *sia $f(x)$ derivabile su (a,b). Per ogni coppia di punti x_1, x_2 di (a,b) esiste c tale che*

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,. \tag{4.10}$$

  Il punto c dipende sia da x_1 che da x_2.

- Applicando il teorema di Rolle alla funzione $f(x)-g(x)$ si può anche provare la seguente generalizzazione del teorema di Lagrange:

  Teorema 122 *se le due funzioni sono continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b) e se inoltre*

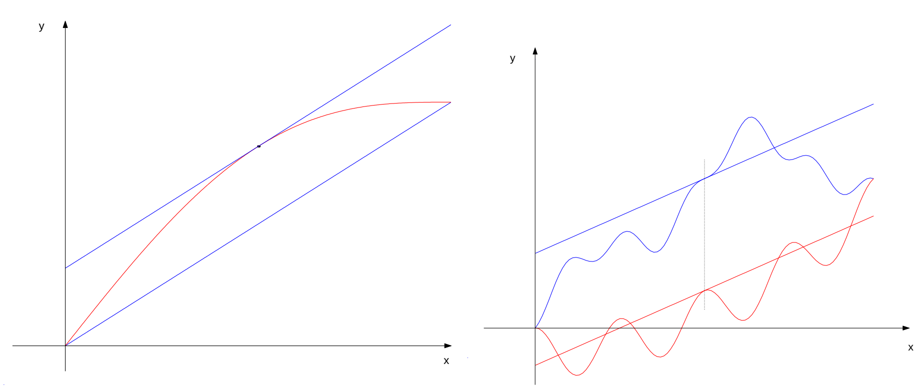
$$f(a) = g(a)\,, \qquad f(b) = g(b)$$

  allora esiste $c \in (a,b)$ con questa proprietà: le tangenti ai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente nei punti $(c,f(c))$ e $(c,g(c))$ (con la medesima ascissa c) sono parallele. Ossia, in tale punto si ha

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

  Si veda la figura 4.2.

Figura 4.2: Il teorema di Lagrange, a sinistra, e la sua generalizzazione, a destra



La formula (4.10) si chiama $\boxed{\textit{seconda formula degli incrementi finiti}}$ o anche $\boxed{\textit{formula della media}}$ La formula della media si scrive anche

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad \text{ossia} \qquad f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)\,. \tag{4.11}$$

4.5.1 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Vediamo due conseguenze importanti del Teorema di Lagrange.

Conseguenza 1) Sia $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f'(x) = 0$ in ogni punto dell'intervallo (a, b), allora $f(x)$ è costante su $[a, b]$. Infatti, si fissi un punto $x_0 \in (a, b)$. Facciamo vedere che in ogni altro punto vale

$$f(x) = f(x_0)\,.$$

Per questo, basta notare che la (4.11) implica l'esistenza di c tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)\,.$$

L'asserto segue perché $f'(c) = 0$. Di conseguenza:

Lemma 123 *Siano $F(x)$ e $G(x)$ definite sul medesimo intervallo (a, b) e derivabili in ciascun punto di (a, b). Se per ogni $x \in (a, b)$ si ha*

$$F'(x) = G'(x)$$

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c\,.$$

Dim. Infatti, la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla su (a, b) e quindi è costante,

$$F(x) - G(x) \equiv c\,. \quad \blacksquare$$

Se $F(x) = G(x) + c$ con c costante, si dice che "le due funzioni differiscono per una costante".

Osservazione 124 L'ipotesi che il dominio delle funzioni sia un **intervallo** è essenziale. Per esempio, si considerino le due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ definite su $(-2, 0) \cup (0, 2)$ con $F(x) \equiv 0$ e invece $G(x) = \operatorname{sgn} x$. Ambedue le funzioni hanno derivata nulla in tutti i punti del loro dominio, ma la loro differenza non è costante. Ciò è conseguenza del fatto che i teoremi di Rolle e di Lagrange valgono solo quando il dominio della funzione *è un intervallo.* $\blacksquare$

Conseguenza 2) Se $f(x)$ è derivabile su (a, b) e se $f'(x) \geq 0$, allora $f(x)$ è **crescente** su (a, b); se $f(x)$ è derivabile su (a, b) e se $f'(x) \leq 0$, allora $f(x)$ è **decrescente** su (a, b). Sia $f'(x) \geq 0$ su (a, b). Si scelgano x_1 ed x_2 arbitrari in (a, b). La (4.10) mostra che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)\,.$$

Il punto c è un opportuno punto, che non è noto; ma comunque $f'(c) \geq 0$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0\,.$$

Poiché ciò vale per **ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 in (a, b), segue che la funzione è crescente. In modo analogo si tratta il caso $f'(x) \leq 0$. Riassumiamo quanto abbiamo detto nel primo enunciato del teorema seguente:

Teorema 125 *vale:*

- *se $f(x)$ è derivabile su (a, b) con derivata* positiva, *la funzione è* crescente *su (a, b); se la derivata è* negativa *la funzione è* decrescente *su (a, b);*
- *se $f(x)$ è:*
  - *continua su (a, b)*
  - *derivabile su (a, x_0) con derivata positiva (oppure: negativa)*
  - *derivabile su (x_0, b) con derivata negativa (oppure: positiva)*

  la funzione ha punto di massimo (oppure: minimo) in x_0.

Dim. La prima affermazione è già stata provata. Proviamo la seconda. La funzione è crescente in (a, x_0) ed essendo continua in x_0 si ha

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x < x_0\,.$$

La funzione è decrescente in (x_0, b) ed essendo continua in x_0 si ha ancora

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x > x_0\,.$$

In definitiva, $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$, ossia x_0 è punto di massimo. In modo analogo si tratta il caso del minimo. ■

4.6 Le primitive

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite su un medesimo intervallo (a,b). La funzione $F(x)$ si dice $\boxed{\textit{primitiva}}$ di $f(x)$ su (a,b) se **è derivabile in ogni** $x \in (a,b)$ **e vale**

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)\,.$$

Dunque, **una primitiva è sempre una funzione continua.** Fatto importante: mentre la derivata, se esiste, è unica, la primitiva, se esiste, non è mai unica. Infatti, se $c \in \mathbb{R}$, per ogni $x_0 \in (a,b)$ vale:

$$D_{x_0}\left(F(x) + c\right) = F'(x_0)\,.$$

Dunque, $F(x)$ ed $F(x)+c$ sono primitive della medesima funzione. Vale anche il viceversa:

Teorema 126 *Siano $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ due primitive della funzione $f(x)$ sul medesimo intervallo (a,b). Esse "differiscono per una costante", ossia esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F_1(x) = F_2(x) + c\,.$$

Dim. Si veda il Lemma 123. ■

Di conseguenza:

Corollario 127 *Supponiamo che $f(x)$ ammetta primitive su (a,b). Esiste un'unica primitiva $F(x)$ che si annulla in un fissato $x_0 \in (a,b)$.*

Dim. Sia infatti $F_1(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$ su (a,b). La primitiva che si annulla in x_0 è

$$F(x) = F_1(x) - F_1(x_0)\,. \quad ■$$

L'insieme di tutte le primitive della funzione $f(x)$ su un intervallo (a,b) si indica col simbolo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

e si chiama l'$\boxed{\textit{integrale indefinito}}$ di $f(x)$. Si noti che:

- l'intervallo (a,b) non compare esplicitamente nel simbolo ma viene sottinteso;

- il colore rosso è stato usato per sottolineare il fatto che
$$\int \quad \mathrm{d}x$$
è un unico simbolo, e non va separato.

Noi useremo il simbolo
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$
per intendere quella particolare primitiva che si annulla in x_0.

VARIABILE MUTA DI INTEGRAZIONE

Il simbolo
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$
indica un insieme di funzioni definite su un (sottinteso) intervallo (a, b). La lettera che si usa per indicare la variabile indipendente non ha alcuna influenza sul concetto di primitiva. Per questo potremmo cambiarla arbitrariamente scrivendo per esempio
$$F(x) + c = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(s)\,\mathrm{d}s = \int f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
ecc. Analogamente, per indicare la primitiva che si annulla in x_0 potremo scrivere
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$
Per questa ragione la lettera che indica la "variabile" sotto il segno di primitiva si chiama *variabile muta d'integrazione*

Attenzione che il simbolo $\int \quad \mathrm{d}x$ e il termine "integrale" hanno vari significati concettualmente diversi. Il significato di "primitiva" è solo uno di essi.

Sebbene questo non sia esplicitamente richiesto dalla definizione di primitiva, nella maggior parte dei casi le primitive di $f(x)$ su (a, b) sono definite e continue sull'intervallo $[a, b]$. In tal caso,
$$\int_{a}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

indicherà quella particolare primitiva che si annulla in a. Se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva (continua in a) di $f(x)$, sarà

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

Infine, notiamo questo teorema, che proveremo in seguito (si veda il Teorema 195):

Teorema 128 *Ogni funzione continua su un intervallo ammette ivi primitive.*

Si noti però che esistono funzioni continue la cui primitiva non si può esprimere in modo elementare. Per esempio, non è possibile rappresentare le primitive di e^{x^2} oppure di $\sin x^2$ mediante funzioni "elementari". Se una funzione definita su (a,b) non è continua, essa può ammettere primitive o meno. E' importante conoscere il risultato[9]:

Teorema 129 *Se $f(x)$ è definita su (a,b) ed ha un salto in $x_0 \in (a,b)$ allora essa* non *ammette primitive.*

Per esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non ammette primitive in nessun intorno di 0.

Regole di calcolo per le primitive

NOTAZIONE

In questo paragrafo, useremo lettere maiuscole e le corrispondenti lettere minuscole, F ed f, per indicare funzioni. Intenderemo che tra queste coppie di funzioni valga

$$f(x) = F'(x)\,.$$

Le primitive si calcolano leggendo alla rovescia la tabella delle derivate e usando le regole di calcolo che ora vediamo e che sono conseguenza della **linearità della derivata,** della **regola di Leibniz** e della **regola di derivazione della funzione composta.** Nel calcolo delle primitive, è utile ricordare anche le due formule seguenti, viste all'esempio 98:

[9] si veda il Corollario 145 per la dimostrazione.

$D\log\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| = \frac{1}{\sin x}$	$D\log\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| = \frac{1}{\cos x}$

Esaminiamo ora come si usano le tre regole di derivazione per il calcolo delle primitive.

Conseguenza della linearità della derivata è la $\boxed{\textit{linearità dell'integrale}}$ ossia

$$c\int f(x)\,\mathrm{d}x + d\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int (cf(x)+dg(x))\,\mathrm{d}x$$

(c e d sono numeri).

Conseguenza della regola di Leibniz è una regola che si chiama $\boxed{\textit{integrazione per parti}}$ Siano $F(x)$ e $G(x)$ primitive rispettivamente di $f(x)$ e $g(x)$ su (a,b). Allora vale

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Questa regola si ricorda facilemte intendendo che "d" indichi la derivata, cosìche dx indica 1. Con questa convenzione, la regola di integrazione per parti si scrive

$$\int F(x)\,\mathrm{d}G(x) = F(x)G(x) - \int G(x)\,\mathrm{d}F(x)\,.$$

La regola di integrazione per parti è utile quando è dato da calcolare l'integrale di sinistra, che non si sa calcolare direttamente, mentre invece si riesce a calcolare quello di destra.

Esempio 130 Si vogliono le primitive di xe^x. Una primitiva del fattore e^x è nota (ed è e^x stessa). Quindi si può procedere cosí:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c\,.$$

L'uso "sbagliato" della regola di integrazione per parti conduce in genere ad un integrale più complicato di quello di partenza, ma questo non sempre è un male.

Esempio 131 La tabella delle derivate non aiuta a calcolare le primitive di

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}\,.$$

Si conosce però una primitiva di $1/(1+x^2)$:

$$\arctan x + c = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Usiamo la formula di integrazione per parti trovando:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{1+x^2} - \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} = x\frac{1}{1+x^2} + \int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\frac{1}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Si trova quindi

$$2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x + c\,.$$

Conseguenza della regola di derivazione della funzione composta è la regola di $\boxed{\textit{integrazione per sostituzione}}$ Sia $F(y)$ una primitiva di $f(y)$ su (a,b) e sia $G(x)$ definita su (α,β). Allora vale

$$\int f(G(x))G'(x)\,\mathrm{d}x = F(G(x)) + c\,.$$

Anche questa regola si ricorda meglio se si integrpreta "d" come segno di derivata perché cosìessa prende la forma

$$\int f(G(x))dG(x) = F(G(x)) + c$$

e si può interpretare come segue: alla $G(x)$ si sostituisce la "variabile" u e si calcola

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c\,.$$

Quindi ad u si sostituisce nuovamente $G(x)$. La semplice formulazione non inganni. Questa è la più difficile delle regole da usare e presenta due casi distinti.

Caso 1) L'integrando ha forma $f(G(x))g(x)$ con $g(x) = G'(x)$.

In questo caso, si calcola $F(y)$ e al posto di y si sostituisce $G(x)$.

Esempio 132 Si voglia calcolare

$$\int (\sin x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x \,.$$

Si scriva quest'integrale come

$$\int (\sin x)^2 \ \mathrm{d} \sin x \,.$$

Si sostituisca $\sin x = u$ e si noti che

$$\int u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + c \,.$$

Si sostituisca ora u con $\sin x$. Si ottiene

$$\int (\sin x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \sin^3 x + c \,. \quad \blacksquare$$

Caso 2) La sostituzione "va inventata".

In questo caso è data da calcolare la primitiva di una funzione $f(x)$ e l'abitudine o la fantasia porta ad immaginare una funzione $G(x)$ tale che sia facile il calcolo delle primitive di $f(G(x))G'(x)$. Le formule di trigonometria, circolare o iperbolica, spesso suggeriscono la sostituzione.

Esempio 133 Si vogliono le primitive della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \,.$$

Ovviamente $x \in (-1, 1)$. Non è affatto evidente come si possano calcolare queste primitive. Però si nota che

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

è la metà superiore della circonferenza trigonometrica e, come si è notato al paragrafo 2.5, ciascun punto della circonferenza trigonometrica si rappresenta come $(\cos \theta, \sin \theta)$. La rappresentazione è unica se si sceglie $\theta \in [0, 2\pi)$ e si ha la semicirconferenza superiore se si sceglie $\theta \in (0, \pi)$. Ciò suggerisce la trasformazione

$$x = G(\theta) = \cos \theta \Longrightarrow g(\theta) = G'(\theta) = -\sin \theta \,.$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \cos\theta \\ \mathrm{d}x &\longrightarrow \mathrm{d}\cos\theta = -\sin\theta\ \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

si trova l'integrale

$$-\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Ricordando la formula di bisezione,

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left[1-\cos 2\theta\right]\,.$$

Quindi

$$-\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c\,, \qquad \theta\in(0,\pi)\,.$$

Il calcolo però non è concluso. Questa è la primitiva $F(G(\theta))$ di $f(G(\theta))G'(\theta)$ mentre noi vogliamo $F(x)$. La funzione $\cos\theta$ su $[0,\pi]$ è invertibile: la sua funzione inversa è $\arccos x$. Al posto di θ si sostituisce ora $\arccos x$ e si trova

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{4}\sin 2\left(\arccos x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\sin\left(\arccos x\right)\cos\left(\arccos x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + x\sqrt{1-\left(\cos\left(\arccos x\right)\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Usando la formula

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

si calcolino le primitive di

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}\,.$$

Primitive di funzioni razionali

Dalla tabella delle derivate si vede che

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,.$$

Combinando quest'osservazione con la linearità dell'integrale, segue che **ogni polinomio ammette primitive, e queste sono polinomi.** La tabella delle derivate mostra che

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a| + c\,, \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c\,, \quad \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + c\,.$$

Dunque, integrando funzioni razionali si possono trovare funzioni "più complicate"; si possono trovare logaritmi ed arcotangenti. Proviamo ora che funzioni razionali, logaritmo ed arcotangente bastano ad integrare tutte le funzioni razionali.

Osservazione sulla notazione

Le primitive devono essere definite su intervalli. Dunque, $\log|x-a|$ ed $1/x$ **non** sono funzioni primitive. Sono funzioni primitive le funzioni

$$\begin{array}{llll} \log(x-a) & x>a\,, & \log(a-x) & x<a\,, \\ \dfrac{1}{x} & x>0\,, & \dfrac{1}{x} & x<0\,. \end{array}$$

Per non appesantire la notazione, in genere si lascia al lettore di determinare l'intervallo su cui lavorare. Quest'osservazione, che sembra qui un po' capziosa, assumerà un **significato fisico importante** quando studieremo le equazioni differenziali.

Ricordiamo che come *funzione razionale* si intende il quoziente di due polinomi,

$$R(x) = \frac{p(x)}{d(x)}\,.$$

Se il grado di $p(x)$ è maggiore o uguale di quello del denominatore, si può dividere ottenendo

$$R(x) = \frac{p(x)}{d(x)} = p_0(x) + \frac{q(x)}{d(x)}$$

e il grado di $q(x)$ è minore di quello di $d(x)$. Dato che le primitive dei polinomi si sanno calcolare, basta calcolare le primitive di

$$\frac{q(x)}{d(x)}\,, \qquad \text{grado di } q < \text{grado di } d.$$

Il calcolo delle primitive ora si fa identificando i *poli* della funzione razionale; ossia i punti in cui si annulla il denominatore, che possono essere reali o complessi. I numeri complessi si studieranno in seguito, ma per i calcoli che ora andiamo a fare non ne abbiamo realmente bisogno. Il calcolo delle primitive si fa con i metodi illustrati negli esempi seguenti.

Poli reali semplici E' il caso in cui $d(x)$ ha grado n ed inoltre ha n radici distinte. Se ciò vale si dice che la funzione $f(x)$ ha n $\boxed{\textit{poli semplici}}$ In questo caso si procede come nell'esempio che segue:

$$r(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x-2)(x+3)} \,.$$

Si scrive $r(x)$ come somma:

$$r(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Riducendo allo stesso denominatore si trova che i tre numeri A, B, C devono verificare

$$\begin{aligned} & A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\ & = x^2(A+B+C) + x(A+3B-2C) + (-6A) \\ & = x^2 - 4x + 1 \,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Quindi, i valori di A, B, C si trovano risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -6A & = & 1 \\ A + 3B - 2C & = & -4 \\ A + B + C & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{da cui} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & -\frac{1}{6} \\ B & = & -\frac{3}{10} \\ C & = & \frac{22}{15} \,. \end{array} \right.$$

Noti i valori delle costanti A, B e C, il calcolo della primitiva è immediato. Questo metodo può usarsi tutte le volte che il denominatore ha tutte le radici reali e distinte.

> Risolvere questo sistema è alquanto fastidioso. Un metodo più semplice è il seguente: sostituendo $x = 0$ nei due membri di (4.12) si trova immediatamente
>
> $$-6A = 1 \qquad \text{e quindi } A = -1/6.$$
>
> Analogamente sostituendi $x = 2$ si trova $B = -3/10$ e sostituendo $x = -3$ si trova il valore di C.

Poli reali semplici o meno Se un polinomio $P(x)$ si fattorizza come

$$P(x) = (x - x_0)^r Q(x) \,, \qquad Q(x_0) \neq 0 \,,$$

si dice che x_0 è uno $\boxed{\textit{zero di molteplicità } r}$ di $P(x)$; e se $P(x)$ è il denominatore di una funzione razionale il cui numeratore non si annulla in x_0, si dice che x_0 è un $\boxed{\textit{polo di molteplicità } r}$ della funzione razionale. In questo caso si procede come nell'esempio seguente:

Esempio 134

$$r(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2(x+3)}\,.$$

Il polo semplice 3 si tratta come sopra: gli si fa corrispondere un'addendo

$$\frac{C}{x+3}\,.$$

Invece al polo doppio 2 si fa corrispondere l'addendo

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2}$$

Imponendo

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{Ax+B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}$$

Riducendo allo stesso denominatore si trova che i numeri A, B e C devono verificare l'identità

$$x^2 - 4x + 1 = (Ax+B)(x+3) + C(x-2)^2 \tag{4.13}$$

e quindi

$$(A+C)x^2 + (3A+B-4C)x + 3B + 4C = x^2 - 4x + 1\,.$$

Usando il principio di identità dei polinomi si trova il sistema

$$A + C = 1\,, \quad 3A + B - 4C = -4\,, \quad 3B + 4C = 1$$

da cui

$$A = \frac{3}{25}\,, \qquad B = -\frac{21}{25}\,, \qquad C = \frac{22}{25}\,.$$

A questo punto si nota che

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2) + (2A+B)}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{2A+B}{(x-2)^2}\,.$$

La primitiva di questi addendi si trova direttamente dalla tavola delle derivate.

Anche in questo caso, può essere più semplice fare opportune sostituzioni per ricavare immediatamente almeno una parte dei coefficienti. Per esempio sostituendo $x = -3$ in (4.13) si ottiene immediatamente $C = 22/25$ e quindi

$$(Ax+B)(x+3) = x^2 - 4x + 1 - \frac{22}{25}(x-2)^2\,.$$

Sostituendo $x = 0$ si ottiene subito, $B = -21/25$. Tenendo conto di ciò e sostituendo $x = 2$ si trova $A = 3/25$.

In generale, ad ogni polo x_0 di molteplicità n si fa corrispondere un addendo

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}\,.\quad \text{Il grado di } p(x) \text{ è } n-1. \tag{4.14}$$

Le primitive di questi addendi possono calcolarsi perché ciascuno di essi a sua volta può decomporsi come segue:

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-x_0)^n}\,. \tag{4.15}$$

Talvolta però, specialmente quando $n=2$ oppure $n=3$, opportuni artifici, come quelli visti all'Esempio 134, conducono al calcolo delle primitive di (4.14) senza passare attraverso l'ulteriore decomposizione (4.15).

Osservazione 135 Notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}&=\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-x_0)^n}\\ &=\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{-A_2}{x-x_0}+\cdots+\frac{A_n}{(1-n)}\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}\right\}.\end{aligned}$$

Dunque, il secondo membro di (4.15) si può anche scrivere come

$$\frac{A_1}{x-x_0}++\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n-1}}\,.\quad \text{Il grado di } r(x) \text{ è } n-2.$$

Quindi se per esempio ci sono due poli reali x_0 ed x_1 di molteplicità n_1 ed n_2 (maggiore di 1) a tali poli si possono associare gli addendi

$$\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{x-x_1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n_0-1}(x-x_1)^{n_1-1}}\,.\quad \text{Il grado di } r(x) \text{ è } n_0+n_1-3$$

ossia $r(x)$ ha grado minore di una unità del grado del denominatore. I coefficienti di $r(x)$ si determinano facendo la derivata del quoziente, riducendo i due membri al medesimo denominatore e imponendo l'uguaglianza dei polinomi a numeratore. Una volta determinato $r(x)$, la primitive cercate sono

$$\log|x-x_0|+\log|x-x_1|+\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n_0-1}(x-x_1)^{n_1-1}}+c\,.\quad \blacksquare$$

Il caso generale In generale, il denominatore avà anche zeri non reali. Noi ci limitiamo al caso in cui gli zeri **non reali** sono semplici[10]. Il prototipo è il caso
$$\frac{1}{x^2+bx+c}\,,\qquad c-\frac{1}{4}b^2=\gamma^2>0\,.$$
In questo caso, si può "completare il quadrato", scrivendo
$$\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\gamma^2}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma}\right)^2}$$
le cui primitive sono
$$\frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x}{\gamma}+\frac{b}{2\gamma}\right)+c\,.$$
E ora, nel caso in cui ci siano anche poli reali, semplici o meno, si decompone la funzione razionale in una somma di termini del tipo
$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}$$
se x_0 è radice reale del denominatore, di molteplicità n. Il polinomio $p(x)$ deve avere grado $n-1$. Le primitive di questi addendi si calcolano come abbiamo già visto. A ciascuno dei fattori x^2+bx+c del denominatore, con discriminante negativo, si fa corrispondere un addendo della forma
$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,.$$
La decomposizione appena descritta delle funzioni razionali si chiama $\boxed{\textit{decomposizione in fratti semplici}}$

Osservazione 136 Il metodo descritto all'Osservazione 135 si può anche usare quando il denominatore ha fattori $(x^2+bx+c)^k$, privi di zeri. In tal caso si isolano gli addendi $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ e al denominatore del termine di cui si calcola la derivata si aggiunge un fattore $(x^2+bx+c)^{k-1}$. Il grado del polinomio al numeratore (che è da determinare) va aumentato di $k-2$. ■

[10]Se ci sono zeri non reali e multipli, di molteplicità n, il denominatore avrà un fattore $(x^2+bx+c)^n$ a cui si fanno corrispondere addendi
$$\frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}\,,\quad 1\le k\le n\,.$$
Le primitive di tali addendi si trovanoiterando integrazioni per parti, come si è visto, quando $k=2$, all'Esempio 131.

4.6.1 Primitive generalizzate

Supponiamo che $F(x)$ sia **continua** su (a,b) e che valga

$$F'(x) = f(x)$$

in tutti i punti di (a,b), salvo un numero finito di essi. In tal caso si dice che $F(x)$ è una $\boxed{\textit{primitiva generalizzata}}$ di $f(x)$. Si noti che $F(x)$ potrebbe non essere derivabile in alcuni punti di (a,b) (in numero finito) e quindi la continuità va imposta esplicitamente. Le primitive generalizzate si calcolano facilmente procedendo come nell'esempio seguente.

Esempio 137 Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ \cos x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Le funzioni

$$F_1(x) = (1/3)x^3 + c\,, \qquad F_2(x) = \sin x + d$$

verificano rispettivamente

$$\begin{cases} F_1'(x) = f(x) & \text{se} \quad x < 0 \\ F_2'(x) = f(x) & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

La funzione $F(x) = F_1(x)$ per $x < 0$ ed $F_2(x) = F_2(x)$ per $x > 0$ **NON** è una primitiva di $f(x)$ perché non è definita in 0; e non lo è in generale nemmeno se si assegna ad essa un valore in 0 perché in generale non sarà continua. Però vale

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0-} F_1(x) = c \\ \lim_{x\to 0+} F_2(x) = d\,. \end{cases}$$

Si imponga allora **prima di tutto l'uguaglianza dei limiti** ossia in quest'esempio si imponga

$$c = d\,.$$

Quindi si estenda $F(x)$ per continuità anche nel punto 0 ossia, in quest'esempio si imponga

$$F(0) = c = d\,.$$

Si è trovata cosìuna primitiva generalizzata di $f(x)$. Dunque, l'insieme di tutte le primitive generalizzate di $f(x)$ è

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + c & \text{se} \quad x \le 0 \\ c + \sin x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Si noti che la $f(x)$ non era definita in $x = 0$, mentre $F(x)$ deve essere definita su un intervallo, e quindi anche in 0. Se si fosse assegnato

$$f(0) = 7\,,$$

o qualsiasi altro numero, niente sarebbe cambiato nella procedura descritta. Infatti, non si richiede né che $F(x)$ sia derivabile in 0 né, se derivabile, si richiede $F'(0) = f(0)$. Dunque, le funzioni

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + c & \text{se} \quad x \leq 0 \\ c + \sin x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

sono anche le primitive di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ f(x) = 7 & \text{se} \quad x = 0 \\ \cos x & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases} \quad \blacksquare$$

L'esempio precedente si adatta in generale e in particolare si potrebbe provare che **l'insieme delle primitive generalizzate, se non è vuoto, dipende da una (sola) costante arbitraria.**

4.7 Alcuni esercizi

1. **($\star$)** Il teorema dei valori intermedi asserisce che una funzione continua trasforma intervalli in intervalli. Si mostri che esistono funzioni non continue che hanno questa proprietà esaminando le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ a & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

   Si consideri separatamente il caso $|a| \leq 1$ ed il caso $|a| > 1$ e si noti che, in uno dei due casi, questa funzione, discontinua in 0, trasforma intervalli in intervalli.

2. Il teorema dei valori intermedi combinato col teorema di Weierstrass implica che una funzione continua definita su un intervallo chiuso lo trasforma in un intervallo chiuso. L'asserto analogo non vale per gli intervalli aperti: si costruisca un esempio di funzione continua su un intervallo aperto, la cui immagine è un intervallo chiuso.

3. ($\star$) Le funzioni monotone che trasformano intervalli in intervalli sono ovunque continue. Si spieghi la ragione e si mostri un esempio di funzione monotona definita su $\mathbb{R}$, con un unico punto di discontinuità e la cui immagine non contiene l'insieme $(-1,0)\cup(0,1)$ ma contiene il punto 0.

4. Sia $f(x)$ monotona su $[a,b]$. Mostrare che la funzione ha sia punti di massimo che di minimo assoluto.

5. ($\star$) Sia $f(x)$ crescente su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un suo punto di discontinuità. Si vuol sapere se è possibile che ambedue gli insiemi $f([a,x_0])$ ed $f([x_0,b])$ siano intervalli chiusi.

6. Sia $f(x)$ crescente su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un suo punto di discontinuità. Si vuol sapere se è possibile che l'insieme $f([a,x_0])$ sia un intervallo aperto.

7. ($\star$) Sia $f(x)$ monotona su $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che esista $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Mostrare che $f(x)$ è continua in x_0. Vale quest'asserto se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$?

8. per $x \in [0,1]$ sia $f(x) = (\,\mathrm{sgn}\,(M(x)))\, e^x$ (si ricordi che $M(x)$ indica la mantissa di x). Tracciare il grafico di $f(x)$, studiarne la monotonia e la continuità su $[0,1]$.

9. Sia $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e sia $g(x) = 3x$. Provare che se i grafici delle due funzioni si intersecano in due punti allora la tangente al grafico di $f(x)$ ha pendenza 3 in almeno un punto. Provare inoltre che esiste un intervallo I su cui $f(x)$ è crescente.

10. ($\star$) Usando il teorema di Rolle, si provi che se una funzione è di classe C^2 su (a,b) e se $f''(x)$ non si annulla allora ogni coppia di tangenti al grafico di $f(x)$ si interseca.

11. ($\star$) Su $x > 0$ vale $0 < \sin x < x$. Usare questa proprietà, il teorema di Rolle ed il teorema dei valori intermedi per provare che $\cos x > 1 - x^2/2$ sia per $x > 0$ che per $x < 0$.

12. Si è visto che
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{sett\,th}x = \frac{1}{1-x^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{sett\,cth}x = \frac{1}{1-x^2}\,.$$
Spiegare se è vero o meno che le due funzioni $\mathrm{sett\,th}x$ e $\mathrm{sett\,cth}x$ differiscono per una costante.

13. Le due funzioni $f(x) = \arcsin x$ e $g(x) = -\arccos x$ sono definite sul medesimo intervallo $[-1, 1]$ e su $(-1, 1)$ hanno la stessa derivata. Dunque differiscono per una costante. Trovare il valore della costante e illustrare questo fatto geometricamente a partire dai grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ (si confronti con l'esercizio 39 del Capitolo 1).

14. Sia
$$f(x) = \arctan x\,, \qquad g(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}\,.$$
Mostrare che $f'(x) = g'(x)$. Tracciare il grafico delle funzioni e notare che le due funzioni non differiscono per una costante. Spiegare.

15. Sia
$$f(x) = \arctan x\,, \qquad g(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}\,.$$
Notare che
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(f(x) + g(x)) = 0\,.$$
E' vero che $f(x) + g(x)$ è costante?

16. Si mostri, sia mediante le formule di trigonometria che mediante il calcolo delle derivate:
$$\operatorname{cotan} \frac{1}{2}x = \operatorname{cotan} x + \frac{1}{\sin x}\,.$$

17. Mostrare che
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$
è costante per $x > 0$ e per $x < 0$ e calcolarne i valori.

18. ($\star$) Si ricordi che
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)(\tan\beta)}\,.$$
Dire se si può applicare questa formula con
$$\alpha = \arctan x\,, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{x}$$
per calcolare il valore di $(\arctan x + \arctan(1/x))$. Usare il risultato trovato all'esercizio 17.

19. Rolle (1652-1719) enuncia il suo teorema nel suo libro *Traité d'algebre* del 1690, limitandosi a considerare "funzioni algebriche", ossia funzioni espresse mediante polinomi. Con linguaggio moderno, l'enunciato di Rolle è il seguente: *tra due zeri reali consecutivi della derivata di una funzione algebrica si trova al più uno zero della funzione stessa.* Si provi che questo enunciato è vero usando la formulazione moderna del Teorema di Rolle, ossia l'enunciato del Teorema 118.

20. Si calcolino le primitive

$$\int \frac{1}{\sqrt{m^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x$$

e si mostri che l'uguaglianza

$$\int \frac{1}{\sqrt{m^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{m} + c$$

non è corretta. Si trovi l'espressione giusta. In modo analogo si tratti

$$\int \sqrt{m^2 + x^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

21. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni dotate di primitive $F(x)$ e $G(x)$ su un intervallo (a, b). Sia $F(x_0) = G(x_0)$ e sia $f(x) \geq g(x)$ per $x > x_0$. Si deduca che vale la proprietà di *monotonia del calcolo delle primitive* $F(x) \geq G(x)$ per $x \geq x_0$.

22. Sia $f(x) \in C^1(a, b)$ e sia $|f'(x)| < K$ su $[a, b]$. Usando il Teorema di Lagrange, si mostri che per ogni coppia di punti x_1 ed x_2 in $[a, b]$ vale

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \, .$$

23. **(⋆)** Sia $F(x)$ primitiva su $[a, b]$ della funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ e valga $|f(x)| \leq K$. Siano $x(t)$ ed $y(t)$ funzioni continue su un intervallo $[\alpha, \beta]$, a valori in $[a, b]$. Mostrare che

$$\left| \int_\alpha^t [f(x(t)) - f(y(t))] \, \mathrm{d}t \right| \leq \left[K \max_{s \in [\alpha, t]} |x(s) - y(s)| \right] (t - a) \, .$$

Capitolo 5

Teoremi di l'Hospital e di Taylor

Ormai so che l'acqua scorre sempre verso il basso, se non quando è buio. So che questo accade perché lo stagno non si prosciuga mai, come naturalmente succederebbe se l'acqua non ritornasse in su. Diario di Eva, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

In questo capitolo si presentano i Teoremi di l'Hospital e la formula di Taylor e le loro conseguenze, concludendo lo studio sia locale che globale delle funzioni. Il Teorema di L'Hospital serve per il calcolo dei limiti quando si incontrano forme indeterminate di tipo fratto mentre la formula di Taylor estende la prima e la seconda formula degli incrementi finiti al caso in cui una funzione $f(x)$ ammette più derivate.

5.1 Teorema di l'Hospital

E' un teorema che è utile per il calcolo di limiti nel caso che si incontri una forma indeterminata di tipo fratto,

$$\frac{0}{0} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\infty}{\infty}\,,$$

nel calcolo di un limite per $x \to \alpha$ dove α può essere un numero oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Anzi, se $\alpha \in \mathbb{R}$ il Teorema di l'Hospital si può usare anche per il calcolo dei limiti direzionali $x \to \alpha+$ oppure $x \to \alpha-$. Illustriamolo nel caso del limite per $x \to \alpha-$ intendendo che se $\alpha = +\infty$ questo sarà il limite per $x \to +\infty$. Ricordiamo lo scopo: calcolare

$$\lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quando si incontra la forma indeterminata $0/0$ oppure ∞/∞. Le ipotesi sono le seguenti:

- per $x \to \alpha-$ ambedue le funzioni $|f(x)|$ e $|g(x)|$ tendono a 0 oppure a $+\infty$;
- ambedue le funzioni sono derivabili a sinistra di α. Niente si richiede alle funzioni per $x = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{R}$.
- esiste un intorno sinistro[1] di α su cui $g'(x)$ **non si annulla.**
- esiste
$$\lim_{x\to\alpha-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \tag{5.1}$$
ove β può essere un numero, può essere $+\infty$ oppure può essere $-\infty$.

Il teorema asserisce:

Teorema 138 (di $\boxed{\textit{l'Hospital}}$) *Se valgono le ipotesi enunciate sopra, esiste*

$$\lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e inoltre, con β dato da (5.1),

$$\lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta\,.$$

La dimostrazione, alquanto complessa, viene omessa.

Esempio 139 Illustriamo alcuni esempi ed alcuni problemi che possono incontrarsi nell'uso di questo teorema.

1. Consideriamo il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}\,.$$
Le funzioni a numeratore e denominatore verificano le ipotesi del Teorema di l'Hospital e inoltre (D indica l'operazione di derivazione)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(\log x)}{D(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

[1] ossia una semiretta $(r, +\infty)$ se $\alpha = +\infty$ oppure in intervallo $(\alpha - \epsilon, \alpha)$.

Quindi si ha anche
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0\,.$$
In modo analogo si provi che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

2. Consideriamo ora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}\,.$$
Proviamo a fare il quoziente delle derivate. Si trova
$$\frac{e^x}{2x}\,.$$
Dato che, grazie ad un preventivo uso del teorema di l'Hospital, questo limite si conosce, ed è $+\infty$, e le altre ipotesi del teorema valgono, si può concludere che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty\,.$$
Ossia, il teorema di l'Hospital si può applicare più volte in sequenza.

3. Non è detto che il Teorema di L'Hospital permetta sempre di calcolare il limite, nemmeno se le ipotesi sono soddisfatte. Per esempio, sia $f(x) = \sinh x$ e $g(x) = \cosh x$. E' immediato dalla definizione delle funzioni iperboliche che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1\,.$$
Tutte le ipotesi del teorema di l'Hospital valgono per questo quoziente, ma il teorema stesso non serve al calcolo del limite perché derivando numeratore e denominatore si trova alternativamente
$$\frac{\cosh x}{\sinh x}\,, \quad \frac{\sinh x}{\cosh x}\,, \quad \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \dots$$
Ossia, usando quante volte si voglia il teorema di l'Hospital si finisce sempre sulla medesima forma indeterminata. Un esempio simile è il calcolo del limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\,(\log x)^{\log x}\,.$$
Il quoziente delle derivate è
$$\frac{1}{x}\,(\log x)^{\log x} + \frac{\log\log x}{x}\,(\log x)^{\log x}$$

e quindi fa intervenire nuovamente proprio il quoziente di cui si intendeva calcolare il limite. Si noti che questo limite è stato calcolato per sostituzione all'Esempio *84*.

4. Può anche essere che il limite del quoziente delle funzioni esista, ma che non esista quello del quoziente delle derivate. Notando che

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| < 1$$

si vede che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\sin x} = 0\,.$$

Se si calcola il quoziente delle derivate si trova

$$\frac{2x\sin 1/x - \cos 1/x}{\cos x}\,,$$

privo di limite per $x \to 0$, nonostante che le altre condizioni del teorema di l'Hospital siano soddisfatte.

5. Se si usa il teorema di L'Hospital quando le ipotesi non sono soddisfatte, si possono trovare risultati sbagliati. Per esempio,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Le ipotesi del teorema di L'Hospital non sono soddisfatte da questo quoziente, che non conduce ad una forma indeterminata. Facendo il limite del quoziente delle derivate si trova

$$\lim_{x\to 0+}\frac{0}{1} = 0 \neq +\infty\,.$$

6. Il teorema di L'Hospital talvolta può applicarsi e conduce al risultato corretto, ma il calcolo fatto è fallace perché tautologico; ossia perché usa proprio l'informazione che si sta cercando. Per esempio, usando il teorema di L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1\,.$$

Sembra quindi di aver trovato un modo molto veloce per il calcolo del limite notevole. Ciò è però falso perché in questo calcolo si è usato $D\sin x = \cos x$, formula che si dimostra proprio a partire dal limite notevole di $(\sin x)/x$.

7. Infine, notiamo che col teorema di l'Hospital si possono anche calcolare certi limiti che apparentemente non sono nella forma di quoziente. Per esempio, si voglia studiare

$$\lim_{x\to 0} x \log x \,.$$

Scrivendo questo limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x}$$

si ha una forma indeterminata $(-\infty)/(+\infty)$ a cui il Teorema di l'Hospital può applicarsi. Il quoziente delle derivate è

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{1}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = 0 \,.$$

Di consequenza si deduce anche

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\log x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = 1 \,. \quad \blacksquare$$

Infine, osserviamo la seguente conseguenza del Teorema di l'Hospital. Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ e supponiamo che

$$f(x) = \mathrm{o}(x-a) \,.$$

Usiamo il Teorema di l'Hospital per calcolare

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{2(x-a)}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{2(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{o}(x-a)}{2(x-a)} = 0 \,.$$

Ciò mostra che

$$F(x)-F(a) = \mathrm{o}(x-a)^2 \,.$$

Più in generale,

Teorema 140 *Sia $F(x)$ primitiva di $f(x)$ sull'intervallo (a,b) e supponiamo che*

$$f(x) = \mathrm{o}\,(x-a)^n \,.$$

Allora,

$$F(x)-F(a) = \mathrm{o}(x-a)^{n+1} \,.$$

5.1.1 Calcolo di derivate direzionali

Un argomento analogo a quello usato nella dimostrazione del Teorema 140 dà anche un modo molto utile che può usarsi per il calcolo di derivate direzionali. Il problema è questo: talvolta si può provare che una funzione è derivabile su (a, x_0) e su (x_0, b) e usando le regole di derivazione se ne calcola facilmente la derivata. E' invece difficile vedere se esistono le derivate direzionali in x_0. Una condizione **sufficiente** per l'esistenza di $f'(x_0)$ è la seguente:

Teorema 141 *Sia* $f(x)$ **continua in** x_0 *e inoltre* **derivabile in** (x_0, b)**.** *Se esiste il limite direzionale* $f'(x_0+)$*, ossia se siste*

$$\lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

allora esiste anche la derivata direzionale $f'_+(x_0)$ *e inoltre si ha l'uguaglianza*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = f'(x_0+)\,.$$

<u>Dim</u>. Per definizione,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Il limite è una forma indeterminata $0/0$, **perché la funzione è continua in** x_0**.** Per il calcolo di questo limite si può usare il teorema di l'Hospital,

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

ovviamente se l'ultimo limite scritto esiste. ■

Asserto analogo vale per la derivata sinistra:

Teorema 142 *Sia* $f(x)$ **continua in** x_0 *e inoltre* **derivabile in** (a, x_0)**.** *Se esiste*

$$\lim_{x \to x_0-} f'(x)$$

allora esiste $f'_-(x_0)$ *e inoltre*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f'(x) = f'(x_0-)\,.$$

E quindi:

Teorema 143 *Se* $f(x)$ *è*

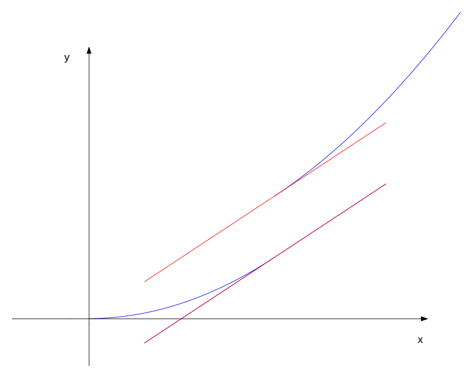
- *derivabile in* (a, x_0)
- *derivabile in* (x_0, b)
- *continua in* x_0
- *esiste* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$

allora la funzione $f(x)$ *è derivabile in* x_0 *e vale*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) \, .$$

Osservazione 144 L'ipotesi che $f(x)$ sia continua in x_0 è essenziale nel Teorema 143. Se non vale, le tangenti nei punti $(x, f(x))$ tendono a diventare parallele quando $x \to x_0$, senza sovrapporsi per $x = x_0$, si veda la figura *5.1.* ■

Figura 5.1:



Segue dal Teorema 143:

Corollario 145 *Se* $f'(x)$ *è definita su* (a, b) *e discontinua in* $x_0 \in (a, b)$ *allora la discontinuità è di seconda specie.*

Dim. Ricordiamo che $f'(x)$ ha discontinuità eliminabile oppure di prima specie in $x_0 \in (a, b)$ quando esistono ambedue i limiti direzionali $\lim_{x \to x_0 -} f'(x)$ e $\lim_{x \to x_0 +} f'(x)$, ed uno almeno è diverso da $f'(x_0)$. Per ipotesi, $f'(x_0)$ esiste e quindi $f(x)$ è continua in x_0. Il teorema precedente garantisce che i due limiti direzionali, se esistono, valgono $f'(x_0)$; ossia x_0 non può essere né punto di salto né discontinuità eliminabile di $f'(x)$. ■

Questo risultato permette in particolare di asserire che **la funzione** $\mathrm{sgn}(x)$ **non è una funzione derivata in nessun intorno di** 0**, e quindi non ammette primitive.** Esistono però funzioni ovunque derivabili, la cui derivata ammette discontinuità di seconda specie. Un esempio è la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, ed $f(0) = 0$.

5.2 La formula di Taylor

La formula di Taylor è un'estensione della prima o della seconda formula degli incrementi finiti. Vediamo separatamente i due casi.

5.2.1 La formula di Taylor con resto in forma di Peano

La formula di Taylor (con resto in forma di Peano) è un'estensione della prima formula degli incrementi finiti a funzioni che **in un punto** x_0 **hanno più di una derivata.** Notiamo che:

- il punto x_0 è indicato in colore, x_0, per sottolineare che è considerato fissato, mentre la variabile si indica con x;
- se una funzione ha n derivate in x_0 allora ha $n-1$ derivate in un intorno di x_0.

Supponiamo che in x_0 esista la derivata seconda. Allora, si può scrivere la prima formula degli incrementi finiti in x_0 per la funzione $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)\,. \tag{5.2}$$

Per definizione, $f'(x)$ ammette primitive e $x \to (x - x_0)f''(x_0)$ ammette primitive. Dunque anche $\mathrm{o}(x - x_0)$ ammette primitive. Le primitive che si annullano in x_0 di $f'(x)$, di $f'(x_0)$ e di $(x - x_0)f''(x_0)$ (funzioni della variabile x) sono rispettivamente

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0)\,,\\ f'(x_0)(x - x_0)\,,\\ \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2\,. \end{aligned}$$

Come si è notato, da (5.2) si vede che anche $\mathrm{o}(x - x_0)$ ammette primitive e, per il Teorema 140,

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{o}(s - x_0)\,\mathrm{d}s = \mathrm{o}(x - x_0)^2\,.$$

Uguagliando le primitive che si annullano in x_0 dei due membri di (5.2) si trova

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ \mathrm{o}(x - x_0)^2 \,.$$

Quest'argomento si può ripetere se ci sono derivate di ordine successivo. Per esempio, se c'è la derivata terza in x_0, si può scrivere la prima formula degli incrementi finiti per $f''(x)$,

$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + \ \mathrm{o}(x - x_0) \,.$$

Prendendo due volte le primitive dei due membri che si annullano in x_0 si trova

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ \mathrm{o}(x - x_0)^3 \,.$$

In generale, se $f(x)$ ammette n derivate in x_0, si trova[2]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ \mathrm{o}(x - x_0)^n \,.$$

Questa formula si chiama $\boxed{\textit{formula di Taylor}}$ con resto in $\boxed{\textit{forma di Peano}}$ e, più precisamente:

- il punto x_0 si chiama il $\boxed{\textit{centro}}$ della formula di Taylor;
- il polinomio, della variabile x,

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  si chiama il $\boxed{\textit{polinomio di Taylor}}$ di ordine n di $f(x)$, di centro x_0;
- $\mathrm{o}(x - x_0)^n$ si chiama il $\boxed{\textit{resto in forma di Peano}}$
- E' particolarmente importante il caso in cui $x_0 = 0$:

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ \mathrm{o}(x)^n \,.$$

  Questa formula si chiama $\boxed{\textit{formula di MacLaurin}}$ Ovviamente, essa è solamente un caso particolare della formula di Taylor. Per esercizio, si mostri che le formule degli infinitesimi fondamentali nella tavola 2.7 sono particolari formule di MacLaurin.

[2] ricordiamo che $f^{(k)}(x_0)$ indica la derivata k-ma in x_0 e che $f^{(0)}(x_0)$ indica $f(x_0)$.

Osservazione 146 Sia $f(x)$ una funzione dotata di derivata n-mma in x_0 e sia $P_n(x)$ il suo polinomio di Taylor di grado n e centro x_0. Esso verifica

$$f(x) - P_n(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^n \qquad \text{per } x \to x_0 \,.$$

Si potrebbe provare che nessun altro polinomio di grado n in $(x-x_0)$ ha questa proprietà. ■

5.2.2 La formula di Taylor con resto in forma di Lagrange

La formula di Taylor (con resto in forma di Lagrange) è un'estensione della seconda formula degli incrementi finiti a funzioni che **hanno più di una derivata in un intorno di x_0.** Limitiamoci ad enunciarla. Sia $f(x)$ definita su (a, b) ed ivi dotata di n derivate. Sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $f^{(n+1)}(x)$ esista in (x_0, b). Allora **esiste** $c \in (x_0, b)$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \,.$$

Analogo risultato vale, con $c \in (a, x_0)$ se $f^{(n+1)}(x)$ esiste in (a, x_0). L'errore

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$$

si chiama $\boxed{\textit{resto in forma di Lagrange}}$

5.2.3 Polinomio di McLaurin e parità di una funzione

Ricordiamo che una funzione $f(x)$ dispari e definita in $x_0 = 0$ è ivi nulla. Quest'osservazione è stata usata al paragrafo 3.5 per provare che le derivate di ordine **dispari** di una funzione **pari** sono nulle in $x_0 = 0$; le derivate di ordine **pari** di una funzione **dispari** sono nulle in $x_0 = 0$ (si veda il Teorema 102). Possiamo quindi enunciare:

Teorema 147 *Sia $p(x)$ polinomio di McLaurin di una funzione $f(x)$. Allora:*

- *se la funzione è pari, le potenze x^n con n dispari hanno coefficiente nullo;*
- *se la funzione è dispari, le potenze x^n con n pari hanno coefficiente nullo.*

Naturalmente, non è vietato che anche i coefficienti di alcune potenze pari siano nulli quando $f(x)$ è pari (ed analoga osservazione quando $f(x)$ è dispari).

5.3 Estremi e convessità

Al Teorema 125 abbiamo visto che i punti di massimo o di minimo di una funzione *continua su un intervallo* possono individuarsi studiando la monotonia della funzione *a destra e a sinistra* del punto. Qui mostriamo che si possono anche studiare esaminando le derivate successive *nel punto stesso.* Inoltre, mostreremo come studiare la convessità di una funzione.

5.3.1 Derivate successive ed estremi

Sia $f(x)$ *derivabile due volte* in x_0. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora certamente x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo (si ricordi il Teorema di Fermat). Supponiamo quindi $f'(x_0) = 0$. Si ha:

Teorema 148 *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora il punto x_0 è punto di minimo; Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ il punto x_0 è punto di massimo per $f(x)$.*

Dim. Scriviamo la formula di Taylor di centro x_0 arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano. Ricordando che $f'(x_0) = 0$ si vede che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathrm{o}(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2 \left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \mathrm{o}(1) \right] .$$

Per $x \to x_0$, la funzione $\frac{1}{2} f''(x_0) + \mathrm{o}(1)$ tende ad $f''(x_0)/2$ e quindi in un intorno di x_0 ha il segno di $f''(x_0)/2$; il fattore $(x - x_0)^2$ è maggiore o uguale a zero e quindi in tale intorno

$$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 ; \quad f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 . \quad \blacksquare$$

Niente può dirsi se $f''(x_0) = 0$. Però, una dimostrazione in tutto analoga prova che:

Teorema 149 *Esista $f^{(2n)}(x_0)$ e sia $f^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k < 2n$. Se $f^{(2n)}(x_0) > 0$ il punto x_0 è punto di minimo; se $f^{(2n)}(x_0) < 0$ il punto x_0 è punto di massimo per $f(x)$.*

5.3.2 Convessità e punti di flesso

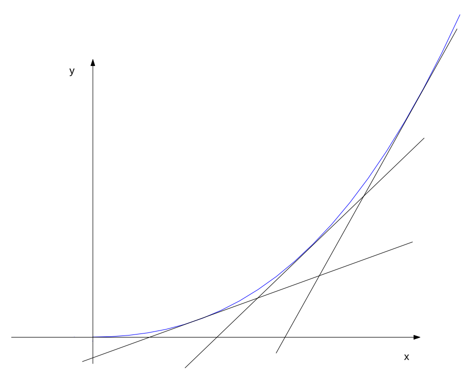
Ricordiamo la definizione di convessità data al paragrafo 1.8.3: una funzione è convessa su un intervallo $[a, b]$ quando **per ogni** coppia di punti x_1 ed x_2 di $[a, b]$, la corda che unisce $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$ **sta sopra** al grafico della restrizione della funzione ad (x_1, x_2).[3] Ricordiamo anche che una funzione è $\boxed{\textit{concava}}$ quando $-f(x)$ è convessa. La definizione di convessità è stata data usando le secanti, che esistono anche se $f(x)$ non è derivabile. Se però $f(x)$ è derivabile su (a, b) allora si ha il risultato seguente, illustrato nella figura 5.2 e che non proviamo:

Teorema 150 *La funzione $f(x)$ è convessa su (a, b) se e solo se per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $\xi \in (a, b)$ si ha*

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)\,.$$

Ossia, **la funzione derivabile $f(x)$ è convessa su $[a, b]$ se e solo se il suo grafico è ovunque sopra a ciascuna delle tangenti nei punti del grafico stesso.** Si enunci la proprietà analoga per le funzioni derivabili e concave. Questa proprietà di tipo geometrico si formula in modo analitico usando la

Figura 5.2: Funzione convessa e tangenti



formula di Taylor. Supponiamo che esista $f''(x)$ e scriviamo la formula di Taylor di centro ξ e resto in forma di Lagrange:

$$f(x) - [f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)] = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2 \tag{5.3}$$

Quest'uguaglianza mostra che[4] se $f''(c) \geq 0$ per ogni $c \in (a, b)$ allora

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)\,.$$

[3]Ricordiamo che quando una funzione è convessa si dice che **il suo grafico ha la concavità rivolta verso l'alto.**

[4]questa è la condizione sufficiente nella seconda parte del Teorema 151. La dimostrazione della parte necessaria è più complicata perché niente dice che ogni $c \in (a, b)$ debba comparire in (5.3).

Dunque:

Teorema 151 *Sia $f(x)$ due volte derivabile su (a,b). La funzione $f(x)$ è convessa su (a,b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$*[5].

Sia ora $f(x)$ una funzione di classe C^2. Se $f''(x_0) > 0$ allora, per il teorema di permanenza del segno, $f''(x) > 0$ in un intorno di x_0 e in tale intorno la funzione è convessa. Se invece $f''(x_0) = 0$ ed $f''(x)$ cresce oppure decresce, allora la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra. Un caso in cui ciò avviene è il seguente:

Teorema 152 *Sia $f(x)$ di classe C^3 e sia $f''(x_0) = 0$ ed $f'''(x_0) \neq 0$. In questo caso la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra.*

Dim. Sia per esempio $f'''(x_0) > 0$. Allora, per il teorema di permanenza del segno applicato alla funzione $f'''(x)$, che è continua, $f'''(x)$ rimane positiva in un intorno di x_0. In tale intorno, $f''(x)$ è crescente e quindi negativa per $x < x_0$ (dove la funzione è concava) e positiva per $x > x_0$ (dove la funzione è convessa. Si tratti in modo analogo il caso $f'''(x_0) < 0$. ■

Consideriamo più in dettaglio il caso di $f(x)$ di classe C^3, con $f''(x_0) = 0$ ma $f'''(x_0) \neq 0$. Per fissare le idee sia $f'''(x_0) > 0$ cosìche $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ ed $f''(x) > 0$ per $x > x_0$: la funzione è concava a sinistra e convessa a destra di x_0. Dunque, a sinistra di x_0 il grafico è **sotto** le tangenti ed a destra è **sopra.** Vediamo cosa accade in x_0. Scrivendo la formula di Taylor con resto in forma di Peano si vede che

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = (x - x_0)^3 \left[\frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0) + \text{ o}(1) \right] .$$

Se $f^{(3)}(x_0) > 0$, l'uguaglianza precedente mostra che il grafico della funzione **taglia la tangente al grafico in** $(x_0, f(x_0))$ e in particolare il grafico è sotto alla tangente per $x < x_0$ e sopra per $x > x_0$. Ciò suggerisce la definizione seguente:

Definizione 153 *Sia $f(x)$ una funzione* **derivabile su un intervallo** (a,b) **che contiene** x_0**.** *Se la funzione è convessa su (a,x_0) e concava su (x_0,b) (o viceversa), il punto x_0 si dice* $\boxed{\text{punto di flesso}}$ *per $f(x)$. Si dice che x_0 è* $\boxed{\text{punto di flesso ascendente}}$ *per $f(x)$ se il grafico di $f(x)$ è sotto*

[5] essendo $f''(x) \geq 0$ su (a,b) se e solo se $f'(x)$ è crescente, il teorema si può anche enunciare come segue: *la funzione $f(x)$ è convessa su (a,b) se e solo se $f'(x)$ è ivi crescente.* Quest'enunciato vale anche se la funzione $f(x)$ ammette la sola derivata prima.

la tangente in $(x_0, f(x_0))$ per $x < x_0$ e sopra per $x > x_0$; Il punto x_0 si dice $\boxed{\text{punto di flesso discendente}}$ *se il grafico di $f(x)$ è sopra la tangente in $(x_0, f(x_0))$ per $x < x_0$ e sotto per $x > x_0$. Se x_0 è punto di flesso ed inoltre $f'(x_0) = 0$, allora si dice che x_0 è* $\boxed{\text{punto di flesso a tangente orizzontale}}$

Riassumendo

Teorema 154 *Sia $x_0 \in (a, b)$ e sia $f(x) \in C^3(a, b)$. Se $f^{(2)}(x_0) = 0$ mentre $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ allora x_0 è punto di flesso. Il flesso è ascendente se $f'''(x_0) > 0$, discendente se $f'''(x_0) < 0$.*

Naturalmente, può accadere che anche $f^{(3)}(x_0)$ sia nulla. Cosìcome fatto per gli estremi, si possono guardare (se esistono) le derivate successive e si ha:

Teorema 155 *Se la prima derivata non nulla di $f(x)$ in x_0* **di ordine maggiore di** 1 *è di ordine dispari, la funzione ha punto di flesso in x_0. Il flesso è ascendente se tale derivata è positiva, discendente altrimenti.*

5.4 Alcuni esercizi

1. Sia $F(x_0) = 0$, con $F(x)$ primitiva di $f(x)$. Si è visto (al Teorema 140) che $f(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$ implica che $F(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^{n+1}$. Si vuol sapere se ciò vale solamente per n intero, o se vale per qualsiasi esponente positivo (ovviamente restringendosi alle $x > x_0$).

2. **($\star$)** Ancora con riferimento al Teorema 140: supponiamo di sapere che $f(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$. Mostrare su un esempio che in generale non vale $f'(x) = \mathrm{o}(x - x_0)^{n-1}$ per $x \to x_0$ (un esempio si trova all'esercizio 11 del Cap. 3).

3. Per $x \to +\infty$ sia $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ primitive rispettivamente di $f(x)$ e di $g(x)$. Supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Si chiede se vale $F(x) = \mathrm{o}(G(x))$.

4. Trovare esempi di funzioni diverse $f(x)$ e $g(x)$, di classe $C^1(\mathbb{R})$, i cui grafici hanno un punto (x_0, y_0) comune e tali che valga una delle ulteriori proprietà seguenti:

    - x_0 è punto di massimo oppure di minimo per ambedue le funzioni;
    - x_0 sia punto di massimo per l'una e di minimo per l'altra;
    - una delle due sia convessa e l'altra concava.

($\star$) Può essere che x_0 sia asintoto verticale per una delle due funzioni?

5. Sia $f(x)$ derivabile su $(a, +\infty)$ e illimitata. Si mostri che se esiste un asintoto obliquo $y = mx + n$ allora $m = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

6. ($\star$) Sia $y = mx + n$ asintoto obliquo destro della funzione derivabile $f(x)$. E' vero che deve esistere $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$?

7. ($\star$) Si consideri la funzione cosídefinita: $f(n) = n$; $f(n + 1/n^2) = (n+1/n)$. Negli altri punti il grafico si ottiene congiungendo con segmenti i punti $(n, f(n))$ ed $((n+1), f(n+1))$. Si tracci il grafico della funzione. Questa funzione è derivabile salvo che nei punti n ed $n + 1/n^2$. Si dica se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. Si illustri qualitativamente come sia possibile modificare il grafico di questa funzione, in modo da rispondere alla domanda 6.

8. Si mostri un esempio di funzione monotona la cui derivata prima ammette zeri. E' possibile che $f'(x)$ ammetta infiniti zeri su $\mathbb{R}$? E su un intervallo limitato?

9. Si sa che $f(x)$ è continua in $x = 0$ e che per $x \to 0$ vale
$$f(x) = 5 + 3x^2 + 2x^4 + \mathrm{o}\,(x^4)\,.$$
Si noti che questa funzione è derivabile per $x = 0$ (Teorema 96) ma che l'espressione scritta può non essere una formula di Taylor, perché la $f(x)$ potrebbe non essere derivabile per $x \neq 0$. Ciò nonostante, si provi che 0 è punto di minimo locale della funzione.

10. ($\star$) Sapendo solamente che $f(x)$ è continua in 5 e che per $x \to 5$ vale
$$f(x) = 3 + 2(x-5) - 7(x-5)^9 + \mathrm{o}(x-5)^9,$$
può dedursi che x_0 è punto di flesso di $f(x)$? Anche se $\operatorname{dom} f(x) = [-1, 5]$?

11. Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano di calsse $C^4(\mathbb{R})$ e per $x \to x_0$ valga
$$f(x) - g(x) = 4(x-x_0)^2 + \mathrm{o}\,(x-x_0)^2\,.$$
Cosa può dedursi sulle tangenti alle due funzioni? E se invece
$$f(x) - g(x) = 3 + 4(x-x_0)^2 + \mathrm{o}\,(x-x_0)^2$$
cosa può dedursi sulle tangenti?

12. Trovare una coppia di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, tali che
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x)$$
ma tali che nessuna retta sia tangente ad ambedue le funzioni.

13. **($\star$)** Talvolta si trova la seguente come definizione di flesso: la funzione derivabile $f(x)$ ha flesso in x_0 se il grafico traversa la tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dire se questa definizione e quella data al paragrafo 5.3.2 si equivalgono. Si consideri la funzione all'esercizio 47 del Capitolo 1. Si dica se $x_0 = 0$ è punto di flesso per questa funzione, per la definizione appena data, per la definizione al paragrafo 5.3.2, o per ambedue.

14. Sia $f(x)$ una funzione di classe C^3 con $f'''(x_0) \neq 0$. Mostrare che le due definizioni di punto di flesso, quella del paragrafo 5.3.2 e quella dell'esercizio 13, coincidono.

15. Sia $f(x) = x^2$ se $x \in \mathbb{Q}$, ed $f(x) = -x^2$ altrimenti. Mostrare che il punto $x_0 = 0$ è punto critico, ossia che la funzione è derivabile in $x_0 = 0$, con derivata uguale a zero, ma che il punto $x_0 = 0$ non è né punto di massimo, né punto di minimo, né punto di flesso.

16. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x} + 5x + \cos x}{\sin x - x - \log x}\,.$$
Verificare se questa funzione verifica o meno le condizioni del teorema di l'Hospital e studiare il limite del quoziente delle derivate.

Capitolo 6

Ricapitolazioni

Il Trònfero s'ammalvola in verbizie
incanticando sbèrboli giocaci
sbramìna con solènnidi e vulpizie
tra i tavoli e gli ortèdoni fugaci.

Fosco Maraini, *Via Veneto,* in *Gnòsi delle Fànfole.*

In questo capitolo ricapitoliamo alcuni dei concetti fondamentali incontrati fino ad ora. Ossia, ricapitoliamo i concetti relativi alle successioni, incontrati in particolare nei capitoli 1 e 2. La ricapitolazione relativa alle funzioni si otterrà mostrando come i concetti studiati si possano usare per tracciare qualitativamente i grafici di funzioni. Naturalmente, definizioni e teoremi vanno studiati ciascuno nel proprio capitolo.

6.1 le successioni

Ricordiamo che $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali (incluso o meno 0, come generalmente si deduce dal contesto) e che una successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$. Il simbolo usato per indicare una successione, invece di $f(n)$, è (f_n) oppure $\{f_n\}$. Quando, come spesso accade, si intende che la successione prenda valori sull'asse delle ascisse, scriveremo (x_n) oppure $\{x_n\}$.

Il simbolo $\{x_n\}$ è ambiguo perché indica sia la successione, ossia la funzione $n \mapsto x_n$, che l'insieme dei numeri x_n, ossia l'immagine della successione. Il significato va capito dal contesto.

Il grafico di una successione è l'insieme delle coppie (n, x_n), che si rappresenta sul piano cartesiano come nell'esempio della figura 6.1, a sinistra. Si noti che in questa figura abbiamo indicato con n l'asse delle ascisse e con x quello delle ordinate, per coerenza con il simbolo $\{x_n\}$ usato per la successione. Quest'esempio aiuta anche a capire la differenza tra i due significati del simbolo $\{x_n\}$. La figura 6.1, a sinistra riporta il grafico della funzione $\{x_n\}$ mentre a destra ne riporta l'immagine, ossia l'insieme $\{x_n\}$. In pratica però tracciare il

Figura 6.1: Sinistra:grafico della successione $\left((-1)^N/n\right)$; destra: la sua immagine

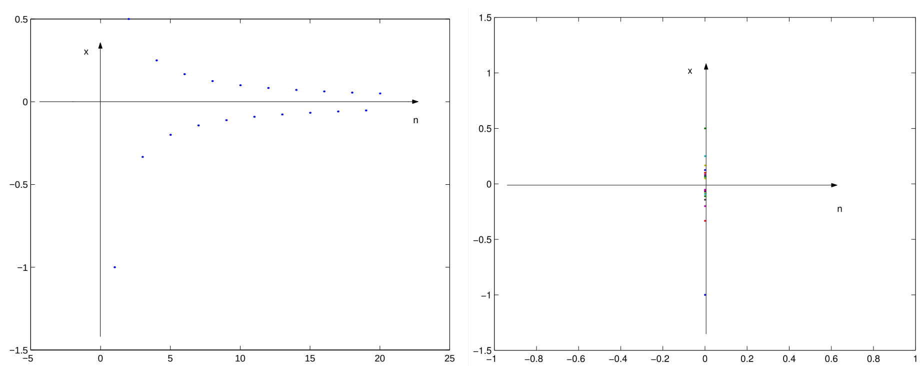


grafico di una successione non è molto utile perché di una successione interessa il "comportamento asintotico", ossia il comportamento per $n \to +\infty$ e questo non si vede disegnando pochi punti del grafico. Una successione è crescente se $n > m$ implica $x_n \geq x_m$ (se $n > m$ implica $x_n > x_m$ la successione si dice strettamente crescente). Si diano le definizioni di successione decrescente e strettamente decrescente. Una successione strettamente monotona (crescente o decrescente) è una trasformazione iniettiva e quindi invertibile. Gli unici limiti che possono studiarsi per una successione sono i limiti per $n \to +\infty$. In particolare una successione si dice

- $\boxed{\textit{regolare}}$ se $\lim_{n\to+\infty} x_n$ esiste, uguale a $+\infty$, a $-\infty$ oppure ad $l \in \mathbb{R}$.
- altrimenti, la successione si dice $\boxed{\textit{indeterminata}}$ o $\boxed{\textit{oscillante}}$

Le definizioni di limite di una successione sono state studiate al paragrafo 2.1. Dato che l'unico caso di limite che può studiarsi per una successione è quello per $n \to +\infty$, invece di scrivere $\lim_{n\to+\infty} x_n$, si può scrivere piuù brevemente $\lim x_n$. Infine, ricordiamo che per le successioni vale il teorema delle funzioni monotone, che può enunciarsi come segue:

Teorema 156 *Ogni successione monotona è regolare e precisamente vale:*

- *se la successione* $\{x_n\}$ *è crescente,*
$$\lim x_n = \sup\{x_n\}\,;$$
- *se la successione* $\{x_n\}$ *è decrescente,*
$$\lim x_n = \inf\{x_n\}\,.$$

Per interpretare l'enunciato di questo teorema, è importante aver capito i due significati diversi della notazione $\{x_n\}$. Infine, ricordiamo il limite notevole
$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$
Combinando questo limite col teorema sui limiti di funzioni composte, si trova:
$$\lim \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a\,, \quad \lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}\,.$$

6.2 Studi di funzione

Si chiama "studio di funzione" il processo che conduce a tracciare qualitativamente il grafico di una funzione, individuandone dei punti particolarmente significativi. Nel fare ciò, si devono usare tutte le nozioni che abbiamo incontrato fino ad ora e conviene procedere con un certo metodo. Elenchiamone i punti salienti e poi commentiamoli.

A) il primo passo consiste nel determinare il dominio della funzione.

B) si determinano eventuali simmetrie e periodicità

C) Determinazione dei limiti (per x tendente agli estremi del dominio o ad altri punti notevoli) e degli eventuali asintoti.

D) Si studia quindi la continuità della funzione, identificando gli eventuali punti di discontinuità.

E) Si studia la derivabilità della funzione, individuando gli eventuali punti di non derivabilità.

F) Si determinano gli intervalli di monotonia ed i punti di estremo della funzione.

G) Si studia la convessità della funzione.

NOTA IMPORTANTE

In un compito d'esame usualmente viene proposta una funzione e vengono richieste solamente alcune delle proprietà del grafico. Per esempio, lo studio della convessità potrebbe non essere richiesto. Ciò non solo perché è difficile, ma anche perché si valuta che porti via del tempo da dedicare invece ad altre domande. Per questo si sconsiglia di fare studi non richiesti. Infatti:

1. parti in più oltre a quelle richieste non hanno punteggio, ma gli eventuali errori possono venir valutati;

2. parti in più di una parte del compito non compensano eventuali parti non svolte. Il punteggio delle parti non svolte non viene comunque attribuito.

Il grafico della funzione va tracciato qualitativamente solo sulla base degli elementi richiesti, ed **è importante che sia coerente con i risultati trovati, anche se sono sbagliati.** Un grafico corretto ma non coerente con gli errori fatti viene considerato incoerente e penalizzato. Talvolta certi errori rendono impossibile tracciare un grafico (per esempio, se si trova che la funzione decresce per $x > 0$ e contemporaneamente che diverge positivamente per $x \to +\infty$ il grafico non può farsi). In questo caso una delle informazioni trovate è sbagliata. Se possibile, conviene correggerla. Se non c'è tempo di correggerla, al momento di tracciare il grafico, NOTARE ESPLICITAMENTE l'incoerenza dei risultati trovati, dicendo quali si conservano nel tracciare il grafico. Ciò per evitare penalizzazioni dovute al grafico incoerente. Inoltre, un compito d'esame può fare altre domande, per esempio di individuare il numero delle intersezioni tra il grafico tracciato e certe famiglie di curve, per esempio rette; di dedurre dal grafico tracciato quello di altre funzioni (per esempio, dal grafico di $f(x)$ quello di $1/f(x)$ o di $|f(x)|$).

Ora commentiamo i vari passi.

A) Determinazione del dominio della funzione. Ricordiamo che questo è un problema **puramente scolastico.** Il dominio della funzione fa parte della descrizione del processo fisico che si intende studiare, e quindi è assegnato insieme alla funzione stessa. Invece, come puro esercizio scolastico, si intende che la funzione è definita in ciascuno dei punti nei quali possono effettuarsi le operazioni mediante le quali viene assegnata.

B) Simmetrie e periodicità. Ricordiamo che una funzione è pari o dispari se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine ed inoltre è pari se $f(x) = f(-x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) ed è dispari se $f(x) = -f(-x)$ (grafico simmetrico rispetto all'origine). Se una funzione è pari o dispari ci si può limitare a studiare la funzione per $x > 0$ e ottenerne il grafico su tutto il dominio usandone la simmetria. Non va dimenticato di studiare esplicitamente la natura che il punto $x = 0$ ha rispetto alla funzione (continuità, derivabilità, punto di estremo. . .). Una funzione è periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x + T)$. Il numero T si chiama "periodo" della funzione. Se esiste un minimo periodo che è strettamente positivo, generalmente è tale numero che si chiama "periodo". Naturalmente, una funzione periodica ha dominio illimitato sia superiormente che inferiormente ed è priva di limite per $x \to +\infty$ ed $x \to -\infty$, salvo il caso in cui sia costante. Se una funzione è periodica di periodo T, ci si può limitare a studiarne la restrizione all'intervallo $[0, T]$ e quindi tracciarne il grafico per periodicità (senza dimenticare di studiare la continuità, derivabilità, massimi o minimi. . . in 0 e in T).

C) Determinazione dei limiti e degli asintoti. Se il dominio è illimitato, si calcolano i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Se uno di questi limiti è finito, e vale l, la retta $y = l$ si chiama "asintoto orizzontale" (destro, sinistro oppure bilatero). Se invece la funzione è un infinito del primo ordine rispetto all'infinito di confronto x, può esistere o meno un "asintoto obliquo". Questo va determinato. Si calcolano quindi i punti x_0 tali che uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x\to x_0\pm} |f(x)| = +\infty\,.$$

In tal caso, la retta $x = x_0$ si chiama "asintoto verticale" per la funzione. Ricordiamo che se $x = x_0$ è un asintoto verticale, il punto x_0 può appartenere o meno al dominio della funzione.

D) Continuità della funzione, ed eventuali punti di discontinuità. Conviene anche studiare se la funzione ammette o meno estensione continua a punti che non appartengono al dominio. La funzione è continua in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Può accadere che $f(x)$ non sia definita in x_0 ma che esista

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\,.$$

In tal caso, la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ l & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è continua in x_0 e si chiama l'$\boxed{\textit{estensione per continuità}}$ di $f(x)$ ad x_0. Per esempio, la funzione

$$f(x) = e^{-1/x^2}$$

non è definita in 0 ma può essere estesa per continuità a 0 perché

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0\,.$$

Naturalmente, può accadere che si possa definire un'estensione della funzione che è continua o solo da destra o solo da sinistra, come accade per la funzione

$$f(x) = e^{1/x}\,.$$

Questa funzione è priva di limite per $x \to 0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,.$$

L'estensione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, ma è **continua da sinistra** in 0. Se $f(x)$ non è continua in x_0 si possono avere i tre casi seguenti:

- **discontinuità eliminabile:** se il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, con $l \neq f(x_0)$. Un esempio è in figura 6.2, a sinistra.
- **discontinuità di prima specie** o **salto** se ambedue i limiti direzionali seguenti esistono finiti, ma diversi tra loro. Non si esclude che uno dei due possa essere uguale ad $f(x_0)$, si veda la figura 6.2, a destra.
- **discontinuità di seconda specie** ogni altro caso. Esempi sono in figura 6.3.

Figura 6.2: Sinistra: discontinuità eliminabile; destra: salto

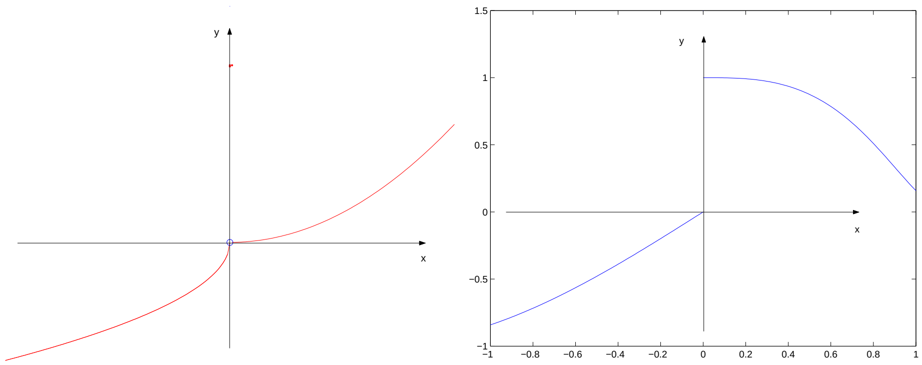
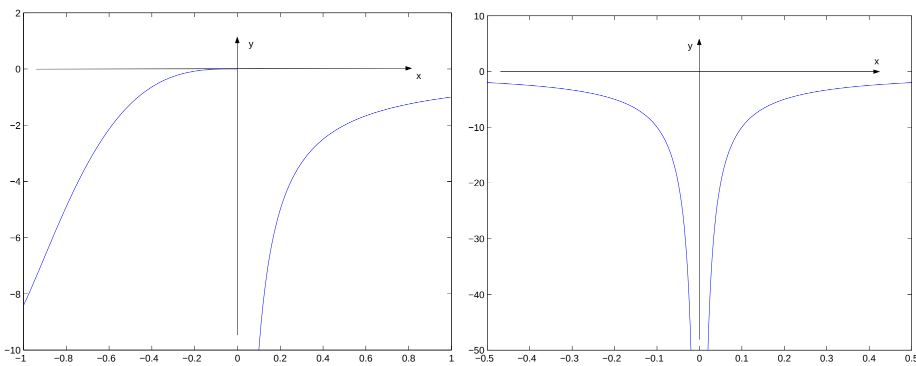


Figura 6.3: Due discontinuità di seconda specie



E) Si studia la derivabilità della funzione ed eventuali punti di non derivabilità. Supponiamo che esista, finito o meno, il limite seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

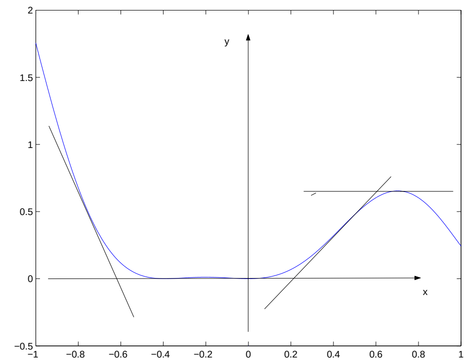
Si hanno i due casi seguenti:

- **il limite è finito.** In tal caso la funzione è continua in x_0 e il limite, che si chiama $\boxed{\textit{derivata}}$ di $f(x)$ in x_0, si indica col simbolo $f'(x_0)$. La retta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.1}$$

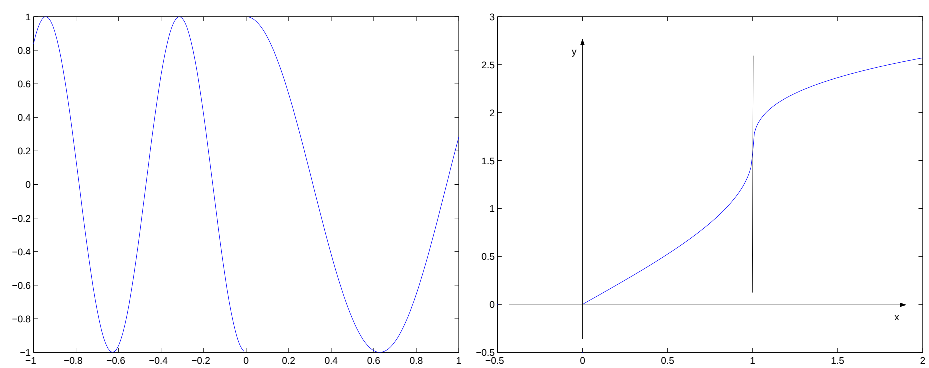
si chiama $\boxed{\textit{retta tangente}}$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Un esempio è in figura 6.4

Figura 6.4: Rette tangenti



- il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$. In tal caso la funzione può essere discontinua in x_0. Se però **la funzione è continua in** x_0 allora si dice che la retta verticale $x = x_0$ è $\boxed{\textit{tangente}}$ al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$. I due casi sono illustrati in fig 6.5.

Figura 6.5: Il limite del rapporto incrementale è $+\infty$. A sinistra: funzione discontinua; a destra: funzione continua



Supponiamo ora che il limite (6.1) *non* esista, ma che esistano, finiti o meno, ambedue i limiti direzionali

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)\,, \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)\,.$$

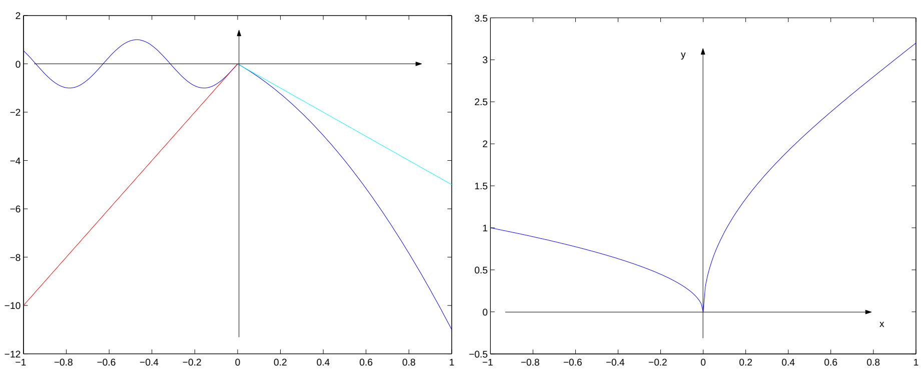
I due limiti si chiamano $\boxed{\textit{derivate direzionali}}$ (destra o sinistra) in x_0. Si ha:

- se la derivata destra è finita, la funzione è continua in x_0 da destra; analoga affermazione per la derivata sinistra. Se una derivata direzionale è $+\infty$ oppure $-\infty$, la funzione può essere continua o meno.
- Se le due derivate direzionali sono ambedue finite **e diverse tra loro**, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice $\boxed{\textit{punto angoloso}}$ e le due rette

$$y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)\,,$$
$$y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

  si chiamano le $\boxed{\textit{tangenti}}$ al grafico di $f(x)$ da sinistra o da destra in x_0 (più correttamente, sono le tangenti in $(x_0, f(x_0))$ ai grafici delle restrizioni di $f(x)$ a $x \le x_0$, rispettivamente a $x \ge x_0$). Un esempio è in figura 6.6, a sinistra.

Figura 6.6: Sinistra: punto angoloso; destra: cuspide



- se la funzione è continua in x_0 e se le due derivate direzionali in x_0 sono una $+\infty$ e l'altra $-\infty$, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice $\boxed{\textit{cuspide}}$ La retta $x = x_0$ si dice ancora $\boxed{\textit{tangente}}$ al grafico in $(x_0, f(x_0))$. Un esempio è in figura 6.6, a destra mentre la figura 6.5 mostra due casi in cui il rapporto incrementale ha limite $+\infty$.
- Infine, supponiamo che $f(x)$ sia definita su un intervallo $[a, b]$ e $x_0 = a$ (oppure $x_0 = b$). Se esiste la derivata, rispettivamente destra o sinistra, in x_0, si può ancora parlare di tangente al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$. Naturalmente, se la derivata direzionale è $+\infty$ oppure $-\infty$ allora dovremo preventivamente richiedere che la funzione sia continua in x_0.

Osservazione 157 Supponiamo $f(x)$ definita su (a, b), continua in $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che le due derivate direzionali in x_0 esitano e siano ambedue $+\infty$ oppure $-\infty$. Allora, $x = x_0$ è tangente verticale al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Il grafico taglia la tangente nel solo punto $(x_0, f(x_0))$, perché la funzione è univoca. Quindi, il grafico sta da una parte della tangente per $x < x_0$ e dall'altra per $x > x_0$. Se accade che la funzione è convessa da una parte di x_0 e concava dall'altra, il punto x_0 si chiama $\boxed{\textit{flesso a tangente verticale}}$ Questo caso è illustrato nella figura 6.5, a destra. ■

Lo studio della derivabilità nei punti in cui non si possono applicare le formule di derivazione, si fa studiando esplicitamente il limite del rapporto incrementale, generalmente mediante il Teorema di L'Hospital.

F) Gli intervalli di monotonia ed i punti di estremo della funzione. Gli intervalli di monotonia si determinano studiando il segno della derivata prima e quindi conducono alla risoluzione di opportune disequazione. Lo studio della monotonia può portare ad identificare immediatamente alcuni punti di estremo: quei punti x_0 nei quali **la funzione è continua** e monotona di senso opposto dalle due parti del punto. In generale, i punti di estremo della funzione vanno cercati tra i punti in cui si annulla la derivata prima e tra i punti nei quali la funzione non è derivabile (inclusi gli estremi del dominio, se la funzione vi è definita). Alternativamente, invece di dedurre le proprietà di estremo dallo studio della monotonia, si può studiare il segno delle derivate successive (ma spesso ciò conduce a calcoli più complessi e inoltre non si può fare negli estremi del dominio e nei punti in cui le derivate non esistono).

G) Convessità della funzione. Quando la funzione è derivabile, conviene studiare la monotonia della derivata prima, ossia il segno della derivata seconda. Supponiamo ora $x_0 \in (a, b)$ e che esista $f'(x_0)$. Confrontiamo il grafico di $f(x)$ con la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Si hanno tre casi:

- esiste un intorno di x_0 in cui vale

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

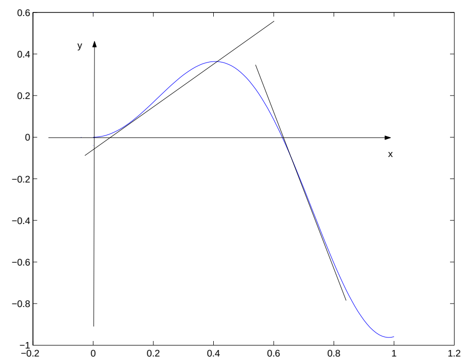
  In tal caso la funzione si dice $\boxed{\textit{convessa in } x_0}$

- esiste un intorno di x_0 in cui vale

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

In tal caso la funzione si dice $\boxed{\textit{concava in } x_0}$ La figura 6.7 mostra il grafico di una funzione che è convessa in alcuni punti, concava in altri.

Figura 6.7: Una funzione né concava né convessa

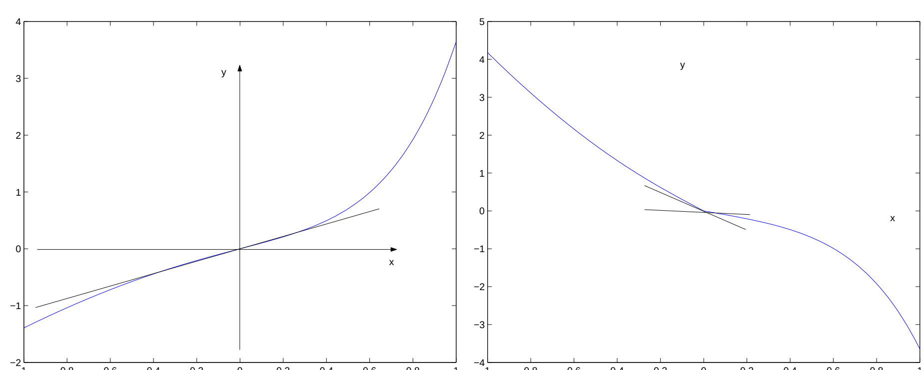


- esiste un I intorno di x_0 tale che

$$x \in I\,, x \le x_0 \Longrightarrow \quad f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$
$$x \in I\,, x \ge x_0 \Longrightarrow \quad f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(o le analoghe, con i versi delle disuguaglianze a destra scambiati tra loro). In tal caso si dice che x_0 è "punto di flesso". Un esempio è in figura 6.8, a sinistra. La figura 6.8, a destra, mostra una funzione

Figura 6.8: Sinistra: punto di flesso; destra: la convessità canbia, ma non c'è flesso



che cambia di concavità in corrispondenza di un punto che non è di flesso, perché in tale punto non esiste la tangente al grafico della funzione.

Naturalmente, può darsi che nessuno dei casi descritti si verifichi. Si consideri l'esempio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Capitolo 7

Numeri complessi

> *Non è per la sua cultura che lo amo—no, non è per quello. E' un autodidatta; in realtà conosce una quantità di cose, solo che non stanno cosìcome le sa lui.* Diario di Eva, *Il diario di Adamo ed Eva* di Mark Twain

In questo capitolo introduciamo le proprietà essenziali di una nuova classe di numeri che si chiamano $\boxed{\textit{numeri complessi}}$ Per quanto storicamente falso, conviene pensare ai numeri complessi come introdotti per risolvere l'equazione

$$x^2 + 1 = 0\,,$$

ovviamente priva di soluzioni in $\mathbb{R}$.

7.1 La definizione dei numeri complessi

Si riferisca il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali[1] di origine in un punto O. In questo modo, un punto P viene identificato dalle sue coordinate x (ascissa) ed y (ordinata) e viene indicato in vari modi, per esempio $P(x, y)$. I numeri complessi sono i punti del piano cartesiano dotati di due operazioni che hanno un significato fisico che vedremo, ma la notazione che si usa per indicare i numeri complessi è diversa da quella usuale della geometria analitica o della fisica. La seconda componente, ossia l'ordinata, si identifica mediante un "fattore" usualmente[2] indicato con i, scritta indifferentemente

[1] con la medesima unità di misura per le lunghezze su ambedue gli assi.

[2] ma non sempre: in elettrotecnica i indica la corrente e quindi l'ordinata si indica col "fattore" j.

prima o dopo. E il punto P di coordinate x ed y si indica con $x+iy$ o anche $x+yi$. Questa notazione permette di identificare immediatamente l'ordinata del punto, che è y, e quindi anche l'ascissa, che è x. Dunque, l'ordine in cui esse vengono scritte non ha influenza e lo stesso numero complesso può rappresentarsi indifferentemente

$$x+iy = x+yi = yi+x = iy+x\,.$$

Inoltre, se una delle due coordinate è nulla essa si sottintende e quindi

$$x\text{indica } x+i0\,, \qquad iy\text{indica } 0+iy\,.$$

Se ambedue le coordinate sono nulle, ossia se il punto corrisponde all'origine, esso si indica con 0. Si noti in particolare:

$$1 \text{ indica } 1+i0 \text{ e si chiama } \boxed{\textit{unità dei numeri complessi}};$$

$$i \text{ indica } 0+1i \text{ e si chiama } \boxed{\textit{unità immaginaria}}$$

Inoltre, i numeri iy si chiamano $\boxed{\textit{numeri immaginari}}$ (talvolta "immaginari puri") e quindi l'asse delle ordinate si chiama anche $\boxed{\textit{asse immaginario}}$ I numeri $x = x+i0$ si chiamano $\boxed{\textit{numeri complessi reali}}$ e l'asse delle ascisse si chiama anche $\boxed{\textit{asse reale}}$ Nel contesto dei numeri complessi, i termini "ascissa" ed "ordinata" vengono sostituiti dai termini $\boxed{\textit{parte reale}}$ e $\boxed{\textit{parte immaginaria}}$ Inoltre, i numeri complessi si indicano spesso con le lettere z, u, v, w ed è più frequente usare le lettere a e b (per esempio) invece di x ed y. Ossia, scriveremo

$$z = a+ib$$

e useremo le notazione seguenti per la parte reale e la parte immaginaria:

$$\Re e\, z = a\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = b\,.$$

Si noti che "parte reale" e "parte immaginaria" sono ambedue numeri reali. Se $z = a+ib$, il simbolo $-z$ indica il numero $-a+i(-b)$ che si scrive più semplicemente $-a-ib$. Ossia,

$$-z = -a-ib\,.$$

L'insieme dei numeri complessi si chiama anche $\boxed{\textit{piano complesso}}$ o $\boxed{\textit{piano di Argand-Gauss}}$ I numeri complessi si chiamano anche i "punti" del piano complesso. Per esercizio, si indichi un numero complesso z sul piano complesso, e quindi $-z$. L'insieme dei numeri complessi, dotato delle operazioni che vedremo, si indica col simbolo $\mathbb{C}$. La rappresentazione $a+ib$ si chiama $\boxed{\textit{rappresentazione algebrica}}$ dei numeri complessi. E' importante anche una seconda rappresentazione, che si chiama "trigonometrica".

Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi Consideriamo un'altra rappresentazione dei punti del piano cartesiano, e quindi anche dei punti del piano complesso, che si chiama la $\boxed{\textit{rappresentazione polare}}$ Si congiunga il punto $P(x, y)$, ossia il numero complesso $z = x + iy$, con l'origine delle coordinate. Si trova un segmento la cui lunghezza è

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Il numero r si chiama il $\boxed{\textit{modulo}}$ del numero complesso. Il segmento fa un'angolo θ con l'asse reale positivo.

> Il numero θ si considera positivo se il semiasse reale positivo gira in senso **antiorario** per sovrapporsi al segmento PO, orientato da O verso P; negativo altrimenti.

Quest'angolo si chiama $\boxed{\textit{argomento}}$ o $\boxed{\textit{anomalia}}$ La coppia (r, θ) si chiama $\boxed{\textit{rappresentazione polare}}$ ad ogni coppia (r, θ) corrisponde un solo punto P.

> Si noti però che la corrispondenza tra P e la sua rappresentazione polare non è biunivoca: l'angolo θ è determinato a meno di multipli di 2π se $r > 0$. Infatti,
>
> $$(r, \theta) \qquad \text{e} \qquad (r, \theta + 2\pi)$$
>
> identificano il medesimo punto P. Se $r = 0$, tutte le coppie $(0, \theta)$ identificano l'origine delle coordinate. Si ritrova una corrispondenza biunivoca, ma solamente per $r > 0$, se si impone di scegliere $\theta \in [0, 2\pi)$. L'argomento cosìscelto si chiama $\boxed{\textit{argomento principale}}$

Noti r e θ, si ha

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

e quindi il numero complesso $x + iy$ si scrive come

$$r\cos\theta + ir\sin\theta$$

che usa scrivere come

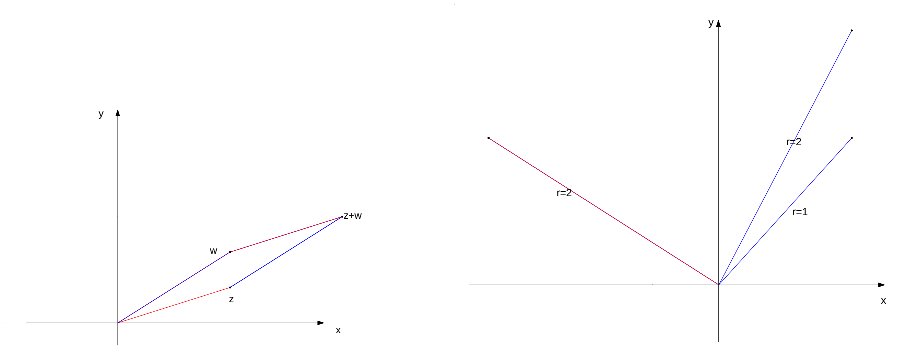
$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Si chiama questa la $\boxed{\textit{rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi}}$

7.2 Operazioni tra i numeri complessi

Per ora abbiamo descritto l'insieme dei numeri complessi. Descriviamo ora le operazioni tra essi, che sono due: la somma e il prodotto (che daranno anche la sottrazione e la divisione).

Figura 7.1: sinistra: somma $(1+i)+(1+2i)$; destra $[(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)][2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)]$



7.2.1 Somma di numeri complessi

E' l'operazione di somma di vettori con la regola del parallelogramma, ossia essa si fa sommando le componenti corrispondenti:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)\,.$$

Si osservi che

- $z+0=z$
- $z+(-z)=0$
- $(v+z)+w = v+(z+w)$
- $z+w=w+z$.

7.2.2 Il prodotto

Il prodotto di due numeri complessi si indica con $z\cdot w$ (o anche semplicemente come zw) e si capisce meglio rappresentando i numeri in forma trigonometrica. Definiamo

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]\cdot[\rho(\cos\phi+i\sin\phi)] = r\rho\left(\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\right)\,.$$

Ossia, il prodotto opera in questo modo: prima si sommano gli argomenti, e quindi il primo punto viene ruotato di tanto quanto è l'argomento del secondo, e poi si fa il prodotto dei moduli. Per chi conosce un po' di elettrotecnica: è questa la forma che assume la legge di Ohm per le correnti alternate! Il numero

$$1 = 1 + i0 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

è l'elemento neutro rispetto al prodotto:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Il numero $w = 1/z$ deve verificare

$$wz = 1\,.$$

Quindi, se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\,.$$

Definito il prodotto, si possono definire le potenze ad esponente intero:

$$z^2 = z \cdot z\,, \qquad z^{-1} = \frac{1}{z}\,, \qquad z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 , \ldots$$

Il prodotto in notazione algebrica Usiamo i colori per distinguere un numero complesso dall'altro: sia

$$z = a + ib\,, \qquad w = c + id$$

quando i due numeri sono rappresentati in notazione algebrica e, corrispondentemente

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\;, \qquad w = \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi)\;.$$

Dunque

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta\,, \qquad & b &= r\sin\theta\,, \\ c &= \rho\cos\phi\,, \qquad & d &= \rho\sin\phi\,. \end{aligned}$$

Il prodotto è:

$$\begin{aligned} z \cdot w = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi) \\ (r\rho)\,(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\ = (r\rho)\,[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i\,(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ = [(\,(r\cos\theta)(\rho\cos\phi) - (r\sin\theta)(\rho\sin\phi)\,) + i\,(\,(r\sin\theta)(\rho\cos\phi) + (r\cos\theta)(\rho\sin\phi)\,)] \\ = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\;. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la seguente formula per il prodotto di numeri complessi in notazione algebrica:

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bd)\ . \tag{7.1}$$

Non è necessario ricordare questa formula, perché si può ottenerla facilmente in questo modo: distribuiamo i prodotti sulle somme, ottenendo

$$\begin{aligned} &(a + ib) \cdot (c + id) \\ &= ac + ibd + aid + ibid \end{aligned}$$

Ora si proceda con le usuali regole algebriche, scambiando i simbili i nei prodotti e raccogliendoli. Si trova

$$\begin{aligned} &(a + ib) \cdot (c + id) \\ &= ac + ibc + aid + ibid \\ &= ac + ibc + iad + (i \cdot i)bd \\ &= ac + i\,(bd + ad) + (i \cdot i)bd\,. \end{aligned}$$

Confrontiamo (7.1) con (7.1). Si vede che la seconda restituisce la prima se[3] ad $i \cdot i = i^2$ si sostituisce -1. Infatti, con quest'ultima sostituzione si trova la formula del prodotto:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\ .$$

> Segue da qui che le operazioni algebriche tra i numeri complessi si fanno operando con le usuali regole algebriche, alle quali va aggiunta l'ulteriore "regola"
> $$i^2 = -1\,.$$

7.3 Il coniugato

Sia $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Il $\boxed{\textit{coniugato}}$ del numero z è il numero

$$\bar{z} = a - ib\,,$$

[3] si noti che questa sostituzione è consistente col fatto che $i^2 = (-1 + i0)$, numero che abbiamo deciso di indicare semplicemente con -1.

simmetrico di z rispetto all'asse reale. In notazione trigonometrica,

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)\,.$$

Si noti che

$$z\bar{z} = r^2 = |z|^2\,.$$

I numeri $\bar{z}$ e $1/z$ hanno i medesimi argomenti ma in generale modulo diverso. Si ha $\bar{z} = 1/z$ se e solo se $|z| = 1$, ossia se e solo se il punto del piano cartesiano che corrisponde al numero complesso z è sulla "circonferenza goniometrica", ossia sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine delle coordinate.

Il coniugato è utile per esempio per scrivere in modo semplice l'espressione di $1/z$ in rappresentazione algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\,;$$

e quindi

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Si verifica immediatamente che **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati,** ossia,

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Si suggerisce di verificare la regola relativa al prodotto sia usando la rappresentazione algebrica che quella trigonometrica. Notiamo infine che se $z = a + ib$,

$$\Re e\, z = a = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.$$

7.4 Radici di numeri complessi

Ricordiamo che la radice n–ma di un qualsiasi numero z è un numero w che risolve l'equazione

$$w^n = z\,.$$

Vogliamo studiare quest'equazione tra i numeri complessi. Ricordiamo il significato geometrico del prodotto $w \cdot w$: è quel numero il cui modulo è $|w|^2$ ed il cui argomento è il doppio dell'argomento di w. In generale, se

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\,;$$

ossia, w^n ha per modulo $|w|^n$ e per argomento $n\theta$. In particolare, se $w \neq 0$ allora $w^n \neq 0$. Dunque, l'equazione

$$w^n = 0$$

ha la sola radice $w = 0$. Sia invece

$$z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho\left(\cos(\psi + 2k\pi) + i\sin(\psi + 2k\pi)\right) \neq 0\,.$$

Si ricercano numeri

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

tali che

$$w^n = z \qquad \text{ossia} \qquad r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) = \rho\left(\cos(\psi + 2k\pi) + i\sin(\psi + 2k\pi)\right)\,.$$

Quest'uguaglianza vale se e solo se $r^n = \rho$, ossia $r = \sqrt[n]{\rho}$ e inoltre

$$n\theta = \psi + 2k\pi$$

ove k è un qualunque numero intero. Dunque, θ deve essere uno dei numeri

$$\theta = \frac{\psi + 2k\pi}{n}\,.$$

Sono questi infiniti argomenti ma, a causa della periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$, solamente gli argomenti che si ottengono per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ danno valori diversi di w. Ricapitolando:

- se $z = 0$ allora $w^n = z = 0$ ha l'unica soluzione $w = 0$;

- se $z \neq 0$ allora esistono n numeri complessi w che risolvono $w^n = z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ e questi sono i numeri

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) \qquad 0 \leq k \leq n-1\,. \tag{7.2}$$

Questi numeri si chiamano le $\boxed{\textit{radici } n\textit{–me}}$ di z.

Geometricamente, le radici n–me di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati, i cui vertici giacciono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|z|}$. La formula (7.2) talvolta si chiama anche $\boxed{\textit{formula di Moivre}}$ Torniamo ora all'uguaglianza

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \left[\cos^k\theta\right] (i)^{n-k} \left[\sin^{n-k}\theta\right] .$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria di queste formule, si trovano espressioni per $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, scritte combinando solamente $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Anche queste formule si chiamano $\boxed{\textit{formule di Moivre}}$ Un fatto notevole da notare è che i termini reali al membro destro devono avere $n-k$ pari e in tal caso $\sin^{n-k}\theta$ si esprime mediante potenze (di ordine pari) di $\cos\theta$, ossia $\cos n\theta$ *può rappresentarsi come combinazione di potenze di* $\cos\theta$*, senza far intervenire* $\sin\theta$*.*

7.5 Esponenziale ad esponente complesso

Consideriamo un numero complesso non nullo, rappresentato in forma trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) .$$

Dato che $r > 0$, si potrà scrivere

$$r = e^a$$

(con $a = \log r$). Dunque avremo

$$z = e^a(\cos\theta + i\sin\theta) .$$

Quest'uguaglianza suggerisce di definire

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

cosìche

$$z = e^a e^{i\theta} .$$

Definiremo poi

$$e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta}$$

cosìche

$$z = e^{a+i\theta} .$$

Si è così**definita** l'esponenziale di esponente complesso,

$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{7.3}$$

Questo è niente altro che un simbolismo diverso per la rappresentazione trigonometrica di numeri complessi. Però, l'esponenziale di numeri complessi cosìdefinita gode delle proprietà caratteristiche dell'esponenziale reale. Infatti, siano z e w due numeri complessi non nulli,

$$z = [r(\cos\theta + i\sin\theta)] \ , \qquad w = [\rho(\cos\phi + i\sin\phi)] \ .$$

I moduli sono positivi e quindi si può scrivere

$$r = e^{\alpha} \, , \qquad \rho = e^{\beta} \, .$$

Dunque, il prodotto è

$$zw = e^{\alpha}e^{\beta}\left(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right) = e^{\alpha+\beta+i(\theta+\phi)} \, .$$

Si trova quindi

$$e^{\alpha+i\theta}e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)} \, .$$

Ed inoltre,

$$e^0 = e^{0+i0} = e^0\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 1 + i0 = 1 \, .$$

Ossia, le proprietà cruciali dell'esponenziale reale continuano a valere per l'esponenziale complesso. La (7.3) definisce una funzione che ad un numero complesso associa un numero complesso, che si chiama *l'esponenziale di numeri complessi*. Le sue proprietà essenziali sono:

- $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$;
- $|e^{\alpha+i\theta}| = |e^{\alpha}e^{i\theta}| = e^{\alpha}$. In particolare, **l'esponenziale di numeri complessi non si annulla;**
- $e^0 = 1$;
- $e^{\alpha+i\theta}e^{\beta+i\phi} = e^{(\alpha+\beta)+i(\theta+\phi)}$;
- $e^{\alpha+i0} = e^{\alpha} + i0$;

Queste proprietà sono le ovvie estensioni delle corrispondenti proprietà dell'esponenziale di numeri reali. Le seguenti proprietà invece non hanno analogo tra i numeri reali:

- $\overline{e^{\alpha+i\beta}} = e^{\alpha-i\beta}$;
- $e^{(\alpha+i\beta)+2\pi i} = e^{\alpha+i\beta}$.

L'ultima proprietà mostra che **l'esponenziale di numeri complessi è periodica di periodo $2\pi i$.** E quindi la definizione di logaritmo tra i numeri complessi, che non trattiamo, sarà alquanto delicata. Notiamo infine le formule seguenti:

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1\,, \qquad e^{2\pi i} = 1\,,$$
$$e^{i\pi/2} = i\,, \qquad e^{-i\pi/2} = -i\,.$$

L'uguaglianza

$$e^{2\pi i} = 1$$

si chiama $\boxed{\textit{formula di Eulero}}$ La (7.3), che è la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi scritta in modo più compatto, è la forma più semplice e maneggevole quando si debbano fare operazioni di prodotto, quoziente, potenza e radice di numeri complessi. Per questo gli si dà il nome di $\boxed{\textit{rappresentazione esponenziale}}$ dei numeri complessi. **Si noti che il numero $0 = 0 + i0$ è l'unico numero complesso che non ha rappresentazione esponenziale, ossia non si può scrivere in forma e^z.** Infatti, l'esponenziale non si annulla mai. Usando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi, le radici n-me di

$$e^{\alpha+i\theta}$$

sono rappresentano come

$$e^{(\alpha+i\theta)/n}e^{(2k\pi i)/n}\,, \qquad 0 \le k \le n-1$$

(ed ovviamente k intero). I numeri

$$\epsilon_k = e^{(2k\pi i)/n}\,, \qquad 0 \le k \le n-1$$

sono le n radici n-me di 1.

7.6 Continuità e derivate

Consideriamo ora una funzione a valori complessi di una variabile reale che indichiamo con t:

$$t \mapsto z(t) = f(t) + ig(t)\,.$$

Supponiamo che t appartenga ad un intervallo (a, b). Limiti e continuità si definiscono per componenti, ossia, per la definizione di limite,

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = \lim_{t\to t_0} [f(t) + ig(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right) + i\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right) .$$

E quindi, in particolare, $z(t)$ è continua in t_0 se e solo se sia $f(t)$ che $g(t)$ lo sono. La derivata si definisce come il limite del rapporto incrementale,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(t_0+h) + ig(t_0+h)) - (f(t_0) + ig(t_0))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} + i \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}\right) .\end{aligned}$$

Dunque, anche la derivata si definisce per componenti e $z(t)$ è derivabile se e solo se sono derivabili sia $f(t)$ che $g(t)$. In tal caso si ha:

$$\text{se} \quad z(t) = f(t) + ig(t) \quad \text{allora} \quad z'(t) = f'(t) + ig'(t) .$$

A noi interessa calcolare la derivata dell'esponenziale. Per essa vale una forma in tutto analoga a quella che si ha per l'esponenziale reale:

Teorema 158 *Vale:*

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t} .$$

<u>Dim</u>. Sia

$$z_0 = a + ib \qquad \text{cosìche} \qquad e^{z_0 t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) .$$

Dunque,

$$e^{z_0 t} = f(t) + ig(t) , \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} f(t) = e^{at} \cos bt \\ g(t) = e^{at} \sin bt . \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata della parte reale e della parte immaginaria:

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{at} [a \cos bt - b \sin bt] , \\ g'(t) &= e^{at} [a \sin bt + b \cos bt] . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{z_0 t} = f'(t) + ig'(t) = e^{at} [a \cos bt - b \sin bt] + ie^{at} [a \sin bt + b \cos bt] \\ (a + ib) \cdot \left[e^{at} (\cos bt + i \sin bt)\right] = z_0 e^{z_0 t} . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.7 Il teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza delle radici permette di risolvere le equazioni della forma

$$z^n + a = 0$$

ove a è il termine noto e z è l'incognita: Quest'equazione ha la sola soluzione nulla se $a = 0$. Altrimenti ammette n soluzioni. Consideriamo ora l'equazione che si ottiene uguagliando a zero un generico polinomio[4]

$$0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 = \sum_{r=0}^{n} a_r z^r \,, \qquad a_n \neq 0 \,. \tag{7.4}$$

Se $n = 1$ oppure $n = 2$ allora quest'equazione ammette soluzioni (rispettivamente, una soluzione oppure due soluzioni) ed esiste una formula per rappresentare le soluzioni. Formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado esistono, e sono state scoperte nel XVI secolo. Naturalmente, in generale le soluzioni sono numeri complessi. Tra il XVIII e il XIX secolo è stato provato che **non esistono** formule risolutive per equazioni di grado superiore al quarto (espresse mediante un numero finito di operazioni algebriche). Ciò nonostante, è stato provato il teorema seguente:

Teorema 159 (fondamentale dell'algebra) *Ogni equazione di grado $n > 0$ ammette almeno una soluzione* **complessa.**

Ora, si sa che se $z = z_0$ risolve l'equazione (7.4) allora si può scrivere

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 = (z - z_0) \sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r \,.$$

ossia, $z - z_0$ *divide* il polinomio. Il teorema 159 può ora applicarsi al polinomio

$$\sum_{r=0}^{n-1} b_r z^r \,.$$

Se $n > 1$ si trova un numero z_1 che annulla questo polinomio e che quindi risolve (7.4). Ovviamente, può accadere che sia $z_1 = z_0$. Iterando questo procedimento, si viene a scrivere

$$\sum_{r=0}^{n} a_r z^r = (z - z_0)^{r_0} (z - z_1)^{r_1} \cdots (z - z_\nu)^{r_\nu}$$

[4]si ricordi: in un polinomio gli esponenti di z devono essere **INTERI**. Ricordiamo inoltre che il polinomio in (7.4) si dice "di grado n" se il coefficiente a_n è diverso da zero. Un'equazione si dice *di grado n* se è ottenuta uguagliando a zero un polinomio di grado n.

e

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n\,. \tag{7.5}$$

I numeri z_j, che sono tutte e sole le **soluzioni** di (7.4) si dicono $\boxed{\textit{radici}}$ o anche $\boxed{\textit{zeri}}$ del polinomio e si dice che la radice z_j di (7.4), equivalentemente lo zero z_j del polinomio, ha $\boxed{\textit{molteplicità}}$ r_j, ove r_j è l'esponente del fattore $(z - z_j)$. La (7.5) vuol dire che **il numero totale delle radici, ciascuna contata secondo la propria moltaplicità, è uguale al grado del polinomio.**

7.7.1 Polinomi a coefficienti reali

Ricordiamo queste proprietà dell'operazione di coniugio: **il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati.** Ossia

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Dunque, $\overline{z^k} = (\overline{z})^k = \overline{z}^k$. Ricordiamo inoltre che un numero è reale se e solo se coincide col suo coniugato. Consideriamo ora un polinomio **a coefficienti reali**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

e supponiamo che esso si annulli in z_0,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k\,.$$

Prendendo i coniugati dei suoi membri, e notando che $\bar{0} = 0$, si trova

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}_0^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}_0^k\,.$$

Ossia, anche $\bar{z}_0$ è uno zero del polinomio, che pertanto è divisibile per il trinomio **a coefficienti reali**[5]

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (2\Re e\, z_0)z + |z_0|^2\,.$$

Dunque,

[5]si è già usato questo fatto nel calcolo delle primitive di funzioni razionali.

Teorema 160 *Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali e sia z_0 un suo zero di molteplicità r. In tal caso, anche $\overline{z_0}$ è uno zero di $P(z)$, della medesima moltiplicità r.*

Di conseguenza, le radici **non reali** di un polinomio **a coefficienti reali** vengono **a coppie,** e quindi esse sono in numero **pari.** Ricordiamo ora che il numero totale delle radici di un polinomio è il grado del polinomio, e quindi un polinomio di grado dispari ha un numero dispari di radici. Di conseguenza, se i coefficienti di un polinomio **di grado dispari** sono reali, almeno una delle sue radici deve essere reale:

Teorema 161 *Il numero delle radici* reali *di un polinomio* di grado dispari e a coefficienti reali *è dispari. In particolare, ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Questo risultato si è già provato in altro modo, si veda il Corollario 114.

7.7.2 Il metodo di completamento dei quadrati

E' utile ricordare come si ottiene la formula risolutiva di

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{con} \quad a \neq 0\,. \tag{7.6}$$

Si nota che quest'equazione si sa risolvere se $b = 0$. In questo caso le soluzioni sono le due radici di $-c/a$. Se quest'equazione può ricondursi alla forma

$$a(z-\alpha)^2 - \beta = 0 \tag{7.7}$$

allora essa è ancora immediatamente risolubile,

$$z = \alpha + \sqrt{\frac{\beta}{a}}$$

(si ricordi che la radice nel campo complesso prende **due** valori, e quindi questa espressione rappresenta **due** soluzioni). Mostriamo che **ogni** equazione della forma (7.6) può ricondursi alla forma (7.7) mediante il metodo del $\boxed{\textit{completamento dei quadrati}}$ Prima di tutto si nota che risolvere (7.6) equivale a risolvere

$$z^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)z + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Vogliamo considerare il secondo addendo come il "doppio prodotto" di z con $b/2a$. Dunque sommiamo e sottraiamo $(b/2a)^2$. Si trova

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0\,.$$

E' ora immediato vedere che l'equazione ammette due soluzioni, date da

$$-\frac{b}{2a} + \sqrt{-\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Si noti che non abbiamo scritto $\pm$ di fronte alla radice perché per definizione la radice complessa prende due valori. In contrasto con ciò, la **radice positiva di un numero reale positivo** si chiama $\boxed{\textit{radice aritmetica}}$

7.8 Alcuni esercizi

1. Sul piano di Argand-Gauss si segni la posizione di un numero complesso z. Si segnino quindi i punti della lista seguente:

$$\begin{array}{rr} 1/z\,, \bar{z}\,, & -\bar{z}\,, \\ 1/\bar{z}\,, -1/\bar{z}\,, & iz\,, \\ \overline{iz}\,, 1/iz\,, & 1/\overline{iz}\,. \end{array}$$

   Si consideri in particolare il caso in cui z giace su uno dei quattro semiassi coordinati.

2. Sia $z = a + ib$, $w = c + id$. Calcolare $\bar{z}w$. Chi conosce le espressioni in coordinate cartesiane ortogonali del prodotto scalare e del prodotto vettoriale, noti come queste si ritrovano in questo prodotto.

3. Siano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ e $w = -\bar{z}$. Si identifichi la posizione di z e w sul piano complesso, e si rappresentino i due punti $z + w$ e $z - w$.

4. Si calcolino i numeri i^n per n intero compreso tra 0 e 16.

5. Usando la formula del binomio di Newton, si calcoli $(1 + i)^9$. Si scriva quindi la rappresentazione trigonometrica del numero $(1 + i)$ e si usi questa per calcolare $(1 + i)^9$. Rappresentare questo numero sul piano di Argand-Gauss.

6. I numeri complessi z, w abbiano modulo 1 e inoltre z abbia argomento $2\pi/3$ mentre w abbia argomento $4\pi/3$. Sul piano complesso, si individui il punto $z + w$. Si vuol sapere se esiste u tale che $z + w + u = 0$ e, nel caso affermativo, la sua posizione sul piano complesso.

7. Si consideri un quadrato sul piano complesso, inscritto nella circonferenza trigonometrica e i cui lati sono paralleli agli assi coordinati oppure alle bisettrici degli assi. Si vuol sapere se i suoi vertici sono o meno radici di un certo ordine di qualche numero.

8. Il numero complesso z abbia moduli 1 ed argomento $\pi/12$. Calcolare un numero di cui z è radice quarta. Quanti sono tali numeri?

9. Scrivere in forma trigonometrica il numero $(\cos\pi - i\sin\pi/2)$.

10. ($\star$) Rappresentare sul piano di Argand-Gauss i numeri $\{(1/2)(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)\}^n$ e notare che essi si trovano su un numero finito di rette uscenti dall'origine. Dire se accade un fatto analogo per i numeri $\{2(\cos\pi/7 + i\sin\pi/7)\}^n$ e $\left\{2\left(\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)\right)\right\}^n$.

11. ($\star$) Si mostri che vale l'uguaglianza $(zw)^2 = z^2w^2$. Si consideri quindi l'uguaglianza $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$. Dire se quest'uguaglianza è corretta. In generale discutere l'uguaglianza $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$.

12. Rappresentare sul piano complesso i numeri $z(t) = e^{it}$ per $t \in \mathbb{R}$. E se invece si considerano i numeri $z(t) = e^{-it}$?

13. rappresentare sul piano di Argand-Gauss l'immagine della trasformazione $t \mapsto te^{it}$.

14. Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(t) = e^{2it}$ e rappresentare sul piano di Argand-Gauss sia $f(t)$ che $f'(t)$ ed $f''(t)$.

15. ($\star$) Scrivere la formula di McLaurin di e^x e sostituire ad iy ad x. Trovare le relazioni tra la formula ottenuta e le formule di McLaurin di $\sin y$ e $\cos y$ (si ottiene una prima versione della "most remarkable formula in mathematics", come si esprime R. Feyman, nelle *Feyman Lectures on Physics*).

16. ($\star$) Sia $z(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)}$, $w(t) = Be^{i(\omega t+\beta)}$. Dire se, fissati A ed ω, esitono valori di α e β tali che $z(t) + w(t) = 0$ per ogni t (è possibile cancellare un suono mediante un altro suono? Si calcolino le parti reali).

17. ($\star$) Sia $z(t) = e^{i\omega t}$, $w(t) = e^{i(\omega+\nu)t}$. Calcolare la parte reale di $z(t)+w(t)$. Si riesce a scriverla in modo da vedere una relazione col fenomeno dei battimenti?

18. **($\star$)** si consideri la funzione $t \mapsto z(t) = Ae^{-i\omega t+\phi}$. Se ne rappresenti il valore sul piano complesso per ogni valore di t. Si trova un vettore applicato nell'origine, ruotante (in quale verso?) al crescere del tempo t. Si riesce ad interpretare $z(t)+\bar{z}(t)$ facendo intervenire il moto armonico?

Capitolo 8

Equazioni differenziali

Ebbi dunque il mio relatore, tanto coscienzioso quanto ben disposto; si lasciò sfuggire qualche lacuna nelle dimostrazioni, però mi diede utili consigli sulle virgole. André Weil, *Ricordi di apprendistato, vita di un matematico*

In questo capitolo studiamo tre tipi di equazioni differenziali, ossia equazioni in cui l'incognita è una funzione, e che coinvolgono, insieme alla funzione incognita, anche le sue derivate.

ATTENZIONE
Nello studio delle equazioni differenziali è cruciale questo risultato, provato al Teorema 195: *ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive.*

8.1 Introduzione

Le equazioni differenziali sono un argomento importantissimo in tutte le applicazioni della matematica, e molto vasto. Noi ci limitiamo a studiare le equazioni differenziali di tre classi particolari, che ora descriviamo. Diciamo però prima di tutto che, a differenza delle equazioni studiate fino ad ora, l'incognita da determinare quando si "risolve" un'equazione differenziale **è una funzione derivabile.** Le applicazioni fisiche richiedono che tale funzione **sia definita su un intervallo.** Le equazioni differenziali che studieremo hanno infinite soluzioni. Le applicazioni alla fisica richiedono di identificare tra tutte le soluzioni una (o più) che soddisfano certe condizioni accessorie. Noi ci limiteremo a considerare delle condizioni accessorie dette $\boxed{\textit{condizioni iniziali}}$ o anche $\boxed{\textit{condizioni di Cauchy}}$ Vedremo che la soluzione che verifica queste condizioni è unica se valgono opportune ipotesi usualmente soddisfatte nelle applicazioni. Descriviamo ora le equazioni differenziali che studieremo.

Equazioni a variabili separabili. Le equazioni a variabili separabili sono equazioni differenziali **del primo ordine** ossia equazioni in cui compare, insieme alla funzione incognita $x(t)$, anche la sua derivata prima (ma non compaiono derivate successive). Eventualmente dopo opportune manipolazioni, le equazioni a variabili separabili si riconducono alla forma seguente:

$$x'(t) = f(x(t))g(t)\,. \tag{8.1}$$

La proprietà essenziale è che la funzione f non dipende esplicitamente da t mentre la funzione g non dipende da x. Per esempio, **l'equazione differenziale $x' = \sin(tx(t))$ NON è un'equazione a variabili separabili.**

Definizione 162 *Una funzione $x(t)$ si chiama* $\boxed{\text{soluzione}}$ *dell'Eq (8.1) se ha le seguenti proprietà:*

- *è definita su un* **intervallo apero** (a, b) *(limitato o meno);*
- *è di classe $C^1(a, b)$;*
- *sostituita nei due membri di (8.1) verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a, b)$.*

Osservazione 163 (IMPORTANTE)

1. Come si è detto, la funzione $x(t)$ da determinare **deve essere definita su un intervallo.** Un'equazione a variabili separabili (con $f(x)$ e $g(t)$ continue) ammette infinite soluzioni. E' importante notare che **soluzioni diverse della medesima equazione differenziale possono essere definite su intervalli diversi.**

2. la variabile indipendente è stata indicata con la lettera t perché in pratica indica il tempo. Però la stessa equazione differenziale potrebbe essere scritta con lettere diverse, per esempio

$$y'(x) = f(y(x))g(x)\,.$$

In questo caso la variabile "tempo" si è indicata con la lettera x.

3. La forma (8.1) in cui abbiamo scritto l'equazione differenziale è corretta, ma generalmente non usata. Di regola non si indica la dipendenza della soluzione dalla variabile "tempo" e la (8.1) si scrive usualmente in forma

$$x' = f(x)g(t)\,.$$

E' importante tener conto di ciò per esempio quando si vuol calcolare la derivata seconda di x, che va calcolata usando la regola di derivazione della funzione composta:

$$\begin{aligned} x''(t) &= g'(t)f(x(t)) + g(t)f'(x(t))x'(t) = \\ &= g'(t)f(x(t)) + g^2(t)f'(x(t))f(x(t))\,. \end{aligned}$$

4. La funzione $g(t)$ potrebbe essere costante. In questo caso, inglobando la costante nella funzione $f(x)$, l'equazione differenziale prende forma

$$x' = f(x)$$

e si chiama $\boxed{\textit{autonoma}}$ o $\boxed{\textit{tempo invariante}}$

Il $\boxed{\textit{problema di Cauchy}}$ per la (8.1) consiste nel trovare la soluzione o le soluzioni che verificano la condizione accessoria $x(t_0) = x_0$ ove t_0 ed x_0 sono assegnati. Ossia si chiede di determinare una soluzione il cui grafico contiene il punto (t_0, x_0). Convenzionalmente, t_0 si chiama $\boxed{\textit{istante iniziale}}$ e il problema di Cauchy si chiama anche $\boxed{\textit{problema ai dati iniziali}}$ Il problema di Cauchy per la (8.1) si scrive

$$\begin{cases} x' = f(x)g(t) \\ x(t_0) = x_0\,; \end{cases}$$

Vedremo che se $f(x)$ è una funzione di classe C^1 mentre $g(t)$ è continua, il problema di Cauchy ammette soluzione unica, definita in un intorno di t_0.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono sono le equazioni

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t)$$

usualmente scritte

$$x' = a(t)x + f(t)\,. \tag{8.2}$$

La funzione $a(t)$ si chiama il $\boxed{\textit{coefficiente}}$ dell'equazione differenziale (lineare del primo ordine) mentre $f(t)$ si chiama il $\boxed{\textit{termine noto}}$ Assumeremo che $a(t)$ ed $f(t)$ siano continue[1]. L'equazione differenziale del primo ordine si dice $\boxed{\textit{a coefficiente costante}}$ quando $a(t)$ è costante e si chiama $\boxed{\textit{omogenea}}$ quando $f(t) = 0$. Quando $f(t) \neq 0$ l'equazione si dice $\boxed{\textit{completa}}$ o anche $\boxed{\textit{affine}}$ Data l'equazione affine (8.2), la sua $\boxed{\textit{equazione omogenea associata}}$ è

$$x' = a(t)x\,.$$

Notiamo che un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine

$$x' = a(t)x$$

è anche un'equazione differenziale a variabili separabili. Per definizione, $x(t)$ è una $\boxed{\textit{soluzione}}$ dell'equazione differenziale (8.2) se è di classe C^1 su un **intervallo** (a, b) e se, sostituita nell'equazione, verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a, b)$. Il $\boxed{\textit{problema di Cauchy}}$ per la (8.2) consiste nel cercare la soluzione che soddisfa la condizione accessoria $x(t_0) = x_0$, ossia il cui grafico contiene il punto (t_0, x_0). Esso si scrive

$$\begin{cases} x' = a(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0\,. \end{cases}$$

Vedremo che nel caso delle **equazioni lineari** con coefficienti e termini noti continui su $\mathbb{R}$, il problema di Cauchy **ammette una ed una sola soluzione.** Questa affermazione è analoga a quella fatta per le equazioni differenziali a variabili separabili, ma **c'è una differenza importante:** Nel caso delle equazioni differenziali lineari, le soluzioni del problema di Cauchy sono definite su $\mathbb{R}$. Nel caso delle equazioni a variabili separabili in generale il dominio è un intervallo (diverso da $\mathbb{R}$) anche se il membro destro è definito per ogni x e per ogni t.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Sono le equazioni di forma

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,. \tag{8.3}$$

In quest'equazione, $f(t)$ si chiama il $\boxed{\textit{termine noto}}$ o $\boxed{\textit{forzante}}$ e b, c si chiamano i coefficienti. Noi studieremo solamente le equazioni differenziali

[1] è sufficiente che ammettano primitive, anche in senso generalizzato.

lineari del secondo ordine **a coefficienti costati,** mentre il termine noto potrà essere costante o meno. Ancora, l'equazione si dice $\boxed{\textit{omogenea}}$ se il termine noto è nullo; si dice $\boxed{\textit{affine}}$ o $\boxed{\textit{completa}}$ altrimenti; e l'equazione lineare omogenea del secondo ordine associata alla (8.3) è

$$x'' + bx' + cx = 0\,.$$

Per definizione, $x(t)$ è una $\boxed{\textit{soluzione}}$ dell'equazione differenziale (8.3) se è di classe C^1 su un **intervallo** (a,b) e se, sostituita nell'equazione, verifica l'uguaglianza per ogni $t \in (a,b)$. Nel caso delle equazioni differenziali del **secondo** ordine, il $\boxed{\textit{problema di Cauchy}}$ consiste nel risolvere

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = f(t)\,, \\ x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_1\,. \end{cases}$$

Ossia, si richiede una soluzione che in un istante t_0 ha il valore x_0 e anche tale che la sua derivata **nel medesimo istante** t_0 vale x_1. Geometricamente, si cerca una soluzione il cui grafico passa per il punto (t_0, x_0) e che, in tale punto ha tangente di pendenza x_1. Convenzionalmente, l'istante t_0 si chiama ancora $\boxed{\textit{istante iniziale}}$ Ricordando l'interpretazione della derivata come velocità istantanea, il problema di Cauchy consiste nel trovare una traiettoria $t \mapsto x(t)$ che ad un certo istante t_0 passa per la posizione x_0 con velocità x_1.

Anche nel caso delle equazioni differenziali **lineari** del secondo ordine, con termine noto definito su $\mathbb{R}$, le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$.

Osservazione 164 Consideriamo il problema

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

Questo **non è un problema di Cauchy** perché non impone alcuna condizione alla velocità iniziale, ed ammette infinite soluzioni: una soluzione per ciascuna condizione che si ottiene assegnando anche il valore di $x'(0)$. Analogamente, il problema $x''+bx'+cx = f(t)$, $x'(t_0) = x_1$ **non è un problema di Cauchy.** ■

8.2 Soluzione delle quazioni differenziali a variabili separabili

Ricordiamo che queste sono le equazioni della forma

$$x' = f(x)g(t) \qquad \text{ossia} \qquad x'(t) = f(x(t))g(t)\,. \tag{8.4}$$

Le funzioni $f(x)$ e $g(t)$ sono continue (più avanti richiederemo la derivabilità di $f(x)$). Studiamo prima come trovare tutte le soluzioni dell'equazione, e poi come trovare le soluzioni del problema di Cauchy

$$x' = f(x)g(t)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,. \tag{8.5}$$

Il primo passo nella ricerca delle soluzioni consiste nel ricercare le eventuali soluzioni costanti. **Un'equazione a variabili separabili può ammettere o meno soluzioni costanti.** Naturalmente, se $f(x) \equiv 0$ oppure $g(t) \equiv 0$ l'equazione si riduce a

$$x' = 0$$

e le sue soluzioni sono tutte e sole le funzioni costanti. Le funzioni definite su un intervallo e costanti, sono tutte e sole quelle con derivata nulla. Dunque, le soluzioni $x(t) \equiv k$ che risolvono la (8.4) sono quelle per cui vale

$$0 = f(k)g(t) \qquad \textbf{per ogni } t\,.$$

Ciò accade se il numero k è uno zero della funzione $f(x)$. Si ha quindi:

Primo passo della ricerca di soluzioni: si risolve l'equazione

$$f(x) = 0\,.$$

Se il numero k risolve quest'equazione, allora la funzione costante

$$x(t) = k$$

è soluzione di (8.5).

Ora ricerchiamo soluzioni non costanti. Se $f(x(t)) \neq 0$ per un valore $t = t_0$, la disuguaglianza continua a valere in un intorno di t_0, grazie al teorema di permanenza del segno per le funzioni continue. Dunque, in un intorno di t_0 si può scrivere

$$\frac{1}{f(x(t))}x'(t) = g(t)\,. \tag{8.6}$$

Le due funzioni

$$g(t)\,, \qquad h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

sono continue. Dunque ammettono primitive $G(t)$ ed $H(x)$. Ricordando la formula per la derivata delle funzioni composte, si vede che la (8.6) è niente altro che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t)) = g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)\,.$$

Abbiamo cosìdue funzioni della variabile t, **definite sul medesimo intervallo e con la medesima derivata.** Dunque, la differenza di queste due funzioni è costante:

$$H(x(t)) = G(t) + c\,. \tag{8.7}$$

Quest'espressione si chiama $\boxed{\textit{integrale primo}}$ o $\boxed{\textit{integrale generale}}$ dell'equazione a variabili separabili. Ogni soluzione non costante dell'equazione si trova assegnando a c un opportuno valore. E' anche possibile che certi valori di c portino ad identificare soluzioni costanti, ma ciò non è garantito perché il procedimento che abbiamo fatto (in particolare la divisione per $f(x(t))$) non è lecito se $x(t)$ è una soluzione costante.

8.2.1 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali a variabili separate

Consideriamo ora il problema di Cauchy (8.5) e ricerchiamo condizioni perché esso ammetta soluzioni, e perchè la soluzione sia unica. Vale il seguente

Teorema 165 (Teorema di Cauchy) *Se la funzione $g(t)$ è* continua *in un intorno di t_0 e se la funzione $f(x)$ è* continua *in un intorno di x_0, il problema di Cauchy (8.5) ammette soluzione, definita in un opportuno intorno di t_0. Se inoltre $f(x)$ è* di classe C^1*, la soluzione è unica.*

Per trovare esplicitamente la soluzione, dobbiamo prima di tutto controllare se la soluzione richiesta è costante, cosa che accade se $f(x_0) = 0$. Altrimenti, dobbiamo sostituire t_0 ed x_0 nei due membri di (8.7). Ciò identifica il valore della costante c. Ossia, si deve scegliere

$$c_0 = H(x(t_0)) - G(t_0)\,.$$

Ciò fatto, per ogni t si risolve rispetto ad x l'equazione

$$H(x(t)) = G(t) + c_0\,.$$

Osservazione 166 Se $f(x_0) \neq 0$, la funzione **continua** $f(x)$ ha **segno costante** in un intorno di x_0 cosìche $H(x)$ è ivi **continua e strettamente monotona.** Infatti, la sua derivata $H'(x) = 1/f(x)$ ha segno costante. Dunque l'immagine di $H(x)$ è un intervallo I che contiene $G(t_0) + c$. Per t "vicino" a t_0, avremo $G(t) + c \in I$, perché anche $G(t)$ è continua

Essendo strettamente monotona, $H(x)$ è invertibile. L'unica soluzione $x(t)$ del problema (8.7), e quindi del problema di Cauchy, è data da

$$x(t) = H^{-1}\left(G(t) + c_0\right)$$

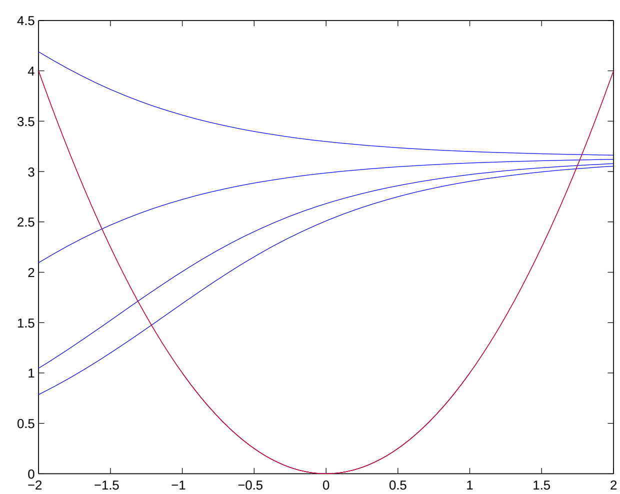
ed è definita per ogni t in un opportuno intorno di t_0. Però non è detto che sia sempre possibile esprimere questa funzione mediante funzioni elementari. Spesso dovremo contentarci dell'espressione implicita (8.7) e della determinazione del valore c_0. ■

Il significato geometrico del teorema 165 va capito bene: esso asserisce che, se $g(t)$ è **continua** ed $f(x)$ è **derivabile**, i grafici di soluzioni diverse della medesima equazione differenziale **non si intersecano.** La figura 8.1 mostra, in azzurro, i grafici di alcune soluzioni dell'equazione differenziale

$$x' = \sin x \,. \tag{8.8}$$

Il grafico in rosso interseca le soluzioni dell'equazione differenziale e quindi **non è grafico di una soluzione di (8.8).**

Figura 8.1: un grafico che non è grafico di soluzione



Osservazione 167 Si sa, dalla tavola delle derivate fondamentali, che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t = e^t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = ae^{at}\,.$$

Quindi, la funzione ce^{at} risolve il problema di Cauchy

$$x' = ax\,, \qquad x(0) = c\,.$$

Il Teorema 165 garantisce che non ci sono altre funzioni che verificano queste condizioni. Infatti, il secondo membro $f(x) = ax$ è funzione derivabile di x. ■

Vediamo ora un'applicazione del Teorema 165, che conduce a risolvere un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine.

Esempio 168 Sia $a(t)$ una funzione continua e consideriamo l'equazione differenziale

$$x' = a(t)x\,.$$

Vogliamo trovarne tutte le soluzioni. Come sempre quando si studiano equazioni a variabili separabili, se ne cercano prima di tutto le soluzioni costanti. In questo caso l'unica soluzione costante è $x(t) \equiv 0$. Se $x(t)$ è una **soluzione non costante, essa rimane o sempre positiva o sempre negativa.** Infatti, essendo continua e definita su un intervallo, se cambiasse segno dovrebbe annullarsi in un certo istante t_0 e quindi $x(t)$ sarebbe una soluzione **non costante** del problema di Cauchy

$$x' = a(t)x\,, \qquad x(t_0) = 0\,.$$

Cioè, questo problema avrebbe sia la soluzione non costante $x(t)$ che la soluzione identicamente nulla. Il Teorema 165 mostra che ciò non può essere, e quindi che $x(t)$ non si annulla: o prende valori solamente positivi oppure prende valori solamente negativi. Dunque, possiamo dividere per $x(t)$ ottenendo

$$a(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log|x(t)|\,.$$

Sia ora $A(t)$ una primitiva di $a(t)$. Allora vale

$$\log|x(t)| = A(t) + c \quad \text{ossia} \quad |x(t)| = e^c e^{A(t)}\,.$$

Il numero c è **qualsiasi** e quindi il numero $k = e^c$ è un numero **positivo qualsiasi:**

$$|x(t)| = ke^{A(t)}\,, \qquad k > 0\,.$$

Ma, $x(t)$ ha segno costante, e quindi abbiamo

$$\boxed{\text{per ogni } t \text{ vale } x(t) = |x(t)| \text{ oppure } x(t) = -|x(t)|.}$$

Dunque avremo

$$x(t) = +ke^{A(t)} \qquad \text{oppure} \qquad x(t) = -ke^{A(t)} .$$

In definitiva,

$$x(t) = ke^{A(t)}$$

con $k = \pm e^c$ **reale qualsiasi, non nullo.** Si noti che la soluzione $x(t) \equiv 0$ non si è ritrovata. Però, noi sappiamo che $x(t) \equiv 0$ è una soluzione dell'equazione e quindi possiamo permettere a k di prendere il valore 0, trovando

$$x(t) = ke^{A(t)} \qquad k \textbf{ reale qualsiasi} \tag{8.9}$$

come espressione di **tutte** le soluzioni. ■

Si noti il ruolo particolare delle soluzioni costanti: talvolta queste non si ritrovano nell'integrale generale. Può essere possibile farvele comparire forzando la costante ad assume dei valori che non potrebbe assumere. Talvolta invece ciò non può farsi. Per questa ragione, le soluzioni costanti si chiamano anche $\boxed{\textit{soluzioni singolari}}$ Un'altra applicazione importante del Teorema 165 è che spesso permette di tracciare qualitativamente il grafico delle soluzioni, senza risolvere l'equazione differenziale, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 169 Consideriamo l'equazione differenziale[2]

$$y' = (1 - x^2) \sin y$$

Il Teorema 165 permette immediatamente di concludere che le soluzioni sono tutte funzioni limitate. Infatti, quest'equazione ha infinite soluzioni costanti, che "affettano" il piano in strisce parallele:

$$y(x) = k\pi \,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ovviamente queste soluzioni sono limitate. Sia $y(x)$ un'altra soluzione. Il punto $(x_0, y(x_0))$ del suo grafico starà in una striscia

$$\{(x, y) \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,, \quad k\pi < y < (k+1)\pi\} \,.$$

Il grafico della soluzione non può uscire da questa striscia altrimenti, per il teorema dei valori intermedi, dovrebbe intersecare il grafico di una delle soluzioni costanti; e ciò non può essere per il Teorema 165. In realtà può

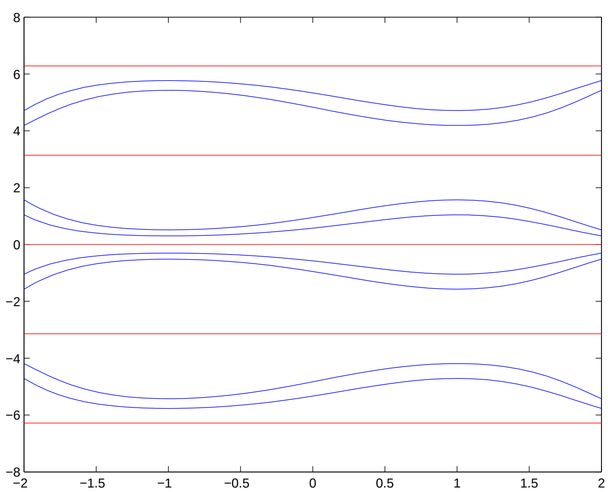
[2] di proposito qui cambiamo le lettere usate per la soluzione e per la variabile indipendente.

dirsi anche di più: consideriamo una soluzione il cui grafico sta nella striscia $0 < y < \pi$ (le altre strisce si trattano in modo analogo). In questa striscia, $\sin y > 0$ e quindi avremo

$$y'(x) > 0 \qquad \text{se e solo se } (-1 < x < 1)\,.$$

Dunque, una soluzione $y(x)$ (il cui grafico è in questa striscia) decresce per $x < -1$ e per $x > 1$. In particolare, $x = -1$ è punto di minimo ed $x = +1$ è punto di massimo delle soluzioni. Note queste informazioni, non è difficile disegnare qualitativamente il grafico della soluzione. I grafici di alcune soluzioni sono in figure 8.2. ■

Figura 8.2: Grafici di soluzioni dell'equazione dell'esempio 169



Infine, consideriamo l'esempio seguente, che mostra che il problema di Cauchy (8.5) in generale ha più soluzioni, ovviamente quando la funzione $f(x)$ non è di classe C^1:

Esempio 170 Si consideri il problema di Cauchy

$$x' = \sqrt[3]{x}\,, \qquad x(1) = 0\,.$$

Ovviamente,

$$x(t) = 0$$

risolve questo problema. Si verifichi che anche la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \left[\frac{2}{3}(t-1)\right]^{3/2} & \text{se } \ t \geq 1 \\ 0 & \text{se } \ t < 1 \end{cases}$$

risolve il medesimo problema di Cauchy. ■

8.2.2 Domini massimali di soluzione

Per definizione, il dominio di una soluzione di un'equazione differenziale deve essere un intervallo (limitato o meno). Può venire il dubbio che nel caso in cui il membro destro di un'equazione a variabili separabili sia regolare il dominio debba essere $\mathbb{R}$. E' importante sapere che ciò **è falso.**

Esempio 171 Consideriamo il problema di Cauchy

$$x' = 1 + x^2\,, \qquad x(t_0) = x_0\,.$$

Ricordando che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan(t+c) = 1 + \tan^2(t+c)$$

si vede immediatamente che la soluzione di questo problema di Cauchy è

$$x(t) = \tan\left((t-t_0) + \arctan x_0\right)$$

definita sull'intervallo

$$t_0 - \frac{\pi}{2} - \arctan x_0 < t < t_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan x_0\,.$$

La soluzione ha per dominio un intervallo limitato, nonostante il fatto che il secondo membro dell'equazione non dipenda esplicitamente da t, e sia una funzione di classe C^∞. **Il dominio della soluzione cambia al variare di t_0, e questo è ovvio; ma, fissato il valore di t_0, cambia anche al variare di x_0.** ■

Naturalmente, una soluzione definita su un intervallo (a,b) è anche soluzione su qualsiasi sottointervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$. L'interesse di quest'osservazione si vede leggendola al contrario: può essere che si riesca ad identificare un intervallo (c,d) su cui la soluzione è definita, ma che questo non sia il massimo intervallo su cui la soluzione è definita. Tale massimo intervallo si chiama $\boxed{\textit{dominio massimale}}$ della soluzione. E' molto facile verificare se un intervallo su cui abbiamo trovato una soluzione è dominio massimale o meno. Torniamo a considerare le soluzioni dell'equazione dell'Esempio 171. Queste divergono per x tendente agli estremi dell'intervallo su cui sono definite. Ciò avviene sempre:

Teorema 172 *Si consideri l'equazione differenziale*

$$x' = g(t)f(x) .$$

Supponiamo che $g(t)$ sia continua su $\mathbb{R}$ e che $f(x)$ sia derivabile (e quindi continua) su $\mathbb{R}$. Consideriamo la soluzione che verifica

$$x(t_0) = x_0 .$$

Sia (S, T) il dominio massimale della soluzione e sia $T < +\infty$. Allora,

$$\lim_{t \to T-} |x(t)| = +\infty .$$

Proprietà analoga vale per $t \to S+$ se $S > -\infty$.

Di conseguenza:

- se troviamo una soluzione definita su (a, b) con $-\infty < a < b < +\infty$ e che non diverge per t tendente ad uno dei due estremi dell'intervallo, questo intervallo non è il dominio massimale della soluzione;
- le soluzioni dell'equazione differenziale dell'Esempio 169, essendo limitate, sono definite su $\mathbb{R}$.

Una soluzione definita su $\mathbb{R}$ può avere limite o meno per $t \to +\infty$ oppure per $t \to -\infty$. Per tracciare qualitativamente il grafico di soluzioni di equazioni differenziali, è utile conoscere il risultato seguente:

Teorema 173 *Sia $f(x)$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine autonoma*

$$x' = f(x) .$$

Sia $x(t)$ una sua soluzione definita su una semiretta. Se

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = l \in \mathbb{R} \qquad \textit{(oppure } \lim_{t \to -\infty} x(t) = l \in \mathbb{R}\textit{)} .$$

Allora,

$$f(l) = 0 .$$

Ossia, **le soluzioni di equazioni differenziali *autonome del primo ordine,* con secondo membro regolare, se ammettono limite per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$, convergono al valore di una soluzione costante.**

8.3 Le equazioni differenziali lineari

La seconda classe di equazioni che vogliamo trattare è quella delle equazioni differenziali lineari, limitandoci ai casi:

- equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$x' = a(t)x + f(t)$$
col coefficiente $a(t)$ e termine noto $f(t)$ funzioni anche non costanti (assumeremo continue, ma basta che siano dotate di primitiva anche in senso generalizzato);
- equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti
$$x'' + bx' + cx = f(t)$$
con b e c costanti (mentre $f(t)$ non è costante; assumeremo per semplicità che sia continua, ma basta che sia dotata di primitiva anche in senso generalizzato). Il metodo che vedremo per le equazioni del secondo ordine si applica anche ad equazioni differenziali lineari di ordine più alto, purché a coefficienti costanti:
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdot + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)\,.$$

8.3.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Studiamo l'equazione
$$x' = a(t)x + f(t)\,. \tag{8.10}$$
Ricordiamo che quest'equazione si dice $\boxed{\textit{completa}}$ o $\boxed{\textit{affine}}$ se $f(t) \neq 0$ e che l'equazione differenziale lineare $\boxed{\textit{omogenea ad essa associata}}$ è quella che si ottiene ponendo $f(t) = 0$, ossia è
$$x' = a(t)x\,. \tag{8.11}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili e si è già risolta all'Esempio 168. Ogni sua soluzione ha forma
$$x(t) = ke^{A(t)}$$
ove $A(t)$ è una qualsiasi primitiva di $a(t)$. Se vogliamo la soluzione che verifica $x(t_0) = x_0$ sceglieremo
$$k = e^{-A(t_0)}x_0 \quad \text{e quindi} \quad x(t) = e^{A(t)-A(t_0)}x_0\,.$$

Nel caso particolare in cui $a(t) \equiv a$ è costante, una delle primitive è at e quindi le soluzioni sono

$$x(t) = ke^{at}$$

Risolviamo ora l'equazione completa. Presentiamo i calcoli nel caso in cui $a(t) \equiv a$ è costante. In modo del tutto analogo troveremo la soluzione anche nel caso del coefficiente variabile. Prima di tutto scriviamo la (8.10) come

$$x' - ax = f(t)\,.$$

Poi moltiplichiamo i due membri per e^{-at}:

$$e^{-at}x' - ae^{-at}x = e^{-at}f(t)\,.$$

L'espressione a sinistra è la derivata di un prodotto e quindi si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-at}x(t) = e^{-at}f(t)\,.$$

Dunque, una primitiva del membro destro e una del membro sinistro differiscono per una costante (ricordiamo che stiamo lavorando su un intervallo):

$$e^{-at}x(t) = k + \int_c^t e^{-as}f(s)\,\mathrm{d}s$$

ossia

$$x(t) = e^{at}k + e^{at}\int_c^t e^{-as}f(s)\,\mathrm{d}s$$

ove k è un qualsiasi numero reale. Quando $a = a(t)$ calcoli del tutto analoghi portanto a trovare la formula seguente per la soluzione. In questa formula, $A(t)$ è una qualsiasi primitiva di $a(t)$:

$$x(t) = e^{A(t)}k + e^{A(t)}\int_c^t \left[e^{-A(s)}f(s)\right]\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.12}$$

Osserviamo ora questa formula, notando in particolare due fatti importanti.

Fatto 1

La formula (8.12) mostra che $x(t)$ è somma di due addendi. Il primo è

$$e^{A(t)}k\,.$$

Al variare della costante arbitraria k quest'addendo dà **tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.** Il secondo è

$$e^{A(t)}\int_c^t \left[e^{-A(s)}f(s)\right]\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.13}$$

Questa è una **particolare** soluzione dell'equazione completa (quella che si annulla per $t = c$). Dunque: l'integrale generale di (8.10) si ottiene scegliendo una soluzione particolare dell'equazione (8.10) stessa e sommandogli **tutte** le soluzioni dell'omogenea associata (8.11).

Fatto 2

Se accade che il termine affine è combinazione lineare di due funzioni

$$\alpha f(t) + \beta g(t)$$

allora

$$\int_c^t e^{A(s)}\left(\alpha f(s) + \beta g(s)\right)\,\mathrm{d}s = \alpha\int_c^t e^{A(s)}f(s)\,\mathrm{d}s + \beta\int_c^t e^{A(s)}g(s)\,\mathrm{d}s$$

si ricordi la *proprietà di linearità del calcolo delle primitive.* Dunque, quando il termine noto è somma di funzioni più semplici, per trovare una soluzione particolare si possono trovare soluzioni particolari corrispondenti ai singoli addendi, e poi sommarle. Introduciamo ora i termini seguenti: il membro destro di (8.12) si chiama *integrale generale* di (8.10) mentre la funzione in (8.13) si chiama *integrale particolare* di (8.10). Ciò che abbiamo notato è particolarmente importante, e vale la pena di evidenziarlo:

> Per trovare l'integrale generale dell'equazione completa (8.10) si calcola, in qualunque modo, anche semplicemente per tentativi, una soluzione particolare dell'equazione (8.10) stessa e le si sommano **tutte** le soluzioni dell'omogenea associata (8.11). Quando il termine noto è somma di più addendi, una soluzione particolare si trova ricercando soluzioni particolari relative ai singoli addendi, e quindi sommandole.

8.3.2 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricordiamo che il problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine è il problema

$$x' = a(t)x + f(t)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,. \tag{8.14}$$

Supponiamo che $f(t)$ sia definita su $\mathbb{R}$. Allora, **questo problema ammette soluzione unica, definita su $\mathbb{R}$.** Essa si ottiene imponendo l'uguaglianza

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{ossia} \quad x_0 = e^{A(t_0)}k + e^{A(t_0)} \int_c^{t_0} \left[e^{-A(s)} f(s)\right] \,\mathrm{d}s\,.$$

In particolare, se si è scelto $c = t_0$ e come primitiva $A(t)$ quella che si annulla in t_0, basta scegliere $k = x_0$. Ciò completa quanto si può dire in generale sull'equazione differenziale lineare del primo ordine. Però in pratica è importantissimo saper trattare col minimo di calcoli alcuni casi particolari, che ora andiamo a vedere. Si tratta di equazioni col coefficiente costante e termine noto di tipo particolare, che si incontra frequentemente nelle applicazioni alla fisica.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del primo ordine, a coefficienti costanti

Vogliamo dare dei metodi semplici per calcolare una soluzione particolare dell'equazione

$$x' = ax + f(t)$$

(con coefficiente a costante) quando il termine noto $f(t)$ ha forma particolare. Esaminiamo i casi che interessano:

Il caso $f(t) = 1$ ed $a \neq 0$ In questo caso, si ricerchi una soluzione di forma $x(t) = c$, costante. Sostituendo nei due membri dell'equazione si vede che deve essere

$$0 = ac + 1 \qquad \text{ossia } c = -1/a\,.$$

Dunque, se $f(t) = \alpha$, costante, una soluzione particolare è

$$x(t) = -\frac{\alpha}{a}\,.$$

La forma esplicita della soluzione non va ricordata, nè in questo caso né nei successivi. Bisogna invece capire il procedimento in modo da poterlo usare correttamente, ricavando volta per volta l'espressione della soluzione particolare.

Il caso $f(t) = t$ ed $a \neq 0$ Si ricerchi una soluzione di forma

$$x(t) = ct + d\,.$$

Sostituendo nei due membri dell'equazione si vede che deve aversi

$$c = act + ad + t \qquad \text{e quindi } c = -1/a,\ d = -1/a^2.$$

Il caso $f(t)$ polinomio ed $a \neq 0$ Procedendo per sostituzione, come nei casi precedenti, si vede che una soluzione è **un polinomio dello stesso grado di $f(t)$.**

Il caso $f(t) = 1$ ed $a = 0$. In questo caso l'equazione è

$$x' = 1$$

e le sue soluzioni si ottengono semplicemente calcolando primitive, $x(t) = t+c$. Conviene però cercare di procedere come nei casi precedenti, per capire meglio il metodo. In questo caso, $x(t) = \alpha$ non risolve l'equazione completa, infatti, $x(t) = \alpha$ **risolve l'equazione omogenea.** Sostituendo si trova infatti

$$0 = a\alpha + 1 = 0 \cdot \alpha + 1$$

e l'uguaglianza non può valere. Però, se si prova a sostituire

$$x(t) = \alpha t$$

si trova

$$\alpha = 0 \cdot (\alpha t) + 1$$

e ora l'uguaglianza vale con $\alpha = 1$. Ossia **in questo caso la soluzione è un polinomio, di grado 1 invece che di grado 0.**

Il caso $f(t)$ polinomio ed $a = 0$ Procedendo come sopra, si vede che una soluzione particolare è un polinomio, di grado $n+1$ se il termine noto $f(t)$ ha grado n. I coefficienti del polinomio si ricavano sostituendo nei due membri e richiedendo che i due membri siano uguali (alternativamente ed in modo più semplice, calcolando le primitive dei due membri).

Il caso $f(t) = e^{bt}$ con $b \neq a$ In questo caso, una soluzione particolare ha forma

$$x(t) = \alpha e^{bt} \qquad \alpha = \tfrac{1}{b-a}$$

come si vede immediatamente sostituendo nei due membri dell'equazione.

Il caso $f(t) = e^{bt}$ con $b = a$ In questo caso, $x(t) = \alpha e^{bt} = \alpha e^{at}$ risolve l'equazione omogenea associata, e quindi non può risolvere l'equazione completa. Infatti, sostituendo si trova

$$\alpha a e^{at} = a\alpha e^{at} + e^{at} \qquad \text{ossia} \qquad 0 = e^{at}$$

uguaglianza **ovviamente falsa.** Una soluzione particolare però si trova scegliendo

$$x(t) = te^{at}\,,$$

come si vede immediatamente sostituendo nei due membri dell'equazione.

Il caso $f(t) = p(t)e^{bt}$ con $p(t)$ polinomio. Vanno esaminati separatamente due casi:

caso $a \neq b$**:** una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$x(t) = q(t)e^{bt}$$

ove $q(t)$ è un **polinomio dello stesso grado di $p(t)$.**

caso $a = b$**:** una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$x(t) = q(t)e^{at} \tag{8.15}$$

ove $q(t)$ è un **polinomio di grado $n + 1$ se n è il grado di $p(t)$.** I coefficienti del polinomio si ricavano sostituendo nei due membri e richiedendo che i due membri siano uguali.

Nei casi particolari precedenti, un'attenzione particolare è necessaria quando il temine forzante $f(t)$ ha forma $p(t)y(t)$, con $p(t)$ polinomio ed $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea associata (e quindi $y(t)$ multiplo di e^{at}). In tal caso una soluzione particolare ha forma $y(t) = q(t)e^{at}$ ove $q(t)$ è un polinomio il cui grado supera di 1 quello di $p(t)$.

Osservazione 174 Quest'osservazione semplifica un po' i calcoli nel caso $a = b$: il termine costante q_0 del polinomio $q(t)$ conduce a $q_0 e^{at}$ che è una soluzione dell'equazione lineare omogenea associata e quindi possiamo limitarci a lavorare con polinomi $q(t)$ privi di termine costante; ossia, possiamo sostituire la (8.15) con

$$x(t) = tq_1(t)e^{at}$$

con $q_1(t)$ polinomio dello stesso grado di $p(t)$. ■

Notiamo ciò che hanno in comune i casi particolari precedenti: il termine noto appartiene ad un insieme $\mathcal{S}$ di funzioni, che gode di questa proprietà: le derivate di elementi di $\mathcal{S}$ sono ancora elementi dell'insieme; e inoltre, moltiplicando elementi di $\mathcal{S}$ si trovano altri elementi di $\mathcal{S}$. L'insieme $\mathcal{S} = \{\alpha \sin \omega t\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ non ha questa proprietà di invarianza, perché la derivata di $\sin \omega t$ è $\omega \cos \omega t$. Però, l'insieme $\mathcal{S} = \{\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t\}$ (con α e β reali qualsiasi) gode della proprietà detta sopra. E quindi:

Il caso $f(t) = \sin \omega t$ In questo caso una soluzione particolare è

$$x(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$$

come si vede sostituendo nell'equazione: per avere una soluzione, l'uguaglianza seguente deve valere per ogni t:

$$\alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t = a\alpha \sin \omega t + a\beta \cos \omega t + \sin \omega t \,.$$

Ciò accade se

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\omega = a\beta \\ -\beta\omega = a\alpha + 1 \end{array} \right. \qquad \text{ossia} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{a}{\omega^2+a^2} \\ \beta = -\frac{\omega}{\omega^2+a^2} \,. \end{array} \right.$$

In modo analogo si tratta il caso $f(t) = \cos \omega t$ ed i casi in cui il termine noto è combinazione lineare di polinomi moltiplicati per seni e coseni.

8.3.3 L'equazione differenziale lineare del secondo ordine

Premettiamo un'osservazione importante sull'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine, a coefficiente costante:

Si è già notato che le soluzioni dell'equazione

$$x' = ax$$

sono tutte e sole le funzioni $x(t) = ke^{at}$. Qui, a è costante. L'osservazione che ci interessa è che sia a che la costante k possono essere sia reali che complessi, si veda il paragrafo 7.6. Consideriamo ora le soluzioni di

$$x' = ax + be^{ct}$$

con a, b e c **numeri complessi** $\boxed{\textbf{ed } a \textbf{ diverso da } c}$**.** Un calcolo analogo a quello fatto nel caso reale mostra che le soluzioni sono le funzioni

$$ke^{at} + \gamma e^{ct}$$

(sostituendo nell'equazione si trova $\gamma = b/(c-a)$).

Passiamo ora a capire come sia possibile risolvere equazioni lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenee o meno. Per questo indichiamo con D l'operazione di fare la derivata e consideriamo un'equazione data in questa forma

$$(D - m_1)(D - m_2)x = f(t) . \tag{8.16}$$

Spieghiamo cosa si intende con questa notazione. Con $(D - m_2)x$ intendiamo

$$(D - m_2)x(t) = Dx(t) - m_2 x(t) = x'(t) - m_2 x(t)$$

A quest'espressione applichiamo $D - m_1$, ossia

$$\begin{aligned}(D - m_1)\left[(D - m_2)x\right] &= (D - m_1)\left[x'(t) - m_2 x(t)\right] \\ &= D\left[x'(t) - m_2 x(t)\right] - m_1\left[x'(t) - m_2 x(t)\right] \\ &= \left[x''(t) - m_2 x'(t)\right] - \left[m_1 x'(t) - m_1 m_2 x(t)\right] .\end{aligned}$$

Dunque, la (8.16) è niente altro che l'equazione di secondo ordine

$$x'' - (m_1 + m_2)x' + m_1 m_2 x = f . \tag{8.17}$$

Come risolvere la (8.16) è immediatamente evidente. Si introduca il simbolo $y(t)$ per indicare la funzione (ancora incognita)

$$y(t) = (D - m_1)x(t) .$$

Allora, la funzione $y(t)$ deve risolvere l'equazione differenziale

$$y' - m_2 y = f(t)\,, \tag{8.18}$$

equazione che sappiamo risolvere. Calcolata $y(t)$, la soluzione $x(t)$ di (8.16) si ottiene semplicemente risolvendo

$$x' - m_1 x = y(t)\,. \tag{8.19}$$

Questi sono calcoli che già sappiamo fare, con m_1, m_2 sia reali che complessi. Ma ora, se l'equazione da risolvere è data nella forma

$$x'' + bx' + cx = f(t)\,, \tag{8.20}$$

si sa come ridurla alla forma (8.16): si risolve l'equazione

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{8.21}$$

ottenendo le due soluzioni m_1 ed m_2, che saranno numeri reali oppure complessi. Si sa che queste soluzioni verificano

$$m_1 + m_2 = -b\,, \qquad m_1 m_2 = c$$

e quindi la (8.20) è niente altro che la (8.16), con questi numeri m_1 ed m_2; e quindi si sa come risolvere **tutte** le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, del secondo ordine. In questo contesto, l'equazione (8.21) si chiama l'*equazione caratteristica* dell'equazione differenziale e le sue soluzioni si chiamano *autovalori* dell'equazione differenziale.

Si ricordi che se i coefficienti b e c sono reali, gli autovalori possono essere sia reali che complessi, coniugati l'uno dell'altro.

Osservazione 175 Si parla di "equazione caratteristica" ed "autovalore" anche nel caso delle equazioni lineari del primo ordine. Nel caso di $x' = ax$, l'equazione caratteristica è $\lambda - a = 0$ e l'unico autovalore è a. In particolare, è reale se il coefficiente è reale. ■

E' del tutto ovvio che un metodo di fattorizzazione analogo si possa applicare a tutte le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, di qualsiasi ordine. A noi non interessa scrivere esplicitamente una formula per le soluzioni dell'equazione (8.20). La (8.20) in generale si risolve risolvendo prima la (8.18) e poi la (8.19). Interessa piuttosto conoscere il risultato seguente, che è semplice conseguenza dei **fatti 1–3** studiati per le equazioni del primo ordine:

fatto A) le soluzioni di (8.20) si ottengono sommando ad una **soluzione particolare** dell'equazione—comunque trovata—tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata;

fatto B) se il termine noto $f(t)$ è combinazione lineare di due funzioni,

$$f(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$$

una soluzione particolare di (8.20) si ottiene trovando soluzioni particolari con termine noto $g(t)$ ed $h(t)$ e poi combinandole linearmente con i medesimi coefficienti α e β.

Oltre a questo fatto, interessa:

- saper risolvere con prontezza i casi particolari che si incontrano più frequentemente nelle applicazioni;
- saper trovare soluzioni reali nel caso in cui gli autovalori siano numeri complessi e coniugati.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, *omogenee*

Esaminiamo i seguenti casi, che si risolvono applicando i metodi visti per le equazioni lineari del primo ordine con termine noto di tipo particolare.

Caso 1: autovalori reali e distinti. In questo caso, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$\alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t}$$

con α e β arbitrari numeri reali.

Caso 2: autovalori coincidenti. Sia $m = m_1 = m_2$ il valore comune degli autovalori In questo caso, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$\alpha e^{mt} + \beta t e^{mt}$$

con α e β arbitrari numeri reali. Si noti il caso particolare in cui $m_1 = m_2 = 0$. In questo caso la soluzione generale è

$$\alpha + \beta t\,.$$

Caso 3: autovalori complessi e coniugati. In questo caso gli autovalori sono distinti e quindi, risolvendo una dopo l'altra le due equazioni del primo ordine (8.18) e (8.19), si vede che l'integrale generale dell'equazione è

$$x(t) = \alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t} \tag{8.22}$$

con α e β arbitrari numeri che ora potranno essere o reali o complessi. Nella maggior parte delle applicazioni i coefficienti dell'equazione sono reali e quindi m_1 ed m_2 sono tra loro coniugati

$$m_1 = \xi + i\omega\,, \qquad m_2 = \xi - i\omega\,.$$

In tal caso, la (8.22) prende forma

$$x(t) = e^{\xi t}\left\{\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right\}\,.$$

Se α e β sono numeri complessi qualsiasi, queste soluzioni prendono valori complessi. Spesso interessa identificare quelle che prendono valori reali. Dato che $e^{i\omega t}$ ed $e^{-i\omega t}$ sono tra loro coniugate, ciò si ottiene scegliendo anche α e β tra loro coniugati:

$$\alpha = c + id\,, \qquad \beta = c - id\,.$$

Con questa scelta si trova

$$x(t) = e^{\xi t}\left\{2\Re e\,\left[(c+id)e^{i\omega t}\right]\right\} = 2e^{\xi t}\left\{c\cos\omega t - d\sin\omega t\right\}\,.$$

Nei corsi di fisica si preferisce scrivere quest'espressione in una forma diversa. Prima di tutto questa si scrive

$$e^{\xi t}\sqrt{c^2+d^2}\left\{\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\cos\omega t - \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\sin\omega t\right\}\,.$$

I numeri

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\,, \qquad \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

sono le coordinate di un punto della circonferenza trigonometrica e quindi esiste un angolo ϕ tale che

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = \cos\phi\,, \qquad \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sin\phi\,.$$

Dunque,

$$x(t) = Ae^{\xi t}\left\{(\cos\phi)\cos\omega t - (\sin\phi)\sin\omega t\right\} = Ae^{\xi t}\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{8.23}$$

In quest'espressione, A è un numero **non negativo arbitrario.** Anche ϕ è un numero arbitrario ma naturalmente basta **scegliere** $\phi \in [0, 2\pi)$**.** Quando la soluzione $x(t)$ è scritta in forma (8.23), si usa la seguente terminologia:

- il numero A si chiama $\boxed{\textit{ampiezza}}$
- il numero ϕ si chiama $\boxed{\textit{fase}}$
- il numero ω si chiama $\boxed{\textit{frequenza angolare}}$
- il numero $-\xi$ (notare il segno!) si chiama $\boxed{\textit{costante di tempo}}$ del sistema.

Casi particolari di equazioni differenziali lineari del secondo ordine *complete*

Nel caso affine, le soluzioni si trovano risolvendo a catena le due equazioni differenziali del primo ordine (8.18) e (8.19), con calcoli che sappiamo già fare. Consideriamo esplicitamente i casi in cui il termine noto ha forma particolare, e ricerchiamo **soluzioni particolari** dell'equazione. A queste, per ottenere la soluzione generale, dovremo aggiungere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata. ossia

- il caso $f(t) = t^n e^{\gamma t}$

SOMIGLIANZA col caso del primo ordine: ricercheremo soluzioni particolari di forma $p(t)e^{\gamma t}$, con $p(t)$ polinomio di grado n, se γ non è autovalore dell'equazione; altrimenti ricercheremo soluzioni di forma $tp(t)e^{\gamma t}$ se γ è autovalore semplice oppure $t^2 p(t)e^{\gamma t}$ se γ è autovalore doppio. In ambedue i casi, $p(t)$ ha grado n (si veda l'Osservazione 174 per spiegare l'assenza del termine di grado 0 e, nel caso dell'autovalore doppio, anche di grado 1). **DIFFERENZA rispetto al caso del primo ordine:** il procedimento per la ricerca della soluzione particolare ora va fatto due volte, una per l'equazione (8.18) e una seconda volta per (8.19). Ciò spiega perché è possibile che il grado **debba essere aumentato di due unità** invece che di una.

- il caso $f(t) = p(t)e^{\xi t}\sin\omega t$ oppure $f(t) = p(t)e^{\xi t}\cos\omega t$ con $p(t)$ polinomio di grado n.

Nel caso delle equazioni del primo ordine (a coefficienti reali) $\xi + i\omega$ non è mai un autovalore dell'equazione e quindi queste funzioni non sono mai soluzioni dell'equazione; e quindi si ricerca una soluzione particolare in forma

$$q_1(t)e^{\xi t}\sin\omega t + q_2(t)e^{\xi t}\cos\omega t \tag{8.24}$$

con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ polinomi ancora di grado n. **SOMIGLIANZA col caso del primo ordine:** anche nel caso dell'equazione lineare del secondo ordine si ricerca una soluzione di questa stessa forma (8.24) se $\xi + i\omega$ non è autovalore dell'equazione[3]; **DIFFERENZA rispetto al caso del primo ordine:** nel caso del secondo ordine, il numero complesso $\xi + i\omega$ può essere autovalore dell'equazione (necessariamente semplice se i coefficienti sono reali). In questo caso, dovremo aumentare il grado di 1, ricercando una soluzione particolare di forma

$$e^{\xi t}\left[tq_1(t)\sin\omega t + tq_2(t)\cos\omega t\right]$$

con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ polinomi del medesimo grado di $p(t)$.

Quando il termine forzante ha forma $p(t)e^{\xi t}\sin\omega t$ oppure $p(t)e^{\xi t}\cos\omega t$, con $\xi + i\omega$ autovalore dell'equazione, si dice che si presenta il fenomeno della $\boxed{\textit{risonanza}}$ e si dice che il termine forzante è $\boxed{\textit{risonante}}$

8.3.4 Problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Ricapitolando, nel caso di un generico termine noto $f(t)$ (e non solo quando $f(t)$ ha forma particolare) l'$\boxed{\textit{integrale generale}}$ di (8.17) è

$$x(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) + F(t)$$

con $F(t)$ integrale particolare dell'equazione completa ed $u_1(t)$, $u_2(t)$ integrali particolari dell'equazione omogenea associata (questi avranno forme diverse a seconda che gli autovalori siano reali o meno, coincidenti o meno). Il problema di Cauchy per l'equazione del secondo ordine (8.17) consiste nel determinarne una soluzione che soddisfa alle ulteriori $\boxed{\textit{condizioni di Cauchy}}$

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x'(t_0) = x_1\,.$$

Non è difficile mostrare

Teorema 176 *Sia $f(t)$ continua su $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy ammette soluzione unica qualunque siano t_0, x_0 ed x_1 e questa soluzione è definita su $\mathbb{R}$.*

[3] ciò accade in particolare se gli autovalori sono reali.

8.3.5 Il comportamento in futuro e la stabilità

Le applicazioni alla fisica delle equazioni differenziali, lineari o meno, richiedono spesso di poter dedurre informazioni sul comportamento delle soluzioni **in futuro,** ossia per $t \to +\infty$, senza dover preventivamente risolvere l'equazione.

Noi ci limitiamo a considerare questo problema per le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$x' = ax\,, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{8.25}$$

$$x'' + bx' + cx = 0\,, \qquad x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_1\,, \tag{8.26}$$

con coefficienti **reali e costanti.** Si noti: abbiamo esplicitamente assunto che il termine affine sia nullo.

Diamo quindi alcune definizioni **in forma semplificata, valida solamente per le equazioni differenziali (8.25) e (8.26).**

- la soluzione $x(t)$ si dice $\boxed{\textit{oscillante}}$ se per $t > t_0$ si annulla solamente nei punti t_n con
$$\lim t_n = +\infty$$
e inoltre se ove si annulla cambia segno[4].
- l'equazione differenziale si dice $\boxed{\textit{stabile}}$ se ogni sua soluzione rimane limitata su $[t_0, +\infty)$. In tal caso si dice anche che **la soluzione nulla dell'equazione differenziale è stabile.**
- l'equazione differenziale si dice $\boxed{\textit{asintoticamente stabile}}$ (o anche $\boxed{\textit{esponenzialmente stabile}}$) se ogni sua soluzione verifica
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0\,.$$
In tal caso si dice anche che **la soluzione nulla dell'equazione differenziale è asintoticamente (o esponenzialmente) stabile.**

Ripetiamo che se l'equazione da studiare non fosse lineare a coefficienti costanti, queste definizioni andrebbero precisate meglio. Le soluzioni della (8.25) sono le funzioni
$$x(t) = e^{at} x_0\,.$$

[4]quest'ultimo fatto, nel caso delle equazioni differenziali di primo o di secondo ordine, è conseguenza del teorema di unicità di soluzione.

Dunque, ricordando che a è reale, si hanno i risultati compendiati nella tabella 8.1.

Tabella 8.1: Equazioni differenziali del primo ordine omogenee, con coefficiente reale e costante

soluzioni oscillanti		mai
stabilità	quando	$a \leq 0$
stabilità asintotica	quando	$a < 0$

Consideriamo ora l'equazione differenziale (8.26) a coefficienti reali. Introduciamo le notazioni nella tabella 8.2, a sinistra. Ricordiamo infatti che se i coefficienti sono reali, si ha in ogni caso

$$\Re e\, \lambda_1 = \Re e\, \lambda_2 \,.$$

Con queste notazioni, le soluzioni (in forma reale) si esprimono come scritto nella tabella 8.2, a destra mentre i risultati sulla stabilità per l'equazione (8.26), quando i coefficienti sono reali, si leggono nella tabella 8.3.

8.4 Manipolazioni usate nei corsi applicativi

Anche nel contesto delle equazioni differenziali, nei corsi di fisica e di ingegneria verranno usate delle manipolazioni piuttosto "libere", che è bene capire[5]. Prima di tutto consideriamo un modo veloce per risolvere equazioni a variabili separabili. La giustificazione di questo metodo è quella che noi abbiamo illustrato al paragrafo 8.2. Consideriamo quindi l'equazione a variabili separabili

$$x' = g(t)f(x) \qquad \text{ossia} \qquad h(x(t))x'(t) = g(t) \quad \text{ove} \quad h(x) = \frac{1}{f(x)} \,.$$

[5]Si confronti con quanto si è detto al paragrafo 3.4.

Tabella 8.2: Secondo ordine, coefficienti reali e costanti. Sinistra: notazioni. Destra: Equazioni del secondo ordine omogenee, soluzioni

$\Delta = b^2 - 4c > 0$	allora	$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$
$\Delta = b^2 - 4c = 0$	allora	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
$\Delta = b^2 - 4c < 0$	allora	$\lambda_1 = \xi + i\omega = \bar{\lambda}_2\,.$

$\Delta > 0$	$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$
$\Delta < 0$	$A e^{\xi t} \cos(\omega t + \phi)$

Tabella 8.3: Secondo ordine, coefficienti reali e costanti (e quindi $\Re e\,\lambda_1 = \Re e\,\lambda_2$. Se gli autovalori sono reali allora $\lambda_1 = \Re e\,\lambda_1$, $\lambda_2 = \Re e\,\lambda_2$)

soluzioni oscillanti	quando	$\Delta < 0$
stabilità	quando	$\left\{\begin{array}{l} \Re e\,\lambda_1 \le 0\,\Re e\,\lambda_2 < 0 \\ \text{oppure} \\ \Re e\,\lambda_1 = \Re e\,\lambda_2 = 0 \quad \text{ma} \quad \lambda_1 \ne \lambda_2 \end{array}\right.$
stabilità asintotica	quando	$\Re e\,\lambda_1 < 0\,, \quad \Re e\,\lambda_2 < 0$ (non si esclude $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)

Come si è visto, per trovarne le soluzioni, basta notare che

$$h(x(t))x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t))$$

ove $H(x)$ è primitiva di $h(x)$. E dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(t)$$

con $G(t)$ primitiva di $g(t)$. Ora calcoliamo le primitive dei due membri. Il simbolo usato per indicare le primitive di $H(x)$ è

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x + c$$

e pensando di fare la sostituzione $x = x(t)$ (con $x(t)$ soluzione di cui ancora non conosciamo l'esistenza) si trova

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x(t))\,\mathrm{d}x(t) = \int h(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Leggendo il primo e l'ultimo termine si trova che basta uguagliare

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

e poi sostituire x con la funzione incognita $x(t)$, Se uno dimentica che il segno di primitiva è $\int\,\mathrm{d}x$, da intendere come un unico simbolo indivisibile, potrebbe sembrargli che questa formula sia stata ottenuta intendendo $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; "moltiplicando per $\mathrm{d}t$" i due membri dell'equazione differenziale e poi mettendo davanti a tutto il simbolo $\int$, operazioni prive di senso. Nelle applicazioni, spesso si devono considerare *sistemi* di equazioni differenziali. Per esempio, si considera il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y)\,. \end{cases}$$

L'incognita è la coppia di funzioni $(x(t), y(t))$, dipendente da una variabile t che, come al solito, non si indica esplicitamente. Usando la notazione di Leibniz, la variabile "nascosta" $t$viene esplicitamente indicata almeno nel membro sinistro, e il sistema si scrive

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y)\,. \end{cases} \tag{8.27}$$

A questo punto i fisici dividono un'equazione per l'altra e "semplificano" $\mathrm{d}t$, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \qquad \text{ossia} \qquad y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

una sola equazione nell'incognita y, e con la x che è la variabile indipendente. La spiegazione di questo procedimento è la seguente: supponiamo di aver trovato una soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema (8.27). **Se accade che** $x'(t_0) \neq 0$ allora, **almeno localmente, in un intorno di** t_0**,** la funzione $t \mapsto x(t)$ è strettamente monotona e quindi invertibile. La sua funzione inversa $t = t(x)$ ha derivata

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \qquad \text{con } x = x(t).$$

Si può quindi costruire la funzione composta $y(t(x))$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(t(x)) = y'(t(x)) \frac{1}{x'(t(x))} \,.$$

I valori di t e di x sono correlati da

$$x = x(t) \qquad \text{ossia} \qquad t = t(x)$$

e quindi (almeno localmente) $y(t(x))$ è funzione della sola x, che viene indicata come $y(x)$, "nascondendo" t. Quindi

$$\text{scrivendo } y(x) \text{ per } y(t(x)) \text{ si ha} \qquad y' = y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \,.$$

Va tenuto presente però che, a differenza delle pratiche descritte al paragrafo 3.4, questo procedimento ha senso soltanto in un intorno di un punto assegnato: in generale, un dato iniziale (x_0, y_0) per cui $f(x_0, y_0) \neq 0$ (oppure $g(x_0, y_0) \neq 0$, scambiando x con y) e che il risultato è corretto finché la traiettoria non incontra un punto in cui $f(x, y)$ si annulla. Però, non c'è nessun modo di capire se e quando ciò accadrà, guardando il dato iniziale.

8.5 Alcuni esercizi

1. Dire quali delle equazioni differenziali seguenti sono scritte in forma normale, quali sono a variabili separate e quali sono lineari:

$$x^2 y' = (\log x) y + \sin x \,, x(y')^2 = (\log x) y + \sin x \,, \quad x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (y)^2 = (\log x) y + \sin x \,,$$
$$x' = x^2 \sin t \,, x' = x \sin t \,, \qquad x' = x \sin t + \cos t \,.$$

2. Identificare le soluzioni costanti delle equazioni differenziali a variabili separabili seguenti, e spiegare se esse possono usarsi per studiare la limitatezza delle altre soluzioni

$$\begin{array}{rr} x' = (t^3-1)(x^3-1)\,, & y' = (t^3-1)(y^2-1)\,, \\ x' = (t^2-1)(x^2-1)\,, & y' = y(y^2-1)(x^2-4)\,, \\ y' = x(y^2-1)(x^2-4)\,, & y' = xy^2(y^2-1)(x^2-4)\,. \end{array}$$

   E' possibile avere anche qualche informazione sulla monotonia delle soluzioni?

3. Sapendo che $x(t)$ verifica

$$x' = 3x^2 - \sin t\,, \qquad x(0) = 1$$

   calcolarne le derivate prima, seconda e terza per $t = 0$.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = -2x^2\,.$$

   Sia $x(t)$ la soluzione che verifica $x(0) = 1$. Si vuol sapere se esitono valori di $\alpha > 1$ tali che questa soluzione verifichi anche $x(1) = \alpha$. Si vuol sapere inoltre se esistono valori di $\beta > 0$ tali che la soluzione $x(t)$ verifichi $x'(1) = \beta$.

5. Si determinino i domini massimali delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy. L'equazione differenziale è $x' = -2x^2$ mentre la condizione di Cauchy è una delle seguenti:

$$\begin{array}{rr} x(0) = 0\,, x(1) = 0\,, & x(0) = 1\,, \\ x(1) = 1\,, x(1) = 2\,, & x(1) = -2\,. \end{array}$$

6. Si consideri l'equazione del moto armonico

$$mx'' = -kx \tag{8.28}$$

   ($m > 0$ indica la massa e $k > 0$ è la costante elastica). Moltiplicando ambedue i membri per $x'(t)$ si trovi la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ costante.}$$

   Si interpretino i due addendi che figurano in quest'uguaglianza.

7. Si sappia che una funzione $x(t)$ definita su un intervallo verifica

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left(x'(t)\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2(t) = E = \text{ costante.} \qquad (8.29)$$

Si mostri che la funzione $x(t)$ risolve l'equazione del moto armonico (8.28). Quindi le due equazioni (8.28) e (8.29) "sono equivalenti" nel senso che hanno le medesime soluzioni. Si noti però che una è scritta in forma normale e l'altra no.

8. Si considerino le funzioni $y(t) = \alpha t^2$, con α parametro reale.

   (a) Si mostri che ciascuna di queste funzioni risolve l'equazione differenziale $y' = 2y/t$. Si noti che l'equazione differenziale non è definita per $t = 0$, ma le soluzioni dell'equazione hanno estensione continua a $t = 0$. Cosa si nota se si prova ad imporre la condizione di Cauchy $y(0) = 0$?

   (b) Esistono soluzioni dell'equazione che verificano $\lim_{t\to 0+} y(t) = 1$?

9. ($\star$) Per $t > 0$ si consideri l'equazione differenziale $y' = -y/t^2$. Si vuol sapere se esistono soluzioni dell'equazione differenziale tali che $\lim_{t\to 0+} y(t) = +\infty$ oppure $\lim_{t\to 0+} y(t) = c \in \mathbb{R}$.

10. ($\star$) Si vuole un'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ che gode di questa proprietà, che deve valere salvo un numero finito di valori x_0: la tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione incontra l'asse delle ascisse in un punto x che deve verificare $x/x_0 = c$, con c numero indipendente da x_0 (se $c = 2$ si confronti con l'esercizio 15 del Cap. 3).

11. ($\star$) Per $t > 0$ si consideri l'equazione differenziale $y' = -(\tan y)/t^2$. Si imponga la condizione $y(1) = \pi/2$ (si noti che il secondo membro non è definito per $y = \pi/2$. Si mostri che esiste una soluzione che verifica questa condizione, ma che il suo dominio di esistenza massimale non è un intervallo aperto.

12. Al variare del parametro reale α si studi la stabilità dell'equazione differenziale $y'' = -y - \alpha y'$.

13. Si consideri l'equazione differenziale $y'' = -y - \alpha y' + \sin t$ con $\alpha \neq 0$. Si mostri che una soluzione particolare è $y(t) = -(1/\alpha)\cos t$ e si calcoli una soluzione particolare quando $\alpha = 0$.

14. $(\star)$ Si considerino l'osservazione 166 e l'esempio 170. Si spieghi perchè l'argomento nell'osservazione 166 non si applica al caso dell'esempio 170 (quante soluzioni ha l'equazione $(3/2)x^{2/3} = t$?). Si usi la spiegazione trovata per costruire una terza soluzione del problema di Cauchy all'esempio 170.

15. $(\star)$ Siano $x(t)$ ed $y(t)$ due soluzioni diverse del medesimo problema di Cauchy (8.5), definite sullo stesso intervallo[6] $[t_0, T]$. Calcolando le primitive dei due membri di (8.5), si ha

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(s)f(x(s))\,\mathrm{d}s\,, \qquad y(t) = x_0 + \int_0^t g(s)f(y(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Usando la proprietà di monotonia del calcolo delle primitive (esercizio 21 del Capitolo 4) si ottenga per $0 \le t \le T$

$$|x(t) - y(t)| \le \int_0^t |g(s)|\,|f(x(s)) - f(y(s))|\,\mathrm{d}s\,.$$

Si deduca, usando l'esercizio 23 del Capitolo 4, che

$$|x(t) - y(t)| \le T(HK)M$$

con $M = \max_{[0,T]}|x(t) - y(t)|$, $H = \max_{[0,T]}|g(t)|$, $K = \max_{[0,T]}|f'(x)|$. Si spieghi perché questa disuguaglianza non può valere se il numero T è stato scelto in modo che sia $THK < 1/2$ e se $x(t)$ e $y(t)$ sono diverse. Ciò mostra che, se valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy, i grafici di due soluzioni diverse non possono intersecarsi, nemmeno se una delle due soluzioni è costante (caso non considerato nell'osservazione 166).

16. Si xonsideri il problema di Cauchy $x' = 1/x$, $x(0) = 1$. Si mostri che la soluzione è definita per $t > -1$ e se ne studi il limite per $t \to -1^+$. Si spieghi la relazione di quanto trovato col Teorema 172.

[6] Le soluzioni sono definite su intervalli aperti. Spiegare perché qui è lecito considerare un intervallo chiuso.

Capitolo 9

Integrali definiti ed impropri

Erano tali per me queste angustie che sopraggiunta l'invasione dei Francesi, e nella età di soli 20 anni correndo pericolo della libertà e della vita, in quelli orribili frangenti dicevo fra me "questo tuttavia è meno male che lo stare alla scuola". Monaldo Leopardi, *Autobiografia.*

L'integrale è un numero che si associa ad una funzione definita su un intervallo (e dotata di opportune proprietà). Nel caso che la funzione prenda valori positivi, il suo integrale definisce l'area della parte di piano compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse.

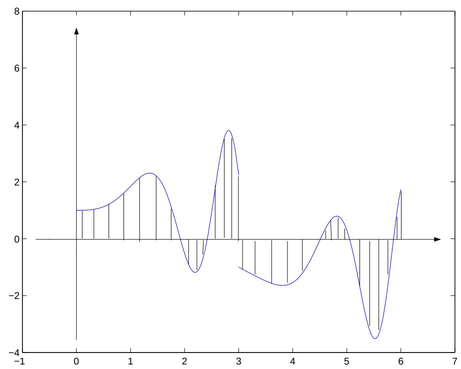
9.1 La definizione dell'integrale

Sia $f(x)$ una funzione **limitata e definita su un intervallo** $[a,b]$**.** Dunque, assumiamo che esista un numero M tale che $|f(x)| < M$ per ogni $x \in [a,b]$. Si noti che **non richiediamo** che la funzione $f(x)$ prenda valori maggiori o uguali a zero. Chiamiamo $\boxed{\textit{trapezoide}}$ individuato dalla funzione $f(x)$ l'insieme dei punti (x,y) tali che

$$a \le x \le b\,, \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) \le y \le 0 & \text{se} \quad f(x) \le 0 \\ 0 \le y \le f(x) & \text{se} \quad f(x) \ge 0\,, \end{array} \right.$$

si veda la figura 9.1, nella quale $[a,b] = [0,6]$. Il trapezoide è la parte di piano tratteggiata. Vogliamo **definire** un numero che corrisponda al concetto

Figura 9.1:



intuitivo di **area** del trapezoide di $f(x)$, se $f(x)$ prende valori non negativi; oppure, in generale, alla **differenza** tra le aree della parte di trapezoide **sopra** l'asse delle ascisse e di quella che sta **sotto.** Per questo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ con un numero finito di punti **equidistanti**[1].

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b\,,$$
$$\text{con } x_k = a + k\tfrac{b-a}{n}, \quad 0 \le k \le n \;\; .$$

In questo modo,

$$[a, b] = [x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}) \cup [x_{n-1}, x_n]\,.$$

Abbiamo cioè costruito una $\boxed{\textit{partizione}}$ di $[a, b]$ di tipo particolare: abbiamo rappresentato $[a, b]$ come unione di intervalli (disgiunti) chiusi a sinistra ed aperti a destra (salvo l'ultimo che è anche chiuso a destra). Indichiamo con $\mathcal{P}_n$ la partizione introdotta sopra e chiamiamo $\boxed{\textit{finezza}}$ della partizione il numero $\delta_n = (b - a)/n$, che è la distanza tra due punti consecutivi della partizione. Data la partizione $\mathcal{P}_n$, indichiamo con m_i ed M_i i numeri

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x)\,, \\ M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x)\,. \end{aligned}$$

Ricordiamo che la funzione $f(x)$ è limitata: $|f(x)| < M$. Dunque, per ogni indice i si ha:

$$-M \le m_i \le M_i \le M\,.$$

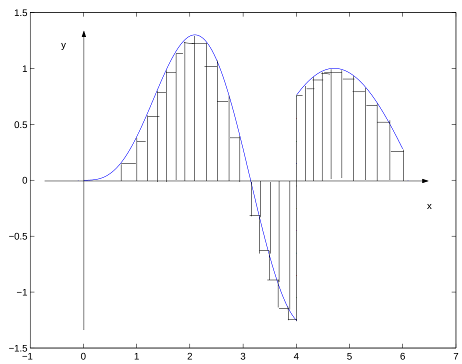
[1]Stiamo presentando una definizione semplificata di integrale. La semplificazione consiste nel richiedere che i punti siano equidistanti. Vedremo in seguito che questa condizione, che semplifica le definizioni (ma non le dimostrazioni, che però verranno omesse), è poco appropriata per il calcolo numerico degli integrali.

Associamo ora alla partizione $\mathcal{P}_n$ due numeri, s_n ed S_n,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,, \\ S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Questi numeri rappresentano somme di "aree" di rettangoli, l'area essendo presa col segno **negativo** se il rettangolo è **sotto l'asse delle ascisse.** La figura 9.2 illustra i rettangoli che si usano per costruire la s_n quando i punti di divisione x_i sono i numeri interi i. Si faccia la figura analoga per S_n. E'

Figura 9.2:



chiaro che

$$-M(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a) \tag{9.2}$$

(la disuguaglianza intermedia segue dal fatto che ciascun addendo di s_n è minore o uguale all'addendo corrispondente di S_n). **Per per la proprietà di Dedekind** esistono i numeri

$$s = \sup_n\{s_n\}\,, \qquad S = \inf_n\{S_n\}\,.$$

Si potrebbe provare che

$$s \le S \qquad \text{ossia} \qquad S - s \ge 0\,. \tag{9.3}$$

Più precisamente:

$$-M(b-a) \le s_n \le s = \sup_n\{s_n\} \le \inf_n\{S_n\} = S \le S_n \le M(b-a)\,.$$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN

Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e **limitata.** Se accade che

$$s = S \qquad \text{ossia} \qquad s = \sup_n \{s_n\} = \inf_n \{S_n\} = S$$

il numero $s = S$ si chiama $\boxed{\textit{integrale di Riemann}}$ (o semplicemente $\boxed{\textit{integrale}}$) di $f(x)$ su $[a, b]$; e la funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{integrabile}}$ su $[a, b]$. L'integrale di Riemann si chiama anche $\boxed{\textit{integrale definito}}$

L'integrale di Riemann di $f(x)$ su $[a, b]$ si indica col simbolo

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 177 Si noti il contrasto tra i termini *integrale definito* ed *integrale indefinito.* Il primo indica un **numero** mentre il secondo indica l'**insieme** di **tutte le primitive** di $f(x)$. ■

Usando la definizione, si verifichi che una funzione costantemente uguale a c su $[a, b]$ ha integrale uguale a $c \cdot (b - a)$, ossia **uguale all'area del rettangolo di base** $[a, b]$ **ed altezza** c**,** se $c \geq 0$; all'opposto dell'area se $c < 0$. L'integrale $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ si interpreta come **area** del trapezoide quando accade che $f(x) \geq 0$; come **differenza** tra l'area della parte di trapezoide che sta **sopra** l'asse delle ascisse e quella che sta **sotto** altrimenti.

Osservazione 178 (Sulla notazione) La notazione $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ ha una ragione storica e va presa come unico blocco: non si possono separare $\int_a^b$ e $\mathrm{d}x$. Anzi, sarebbe anche lecito scrivere semplicemente $\int_a^b f$ invece di $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Il simbolo più complesso aiuta a ricordare certe formule che vedremo, sia in questo che in corsi successivi. Inoltre, sottolineiamo che $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ è **un numero.** La "variabile" x non ha alcun ruolo e si chiama la $\boxed{\textit{variabile muta d'integrazione}}$ "Muta" nel senso che il simbolo prescelto per essa non influisce sul valore dell'integrale, e può essere cambiato a piacere. Quindi,

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b f(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b f(\xi)\, \mathrm{d}\xi\ \ldots$$

E' però importante capire subito un uso della variabile muta d'integrazione e del simbolo $\mathrm{d}x$. Talvolta si ha una famiglia di funzioni $x \mapsto f(x, y)$, una funzione di $x \in [a, b]$ per ogni valore del parametro y. Può essere necessario integrare ciascuna di queste funzioni, ottenendo un numero per ogni valore di y; ossia ottenendo una funzione della variabile y:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \, .$$

E' la presenza della notazione $\mathrm{d}x$ che ci dice quale è la variabile muta d'integrazione e quale è il parametro. ■

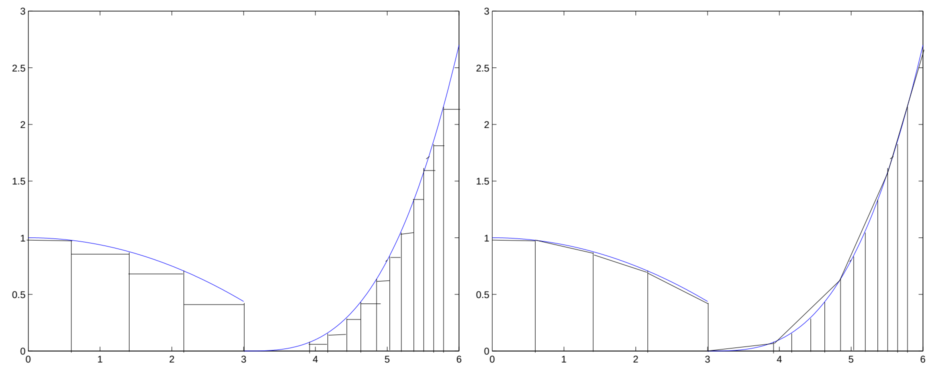
Esempio 179 Quest'esempio mostra la debolezza della definizione che abbiamo scelto: per calcolare

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$$

basta usare **un solo rettangolo.** Non c'è nessun bisogno di suddividere il trapezoide in "tanti" rettangoli. Ciò fa capire che dovendo calcolare numericamente l'integrale di una funzione il cui grafico è quello in figura 9.3, a sinistra, converrà usare una partizione non uniforme dell'intervallo $[a, b]$, mettendo pochi punti di suddivisione dove la funzione è circa costante e tanti punti dove varia velocemente. La figura 9.3, a destra, mostra che un metodo ancora più efficiente consiste nell'approssimare l'area da calcolare mediante trapezi, invece che mediante rettangoli. Nella figura a destra abbiamo disegnato i trapezi usando meno punti di suddivisione di quanti ne avessimo usati per i rettangoli per non confondere il lato del trapezio col grafico della funzione; e ciò nonostante è evidente che l'approssimazione mediante "pochi" trapezi è migliore di quella con "tanti" rettangoli. ■

Una definizione più generale. L'esempio 179 mostra l'utilità per il calcolo numerico di approssimare il valore dell'integrale mediante partizioni dell'intervallo $[a, b]$ ottenute con punti non equidistanti. Si potrà quindi cercare di ripetere la costruzione dell'integrale usando partizioni con punti non equidistanti, costruendo le somme s ed S con formule analoghe a quelle delle s_n ed S_n e mandando a zero la *finezza* della partizione, ossia la massima delle distanze tra i punti consecutivi della partizione. Potrebbe venire il dubbio che in questo modo si ottenga un numero diverso da quello che si trova mediante partizioni con punti equidistanti. Senza indugiare a provarlo, diciamo che ciò non accade.

Figura 9.3:



9.1.1 Proprietà dell'integrale

Le proprietà cruciali dell'integrale sono la **linearità,** la **monotonia** e l'**additività.**

Linearità dell'integrale. In generale si chiama "lineare" una trasformazione che si distribuisce sulla somma e da cui "si portano fuori" le costanti moltiplicative; ossia una trasformazione, diciamo $\mathcal{J}$, con questa proprietà:

$$\mathcal{J}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\mathcal{J}f+\beta\mathcal{J}g\,.$$

L'integrale di Riemann ha questa proprietà. Infatti, vale:

Teorema 180 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili sul medesimo intervallo $[a,b]$ e siano α e β due numeri reali. In tal caso la funzione $\alpha f(x)+\beta g(x)$ è integrabile su $[a,b]$ e inoltre vale*

$$\int_a^b\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

La dimostrazione non è difficile ma un po' macchinosa. Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{linearità dell'integrale}}$ Ricordiamo che

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\}\,,\qquad f_-(x)=\min\{f(x),0\}$$

da cui

$$f(x)=f_+(x)+f_-(x)\,,\qquad |f(x)|=f_+(x)-f_-(x)\,.$$

Si potrebbe provare:

Teorema 181 *La funzione $f(x)$, limitata su (a,b), è integrabile se e solo se sono integrabili ambedue le funzioni $f_+(x)$ ed $f_-(x)$.*

Ciò combinato con la proprietà di linearità dell'integrale dà:

Teorema 182 *Se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora $|f(x)|$ è integrabile su $[a,b]$. Inoltre, valgono le uguaglianze*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx\,,$$
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx\,.$$

Monotonia dell'integrale. E' pressoché immediato dalla definizione di integrale:

Teorema 183 *Sia $f(x)$* integrabile e positiva. *Allora,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Sia ora

$$g(x) \leq f(x) \qquad \text{ossia} \qquad f(x) - g(x) \geq 0\,.$$

Usando la linearità si vede che

$$0 \leq \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dunque:

Corollario 184 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili sul medesimo intervallo $[a,b]$ e se $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora si ha*

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{monotonia dell'integrale}}$ Usando l'integrabilità del valore assoluto (Teorema 182) e la disuguaglianza

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si trova

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Additività dell'integrale. Sia $f(x)$ definita su $[a, b]$ e sia $c \in (a, b)$. Vale

Teorema 185 *La funzione $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ se e solo se è integrabile sia su $[a, c]$ che su $[c, d]$ e in tal caso si ha*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Questa proprietà si chiama $\boxed{\textit{additività dell'integrale}}$ Grazie a questo teorema, possiamo definire la funzione integrale di $f(x)$. Sia $f(x)$ integrabile su $[a, b]$. Per ogni $x \in (a, b]$ calcoliamo la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Poniamo inoltre

$$F(a) = 0$$

cosìche $F(x)$ è definita su $[a, b]$. La funzione $F(x)$ si chiama la $\boxed{\textit{funzione integrale}}$ di $f(x)$.

Integrale ed operazioni. La proprietà di linearità mostra le relazioni tra le operazioni di somma e di moltiplicazione per costanti e il calcolo dell'integrale. Il Teorema 182 mostra che se $f(x)$ è integrabile allora $f_+(x)$, $f_-(x)$ e $|f(x)|$ sono integrabili, senza dare modo di calcolarne l'integrale. Vale anche:

Teorema 186 *Si ha:*

- *se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili su $[a, b]$ anche $f(x)g(x)$ è integrabile su $[a, b]$;*

- *se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili su $[a, b]$ e inoltre se $g(x)$ è continua e non si annulla su $[a, b]$, allora anche $f(x)/g(x)$ è integrabile su $[a, b]$.*

Va detto però che non c'è alcuna relazione semplice tra gli integrali di due funzioni e quello del loro prodotto o del loro quoziente.

9.1.2 Classi di funzioni integrabili

Valgono i due teoremi seguenti:

Teorema 187 *Se $f(x)$ è continua sull'intervallo* limitato e chiuso $[a, b]$, *essa è integrabile su $[a, b]$ e quindi su ciascun suo sottointervallo.*

Teorema 188 *Se $f(x)$ è monotona sull'intervallo* limitato e chiuso $[a, b]$, *essa è integrabile su $[a, b]$ e quindi su ciascun suo sottointervallo.*

Combinando questi teoremi con la proprietà di additività dell'integrale, segue che se l'intervallo $[a, b]$ è unione di due o più sottointervalli su ciascuno dei quali la funzione ha restrizione continua oppure monotona, allora la funzione $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. **Dimostrazione del Teorema 188.** Supponiamo per fissare le idee che la funzione sia crescente su $[a, b]$. Notiamo che la funzione è limitata su $[a, b]$. Infatti vale

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,.$$

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali $[x_i, x_{i+1})$ e consideriamo le somme (9.1), ossia

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)\text{ove } m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1})} f(x),$$
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)\text{ove } M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1})} f(x).$$

cosìche

$$m_i = f(x_i)\,, \qquad M_i \leq f(x_{i+1})\,.$$

Ricordiamo che l'integrale esiste se

$$s = S \quad \text{ove } s = \sup_n\{s_n\},\ S = \inf_n\{S_n\}$$

e che in generale (si veda la (9.3)):

$$0 \leq S - s\,.$$

Dobbiamo quindi provare che **la differenza $S - s$ non è strettamente positiva.** Ossia[2], dobbiamo provare che per ogni $\epsilon > 0$ vale

$$0 \leq S - s < \epsilon\,.$$

[2]si ricordi la proprietà di Archimede.

Notiamo che

$$s_n \le s \le S \le S_n \implies 0 \le S - s \le S_n - s_n\,.$$

Dunque, basta provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un opportuno $N = N_\epsilon$ tale che

$$S_N - s_N < \epsilon\,.$$

Si ricordi che l'intervallo $[a,b]$ si è diviso in n parti uguali, ossia $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}
S_n - s_n &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(M_i - f(x_i)\right) \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots \\
&\quad + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + (f(x_n) - f(x_{n-1}))\Big] = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]\,.
\end{aligned}$$

Queste relazioni valgono per ogni n. Fissato $\epsilon > 0$ esiste N tale che

$$\frac{b-a}{N}\left[f(b) - f(a)\right] < \epsilon$$

e quindi vale

$$0 \le S - s \le S_N - s_N \le \epsilon\,,$$

come volevamo. ■

9.1.3 La media integrale

Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia

$$m = \inf_{[a,b]} f(x)\,, \qquad M = \sup_{[a,b]} f(x)\,.$$

Consideriamo le due funzioni

$$h(x) \equiv m\,, \qquad k(x) \equiv M$$

cosìche

$$h(x) \le f(x) \le k(x)\,.$$

La monotonia dell'integrale mostra che

$$m(b-a) = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x = M(b-a)\,;$$

ossia **esiste** $c \in (m, M)$ **tale che:**

$$c(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il numero c è ovviamente definito da

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La sua proprietà essenziale è di essere compreso tra $\inf_{[a,b]} f(x)$ e $\sup_{[a,b]} f(x)$. Il numero c si chiama la $\boxed{\textit{media integrale}}$ di $f(x)$. Sia ora $f(x)$ **continua** su $[a,b]$. Ricordando il teorema dei valori intermedi si ha:

Teorema 189 *Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, la sua media integrale è uno dei valori della funzione; ossia esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$(b-a)f(x_0) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{ossia} \quad f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Se $f(x) \ge 0$, il significato del numero c, media integrale di $f(x)$ su $[a,b]$, è il seguente: **il numero c è l'altezza del rettangolo di base $[a,b]$, la cui area è uguale a quella del trapezoide.** Ciò è illustrato in figura 9.4. La figura mostra anche la bisettrice del primo quadrante che non ha alcun ruolo nella media integrale. E' disegnata solo per sottolineare il fatto che l'unità di misura è la medesima sui due assi.

9.2 Integrale orientato

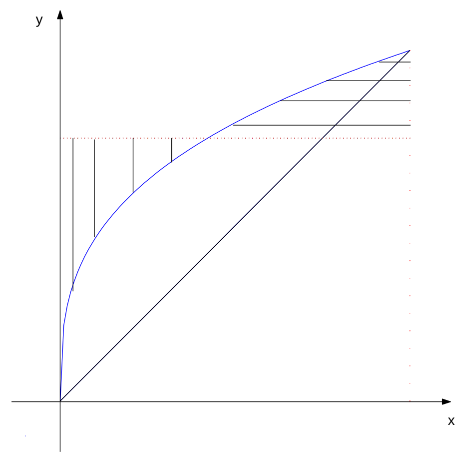
Nel simbolo dell'integrale di Riemann

$$\int_a^b$$

necessariamente $a \le b$. Vogliamo ora definire questo simbolo anche nel caso $a > b$. Ciò si fa semplicemente ponendo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Figura 9.4: La media integrale



Uno dei due membri è definito e l'uguaglianza definisce l'altro. Si noti che se $a = b$ si trova

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

L'integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

cosìintrodotto, senza che debba essere $a \le b$, si chiama $\boxed{\textit{integrale orientato}}$ Per esso valgono tutte le proprietà viste per l'integrale di Riemann, salvo la monotonia che richiede un po' di cautela, perché le disuguaglianze cambiano verso quando si cambia segno ai due membri. Quindi:

la disuguaglianza

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

NON VALE PER L'INTEGRALE ORIENTATO perché il secondo membro può essere negativo ed il primo positivo. Essa va sostituita da

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| .$$

Invece, la definizione della media integrale rimane la stessa anche per l'integrale orientato: la media integrale sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1 è

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s$$

e tale numero è compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori che la funzione prende sull'intervallo di estremi x_0 ed x_1, sia quando $x_0 < x_1$ che quando $x_1 < x_0$.

Invece, per l'integrale orientato vale la proprietà di additività

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

senza alcun vincolo sull'ordine dei tre numeri a, b e c. Usando ciò, si può definire la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

sia per $x \geq a$ che per $x < a$ (ovviamente, se è definita $f(x)$). Infatti

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s & \text{se} x \geq a \\ & (\int_a^x \text{ indica l'integrale di Riemann}), \\ -\int_x^a f(s)\,\mathrm{d}s & \text{se} x < a \\ & (\int_x^a \text{ indica l'integrale di Riemann}). \end{cases}$$

In particolare,

Teorema 190 *Se $f(x) \geq 0$ è definita su $\mathbb{R}$ e* positiva*, la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

è crescente su $\mathbb{R}$.

9.3 La funzione integrale

Ricordiamo che se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ essa è integrabile su ogni sottointervallo. In particolare è integrabile su $[a,x]$ e quindi possiamo definire la funzione integrale di $f(x)$, ossia la funzione

$$F(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \quad x\in(a,b]\,, \qquad F(a)=0\,.$$

Se accade che la funzione $f(x)$ è definita anche a sinistra di a, la funzione integrale si definisce anche a sinistra di a, facendo intervenire l'integrale orientato:

$$\text{se } x<a \text{ allora} \quad F(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s=-\int_x^a f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Se la funzione $f(x)$ ha segno costante, la funzione integrale è monotona:

Teorema 191 *Se $f(x)$ è positiva la funzione integrale è crescente mentre se $f(x)$ è negativa allora la funzione integrale è decrescente.*

Dim. Proviamo la crescenza, supponendo che $f(x)$ sia positiva. Sia $x_1<x_2$ e proviamo che $F(x_1)\le F(x_2)$. Ciò è ovvio se $x_1<a<x_2$ perché in tal caso $F(x_1)\le 0\le F(x_2)$. Quindi consideriamo i due casi $a\le x_1<x_2$ ed $x_1<x_2\le a$:

caso $a\le x_1<x_2$: usando l'additività dell'integrale si ha

$$F(x_2)=\int_a^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\ge\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s=F(x_1)$$

perché $\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\ge 0$.

caso $x_1<x_2\le a$: la definizione di integrale orientato e l'additività dell'integrale danno

$$\begin{aligned}\int_a^{x_1} f(s)\,\mathrm{d}s&=-\int_{x_1}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s=-\left(\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_{x_2}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\\&=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s-\int_{x_2}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+\int_a^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\\&=-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s+F(x_2)\le F(x_2)\end{aligned}$$

perché $x_1<x_2$ e quindi $-\int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s\le 0$. ■

Proviamo il lemma seguente:

Lemma 192 *Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia $x_0 \in [a,b]$. Si ha:*

$$\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds = 0$$

(se $x_0 = a$ allora $h > 0$ mentre se $x_0 = b$ allora $h < 0$).

Dim. Ricordiamo che una funzione integrabile è per definizione limitata:

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dunque si ha

$$0 \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(s)|\, \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M\, \mathrm{d}s \right| = M|h|\,.$$

L'asserto segue dal teorema di confronto dei limiti. ■

Conseguenza di questo risultato è che **la funzione integrale è continua** anche se $f(x)$ può non essere continua:

Teorema 193 *La funzione $F(x)$ è continua su $[a,b]$.*

Dim. Va provato:

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\, \mathrm{d}s \right\} = 0$$

(se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ allora $h > 0$ oppure $h < 0$). L'additività dell'integrale permette di scrivere

$$\begin{aligned} \int_a^{x_0+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\, \mathrm{d}s &= \int_a^{x_0} f(s)\, \mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\, \mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, \mathrm{d}s \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

per il Lemma 192, come si voleva. ■

Proviamo ora:

Lemma 194 *Sia $f(x)$ continua in $x_0 \in [a,b]$. Allora,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds = f(x_0)\,.$$

Dim. Va provato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$ si ha

$$f(x_0) - \epsilon < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s < f(x_0) + \epsilon\,. \tag{9.4}$$

Usando la continuità di $f(x)$ in x_0 si trova: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $s \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha:

$$f(x_0) - \epsilon < f(s) < f(x_0) + \epsilon\,.$$

Scegliamo h con $|h| < \delta$. La monotonia dell'integrale dà (sia se $h > 0$ che se $h < 0$, usando la definizione di integrale orientato):

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \epsilon)\ \mathrm{d}s \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \epsilon)\ \mathrm{d}s$$

ossia, se $|h| < \delta$ si ha

$$f(x_0) - \epsilon \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s \le f(x_0) + \epsilon\,,$$

che è quanto volevamo provare. ■

Se $f(x)$ è una funzione integrabile qualsiasi, la funzione $F(x)$ può non essere derivabile. Invece, se $f(x)$ è continua la funzione $F(x)$ è derivabile:

Teorema 195 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se $f(x)$ è continua su $[a, b]$, la funzione $F(x)$ è derivabile su (a, b) e vale*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)\,, \quad F'_+(a) = f(a)\,, \quad F'_-(b) = f(b)\,.$$

Ossia, *la funzione integrale di una funzione continua* $f(x)$ ammette derivata[3] in ogni punto di $[a, b]$, ed $F'(x)$ è la funzione integranda $f(x)$. Di conseguenza,

Corollario 196 *Ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive.*

Dimostrazione del Teorema 195. La funzione $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e quindi il Lemma 194 può applicarsi in ciascun punto di $[a, b]$. Dunque, per ogni $x \in [a, b]$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[F(x+h) - F(x) \right] = F'(x) \end{aligned}$$

[3]direzionale negli estremi a e b

(intendendo che $F'(x)$ indica la derivata destra se $x = a$ e la derivata sinistra se $x = b$). ■

L'importanza pratica di questo risultato sta nel fatto che, se $f(x)$ è continua, il calcolo dell'integrale definito può ottenersi tramite il calcolo delle primitive. Ossia, la $F(x)$, funzione integrale, è una particolare primitiva di $f(x)$: è quella primitiva che si annulla in a. Ricordiamo ora che due primitive diverse su un intervallo (a, b) di una medesima funzione hanno differenza costante. Quindi, se mediante le tecniche di calcolo delle primitive, si è trovata una **qualsiasi** primitiva $F(x)$ della funzione continua $f(x)$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Lo scarto $F(b) - F(a)$ si indica anche col simbolo

$$F\Big|_a^b$$

e quindi si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^b\,.$$

9.3.1 Integrazione per sostituzione

Il teorema fondamentale del calcolo integrale permette di correlare integrali calcolati mediante trasformazioni del dominio di integrazione. Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua primitiva. Come si è visto,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,. \tag{9.5}$$

Sia $\phi(t)$ una funzione continua su un intervallo $[\alpha, \beta]$ e derivabile su (α, β). Supponiamo inoltre che $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Quindi esistono punti c e d in $[a, b]$ tali che

$$\phi(\alpha) = c\,, \qquad \phi(\beta) = d\,.$$

E'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

e quindi

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ma,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi si ha anche

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

ossia

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{9.6}$$

Si noti che questa formula vale in generale per l'integrale orientato. Anzi, anche se l'integrale a sinistra di (9.6) è un'integrale di Riemann, può ben essere che gli estremi dell'integrale di destra coincidano o anche che sia $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$.

Osservazione 197 Se l'integrale da calcolare è (9.5) allora dovremo identificare un intervallo $[\alpha, \beta]$ ed una trasformazione $\phi(t)$ tale che $\phi(\alpha) = a$ e $\phi(\beta) = b$ (o viceversa) e tale che l'integrale a sinistra in (9.6) sia più facile da calcolare di quello a destra. Non abbiamo richiesto che la funzione $\phi(t)$ sia iniettiva. Se lo è allora la formula (9.6) si può scrivere nella forma

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \quad \blacksquare$$

9.4 Integrale improprio

Si chiama $\boxed{\textit{integrale improprio}}$ quello che si ottiene estendendo l'integrale di Riemann a funzioni dotate di asintoto verticale oppure definite su una semiretta (o ambedue le cose) mediante il calcolo di un limite. Conviene vedere separatamente i due casi seguenti, che verranno poi combinati insieme. Introduciamo un termine: sia $f(x)$ definita su un intervallo (a, b), limitato o meno. Non si richiede che la funzione sia limitata. La funzione $f(x)$ si dice $\boxed{\textit{localmente integrabile}}$ quando è integrabile (nel senso di Riemann e quindi anche limitata) su ogni intervallo $[c, d]$ **limitato e chiuso** contenuto in (a, b).

9.4.1 L'integrale su una semiretta

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita sulla semiretta $[a, +\infty)$ ed integrabile (nel senso di Riemann e quindi limitata) su ogni intervallo $[a, T]$. E'

Tabella 9.1: I casi dell'integrale improprio

Se	**l'integrale improprio si dice**	**si scrive**
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x = l \in \mathbb{R}$	$\boxed{\textit{integrale convergente}}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = l$
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$	$\boxed{\textit{integrale divergente}}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$
$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$ non esiste	$\boxed{\textit{non esiste}}$ $\boxed{\textit{indeterminato}}$ $\boxed{\textit{oscillante}}$	

cosìpossibile definire la funzione

$$F(T) = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

Consideriamo

$$\lim_{T\to+\infty} F(T)\,.$$

Se questo limite esiste, finito o meno, si **definisce**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty} F(T)$$

e si chiama $\boxed{\textit{integrale improprio}}$ (su $(a,+\infty)$) di $f(x)$. Si hanno i casi elencati nella tabella 9.1

9.4.2 L'integrale in presenza di un asintoto verticale

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia definita su $(a,b]$ ed abbia asintoto verticale $x=a$:

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty\,.$$

Supponiamo inoltre che sia localmente integrabile su $(a,b]$. In questo caso, si può definire la funzione

$$F(\epsilon) = \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni $\epsilon \in (a,b]$ e si può studiarne il limite per $\epsilon \to a+$. Se questo limite esiste lo indicheremo col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to a+} \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

e lo chiameremo ancora *integrale improprio* su (a,b). Se il limite è finito diremo che l'integrale improprio *converge;* se è $+\infty$ oppure $-\infty$ diremo che *diverge.* Se il limite non esiste, diremo che l'integrale improprio *non esiste* (equivalentemente, *oscilla* o *è indeterminato*). Ossia, per l'integrale improprio su $(a,b]$ si può fare una tabella analoga alla 9.1.

9.4.3 Casi più generali

I due casi precedenti possono combinarsi tra loro. Per esempio:

- se $f(x)$ è localmente integrabile su $(a,+\infty)$, si possono studiare i due limiti

  $$\lim_{\epsilon\to a} \int_\epsilon^c f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

  con lo stesso c. Usando l'additività dell'integrale, si mostra che se i due limiti esistono finiti o infiniti **di segno concorde** la loro somma non dipende dalla scelta di $c \in (a,+\infty)$ e si scrive

  $$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\lim_{\epsilon\to a} \int_\epsilon^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$

- in modo analogo si procede se la funzione ha più asintoti verticali;
- in modo analogo, se $f(x)$ è localmente integrabile su $\mathbb{R}$, scriveremo

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{S\to-\infty} \int_S^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

(i limiti devono essere finiti o infiniti di segno concorde). E' importante sottolineare che i due limiti, per $S \to -\infty$ e per $T \to +\infty$, **vanno calcolati indipendentemente.** Per esempio, la funzione $f(x) = \arctan x$ non ha integrale improprio su $\mathbb{R}$ perché i due limiti precedenti sono il primo $-\infty$ e il secondo $+\infty$. Però,

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \arctan x \, \mathrm{d}x = 0$$

perché la funzione è dispari e quindi

$$\int_{-T}^{T} \arctan x \, \mathrm{d}x = 0$$

per ogni T.

9.5 Criteri di convergenza per integrali impropri

In pratica, il calcolo di un integrale improprio è difficile e non si riesce a fare esplicitamente. Si danno però dei criteri che assicurano la convergenza o divergenza dell'integrale, che conviene esaminare prima nel caso di funzioni positive.

9.5.1 Criteri di convergenza: funzioni positive su semirette

Per fissare le idee, supponiamo di lavorare su una semiretta verso destra, $[a, +\infty)$ e di avere una funzione **che prende valori maggiori o uguali a zero e che è integrabile su ogni intervallo limitato** $[a, b]$**.** Consideriamo la funzione

$$T \longmapsto \int_{a}^{T} f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Questa è una funzione **crescente** di T perché la $f(x)$ è positiva. Quindi, per il teorema delle funzioni monotone,

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{a}^{T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

esiste, finito o meno. Dunque,

Teorema 198 *Se la funzione $f(x)$ prende valori maggiori o uguali a zero, l'integrale improprio*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx$$

converge oppure diverge. Esso non può essere oscillante.

Quindi, se possiamo dire che esiste M tale che

$$\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x < M$$

per ogni T allora l'integrale converge; se invece la funzione di T è minorata da una funzione divergente a $+\infty$, l'integrale improprio diverge. Quest'osservazione si usa confrontando la funzione $f(x)$ con funzioni di "forma più semplice" il cui integrale si sa calcolare. Infatti:

Teorema 199 (di confronto per gli integrali impropri) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ localmente integrabili su $[a,+\infty)$. Valga inoltre*

$$0 \le f(x) \le g(x)\,.$$

Allora:

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty\,;$$
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty\,.$$

Siamo quindi ridotti a cercare delle funzioni di confronto $g(x)$ abbastanza semplici. Ricordando che gli infinitesimi fondamentali di confronto per $x \to +\infty$ sono le funzioni

$$g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$$

è naturale confrontare con queste funzioni, i cui integrali si calcolano facilmente:

$$\begin{cases} \text{se}\gamma \ne 1 & \int_a^T \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{1}{T^{\gamma-1}} - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right] \\ \text{se}\gamma = 1 & \int_a^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log T - \log a \end{cases}$$

Dunque, si ha la situazione riassunta nella tabella 9.2. Inoltre,

Teorema 200 *la funzione $f(x)$ (non negativa) abbia parte principale $\frac{M}{x^\gamma}$ per $x \to +\infty$. I due integrali impropri di $f(x)$ e di $1/x^\gamma$ hanno lo stesso comportamento.*

Dim. Infatti, l'ipotesi implica che $M \ne 0$ e inoltre

$$f \sim \frac{M}{x^\gamma} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Tabella 9.2: integrali impropri su una semiretta

$0 \le f(x) \le M\frac{1}{x^\gamma}$	$\boxed{\gamma > 1}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$
$f(x) \ge M\frac{1}{x^\gamma}$	$\boxed{\gamma \le 1 \text{ e } M > 0}$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

e quindi in particolare, per x abbastanza grande, vale

$$\frac{1}{2}\frac{M}{x^\gamma} \le f(x) \le 2\frac{M}{x^\gamma}\,. \quad \blacksquare$$

Si noti che la condizione

$$0 \le f(x) < M\frac{1}{x^\gamma}$$

si verifica in particolare se $f(x)$ è (positiva ed) **un infinitesimo** per $x \to +\infty$, di **ordine maggiore** di $1/x^\gamma$. Dunque,

Teorema 201 *Se $f(x) \ge 0$ ed inoltre per $x \to +\infty$ la funzione $f(x)$ è un infinitesimo di ordine* maggiore *di $1/x^{1+\epsilon}$ con $\boxed{\epsilon > 0}$, ossia*

$$f(x) = \ \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{1+\epsilon}}\right) \qquad \textit{per } x \to +\infty \textit{ e con } \epsilon > 0\ ,$$

allora l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

è convergente.

E' importante notare che nell'enunciato precedente la condizione $\epsilon > 0$ è cruciale. La condizione che $f(x)$ sia infinitesima di ordine **maggiore** ad $1/x$, **con esponente esattamente** 1, **non implica la convergenza dell'integrale.** Per esempio,

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} = \ \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ma una primitiva di $1/(x \log x)$ è $\log(\log x)$ e quindi

$$\lim_{T \to +\infty} \int_2^T \frac{1}{x \log x} \, \mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} (\log(\log T) - \log(\log 2)) = +\infty \,.$$

9.5.2 Criteri di convergenza: funzioni positive su intervalli

Consideriamo il caso in cui $f(x) \geq 0$ su $(a, b]$, con asintoto verticale $x = a$. In questo caso, la funzione

$$\epsilon \longmapsto \int_\epsilon^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

è **decrescente** e quindi dotata di limite per $x \to a+$, finito o meno. E quindi si può ancora enunciare il teorema del confronto, come segue:

Teorema 202 (di confronto per gli integrali impropri) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ localmente integrabili su $(a, b]$. Valga inoltre*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \,.$$

Allora:

$$\int_a^b g(x) \, dx < +\infty \Longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx < +\infty \,;$$
$$\int_a^b f(x) \, dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b g(x) \, dx = +\infty \,.$$

Naturalmente, è ancora naturale scegliere come funzione di confronto gli infiniti campione $f(x) = 1/(x - a)^\gamma$. Vale anche in questo caso

Teorema 203 *la funzione $f(x)$ (non negativa) abbia parte principale $\frac{M}{(x-a)^\gamma}$ per $x \to a$. I due integrali impropri di $f(x)$ e di $1/(x - a)^\gamma$ hanno lo stesso comportamento.*

Tabella 9.3: integrali impropri su un intervallo

$0 \leq f(x) \leq M\frac{1}{(x-a)^\gamma}$	$\boxed{\gamma < 1}$	$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$
$f(x) \geq M\frac{1}{(x-a)^\gamma}$	$\boxed{\gamma \geq 1 \text{ e } M > 0}$	$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

Quindi, va capito quando diverge oppure converge l'integrale improprio di $\frac{1}{(x-a)^\gamma}$. E' ancora vero che l'integrale improprio è divergente se $\gamma = 1$, però **ora le due condizioni $\gamma > 1$ e $\gamma < 1$ hanno ruolo scambiato:**

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\gamma}\,\mathrm{d}x < +\infty & \text{se} \quad \gamma < 1\,, \\ \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\gamma}\,\mathrm{d}x = +\infty & \text{se} \quad \gamma \geq 1\,. \end{cases}$$

Quindi, si può ancora dare una tavola analoga alla 9.2, **ma con versi delle disuguaglianze scambiate.** Si veda la tabella 9.3 (dove $c > a$ e si intende che $f(x)$ è integrabile nel senso di Riemann su $[a+\epsilon, c]$ per ogni $\epsilon > 0$). Si noti che la condizione

$$0 \leq f(x) < M\frac{1}{x^\gamma}$$

si verifica in particolare se $f(x)$ è (positiva ed) **un infinito** per $x \to +\infty$, di **ordine inferiore** ad $1/(x-a)^\gamma$. Dunque,

Teorema 204 *Se $f(x) \geq 0$ ed inoltre per $x \to a^+$ la funzione $f(x)$ è un infinito di ordine* inferiore *ad $1/(x-a)^{1-\epsilon}$ con $\boxed{\epsilon > 0}$, ossia*

$$f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(x-a)^{1-\epsilon}}\right) \quad \textit{per } x \to a^+ \textit{ e con } \epsilon > 0\ ,$$

allora l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è convergente.

Ripetiamo ancora che se $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore esattamente ad 1 (ossia se nell'enunciato precedente si ha $\epsilon = 0$) niente può affermarsi dell'integrale improprio di $f(x)$.

9.5.3 Il caso delle funzioni che cambiano segno

Ricordiamo le notazioni

$$f_+(x) = \max\{f(x)\,, 0\}\,, \qquad f_-(x) = \min\{f(x)\, 0\}$$

cosìche

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f(x) - f_-(x)\,.$$

Dunque, se $|f(x)|$ ha integrale improprio convergente, anche le due funzioni $f_+(x)$ e $-f_-(x)$ hanno integrale improprio convergente. E quindi la loro somma $f(x)$ ha integrale improprio convergente. Si può quindi enunciare

Teorema 205 *Una funzione localmente integrabile il cui valore assoluto ha integrale improprio convergente, ha essa stessa integrale improprio convergente.*

E si noti che quest'asserto vale sia su semirette che su intervalli. In sostanza, questo è l'unico criterio (ovviamente solo sufficiente) di cui disponiamo per provare che una funzione di segno variabile ha integrale improprio convergente: si prova che è $\boxed{\textit{assolutamente integrabile}}$ (ossia che il suo valore assoluto è integrabile) usando i criteri noti per le funzioni di segno costante. Se ne deduce che l'integrale improprio della funzione converge.

9.6 Alcuni esercizi

1. Si traccino i grafici delle funzioni

   $$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\,, g(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2x)\,, \quad h(x) = \operatorname{sgn}(\sin 4x)$$

   e si calcolino gli integrali su $[0, \pi]$ dei loro prodotti.

2. Sia $f(x)$ integrabile su $(-a, a)$ e dispari. Si mostri che $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

3. Trovare una funzione pari e non nulla, tale che $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, con $a > 0$.

4. **($\star$)** Se esiste, si trovi un esempio di funzione integrabile $f(x) \geq 0$, definita su $[0, 1]$, con $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Può essere che $f(x)$ sia continua? (Si ricordi il teorema di permanenza del segno).

5. Sia $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$, con $xf(x) > 0$ per $x \neq 0$. Mostrare che $f(x^2)$ ha integrale strettamente positivo su qualsiasi intervallo.

6. Sia $f(x)$ dispari e continua su $\mathbb{R}$. Mostrare che $\int_{-1}^{1} f(x^3)\,dx = 0$.

7. Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e non negativa. Si mostri che
$$a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \le b\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
E se $f(x)$ è negativa?

8. ($\star$) Si provi che se $f(x)$ è positiva su $\mathbb{R}$ e localmente integrabile e $g(x)$ crescente, allora
$$H(x) = \int_0^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s$$
è crescente. Esaminare cosa può dirsi se $g(x)$ è decrescente, e cosa può dirsi di
$$K(x) = \int_{g(x)}^0 f(s)\,\mathrm{d}s$$

9. I due problemi seguenti sono formulazioni diverse dello stesso fatto:

   - sia $f(x) \in C^1(0,+\infty)$. Calcolare
   $$\int_a^b f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   - sia $f(x)$ continua per $t \ge 0$. Mostrare che per ogni $t > 0$ si ha
   $$\int_0^t f(s)\left(\int_0^s f(r)\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}s \ge 0$$
   (è possibile che, con $f(x)$ non nulla, valga l'uguaglianza per un opportuno $t > 0$? E per ogni $t > 0$?) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Mostrare che la disuguaglianza precedente vale anche se $t < 0$ intendendo l'integrale come integrale orientato.

10. ($\star$) Sia $f(x)$ monotona crescente su $\mathbb{R}$. Mostrare che esiste il limite
$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$
Il limite può essere nullo?

11. La funzione $f(x)$ sia positiva, con integrale improprio convergente su $[0,+\infty)$. Si chiede di sapere se può essere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$.

12. ($\star$) La funzione $f(x)$ sia positiva, con integrale improprio convergente su $[0,+\infty)$. Si chiede di sapere se deve essere $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

13. ($\star$) Sia
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad n-(1/2^n)<x<n \\ 0 & \qquad \text{altrimenti.}\end{cases}$$
Si disegni il grafico di $f(x)$ e (usando la formula (1.6)) si calcoli
$$\int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

14. ($\star$) Si dica se esiste una funzione continua e positiva, con integrale improprio finito su $[0,+\infty)$, ma priva di limite per $x\to+\infty$.

15. Sia
$$\int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = L$$
(L finito o meno). Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^3(3+\sin x)} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

16. Sia $f(x)$ una funzione per la quale converge l'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Mostrare che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\,\mathrm{d}x$$
per ogni $a\in\mathbb{R}$. Cosa può dirsi se l'integrale improprio diverge oppure oscilla?

17. Si mostri che $\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$. Spiegare come si trasforma questa formula se l'integrale è sull'intervallo $[a,t]$ con $a\neq 0$ (incluso il caso $a=-\infty$, supponendo la convergenza degli integrali impropri).

18. ($\star$) Si considerino le funzioni definite all'esercizio 26 del Cap. 2, ossia le funzioni definite su $[0,1]$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ n & \text{se} \quad 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{se} \quad 2/n \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Si calcoli $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ e si consideri la successione di numeri $\left\{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$. Se ne calcoli il limite e si rifletta sulla relazione, o mancanza di relazione, che intercorre tra questa successione e il limite di $\{f_n(x)\}$, per ogni $x \in [0,1]$, calcolato all'esercizio 26 del Cap. 2.

19. ($\star$) Una sbarretta di densità variabile è distesa sull'intervallo $[a,b]$ dell'asse x. Sia $\rho(x)$ la densità del punto di ascissa x. In Fisica, si definiscono $\boxed{\textit{massa}}$ e $\boxed{\textit{centro di massa}}$ della sbarra i due numeri seguenti:

$$M = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad x_0 = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si provi che se $\rho(x) = f''(x)$ vale

$$x_0 = \frac{bf'(b) - af'(a) - (\,f(b) - f(a)\,)}{f'(b) - f'(a)}\,.$$

20. Sia $f \in C(a,b)$ e sia

$$S(x) = \frac{\int_a^x xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x}\,, \qquad \forall x \in (a,b)\,.$$

Usando la formula di L'Hospital si provi che

$$\lim_{x\to a} S(x) = a\,;$$

ossia: *il centro di massa di un segmento* $[a,x]$ *tende ad* a *quando la lunghezza del segmento tende a* 0.

Appendice A

Glossario

- $\boxed{\textit{Limitazione superiore}}$ di un insieme significa "maggiorante"; per dire "minorante" si dice anche $\boxed{\textit{limitazione inferiore}}$

- Le notazioni seguenti si equivalgono:

$$\sup\{x\,, x \in A\}\,, \quad \sup_{x\in A}\{x\}\,.$$

  Analogamente, si equivalgono

$$\max\{x\,, x \in A\}\,, \quad \max_{x\in A}\{x\}\,.$$

  In particolare si potrà scrivere:

$$\sup\{f(x)\,, x \in A\}\,, \quad \sup_{x\in A}\{f(x)\}\,; \qquad \max\{f(x)\,, x \in A\}\,, \quad \max_{x\in A}\{f(x)\}\,.$$

- La notazione (x_n) indica la successione $n \to x_n$. Il simbolo $\{x_n\}$ può indicare sia la successione $n \to x_n$ che l'insieme degli elementi x_n, ossia l'immagine della successione. Talvolta una successione si indica col simbolo x_n, senza parentesi, cosìcome si scrive f per indicare la funzione $x \mapsto f(x)$.

- Abbiamo notato che le definizioni di limite si formulano in modo unificato se si usa il linguaggio degli intorni. Però noi abbiamo preferito specificare[1] "$x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$". Si

[1] noi abbiamo preferito usare x_0 solo nel caso in cui x_0 è un numero, usando lettere greche altrimenti, ma ovviamente ciò è stato fatto solo per fissare le idee.

può abbreviare questa frase introducendo la notazione $\overline{\mathbb{R}}$, ove $\overline{\mathbb{R}}$ indica l'unione di $\mathbb{R}$ e dei due simboli $+\infty$ e $-\infty$. In questo modo, la frase tra virgolette viene compendiata dalla scrittura $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Invece di $\overline{\mathbb{R}}$ si usa anche il simbolo $\mathbb{R}^*$.

- $\boxed{\textit{Successione indeterminata}}$ o $\boxed{\textit{successione oscillante}}$ è una successione priva di limite (per $n \to +\infty$). *Si noti che invece* $\boxed{\text{soluzione oscillante}}$ *di un'equazione differenziale indica una soluzione con infiniti cambiamenti di segno, anche se dotata di limite, come per esempio* $e^{-x} \sin x$.

- $\boxed{\textit{Funzione indeterminata}}$ (per $x \to \alpha$) si usa per dire che $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ non esiste.

- Il punto x_0 si dice

  - $\boxed{\textit{punto estremale}}$,
  - $\boxed{\textit{punto critico}}$,
  - $\boxed{\textit{punto singolare}}$,
  - $\boxed{\textit{punto stazionario}}$,
  - $\boxed{\textit{punto di stazionarietà}}$

  per una funzione $f(x)$ se è un punto interno al dominio di $f(x)$, la $f(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $f'(x_0) = 0$. I punti di massimo e di minimo (locali o globali) di $f(x)$ si chiamano anche "estremi globali" o "estremi locali" della funzione. Fare ben attenzione a non confonderli con gli estremi dell'immagine della funzione!

- Si equivalgono i termini $\boxed{\textit{integrale definito}}$ ed $\boxed{\textit{integrale di Riemann}}$.

- Sia (a, b) un intervallo, limitato o meno. Una funzione si dice $\boxed{\textit{localmente integrabile}}$ su (a, b) quando è integrabile (nel senso dell'integrazione di Riemann) su ogni intervallo limitato e chiuso $[c, d]$ contenuto in (a, b).

- Un integrale improprio si dice $\boxed{\textit{indeterminato}}$ quando non esiste il limite mediante il quale esso è definito; ossia, se per esempio l'integrale improprio da considerare è $\lim_{T\to+\infty} \int_a^T$, quest'integrale è indeterminato quando il limite non esiste.

- Per indicare l'insieme delle primitive, invece di

  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

  si può anche scrivere

  $$\int f\,.$$

  Per indicare l'integrale definito, invece di

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  si può anche scrivere

  $$\int_a^b f\,.$$

  Simboli analoghi possono usarsi anche per gli integrali impropri.

Indice analitico